COMPENDIUM KÄNGURU

Austria 2013 - 2023

Gerard Romo Garrido

TooMates Cooleccion

Toomates Coolección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría (vol.1) , Problemas de Geometría (vol.2)
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Compendium ACM4 , Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions
Nombres Complexos , Mates amb Excel . Àlgebra Lineal 2n batx. , Geometria Lineal 2n batx.
Càlcul Infinitesimal 2n batx. , Programació Lineal 2n batx.

Toomates Coolección **Compendiums**:
Ámbito PAU: Catalunya TEC , Catalunya CCSS , Galicia , País Vasco , Portugal A , Portugal B
Ámbito Canguro: ESP , CAT , FR , USA , UK , AUS
Ámbito Preolímpico: AMC 8 AMC 10 AMC 12 AIME Archimede HMMT Mathcounts CDP
Ámbito Olímpico español: OME , OMEFL , OMEC , OMEA , OMEM
Ámbito Olímpico Internacional: IGO , IMO , OMI , SMT , USAMO , INMO , CMO , REOIM
Recopilatorios Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
Recopilatorios AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos documentos se mejoran constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Descarga en **www.toomates.net/biblioteca/Syllabus.pdf** una guía del usuario para la utilización de los materiales de Toomates Coolección.

Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**

Visita el **Canal Youtube** de Toomates: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **16/05/2023**

Índice

Tabla de correspondencia de las pruebas Canguro.

	ESPAÑA			UK (England & Wales)		USA		FRANCIA	
EDAD	CURSO	CANGURO	CANGUR (Catalunya)	YEAR	KANGAROO	Grado USA	KANGAROO	Curso	KANGOUROU
6/7	1º Prim.			2		1th			
7/8	2º Prim.			3		2nd	Felix		
8/9	3º Prim.			4		3th		CE2	
9/10	4º Prim.			5		4th	Ecolier	CM1	
10/11	5º Prim.		P5	6		5th		CM2	**E** Écoliers
11/12	6º Prim.		P6	7		6th	Benjamin	6ème	
12/13	1º ESO	N1	E1	8		7th		5ème	**B** Benjamins
13/14	2º ESO	N2	E2	9	Grey	8th	Cadet	4ème	
14/15	3º ESO	N3	E3	10		9th		3ème	**C** Cadets
15/16	4º ESO	N4	E4	11	Pink	10th	Junior	2ème	**J**uniors: Lycées G. et T. **É**tudiants: TS, Bac+
16/17	1º BAT	N5	B1	12		11th		1ème	
17/18	2º BAT	N6	B2	13		12th	Student	T	

Este documento forma parte de los recopilatorios siguientes:

Compendium Canguro (España)
http://www.toomates.net/biblioteca/Canguro.pdf

Compendium Cangur (Cataluña)
http://www.toomates.net/biblioteca/Cangur.pdf

Compendium Kangourou (Francia)
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumKangourou.pdf

Compendium Kangaroo (USA)
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumKangaroo.pdf

Compendium Kangaroo (UK)
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumKangarooUK.pdf

Compendium Känguru (Austria)
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumKanguru.pdf

Este documento es la compilación en un único archivo "pdf" de todos los documentos oficiales que se encuentran en la web

https://www.kaenguru.at/
https://www.kaenguru.at/aufgaben.html

agrupados mediante la aplicación online

www.ilovepdf.com

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2013
21.3.2013

Kategorie: Felix, Schulstufe: 1-2

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6.-10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

11	12	13	14	15

Stadtgemeinde Pressbaum

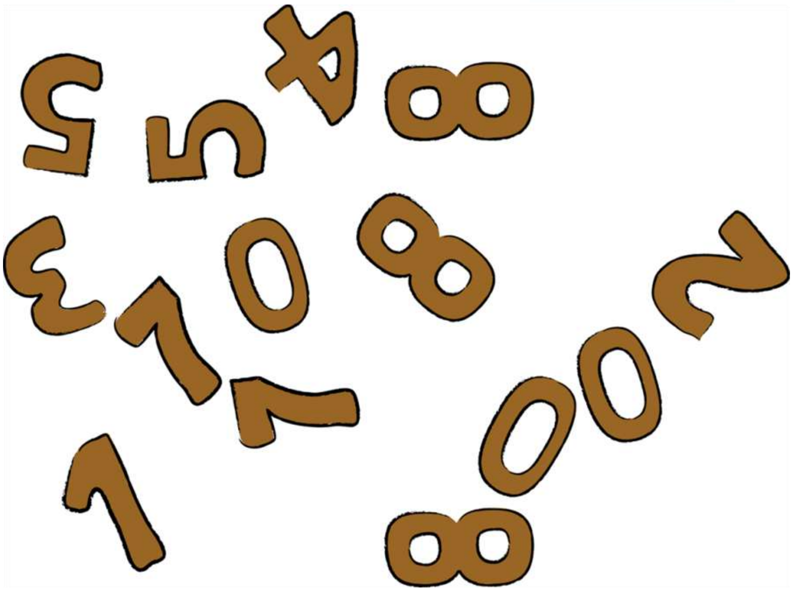
pwc

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Felix (1./2. Schulstufe)
Österreich - 21. 3. 2013

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welche Zahlen fehlen?

(A) 3 und 5
(B) 4 und 8
(C) 2 und 0
(D) 6 und 9
(E) 7 und 1



2. Auf dem Bücherregal befinden sich 12 Bücher. Jedes der vier Kinder nimmt sich ein Buch. Wie viele Bücher bleiben danach noch auf dem Regal?

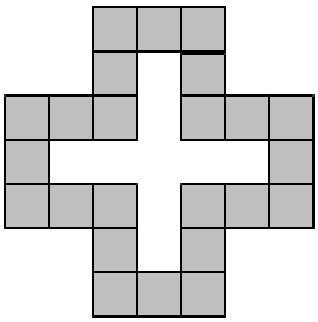
(A) 12 (B) 8 (C) 4 (D) 2 (E) 0

3. Welches der Kleider hat mehr als 5, aber weniger als 7 Punkte?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Wie viele graue Quadrate benötigt man, um die Figur vollständig auszufüllen?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9



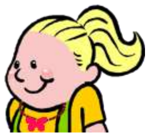
5. Welches Stück wurde aus der Lebkuchenfigur herausgeschnitten?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

6. Ann hat . Barbara gab Eva . Josef hat einen .

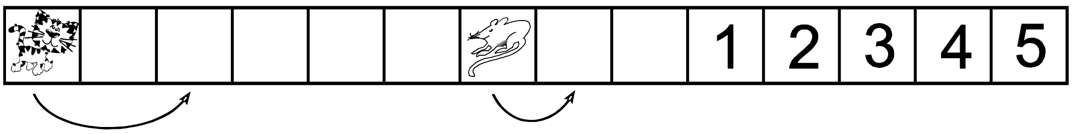
Bob hat . Wer ist Barbara?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Der Vater gibt jedem seiner drei Kinder 5 Äpfel. Anna gibt 3 Äpfel ihrer Schwester Sophie, danach gibt Sophie die Hälfte ihrer Äpfel ihrem Bruder Michael. Wie viele Äpfel hat nun Michael?

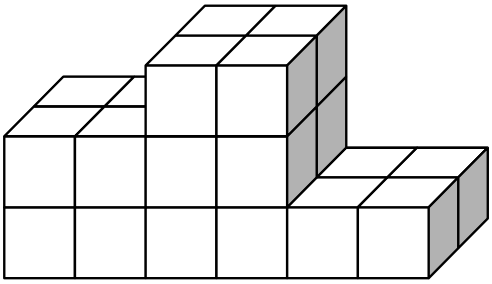
(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 9

8. Die Katze und die Maus laufen gleichzeitig los und bewegen sich nach rechts. Wenn die Maus genau ein Feld weiterspringt, springt die Katze zwei Felder weiter. Auf welchem Feld fängt die Katze die Maus?



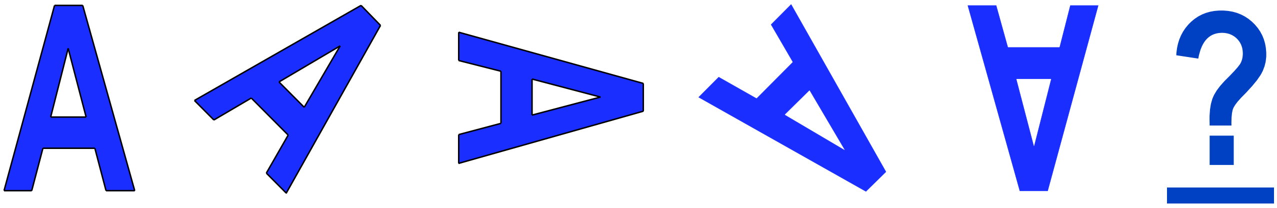
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

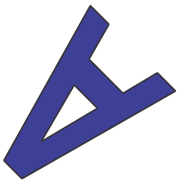
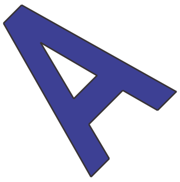
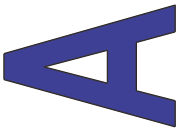
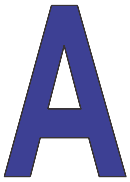
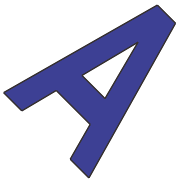
9. Mit wie vielen gleich großen Würfeln baute Peter dieses Bauwerk?



(A) 12 (B) 18 (C) 19
(D) 22 (E) 24

10. Welches A folgt ?



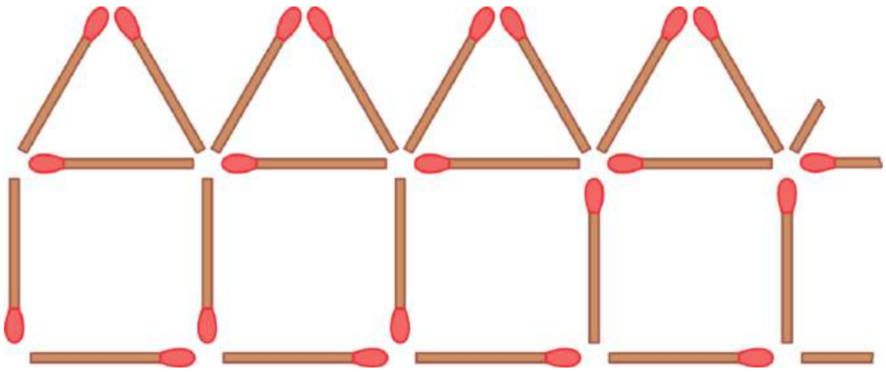
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 5 Punkte Beispiele -

11. Kathi hat 3 Brüder und 3 Schwestern. Wie viele Brüder und Schwestern hat ihr Bruder Markus?

(A) 3 Brüder und 3 Schwestern (B) 3 Brüder und 4 Schwestern
(C) 2 Brüder und 3 Schwestern (D) 3 Brüder und 2 Schwestern
(E) 2 Brüder und 4 Schwestern

12. Sophie legt mit Hilfe von Zündhölzern eine Häuserreihe aus 10 Häusern. Wie viele Zündhölzer benötigt sie dafür?



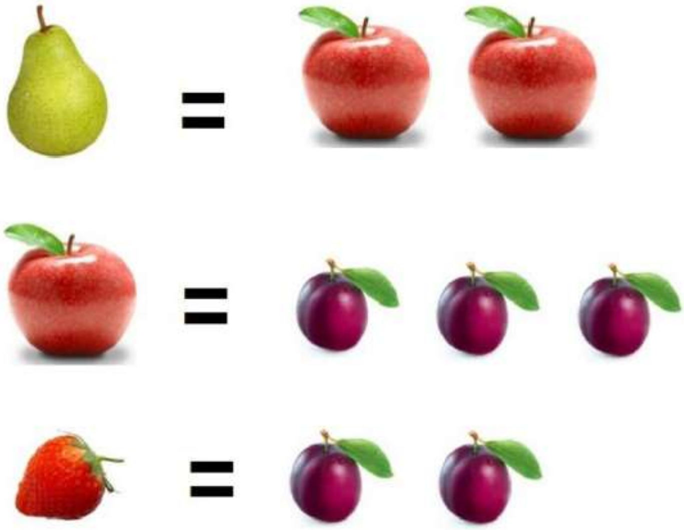
(A) 50 (B) 51 (C) 55 (D) 60 (E) 62

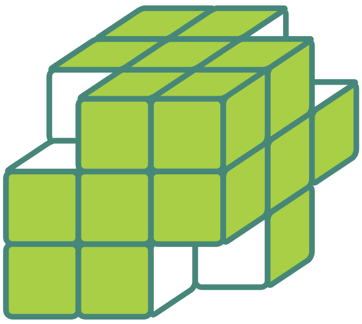
13. Familie Smith hat 5 Kinder. Kitty ist um 2 Jahre älter als Betty, aber um 2 Jahre jünger als Dannie. Teddy ist um 3 Jahre älter als Annie. Betty und Annie sind Zwillinge. Welches Kind ist das älteste?

(A) Annie (B) Betty (C) Dannie (D) Kitty (E) Teddy

14. Eine Birne kann gegen zwei Äpfel, ein Apfel gegen drei Pflaumen und eine Erdbeere gegen zwei Pflaumen eingetauscht werden. Adam möchte seine 6 Birnen gegen Erdbeeren eintauschen. Wie viele erhält er?

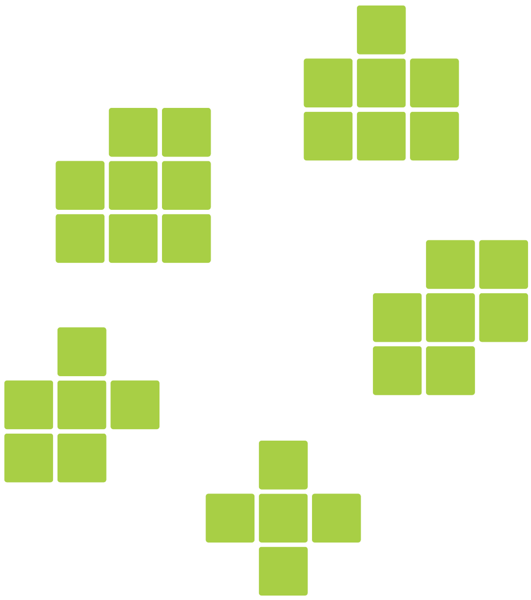
(A) 12 (B) 36 (C) 18 (D) 24 (E) 6





15. Julia entfernt von einem großen Würfel vier Eckwürfel. Mit den verbleibenden Flächen macht sie Abdrücke auf Papier. Wie viele von den gezeichneten Abdrücken kann sie damit machen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2013
21.3.2013

Kategorie: Écolier, Schulstufe: 3-4

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9.-16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17.-24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Stadtgemeinde Pressbaum

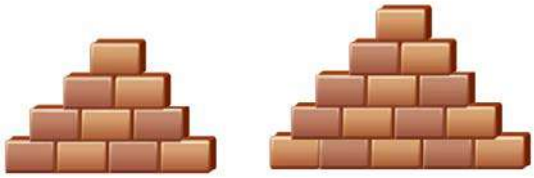
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

pwc

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Écolier (3./4. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

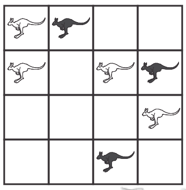
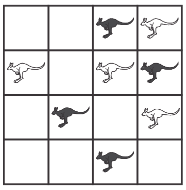
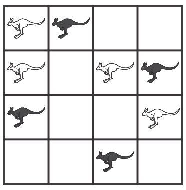
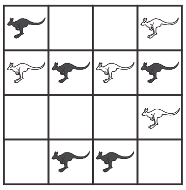
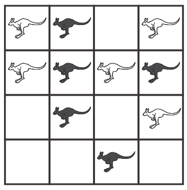
- 3 Punkte Beispiele -

1. Wie viele Steine hat der rechte Stapel mehr als der linke?



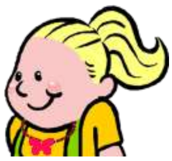
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 10

2. In welchem Bild gibt es mehr schwarze als weiße Kängurus?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. Anna hat . Barbara gab Eva . Josef hat einen .

Bob hat . Wer ist Barbara?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Elisa schreibt eine Rechnung auf. Unter beiden schwarzen Quadraten versteckt sich die gleiche Ziffer. Welche?

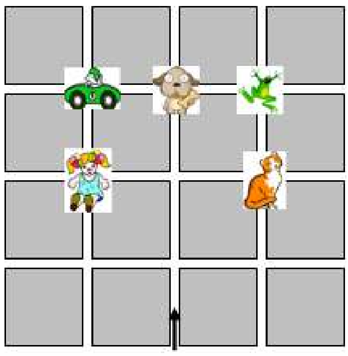
$$5\blacksquare + 5\blacksquare = 104$$

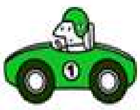
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8

5. Fünf Kinder sprechen über die Zahl 325. Andreas: "Es ist eine dreistellige Zahl.";
Boris: "Alle Ziffern sind verschieden." Sara: "Die Ziffernsumme ist 10."
Gerda: "Die Einerziffer ist 5." Daniela: "Alle Ziffern sind ungerade."
Wer hat sich geirrt?

(A) Andreas (B) Boris (C) Sara (D) Gerda (E) Daniela

6. Anna geht in Pfeilrichtung los. An jeder Kreuzung biegt sie entweder nach rechts oder nach links ab. An der ersten Kreuzung biegt sie nach rechts ab, dann nach links, dann wieder nach links, dann nach rechts, dann wieder nach links und dann wieder nach links. Was befindet sich an der nächsten Kreuzung, auf die sie schließlich zugeht?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Natalie wollte aus mehreren kleinen Würfeln einen großen Würfel bauen, wie im Bild 1. Wie viele kleine Würfel fehlen ihr im Bild 2 noch, um diesen großen Würfel zu bauen?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

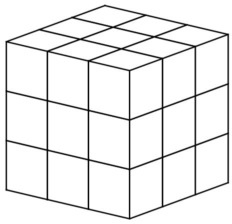


Bild 1

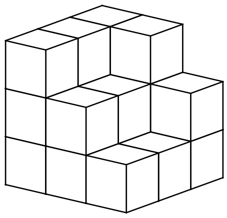
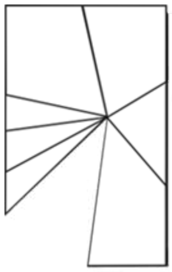
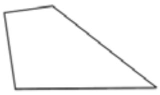
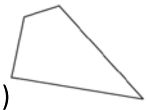
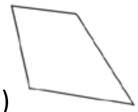


Bild 2

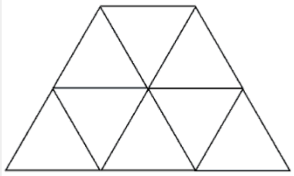
8. Der rechteckige Spiegel ist zerbrochen. Welches Stück fehlt?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

9. Wie viele Dreiecke sieht man im Bild rechts? (Vorsicht! Ein Dreieck kann auch aus mehreren kleinen Dreiecken zusammengesetzt sein.)
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 13 (E) 12

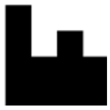


10. Veras Mama hat Jausenbrote mit je zwei Scheiben Brot zubereitet. In einer Packung befinden sich 24 Scheiben. Wie viele Jausenbrote kann sie mit zwei ganzen und einer halben Packung Brot zubereiten?
(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 30 (E) 48

11. Daniel hat 36 Zuckerln. Er verteilt sie alle gleichmäßig unter seinen Schwestern. Wie viele Schwestern kann er auf keinen Fall haben?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. Pinocchios Nase ist 9 cm lang. Wenn er lügt, verlängert sich seine Nase um 6 cm. Wenn er die Wahrheit sagt, wird sie um 2 cm kürzer. Er sagt dreimal die Unwahrheit und zweimal die Wahrheit. Wie lang ist Pinocchios Nase dann?
(A) 14 cm (B) 15 cm (C) 19 cm (D) 23 cm (E) 31 cm

13. Welchen der folgenden Spielsteine kann man mit dem abgebildeten so zusammenfügen, dass sich genau ein Rechteck ergibt?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. In einem Geschäft kann man Orangen in Verpackungen zu je 4 Orangen und zu je 10 Orangen kaufen. Pedro möchte genau 48 Orangen kaufen. Wie viele Packungen muss er mindestens kaufen?
(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

15. Bei den Olympischen Spielen in London 2012 gewannen die USA die meisten Medaillen: 46 Gold-, 29 Silber- und 29 Bronzemedaillen. China war Zweiter mit 38 Gold-, 27 Silber- und 23 Bronzemedaillen. Wie viele Medaillen hat die USA mehr als China gewonnen?
(A) 6 (B) 14 (C) 16 (D) 24 (E) 26

16. 30 Kinder nahmen aktiv an einem sportlichen Wettkampf in den Disziplinen Fußball und Handball teil. 15 von ihnen traten beim Fußballbewerb und 20 beim Handballbewerb an. Wie viele Kinder haben an beiden Bewerben teilgenommen?
(A) 25 (B) 15 (C) 30 (D) 10 (E) 5

- 5 Punkte Beispiele -

17. Die Zahl 35 hat die Eigenschaft, dass sie durch ihre Einerziffer teilbar ist, weil 35 dividiert durch 5 genau 7 ergibt. Die Zahl 38 hat diese Eigenschaft nicht. Wie viele Zahlen, die größer als 21 aber kleiner als 30 sind, haben diese Eigenschaft?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

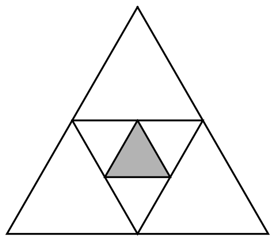
18. Im Februar 2013 schlief der Kater Schnurrli insgesamt genau drei Wochen lang. Wie viele Stunden war er in diesem Monat wach?

(A) 168 (B) 192 (C) 216 (D) 240 (E) 504

19. Andi, Betti, Clara und Dani wurden im selben Jahr geboren. Ihre Geburtstage sind am 20. Februar, am 12. April, am 12. Mai und am 25. Mai, aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Betti und Andi sind im selben Monat geboren. Andi und Clara wurden am selben Tag in verschiedenen Monaten geboren. Wer ist am ältesten?

(A) Andi (B) Betti (C) Clara (D) Dani

(E) Man kann es aus diesen Informationen nicht eindeutig bestimmen.



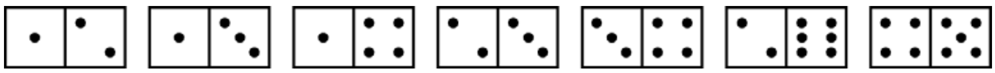
20. Wenn ich die Mittelpunkte der Seiten vom größten Dreieck im Bild verbinde, entsteht ein kleineres Dreieck. Verbinde ich in diesem kleinen Dreieck wieder die Mittelpunkte der Seiten, entsteht ein ganz kleines Dreieck. Wie viele von diesen ganz kleinen Dreiecken passen gleichzeitig in das größte Dreieck?

(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 16 (E) 32

21. Chrissi möchte 10 Glaskugeln verkaufen, die aber verschieden schwer sind. Ihre Gewichte sind: 1 dag, 2 dag, 3 dag, 4 dag, 5 dag, 6 dag, 7 dag, 8 dag, 9 dag und 10 dag. Sie sollen in Netzen mit je zwei Kugeln verpackt werden. Alle Netze sollen gleich schwer sein. Welche zwei Kugeln kommen ins selbe Netz?

(A) 3 und 6 (B) 3 und 7 (C) 3 und 8 (D) 3 und 9 (E) 3 und 10

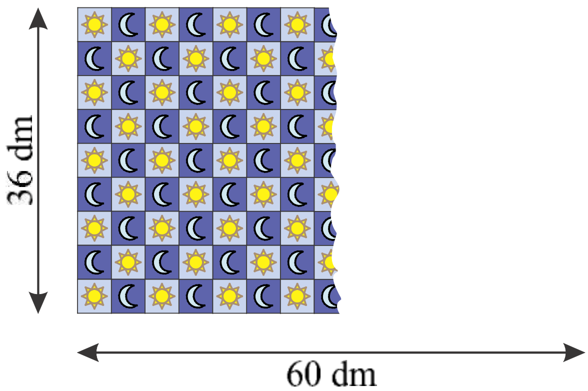
22. Boris hat einige Dominos, wie im Bild zu sehen. Er möchte sie nach Dominoregeln in einer Reihe auflegen, also so, dass zwei Dominos nur dann zusammengelegt werden können, wenn die anliegenden Quadratfelder gleich viele Punkte haben. Wie viele dieser Dominos kann er höchstens auf diese Art zusammenlegen?

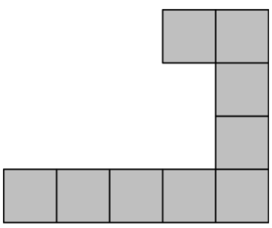


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

23. Peter hat einen Teppich gekauft, der 36 dm breit und 60 dm lang ist. Auf dem Teppich befinden sich, wie man im Bild sieht, Quadrate mit entweder einer Sonne oder einem Mond. Wie man sieht, gibt es in der Breite genau 9 Quadrate. Die ganze Länge des Teppichs ist nicht auf dem Bild zu sehen. Wie viele Monde würde man auf dem Teppich sehen, wenn man alles sehen könnte?

(A) 68 (B) 67 (C) 65 (D) 63 (E) 60





24. Beatrice hat einige graue Spielfiguren, die alle genau so wie im Bild aussehen. Wie viele Spielfiguren braucht sie mindestens um ein vollständiges graues Quadrat damit zu legen?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

MATHEMATICS KANGAROO 2013
Austria - 21.3.2013

Group: Écolier, Grades: 3-4

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 60 min.
Each correct answer, questions 1.-8.: 3 Points
Each correct answer, questions 9.-16.: 4 Points
Each correct answer, questions 17.-24.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 24 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the questions number (1 to 24)
Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

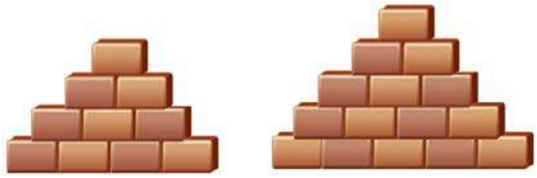
9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2013
Group Écolier (Grade 3./4.)
Austria - 21.3.2013

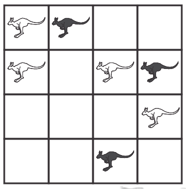
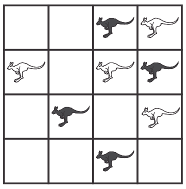
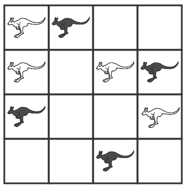
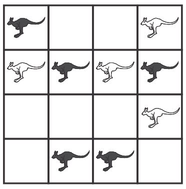
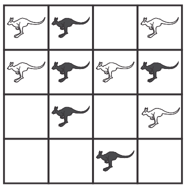
- 3 Point Questions -



1. How many more bricks does the right hand pyramid have than the left hand pyramid?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 10

2. In which picture are there more black Kangaroos than white ones?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. Anna has . Barbara gave Eva  Josef has a 

Bob has . Who is Barbara?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

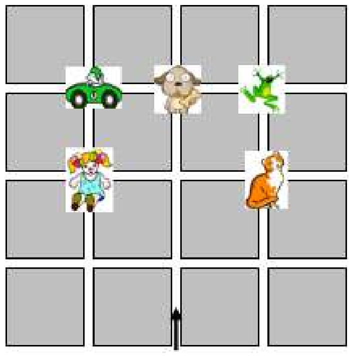
4. Elisa wrote down a sum. The same digit is hidden below each black square. Which?

$$5\blacksquare + 5\blacksquare = 104$$

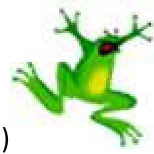
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8

5. Five children are talking about the number 325. Andreas: "It is a three digit number.";
Boris: "all the digits are different." Sara: "The digit sum is 10."
Gerda: "The units digit is 5." Daniela: "All the digits are odd."
Who has made a mistake?

(A) Andreas (B) Boris (C) Sara (D) Gerda (E) Daniela

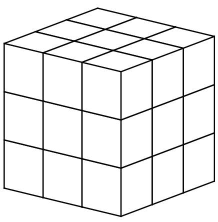


6. Anna starts in the direction of the arrow. At each crossing she turns either right or left. At the first crossing she turns right, at the next left, then left again, then right, then left and left again. What will she find at the next crossing that she comes to?

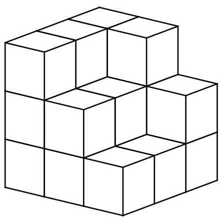
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Nathalie wanted to build a large cube out of lots of small cubes, just like in picture 1. How many cubes are missing from picture 2 that would be needed to build the large cube?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

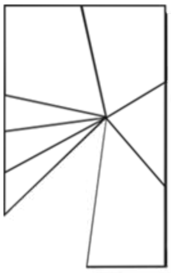


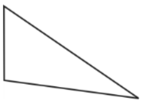
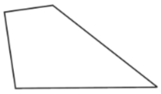
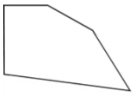
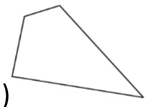
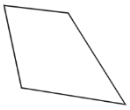
Picture 1



Picture 2

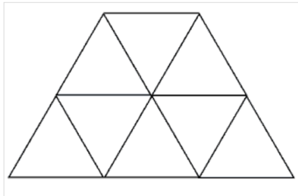
8. The rectangular mirror has broken. Which piece is missing?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Point Questions -

9. How many triangles can be seen in the picture on the right? (Be careful! A triangle can be also be made by joining several smaller triangles together.)



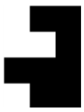
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 13 (E) 12

10. Veras Mum has made sandwiches, each using two slices of bread. There are 24 slices in a pack. How many sandwiches can she make with two whole and one half packets of bread?
(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) 30 (E) 48

11. Daniel had 36 sweets. He shared them equally between his siblings. How many siblings can he definitely not have?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. Pinocchios nose is 9cm long. If he lies his nose grows by 6cm. If he tells the truth it shortens by 2cm. He tells three untruths and twice the truth. How long is Pinocchios nose now?
(A) 14 cm (B) 15 cm (C) 19 cm (D) 23 cm (E) 31 cm

13. Which of the following pieces can be joined to the one pictured so that a rectangle is formed?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. In a shop you can buy oranges in bags of 4 or bags of 10. Pedro wants to buy exactly 48 oranges. What is the smallest number of bags he must buy?
(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

15. At the London 2012 Olympic games the USA won the most medals:
46 Gold-, 29 Silver- and 29 Bronze medals. China was second with 38 Gold-, 27 Silver- and 23 Bronze medals. How many more medals did the USA win than China?
(A) 6 (B) 14 (C) 16 (D) 24 (E) 26

16. 30 children took part in a sports competition, in the sports football and handball. 15 took part in football and 20 took part in handball. How many students took part in both sports?

(A) 25 (B) 15 (C) 30 (D) 10 (E) 5

- 5 Point Questions -

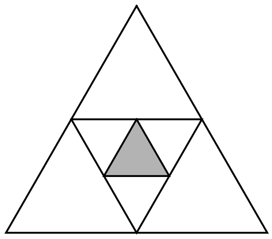
17. The number 35 has the property that it can be divided by its unit digit, because 35 divided by 5 is exactly 7. The number 38 does not have this property. How many numbers bigger than 21, but smaller than 30 have this property?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. In February 2013 Schnurrli the tomcat slept for exactly three weeks. For how many hours in this month was he awake?
(A) 168 (B) 192 (C) 216 (D) 240 (E) 504

19. Andi, Betti, Clara and Dani were born in the same year. Their birthdays are on the 20th February, 12th April, 12th May and 25th May, but not necessarily in that order. Betti and Andi were born in the same month. Andi and Clara were born on the same day in different months. Who is the oldest?

(A) Andi (B) Betti (C) Clara (D) Dani
(E) There is not enough information to answer the question.

20. If I join the midpoints of the sides of the large triangle in the picture, a small triangle is formed. If I join the midpoints of the sides of this small triangle, a tiny triangle is formed. How many of these tiny triangles can fit into the largest triangle at the same time?

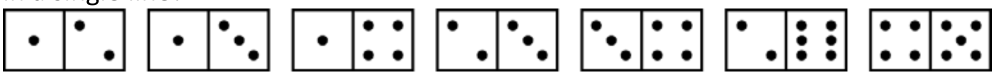


(A) 5 (B) 8 (C) 10 (D) 16 (E) 32

21. Chrissi wants to sell 10 glass marbles which each have a different weight. Their weights are: 1 dag, 2 dag, 3 dag, 4 dag, 5 dag, 6 dag, 7 dag, 8 dag, 9 dag and 10 dag. They should be packed into bags two at a time, so that each bag has the same weight. Which two marbles will be put into the same bag?

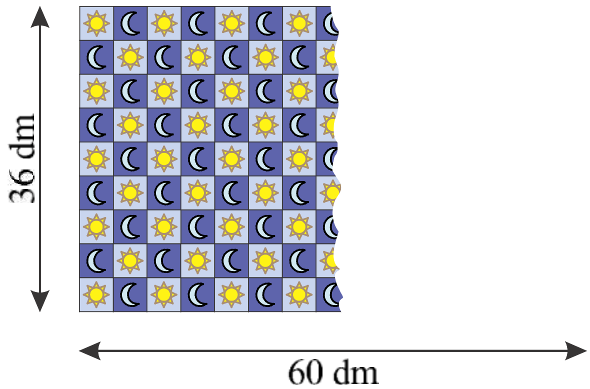
(A) 3 and 6 (B) 3 and 7 (C) 3 and 8 (D) 3 and 9 (E) 3 and 10

22. Baris has a few dominoes as shown in the picture. He wants to lay them in a line according to the rules of dominoes, that is that two dominoes can only be laid together if the neighbouring squares have the same number of dots in them. What is the biggest number of these dominoes that he can lay in a single line?

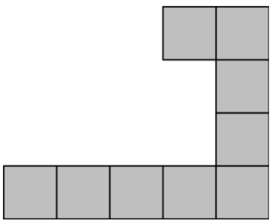


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

23. Peter has bought a rug that is 36 dm wide and 60 dm long. On the rug you can see squares that contain either a sun or a moon, as shown in the picture. As you can see there are exactly nine squares along the width of the rug. The total length of the rug cannot be seen. How many moons would you see, if you could see the entire rug?



(A) 68 (B) 67 (C) 65 (D) 63 (E) 60



24. Beatrice has a few grey tiles that all look exactly like the one pictured. At least how many of these tiles does she need in order to make a complete square? (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2013
21.3.2013

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5-6

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.

jede richtige Antwort Beispiel 1.-8.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9.-16.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17.-24.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte

jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

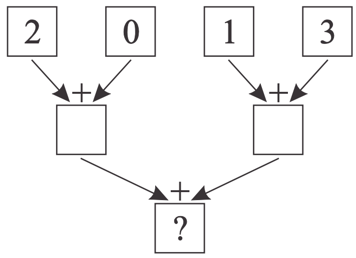
Stadtgemeinde Pressbaum

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

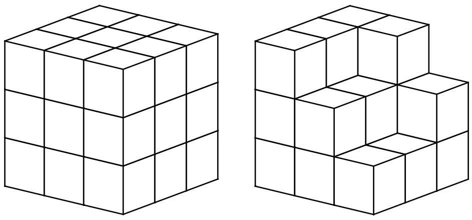
pwc

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Benjamin (5./6. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

- 3 Punkte Beispiele -

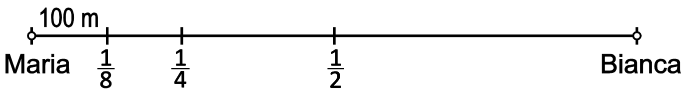


1. Welches Ergebnis liefert der Rechenbaum?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



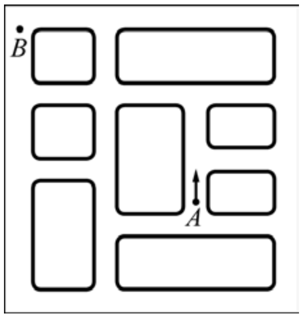
2. Natalie wollte aus mehreren kleinen Würfeln einen großen Würfel bauen, wie im Bild links. Wie viele kleine Würfel fehlen ihr im Bild rechts noch, um diesen großen Würfel zu bauen?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

3. Wie weit muss Maria gehen, um zu ihrer Freundin Bianca zu kommen?



(A) 300 m (B) 400 m (C) 800 m (D) 1 km (E) 700 m

4. Nick kann mit seinem Fahrrad nur nach rechts, aber nicht nach links abbiegen. Wie oft muss er mindestens nach rechts abbiegen, um von A nach B zu gelangen?
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

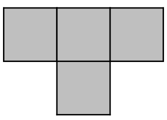


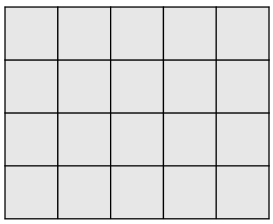
5. Anna, Bob und Chris sind zusammen 31 Jahre alt. Wie alt werden alle drei zusammen in drei Jahren sein?
(A) 32 (B) 34 (C) 35 (D) 37 (E) 40

6. In der nachfolgenden Rechnung steht in jedem Quadrat die gleiche Ziffer: $\square\square \cdot \square = 176$
Um welche Ziffer handelt es sich, damit die Rechnung stimmt?
(A) 6 (B) 4 (C) 7 (D) 9 (E) 8

7. Michael muss alle 15 Minuten eine Tablette nehmen. Die erste nimmt er um 11:05. Wann nimmt er die vierte?
(A) 11:40 (B) 11:50 (C) 11:55 (D) 12:00 (E) 12:05

8. Anne hat einige identische graue Figuren, so wie im Bild zu sehen ist. Wie viele solcher Figuren kann sie maximal ohne Überlappung auf das 5×4 Rechteck legen?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

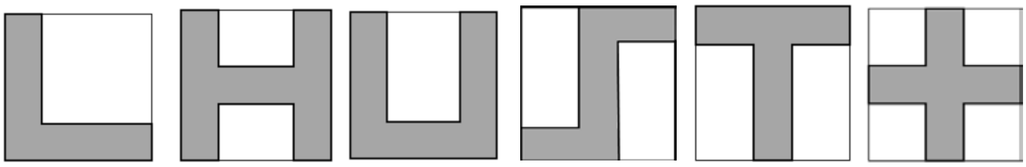




- 4 Punkte Beispiele -

9. Die Zahl 36 hat folgende Eigenschaft: 36 kann durch ihre Einerziffer ohne Rest dividiert werden (36 ist durch 6 teilbar). Bei der Zahl 38 funktioniert das nicht. Wie viele Zahlen zwischen 20 und 30 haben die gleiche Eigenschaft wie 36?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

10. Maria zeichnet auf quadratische Blätter die folgenden Figuren:

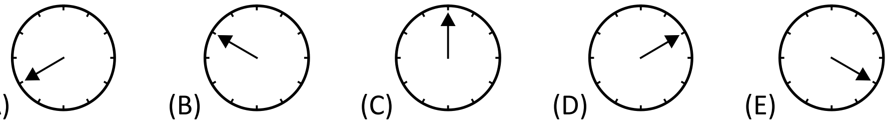


Wie viele der Figuren besitzen den gleichen Umfang wie das quadratische Blatt selbst?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Patricia fährt am Nachmittag mit gleichbleibender Geschwindigkeit zu ihrer Freundin. Bei der Abfahrt und bei der Ankunft sieht sie auf die Uhr.

Welche Stellung hat der Minutenzeiger zum Zeitpunkt, an dem sie ein Drittel der Fahrtstrecke zurückgelegt hat?



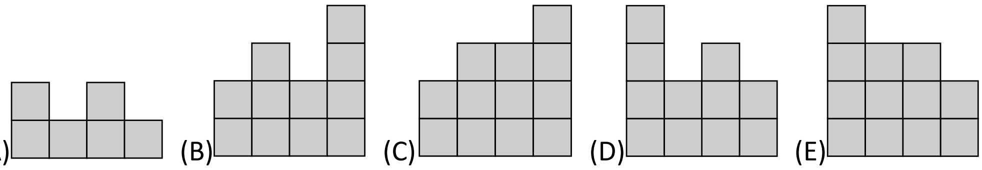
(A) (B) (C) (D) (E)

12. Johann stapelt 1×1 Würfel auf den Feldern eines 4×4 Rasters. Die Abbildung rechts gibt an, wie viele Würfel auf jedem der Rasterfelder übereinander gestapelt sind. Was sieht Johann, wenn er von hinten auf die Türme schaut?

HINTEN

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

VORNE

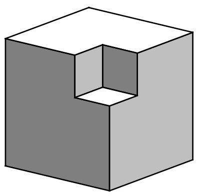


(A) (B) (C) (D) (E)

13. 36 Kinder wählten fünf Schüler aus ihrer Klasse, wobei jeder nur eine Stimme abgeben durfte. Der Gewinner erhielt 12 Stimmen, der letzte erhielt nur 4 Stimmen. Wie viele Stimmen erhielt der Schüler, der Zweiter wurde, wenn man davon ausgeht, dass jeder unterschiedlich viele Stimmen erhielt?

(A) 8 (B) 8 oder 9 (C) 9 (D) 9 oder 10 (E) 10

14. Aus einem 3×3×3 Würfel wird aus jedem Eck ein 1×1×1 Würfel herausgeschnitten. Das Ergebnis nach dem Entfernen des ersten Würfels sehen wir in der Figur rechts. Aus wie vielen Flächen besteht der verbleibende Körper?



(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 36

15. Wie viele verschiedene Subtraktionen zweier zweistelliger Zahlen gibt es, bei denen das Ergebnis 50 beträgt?

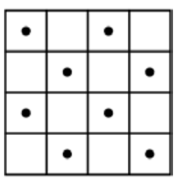
(A) 40 (B) 30 (C) 50 (D) 60 (E) 10

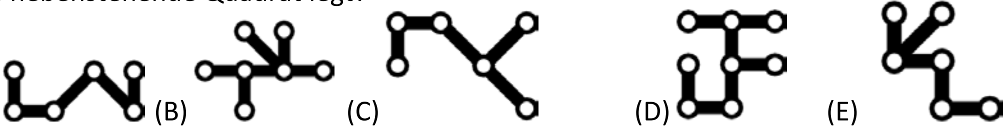
16. Im Endspiel der Hockeymeisterschaft gab es viele Tore. In der ersten Hälfte wurden 6 Tore erzielt, und das Gastteam führte. Nachdem das Heimteam in der zweiten Hälfte noch drei Tore erzielte, gewann es das Match. Wie viele Tore erzielte das Heimteam insgesamt?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

- 5 Punkte Beispiele -

17. Welche der unten angeführten Figuren enthält die meisten Punkte, wenn man sie auf das nebenstehende Quadrat legt?





(A) (B) (C) (D) (E)

18. Matthias fängt Fische. Wenn er dreimal so viele Fische gefangen hätte, als er tatsächlich gefangen hat, hätte er um 12 Fische mehr. Wie viele Fische hat er gefangen?
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

19. In die Felder der 4×4 Tabelle sollen Zahlen geschrieben werden: Zwei Zahlen in Feldern mit gemeinsamer Seite sollen sich um 1 unterscheiden. Die Zahl 3 ist vorgegeben. Man weiß, dass die Zahl 9 in der Tabelle vorkommt. Wie viele verschiedene Zahlen stehen in der vollständig ausgefüllten Tabelle?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

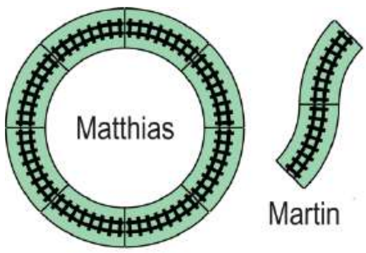
3			

20. Zwei Knöpfe mit lachendem Gesicht und zwei Knöpfe mit weinendem Gesicht sind wie in der Abbildung aneinander gereiht. Drückt man auf einen Knopf, so wechselt er sein Aussehen. Zusätzlich wechseln auch die benachbarten Knöpfe ihr Aussehen. Wie oft muss mindestens gedrückt werden, damit zum Schluss nur mehr lachende Gesichter zu sehen sind?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

21. Wenn man mit drei Zahlen startet, dann produziert die "Additionsmaschine" drei neue Zahlen, indem sie je zwei Zahlen addiert. So wird zum Beispiel aus {3, 4, 6} durch die Additionsmaschine {10, 9, 7}. Diese Zahlen werden zu {16, 17, 19}, wenn man die Additionsmaschine nochmals anwendet. Wir geben die drei Zahlen {20, 1, 3} in die Additionsmaschine und lassen die Maschine 2013-mal rechnen. Wie groß ist im Ergebnis der größte Unterschied zwischen zwei der Zahlen, die wir dadurch erhalten?
(A) 1 (B) 2 (C) 17 (D) 19 (E) 2013

22. Von einer alten Modelleisenbahn sind nur mehr gleiche Gleisbogenstücke vorhanden. Matthias baut mit 8 solchen Bögen einen Kreis (linkes Bild). Martin beginnt seine Bahnstrecke mit 2 Bögen wie im rechten Bild. Er möchte mit möglichst wenigen Stücken auch eine geschlossene Strecke bauen. Aus wie vielen Stücken besteht seine Strecke?
(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16



23. Auf einer Insel lebten 2013 Einwohner. Einige dieser Einwohner waren Ritter, die anderen Lügner. Die Ritter sagten immer die Wahrheit, während die Lügner immer logen. Jeden Tag sagte einer der Bewohner: „Wenn ich die Insel verlassen habe, dann wird die Anzahl der Ritter gleich groß wie die Anzahl der Lügner sein.“ Dann verließ er die Insel. Nach 2013 Tagen gab es keine Bewohner mehr auf dieser Insel. Wie viele Lügner bewohnten ursprünglich diese Insel?
(A) 0 (B) 1006 (C) 1007 (D) 2013 (E) Es kann nicht eindeutig bestimmt werden.

24. 40 Burschen und 28 Mädchen fassen sich an den Händen und bilden einen großen Kreis. Genau 18 Burschen geben ihre rechte Hand einem Mädchen. Wie viele Burschen geben die linke Hand einem Mädchen?
(A) 18 (B) 9 (C) 28 (D) 14 (E) 20

MATHEMATICS KANGAROO 2013
Austria - 21.3.2013

Group: Benjamin, Grades: 5-6

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 60 min.

Each correct answer, questions 1.-8.:	3 Points
Each correct answer, questions 9.-16.:	4 Points
Each correct answer, questions 17.-24.:	5 Points
Each question with no answer given:	0 Points

Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 24 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the questions number (1 to 24)
Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

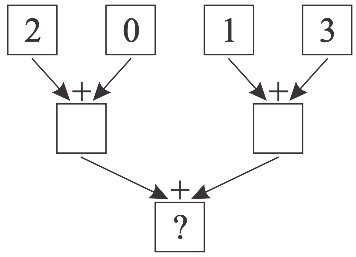
9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

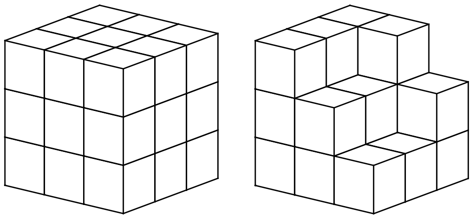
Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2013
Group Benjamin (Grade 5/6)
Austria - 21.3.2013

- 3 Point Questions -

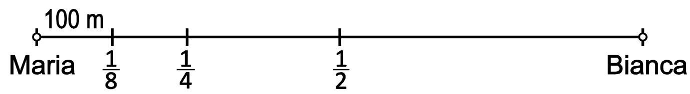


1. Which answer completes the addition tree?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

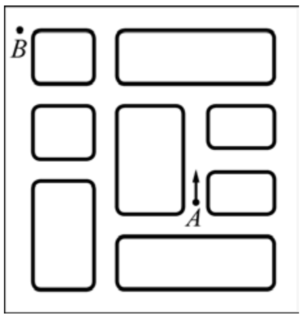


2. Nathalie wanted to build a large cube out of lots of small cubes. How many cubes are missing from the picture on the right that would be needed to build the large cube on the left? (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

3. How far must Maria walk to reach her friend Bianca?



(A) 300 m (B) 400 m (C) 800 m (D) 1 km (E) 700 m



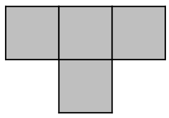
4. Nick can turn right but not left on his bicycle. What is the least number of right turns he must make in order to get from A to B?
(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

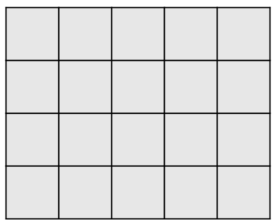
5. Anna, Bob and Chris are altogether 31 years old. How old will all three be altogether in three years time?
(A) 32 (B) 34 (C) 35 (D) 37 (E) 40

6. In the following sum the same digit is used in each square: □□ × □ = 176
Which digit must be used so that the sum is correct?
(A) 6 (B) 4 (C) 7 (D) 9 (E) 8

7. Michael must take a tablet every 15 minutes. He takes the first at 11:05. When does he take the fourth?
(A) 11:40 (B) 11:50 (C) 11:55 (D) 12:00 (E) 12:05

8. Anne has a few grey tiles like the one in the picture. What is the maximum number of these tiles that she can place on the 5×4 rectangle without any overlaps?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

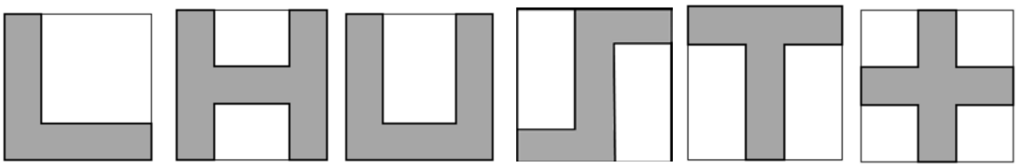




- 4 Point Questions -

9. The number 36 has the following property: 36 can be divided by its units digit without a remainder (36 is divisible by 6). With the number 38 this doesn't work. How many numbers between 20 and 30 have the same property as 36?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

10. Maria drew the following figures on square sheets of paper.

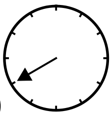
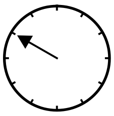
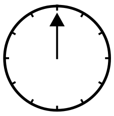
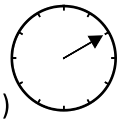
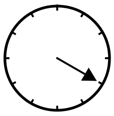


How many of these figures have the same perimeter as the square sheet of paper itself?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Patricia drives one afternoon at a constant speed to her friend. She looks at her watch as she leaves and when she arrives.

In which position will the minute hand be when she has completed one third of her journey?

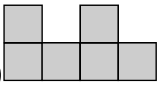
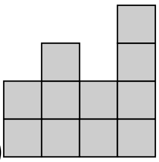
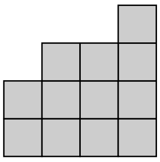
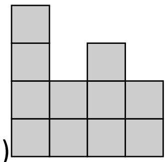
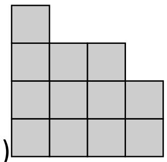
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

12. Johann stacks 1×1 cubes on the squares of a 4×4 grid. The diagram on the right shows how many cubes were piled on top of each other on each square of the grid. What will Johann see if he looks from behind (*hinten*) at the tower?

HINTEN

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

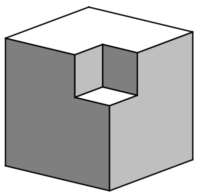
VORNE

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. 36 children voted for five students from their class. Each child was only allowed to vote once. The winner received 12 votes, and the student placed last just 4 votes. If each student received a different number of votes, how many votes did the second placed student receive?

(A) 8 (B) 8 or 9 (C) 9 (D) 9 or 10 (E) 10

14. A 1×1×1 cube is cut out of each corner of a 3×3×3 cube. The picture shows the result after the first cube is cut out. How many faces will the final shape have?



(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 36

15. How many different subtraction sums between two digit numbers are there, which have the answer 50?

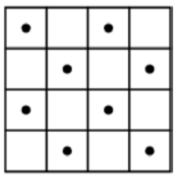
(A) 40 (B) 30 (C) 50 (D) 60 (E) 10

16. In the last game of the hockey match there were lots of goals. In the first half 6 goals were scored and the visiting team were leading. After the home team scored another three goals in the second half, they won the match. How many goals did the hometeam score in total?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

- 5 Point Questions -

17. Which of the figures below will cover the most dots when laid on the square shown on the right.



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

18. Matthias is catching fish. If he had caught three times as many fish as he has actually caught, he would have 12 more fish. How many fish has he caught?
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

19. Numbers are written in the 4x4 grid: any two numbers in neighbouring squares should have a difference of 1, that is squares that share an edge. The number 3 is already given. The number 9 will be used somewhere in the grid. How many different numbers will have been used once the grid is filled in completely?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

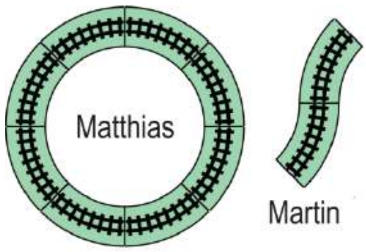
3			

20. Two buttons with smiling faces and two buttons with sad faces are in a row as shown in the picture. When you press a button the face changes, and so do the faces of the neighbouring buttons. What is the minimum number of button presses needed so that only smiling faces can be seen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

21. If you start with three numbers, the 'addition machine' produces three new ones by adding together each pair of two. For instance from the numbers {3, 4, 6} the addition machine makes {10, 9, 7}. If you use the addition machine again these numbers become {16, 17, 19}. We feed the three numbers {20, 1, 3} into the addition machine and let the machine calculate 2013 times. What is the biggest possible difference between two of the three resulting numbers?
(A) 1 (B) 2 (C) 17 (D) 19 (E) 2013

22. From an old model train set there are only identical pieces of track to use. Matthias puts 8 such pieces in a circle (picture on the left). Martin begins his track with 2 pieces as shown in the picture on the right. He also wants to build a closed track and use the smallest number of pieces possible. How many pieces will his track use?
(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16



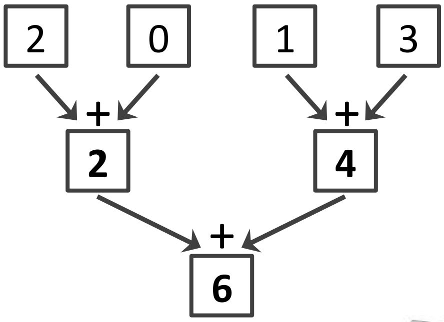
23. 2013 people live on an island. Some of these people are truthtellers and the others are liars. The truthtellers always tell the truth whereas the liars always lie. Each day one of the people says ' when I have left the island the number of truthtellers will be the same as the number of liars.' Then he leaves the island. After 2013 days there is no longer anybody living on the island. How many liars were living there to begin with?
(A) 0 (B) 1006 (C) 1007 (D) 2013 (E) It is not possible to answer.

24. 40 boys and 28 girls hold hands in a big circle. Exactly 18 boys give their right hand to a girl. How many boys give their left hand to a girl?
(A) 18 (B) 9 (C) 28 (D) 14 (E) 20

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Benjamin (5./6. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

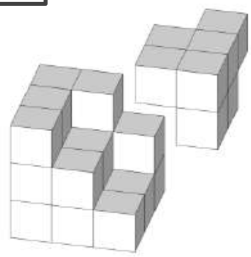
LÖSUNGEN

- 3 Punkte Beispiele -



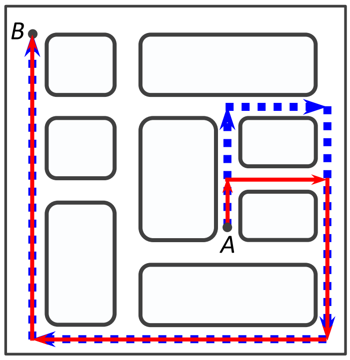
1. Man addiert – wie durch die Pfeile vorgegeben – jeweils die beiden darüber stehenden Zahlen und trägt deren Summe in das jeweils unterhalb liegende Kästchen ein. Als Endresultat ergibt sich 6; also ist Antwort E richtig.

2. Dieser Würfel besteht aus drei Ebenen mit jeweils 9 kleinen Würfeln. In der ersten (untersten) Ebene sind alle Würfel vorhanden. In der Ebene darüber fehlen jedoch 2 Würfel. In der obersten Ebene fehlen 5 Würfel. Also fehlen insgesamt 7 Würfel; somit ist Antwort C richtig.
In der Abbildung siehst du, dass der aus sieben Würfeln bestehende „Restkörper“ das in der Aufgabe gegebene „Würfelgebilde“ zu einem großen Würfel ergänzt.



3. Die Strecke zwischen Maria und Bianca ist in 8 gleich große Teile (= Achtel) geteilt. Da ein solches Stück (wie aus der Skizze erkennbar) 100 m lang ist, muss Maria 8 · 100 = 800 Meter gehen, um zu Bianca zu kommen; daher ist Antwort C richtig.

4. Nachdem Nick nur nach rechts abbiegen kann und seine Fahrtrichtung durch den Pfeil in Richtung „Norden“ vorgegeben ist, muss er sich – bildlich gesprochen – einmal um seine eigene Achse drehen, um von A nach B zu gelangen: In Summe sind das insgesamt vier 90°-Drehungen (s. roter Streckenzug); also ist Antwort B richtig.
P.S.: Für Nicks Route gibt es übrigens noch eine weitere Möglichkeit, um ans Ziel zu gelangen: Der etwas längere Weg (blau strichliert) führt Nick am Beginn um einen ‚Häuserblock' weiter und mündet nach kurzer Zeit in die rote Route. Auch für diese Strecke bleibt jedoch die Anzahl der Abbiege-Manöver nach rechts unverändert;

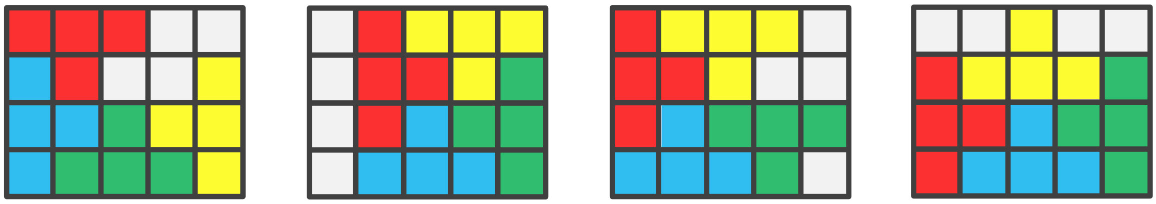


5. Anna Bob und Chris sind 31 Jahre alt. In drei Jahren sind alle drei jeweils drei Jahre älter als jetzt. In Summe sind sie also 9 Jahre älter als jetzt und daher sind sie dann zusammen 40 Jahre alt. Somit ist Antwort E richtig.

6. Durch Probieren der Möglichkeiten erkennt man rasch, dass 44 · 4 = 176 (Antwort B) die richtige Lösung ist.

7. Vorsicht: Man darf sich hier mit der Überlegung, dass 4-mal 15 (Minuten) 60, also eine volle Stunde, ergibt, nicht auf die falsche Fährte locken lassen: In Minute 60 würde Michael nämlich schon die fünfte Tablette einnehmen. Spielt man die Situation Schritt für Schritt durch, so ergibt sich folgendes Szenario:
Um 11:05 Uhr nimmt Michael die erste Tablette, um 11:20 Uhr die zweite, um 11:35 Uhr die dritte und um 11:50 Uhr bereits die vierte Tablette. – Also ist Antwort B richtig.

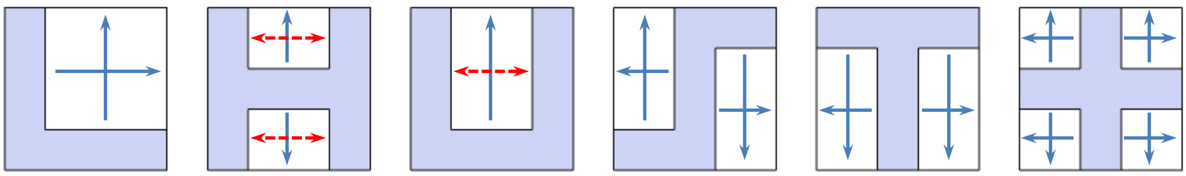
8. Anne kann maximal 4 dieser grauen Figuren ohne Überlappung auf das 5 x 4 Rechteck legen – somit ist Antwort C richtig. Einige Beispiele für Annes „Maximal-Belegungen" siehst du hier (zur besseren Verdeutlichung sind die grauen Figuren unterschiedlich eingefärbt):



- 4 Punkte Beispiele -

9. Zum Lösen dieser Aufgabe schreiben wir uns zunächst alle Zahlen von 21 bis 29 an und überlegen uns, welche von ihnen die Eigenschaft besitzt, dass sie durch ihre Einerziffer ohne Rest dividiert werden kann: Die Zahl 21 ist durch 1 teilbar, die Zahl 22 durch 2, die Zahl 24 durch 4 und die Zahl 25 durch 5. Da es also 4 Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt, ist Antwort C richtig.

10. Die Figuren besitzen genau dann gleichen Umfang wie das Quadrat, wenn sie nur durch ‚Verschieben' von Kantenteilen entstanden sind. Dies ist bei der ersten, bei der vierten, bei der fünften und bei der sechsten Figur der Fall. – Also viermal und somit ist Antwort C richtig! Die „zulässigen" Kanten-Verschiebungen siehst du in der Abbildung unterhalb angedeutet (blaue Pfeile). Rote (strichlierte) Pfeile kennzeichnen „überschüssige" Kanten in Figuren, deren Umfang größer ist als der des quadratischen Blattes selbst:



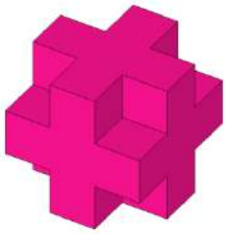
11. Patricia fährt um 13:30 Uhr ab und kommt um 15:30 Uhr an, das heißt, sie ist 2 Stunden, also 120 Minuten unterwegs. Ein Drittel der Fahrtstrecke entsprechen daher 40 Minuten. Wenn sie auf die Uhr schaut ist es zu diesem Zeitpunkt 14:10 Uhr – der Minutenzeiger schaut auf der Uhr zur Ziffer 2. – Antwort D stimmt.

12. Johann schaut von hinten auf die Türme. Er sieht jeweils die höchste Anzahl an Türmen pro Reihe. Daher sieht er auf der linken Seite 2 Türme, in der Mitte jeweils 3 Türme und auf der rechten Seite 4 Türme – VORSICHT, er schaut ja von hinten drauf. Antwort C ist richtig.

Ansicht von HINTEN

13. Von den 36 Stimmen entfielen 12 auf den Gewinner und 4 auf den letzten. Die verbleibenden 20 Stimmen verteilen sich also auf die restlichen drei Schüler, von denen jeder unterschiedlich viele Stimmen erhielt. Dadurch, dass diese drei aber die Wahl weder gewonnen, noch verloren haben, wissen wir natürlich, dass sie weniger als 12, jedoch mehr als 4 Stimmen für sich ‚einheimsen' konnten. Mögliche Ausgänge sind also (in geordneter Reihenfolge) entweder 9 – 6 – 5 oder 8 – 7 – 5 Stimmen. Jener Schüler, der Zweiter wurde, konnte also 8 oder 9 Stimmen auf sich vereinen. Folglich ist Antwort B richtig.
P.S.: Die Verteilung 10 – 6 – 4, die in Summe ja auch 20 ergäbe, ist nicht zulässig, weil dann sowohl der Viert- als auch der Fünft- und somit Letztplatzierte jeweils gleich viele Stimmen – nämlich 4 – erhalten hätten.

14. Ein Würfel besteht aus 6 Flächen. Schneidet man in einer Ecke einen kleinen Würfel heraus, entstehen 3 neue Flächen! Schneidet man in jeder der 8 Würfel-Ecken diesen kleinen Würfel aus, so ergeben sich insgesamt also 24 neue Flächen (s. Abbildung). Mit den 6 Seitenflächen des Ausgangswürfels sind es dann 30 Flächen und somit ist Antwort D richtig!

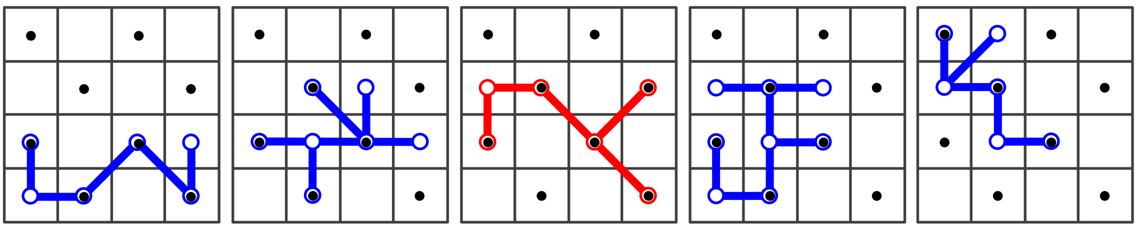


15. Um einen Überblick zu erhalten, wie viele Subtraktionen zweier zweistelliger Zahlen es mit Ergebnis 50 gibt, starten wir mit dem kleinstmöglichen Subtrahenden 10 und erhöhen dann diesen Schritt für Schritt immer um 1. – Damit das Ergebnis der Subtraktion konstant 50 bleibt, muss natürlich auch der Minuend gleichzeitig um 1 vergrößert werden: 60 – 10 = $\boxed{50}$, 61 – 11 = $\boxed{50}$, 62 – 12 = $\boxed{50}$, …, 97 – 47 = $\boxed{50}$, 98 – 48 = $\boxed{50}$, 99 – 49 = $\boxed{50}$. Dies sind 99 – 60 + 1 = 40 verschiedene Subtraktionen. – Antwort A ist richtig.

16. In der ersten Hälfte sind 6 Tore gefallen, aber das Auswärtsteam führte. Daher ist es möglich, dass das Heimteam bis zur Pause entweder kein Tor (Spielstand ⇨ 0 : 6), 1 Tor (Spielstand ⇨ 1 : 5) oder 2 Tore (Spielstand ⇨ 2 : 4) geschossen hatte. Da das Heimteam mit drei erzielten Toren in Hälfte 2 die Partie noch „drehen" und somit für sich entscheiden konnte, darf es zur Halbzeit mit maximal zwei Toren in Rückstand gelegen haben. Dies ist aber nur bei dem Halbzeitstand von 2 : 4 der Fall. Die Heimmannschaft konnte schließlich einen 5 : 4-Sieg „einfahren", während dem Auswärtsteam im zweiten Spielabschnitt kein einziges Tor mehr gelang. Somit ist Antwort C richtig.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Legt man Figur C richtig in das Quadrat, sind 5 Punkte in der Figur enthalten (rot). Mit den restlichen Figuren kann man maximal 4 (Figuren A, B & D) bzw. 3 Punkte (Figur E) einschließen:



max. 4 Punkte | max. 4 Punkte | <u>max. 5 Punkte</u> | max. 4 Punkte | max. 3 Punkte

18. Falls Matthias 6 Fische gefangen hat, geht die Rechnung auf; denn $3 \cdot 6 = 18$ und 18 ist um 12 mehr als 6. Folglich ist Antwort B richtig.
Wer sich nicht auf's Probieren verlassen will, kann die Situation mit Hilfe einer Gleichung darstellen – die unbekannte Anzahl der von Matthias gefangenen Fische bezeichnen wir dabei mit f:
$3 \cdot f = f + 12$ (auf beiden Seiten f subtrahiert, liefert) ⇔ $2 \cdot f = 12$ (teilt man nun die linke und rechte Seite der Gleichung durch 2, erhalten wir die Lösung) ⇔ $f = 6$.

19. Spätestens nach ein, zwei Versuchen kommt man drauf, dass es nicht ausreicht, nur auf die Bedingung „Zwei Zahlen in Feldern mit gemeinsamer Seite sollen sich um 1 unterscheiden." zu achten (vgl. linke & mittlere Tabelle). Um auch die geforderte 9 in der Tabelle zu erhalten, muss man die Zelleinträge von links nach rechts und von oben nach unten immer um 1 steigern: Die so entstandene Tabelle (ganz rechts) erfüllt alle Bedingungen und enthält die Zahlen von 3 bis 9, also 7 verschiedene Zahlen. Richtig ist folglich Antwort D.

3	4	5	4
2	3	4	3
3	4	3	4
2	3	4	5

4 verschiedene Zahlen

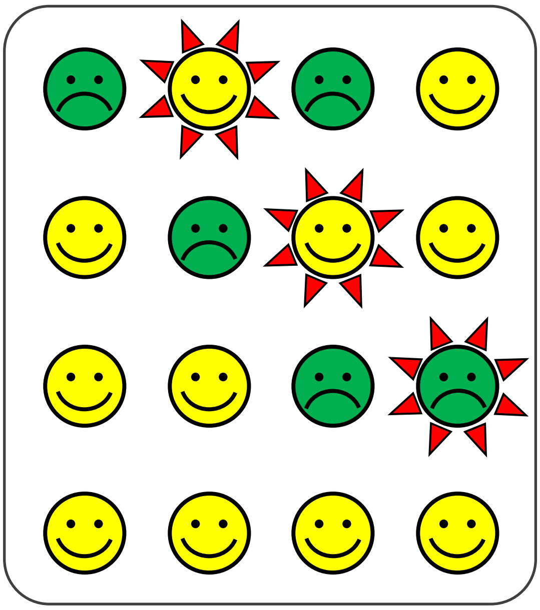
3	4	5	6
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7

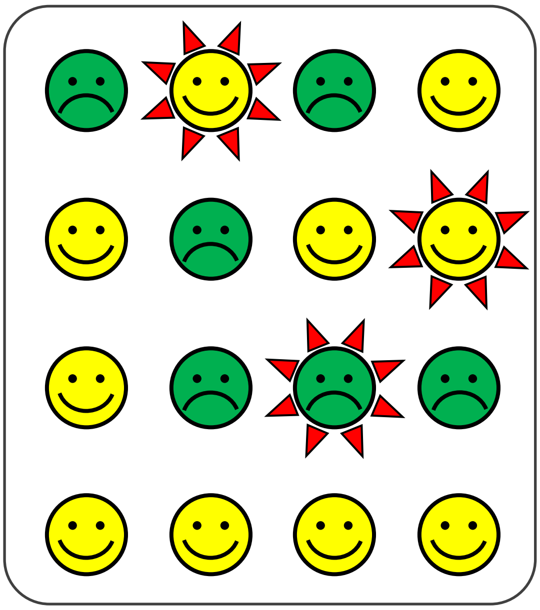
6 verschiedene Zahlen

3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	**9**

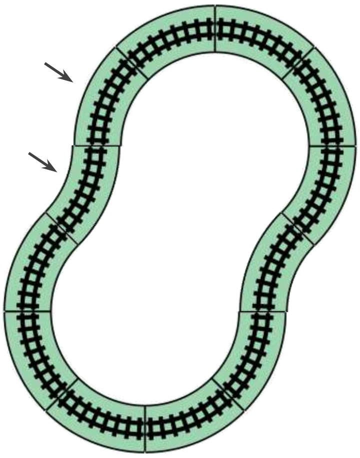
7 verschiedene Zahlen

20. Drückt man den zweiten Knopf, wird der erste Knopf lachend, der zweite weinend und der dritte lachend (vgl. Abbildung links). Drückt man nun den dritten Knopf, wird der zweite wieder lachend, der dritte wieder weinend und auch der vierte Knopf wird weinend. Drückt man nun diesen letzten Knopf, wird der dritte Knopf wieder lachend und so auch der vierte. Also schafft man es mit 3-mal drücken (Knopf 2 ⇨ Knopf 3 ⇨ Knopf 4). Folglich ist Antwort B richtig. – Eine weitere Lösung mit der minimalen Anzahl von drei Knopfdrücken siehst du rechts abgebildet (Knopf 2 ⇨ Knopf 4 ⇨ Knopf 3).
P.S.: Jede (beliebige) weitere Kombination der drei ‚aktivierten' Knöpfe 2, 3 & 4 (z. B.: 3 ⇨ 2 ⇨ 4 oder etwa auch 4 ⇨ 3 ⇨ 2, usw.) führt ebenfalls schon nach drei Schritten zum gewünschten Endresultat von vier Smileys. Du kannst es ja selbst einmal ausprobieren!





21. Nehmen wir die „Additionsmaschine“ anhand des vorgegebenen Beispiels einmal genau unter die Lupe: Addiert man vom „Ausgangstripel“ {3, 4, 6} jene zwei Zahlen, die an Position 1 und 2 stehen, nämlich 3 und 4, so ergibt sich 7; dieser Wert taucht im zweiten „Tripel“ an der 3. Stelle auf: {_ , _ , 7}. Bildet man nun die Summe aus 3 und 6 (1. & 3. Position), so kommt dieser Wert (3 + 6 = 9) an die 2. Stelle: {_ , 9, 7}. Die verbleibende Kombination der zwei Zahlen an der 2. & 3. Stelle (4 + 6 = 10) komplettiert das zweite „Zahlentripel“: {10, 9, 7}. In gleicher Weise entsteht offensichtlich auch das dritte „Zahlentripel“ {9 + 7 = 16, 10 + 7 = 17, 10 + 9 = 19}, das vierte {36, 35, 33}, usw.
Schauen wir uns nun den größten Unterschied zwischen zwei der Zahlen eines „Zahlentripels“ an: Man begreift schnell, dass die Differenz zwischen minimalem (orange & fett) und maximalem (blau & kursiv) Wert eines „3er-Blocks“ immer konstant 3 bleibt (dies ist übrigens eine Additionsregel):
{**3**, 4, *6*} ⇨ *6* – **3** = $\boxed{3}$; {*10*, 9, **7**} ⇨ *10* – **7** = $\boxed{3}$; {**16**, 17, *19*} ⇨ *19* – **16** = $\boxed{3}$; {*36*, 35, **33**} ⇨ *36* – **33** = $\boxed{3}$
Jetzt können wir schlussfolgern, dass die größte Differenz eines „Zahlentripels“, das aus den drei Zahlen {20, 1, 3} in der „Additionsmaschine“ jemals entstehen kann – egal, ob diese 1-mal, 2-mal, 3-mal oder eben auch 2013-mal rechnet –, konstant 19 (= *20* – **1**) sein muss. Somit ist Antwort D richtig.
Wer das nicht glauben will, wirft einfach die „Additionsmaschine“ an und lässt sich die ersten Zahlentripel produzieren!

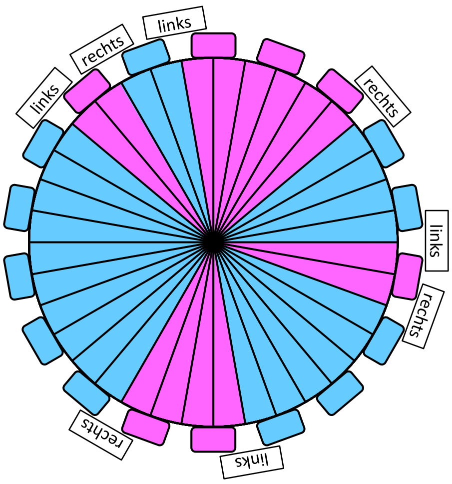


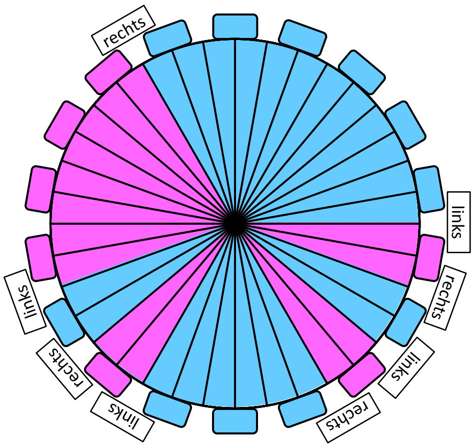
22. Ohne eine (saubere) Skizze – die einzelnen Gleisteile sind jeweils Achtelkreisbögen – wird es hier schwierig. Befolgt man diese Vorgangsweise, so sieht man, dass es 12 Stücke sein müssen (siehe Abbildung – die zwei vorgegebenen Bögen sind mit einem Pfeil gekennzeichnet). Richtig ist daher Antwort B.

23. Man sollte hier die ganze Situation ‚von hinten‘ aufrollen. Der Letzte, der die Insel verlassen hat, muss ein Ritter gewesen sein, denn dieser muss die Wahrheit gesagt haben (nach ihm sind ja gleich viele Ritter wie Lügner auf der Insel, nämlich jeweils null…). Aber der Vorletzte muss ein Lügner gewesen sein, da nach ihm nur noch 1 Ritter auf der Insel war. Der Drittletzte wiederum muss die Wahrheit gesagt haben, denn als er die Insel verließ, waren ja gleich viele Ritter wie Lügner auf der Insel (jeweils einer). Dies muss sich immer abwechseln. Daher waren 1007 Ritter (der erste, der die Insel verlassen hatte und der letzte, der die Insel verlassen hatte war ein Ritter) und 1006 Lügner auf der Insel; demnach ist Antwort B richtig.

24. Wenn genau 18 Burschen ihre rechte Hand einem Mädchen geben und wir nehmen – der Einfachheit halber – an, dass diese ‚Paare‘ nebeneinanderstehen, dann geben auch 17 dieser Burschen die linke Hand einem Mädchen. Wenn sich nun die restlichen Mädchen und Burschen hinstellen, muss irgendwo nochmal ein Wechsel zwischen Mädchen und Burschen kommen und zwar so, dass der Bursch die linke Hand dem Mädchen gibt, also sind es in diesem Fall auch 18 Burschen, die ihre linke Hand einem Mädchen geben. Diese Anzahl ist unabhängig von der Reihenfolge, wie die Kinder reihum in einem Kreis stehen, solange nur die Anfangsbedingung „Genau 18 Burschen geben ihre rechte Hand einem Mädchen.“ erfüllt ist. Folglich ist Antwort A richtig.
Wer sich beim Nachvollziehen des aufgezeigten Lösungsweges schwer tut, kann es auf diese Weise versuchen: Wie so oft in solchen Situationen, hilft manchmal das Reduzieren der Problemstellung auf einen einfacheren Fall. – Nehmen wir z. B. 11 Burschen (hellblau) und 7 Mädchen (rosa) und „positionieren“ wir sie in beliebiger Position reihum in einem Kreis: Zählt man nun die Burschen, die einem Mädchen die rechte Hand reichen („rechts“), so erhalten wir in unserer Konstellation die Zahl 4. Betrachtet man in der Folge jene Jungs, die einem Mädchen ihre linke Hand hinstrecken („links“), so ergibt sich ebenfalls die Anzahl 4 (Abbildung links).
Selbst wenn wir die Anordnung nun so abändern, dass zwar nach wie vor vier Burschen die rechte Hand einem Mädchen reichen, sich aber die (geschlossenen) Gruppengrößen der Mädchen (und damit auch der Burschen)

ändern, gibt es nach wie vor auch vier Burschen, die einem Mädchen ihre linke Hand reichen (Abbildung rechts). Du hast sicher schon erkannt, dass es also gleich viele Burschen geben muss, die einem Mädchen die rechte Hand reichen, wie Burschen, die mit ihrer Linken mit einer Nachbarin „Händchen halten".
Umgemünzt auf unser Ausgangsproblem, wissen wir nun aber, dass es bei 18 Burschen, die einem Mädchen die rechte Hand reichen, ebenso viele Burschen geben muss, die mit ihrer linken Hand die Hand eines Mädchens halten. Richtig kann also nur Antwort A sein.
P.S.: Wenn man die ganze Situation vereinfacht und sich die abwechselnden Burschen- & Mädchengruppen (eine solche kann auch nur aus einer einzigen Person bestehen) anschaut, so ist aber auch klar, dass es – in einer Kreisanordnung – immer gleich viele männliche (hellblau) wie weibliche (rosa) „Blöcke" gibt. – In den beiden Grafiken ist dies durch das Einfärben des jeweils entsprechenden Kreissektors in Hellblau bzw. Rosa verdeutlicht. Das „Händereichen von Burschen" entspricht nun der „Berührung" eines blauen Kreissektors mit einem rosafarbenen. – Und da freilich jeder „Burschensektor" immer rechts und links an einen „Mädchensektor" angrenzt, geben also immer gleich viele Jungs einem Mädchen die rechte Hand wie Jungs einem Mädchen die linke Hand reichen.





KÄNGURU DER MATHEMATIK 2013
21.3.2013

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7-8

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

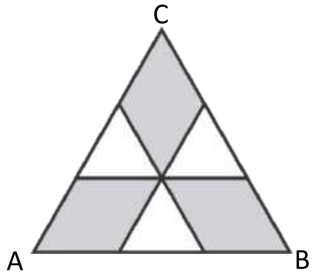
Stadtgemeinde Pressbaum

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

pwc

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Kadett (7./8. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

- 3 Punkte Beispiele -



1. Das Dreieck ABC ist gleichseitig und sein Flächeninhalt beträgt 9. Die Unterteilungslinien sind parallel zu den Seiten und unterteilen die Seiten in drei gleich lange Stücke. Wie groß ist der Flächeninhalt des grau gefärbten Teiles des Dreiecks?

(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

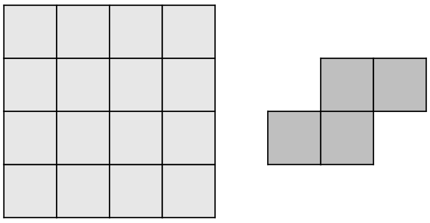
2. Man weiß, dass $\frac{1111}{101} = 11$ ist. Wie groß ist die Summe $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303} = ?$

(A) 5 (B) 9 (C) 11 (D) 55 (E) 99

3. Im Meerwasser verhalten sich die Massen von Salz zu reinem Wasser wie 7 : 193. Wie viel Kilogramm Salz befinden sich dann in 1000 kg Meerwasser?

(A) 35 (B) 186 (C) 193 (D) 200 (E) 350

4. Melanie hat ein quadratisches Stück Papier mit eingezeichnetem 4×4 Raster. Sie schneidet entlang der Rasterlinien mehrere Figuren aus, die alle deckungsgleich sind zur abgebildeten Figur oder zu Spiegelungen dieser Figur. Wie viele Quadrate bleiben übrig, wenn man möglichst viele Figuren ausschneidet?



(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

5. Matthias fängt Fische. Wenn er dreimal so viele Fische gefangen hätte, als er tatsächlich gefangen hat, hätte er um 12 Fische mehr. Wie viele Fische hat er gefangen?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

6. Ein Sack enthält Kugeln in fünf verschiedenen Farben: 2 rote, 3 blaue, 10 weiße, 4 grüne und 3 schwarze Kugeln. Man nimmt Kugeln aus dem Sack, ohne zu schauen und ohne sie wieder zurückzulegen. Wie viele Kugeln muss man mindestens aus dem Sack nehmen, um sicher zwei Kugeln derselben Farbe zu erwischen?

(A) 2 (B) 12 (C) 10 (D) 5 (E) 6

7. Alex zündet alle zehn Minuten eine Kerze an. Jede Kerze brennt 40 Minuten lang und erlischt dann. Wie viele Kerzen brennen 55 Minuten nach dem Entzünden der ersten Kerze?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Marie berechnet die durchschnittliche Anzahl der Kinder von Familien ihres Dorfes. Im Dorf leben fünf Familien. Welches Ergebnis kann sie nicht erhalten?

(A) 1,0 (B) 1,2 (C) 1,3 (D) 1,4 (E) 2,0

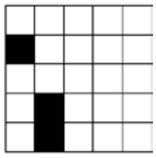
9. Tom und Laura stehen einander an einem kreisrunden Brunnen genau gegenüber. Dann beginnen beide gleichzeitig im Uhrzeigersinn um den Brunnen zu laufen. Toms Geschwindigkeit beträgt $\frac{9}{8}$ von Lauras Geschwindigkeit. Wie viele volle Runden ist Laura um den Brunnen gelaufen, bis Tom sie zum ersten Mal einholt?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 2 (E) 72

10. Für die positiven ganzen Zahlen x, y, z gilt: $x \cdot y = 14$, $y \cdot z = 10$ und $z \cdot x = 35$.
Welchen Wert hat $x + y + z$?

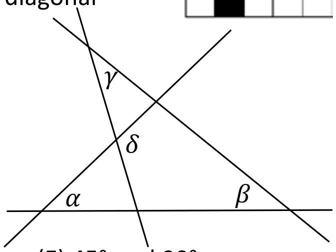
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

- 4 Punkte Beispiele -



11. Anne spielt mit einem Freund "Schifferl versenken" auf einem 5×5-Raster. Sie hat bereits (wie in der Abbildung zu sehen) ein 1×1 Schiff und ein 2×1 Schiff eingezeichnet. Anne muss noch ein (rechteckiges) 3×1 Schiff einzeichnen. Schiffe dürfen weder direkt noch diagonal benachbart sein. Wie viele Positionen sind für das 3×1 Schiff möglich?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8



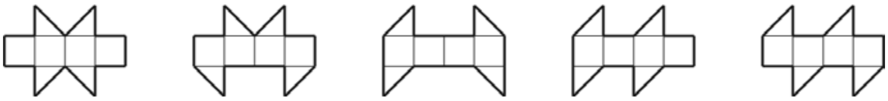
12. In der abgebildeten Figur gilt $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ und $\gamma = 35°$. Wie groß ist δ?

(A) 100° (B) 105° (C) 120° (D) 125° (E) 130°

13. Der Umfang eines Trapezes beträgt 5 und die Seitenlängen sind ganzzahlig. Wie viel Grad haben die beiden kleinsten Winkel?

(A) 30° und 30° (B) 60° und 60° (C) 45° und 45° (D) 30° und 60° (E) 45° und 90°

14. Die fünf abgebildeten Figuren sind aus Papier ausgeschnitten worden. Vier davon können zu einem Würfel gefaltet werden. Für welche Figur ist das nicht möglich?



(A) Figur 1 (B) Figur 2 (C) Figur 3 (D) Figur 4 (E) Figur 5

15. Willi schreibt einige aufeinanderfolgende ganze Zahlen auf. Ein gewisser Prozentsatz dieser Zahlen ist ungerade. Welcher der folgenden Werte kann nicht den berechneten Prozentsatz angeben?

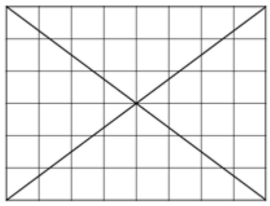
(A) 40% (B) 45% (C) 48% (D) 50% (E) 60%

16. Aron, Ben und Carl lügen immer. Jeder von ihnen besitzt entweder einen roten oder grünen Stein.
Aron sagt: "Mein Stein hat dieselbe Farbe wie Bens Stein."
Ben sagt: "Mein Stein hat dieselbe Farbe wie Carls Stein."
Carl sagt: "Genau zwei von uns haben rote Steine."
Welche der Aussagen stimmt?

(A) Arons Stein ist grün. (B) Bens Stein ist grün. (C) Carls Stein ist rot.
(D) Arons Stein und Carls Stein haben verschiedene Farben. (E) Keine der Aussagen ist wahr.

17. Alle vierstelligen positiven ganzen Zahlen mit den gleichen Ziffern wie 2013 werden in aufsteigender Reihenfolge auf eine Tafel geschrieben. Bestimme die größtmögliche Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen auf der Tafel.

(A) 702 (B) 703 (C) 693 (D) 793 (E) 198



18. Im abgebildeten 8×6 Raster werden 24 Zellen von keiner der beiden Diagonalen geschnitten. Nun zeichnen wir beide Diagonalen eines 10×6 Rasters. Wie viele Zellen werden in diesem Raster von keiner der beiden Diagonalen geschnitten?

(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31 (E) 32

19. Andi, Berti, Christa, Doris und Edi wurden jeweils an einem der folgenden Tage geboren: 20.02.2000, 12.03.2000, 20.03.2000, 12.04.2000 und 23.04.2000. Andi und Edi haben im selben Monat Geburtstag. Berti und Christa haben ebenfalls im selben Monat Geburtstag. Andi und Christa wurden am selben Tag in verschiedenen Monaten geboren. Auch Doris und Edi wurden am selben Tag in verschiedenen Monaten geboren. Welches dieser Kinder ist das jüngste?

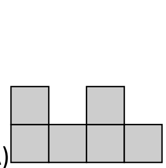
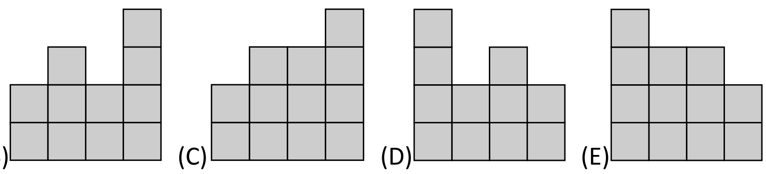
(A) Andi (B) Berti (C) Christa (D) Doris (E) Edi

HINTEN

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

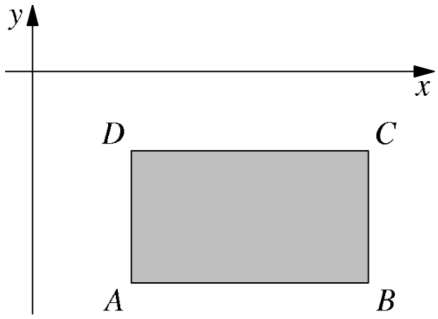
VORNE

20. Johann stapelt 1×1 Würfel auf den Feldern eines 4×4 Rasters. Die Abbildung rechts gibt an, wie viele Würfel auf jedem der Rasterfelder übereinander gestapelt sind.
Was sieht Johann, wenn er von hinten auf die Türme schaut?

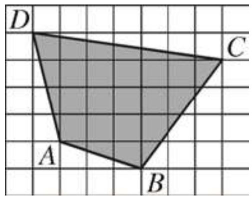
(A)  (B) (C) (D) (E) 

- 5 Punkte Beispiele -

21. Ralf möchte Karl eine Zahl nennen, bei der das Produkt der Ziffern gleich 24 ist. Wie groß ist die Ziffernsumme der kleinsten Zahl, die Ralf Karl nennen kann?
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11



22. Die Seiten des Rechtecks ABCD sind parallel zu den Koordinatenachsen. Das Rechteck liegt unterhalb der x-Achse und rechts der y-Achse, wie in der Abbildung zu sehen. Die Koordinaten der Punkte A, B, C, D sind ganzzahlig. Für jeden dieser Punkte berechnen wir den Wert (y-Koordinate) : (x-Koordinate). Für welchen dieser vier Punkte ergibt sich der kleinste Wert?
(A) A (B) B (C) C (D) D
(E) Es hängt vom Rechteck ab.



23. Auf einem Blatt Papier ist ein Raster gezeichnet, in dem die Seiten jeder Zelle 2 cm lang sind.
Wie groß ist die Fläche des grau gefärbten Vierecks ABCD?
(A) 96 cm^2 (B) 84 cm^2 (C) 76 cm^2 (D) 88 cm^2 (E) 104 cm^2

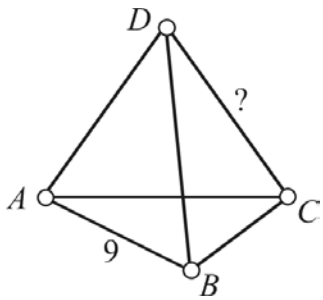
24. Robert wählt eine fünfziffrige positive ganze Zahl. Er entfernt eine der Ziffern, sodass eine vierziffrige Zahl entsteht. Die Summe aus der vierziffrigen und der ursprünglich fünfziffrigen Zahl beträgt 52713.
Wie groß ist die Ziffernsumme der ursprünglichen fünfziffrigen Zahl?
(A) 26 (B) 20 (C) 23 (D) 19 (E) 17

25. In einem Park will ein Gärtner in einer Reihe 20 Bäume (Linden und Eichen) pflanzen. Zwischen zwei beliebigen Eichen dürfen nicht genau drei Bäume stehen. Wie viele von den 20 gesetzten Bäumen können höchstens Eichen sein?
(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

26. Auf der Rangliste eines Geländelaufs lagen doppelt so viele Läufer hinter Alex wie vor Daniel, und 1,5-mal so viele hinter Daniel wie vor Alex. Alex beendete das Rennen an 21. Stelle. Wie viele Läufer kamen ins Ziel?
(A) 31 (B) 41 (C) 51 (D) 61 (E) 81

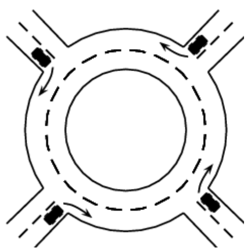
27. Eine Zahlenfolge beginnt mit 1, –1, –1, 1, –1. Jede neue Zahl berechnet man als Produkt der beiden vorangegangenen Zahlen. Zum Beispiel ist die sechste Zahl das Produkt aus der vierten und der fünften. Wie groß ist die Summe der ersten 2013 Zahlen?
(A) –1006 (B) –671 (C) 0 (D) 671 (E) 1007

28. Papa macht nacheinander sechs Palatschinken und nummeriert sie in der Reihe nach ihrem Entstehen von 1 bis 6. Während er das tut, laufen manchmal seine Kinder in die Küche und essen dann die heißeste Palatschinke. In welcher der nachstehenden Reihenfolgen können die Palatschinken nicht gegessen worden sein?
(A) 123456 (B) 125436 (C) 325461 (D) 456231 (E) 654321



29. Jede der 4 Ecken und 6 Kanten eines Tetraeders ist mit einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 11 markiert (die Zahl 10 wird ausgelassen). Jede Zahl wird nur einmal verwendet. Dabei wird zu jeder Kante die Summe der beiden Zahlen geschrieben, die in den beiden Ecken stehen, die von der Kante verbunden werden. Die Kante AB hat die Zahl 9. Mit welcher Zahl ist die Kante CD markiert?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 11

30. Vier Autos fahren zum gleichen Zeitpunkt, jedes aus einer anderen Richtung kommend, in einen Kreisverkehr ein (siehe Zeichnung). Kein Auto fährt im Kreisverkehr eine ganze Runde und keine zwei Autos verlassen den Kreisverkehr bei derselben Ausfahrt. Auf wie viele verschiedene Arten können die Autos den Kreisverkehr verlassen?
(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 24 (E) 81



MATHEMATICS KANGAROO 2013
Austria - 21.3.2013

Group: Kadett, Grades: 7-8

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 75 min.
Each correct answer, questions 1.-10.: 3 Points
Each correct answer, questions 11.-20.: 4 Points
Each correct answer, questions 21.-30.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 30 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the question number (1 to 30). Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

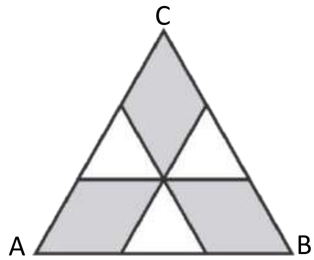
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2013
Group Kadett (Grade 7./8.)
Austria - 21.3.2013

- 3 Point Questions -



1. Triangle ABC is equilateral and has area 9. The dividing lines are parallel to the sides, and divide the sides into three equal lengths. What is the area of the grey shaded part of the triangle?

(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

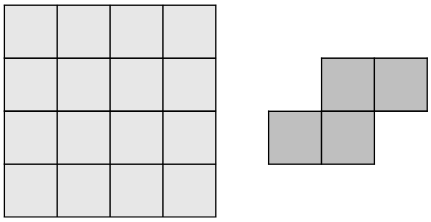
2. We know that $\frac{1111}{101} = 11$. How big is the sum $\frac{3333}{101} + \frac{6666}{303} = ?$

(A) 5 (B) 9 (C) 11 (D) 55 (E) 99

3. In sea water the ratio of Salt to fresh water is 7 : 193. How many kilograms of salt will be found in 1000kg of sea water?

(A) 35 (B) 186 (C) 193 (D) 200 (E) 350

4. Melanie has a square piece of paper with a 4x4 grid drawn on it. She cuts along the gridlines and cuts several shapes out which all look either the same as the one pictured, or the same as its mirror image. How many squares are left over if she cuts out as many shapes as possible?



(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

5. Matthias catches fish. If he had caught three times as many fish as he has actually caught, he would have 12 fish more. How many fish has he caught?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

6. A sack contains marbles in five different colours: 2 red, 3 blue, 10 white, 4 green, and 3 black marbles. You take marbles out of the bag without looking and without putting them back. What is the smallest number of marbles you must remove from the sack to be sure of having two of the same colour?

(A) 2 (B) 12 (C) 10 (D) 5 (E) 6

7. Alex lights a candle every 10 minutes. Each candle burns for 40 minutes before going out. How many candles are burning 55 minutes after he lit the first candle?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Marie calculates the average number of children in families in her village. Five families live in the village. Which answer could she not get?

(A) 1·0 (B) 1·2 (C) 1·3 (D) 1·4 (E) 2·0

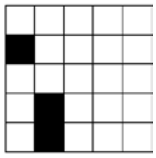
9. Tom and Laura stand directly opposite each other around a circular well. At the same time, they begin to run clockwise around the well. Tom's speed is $\frac{9}{8}$ of Laura's speed. How many time full laps of the well will laura run before Tom catches her for the first time?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 2 (E) 72

10. For the positive whole numbers *x, y, z* the following is true: $x \times y = 14$, $y \times z = 10$ und $z \times x = 35$. What is the value of $x + y + z$?

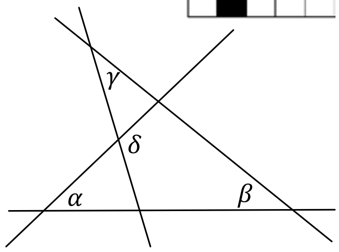
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

- 4 Point Questions -



11. Anne plays 'sink the ship' with a friend, on a 5×5 grid. She has already drawn in a 1×1 ship and a 2×2 ship (as shown in the picture). She must also draw a (rectangular) 3×1 ship. Ships may be neither directly nor diagonally adjacent to each other. How many possible positions are there for the 3×1 ship?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8



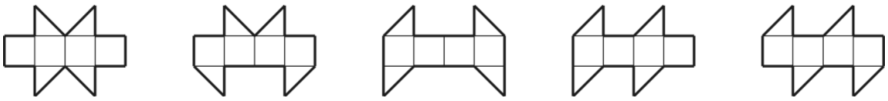
12. In the diagram pictured, $\alpha = 55°$, $\beta = 40°$ and $\gamma = 35°$. How big is δ?

(A) 100° (B) 105° (C) 120° (D) 125° (E) 130°

13. The perimeter of a trapezium is 5, and the side lengths are whole numbers. How many degrees do the smallest angles measure?

(A) 30° and 30° (B) 60° and 60° (C) 45° and 45° (D) 30° and 60° (E) 45° and 90°

14. The five shapes pictured were cut out of paper. Four of them can be folded to form a cube. For which shape is this not possible.



(A) Shape 1 (B) Shape 2 (C) Shape 3 (D) Shape 4 (E) Shape 5

15. Willi wrote down a few consecutive whole numbers. A certain percentage of these numbers are odd. Which of the following values cannot be the calculated percentage?

(A) 40% (B) 45% (C) 48% (D) 50% (E) 60%

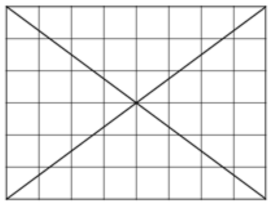
16. Aron, Ben and Carl always lie. Each of them picks a red or a green stone.

Aron says: "My stone has the same colour as Bens stone."
Ben says: "My stone has the same colour as Carls stone."
Carl says: "Exactly two of us have red stones."
Which of the following is correct?

(A) Arons stone is green. (B) Bens stone is green. (C) Carls stone is red.
(D) Arons stone and Carls Stone have different colours. (E) None of the possibilities are correct.

17. All four digit positive numbers, which have the same digits as 2013 were written on a blackboard in ascending order. Determine the largest possible difference between two consecutive numbers on the blackboard.

(A) 702 (B) 703 (C) 693 (D) 793 (E) 198



18. In the 8×6 grid pictured, there are 24 squares that have not been cut by either of the two diagonals. Now we draw the two diagonals on a 10×6 grid. How many squares in this grid will not be cut by either of the two diagonals?

(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31 (E) 32

19. Andi, Berti, Christa, Doris and Edi were born on the following days; 20.02.2000, 12.03.2000, 20.03.2000, 12.04.2000 and 23.04.2000 respectively. Andi and Edi have their birthday in the same month. Berti and Christa also have their birthday in the same month. Andi and Christa were born on the same day in different months. Doris and Edi were also born on the same day in different months. Which of these children is the youngest?

(A) Andi (B) Berti (C) Christa (D) Doris (E) Edi

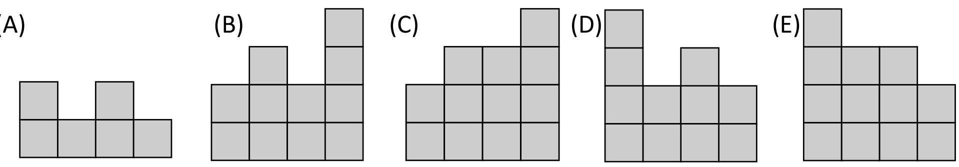
20. Johann stacked 1×1 cubes on the squares of a 4×4 grid. The diagram on the right shows the number of cubes that were stacked on top of each other above each square. What will Johann see if he looks from the back (hinten) at the tower?

HINTEN

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

VORNE

(A) (B) (C) (D) (E)

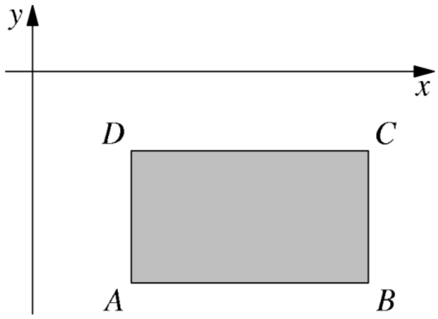


- 5 Point Questions -

21. Ralf wants to say a number to Karl, such that the product of its digits is exactly 24. What is the digit sum of the smallest number that Ralf can say?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

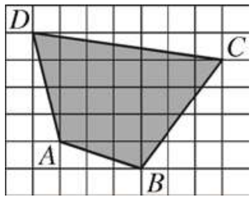
22. The sides of the rectangle ABCD are parallel to the co-ordinate axes. The rectangle is positioned below the x-axis and to the right of the y-axis, as shown in the picture. The co-ordinates of the points A, B, C, D are whole numbers. For each of the points we calculate the value of (y co-ordinate) ÷ (x co-ordinate). Which of the points will give the smallest value?



(A) A (B) B (C) C (D) D
(E) It depends on the rectangle.

23. On a sheet of paper a grid is drawn such that each of the squares has sides 2cm long. How big is the area of the grey shaded quadrilateral ABCD?

(A) 96 cm^2 (B) 84 cm^2 (C) 76 cm^2 (D) 88 cm^2 (E) 104 cm^2



24. Robert chose a five digit positive number. He removed one of the digits so that a four digit number remained. The sum of this four digit and the original five digit number is 52713. What is the digit sum of the original five digit number?

(A) 26 (B) 20 (C) 23 (D) 19 (E) 17

25. A gardener wants to plant a row of 20 trees (linden and oak) in a park. There must never be exactly three trees between any two oak trees. What is the maximum number of the 20 trees which could be oak?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

26. In the finishing order of a cross country race, there are twice as many runners behind Alex as there are before Daniel, and 1·5 as many behind Daniel as before Alex. Alex finished in 21st place. How many runners finished the race?

(A) 31 (B) 41 (C) 51 (D) 61 (E) 81

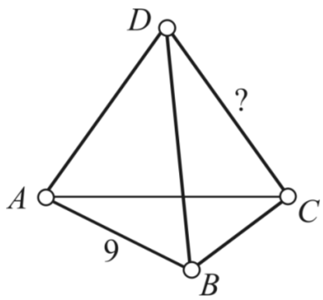
27. A sequence of numbers begins with 1, -1, -1, 1, -1. Each new number is found by taking the product of the two preceding numbers. For instance the sixth number is the product of the fourth and fifth numbers. What is the sum of the first 2013 numbers?

(A) –1006 (B) –671 (C) 0 (D) 671 (E) 1007

28. Dad made 6 pancakes, one after the other, and numbered them 1 to 6 in the order that they were made. Sometimes while he did this his children ran into the kitchen and ate the hottest pancakes. In which of the following orders could the pancakes not have been eaten.

(A) 123456 (B) 125436 (C) 325461 (D) 456231 (E) 654321

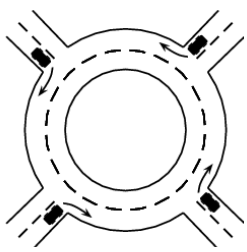
29. Each of the 4 vertices and 6 edges of a tetrahedron is labelled with one of the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 11. (The number 10 is left out). Each number is only used once. The number on each edge is the sum of the numbers on the two vertices which are connected by that edge. The edge AB has the number 9. With which number is the edge CD labelled?



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 11

30. Four cars drive into a roundabout at the same point in time, each one coming from a different direction (see diagram). No car drives all the way around the roundabout, and no two cars leave at the same exit. In how many different ways can the cars exit the roundabout?

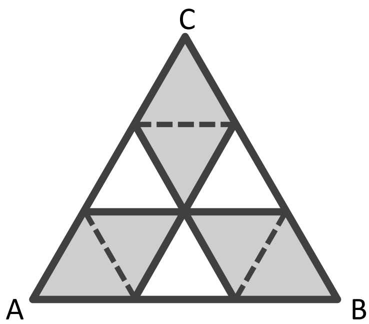
(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 24 (E) 81



Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Kadett (7./8. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

LÖSUNGEN

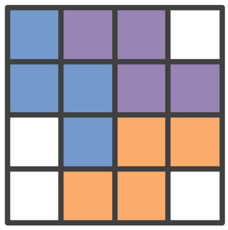
- 3 Punkte Beispiele -



1. Unterteilt man die grau gefärbten Teile des Dreiecks parallel zu den Dreiecksseiten (⇨ strichliert), erkennt man schnell, dass das große gleichseitige Dreieck ABC aus 9 kongruenten kleineren gleichseitigen Dreiecken besteht. Die drei grauen Flächen (= Rauten!) bedecken somit $\frac{6}{9}$ des großen Dreiecks ABC. Da $\frac{6}{9}$ von 9 = 6 gilt, folgt, dass Antwort D richtig ist.

2. Den zweiten Summanden bringt man durch Kürzen auf den gleichen Nenner und erhält dabei: $\frac{6666}{303} = \frac{2222}{101}$. Nun kann man weiter folgern, dass $\frac{3333}{101} + \frac{2222}{101} = \frac{5555}{101} = 5 \cdot \frac{1111}{101} = 5 \cdot 11 = 55$ gilt. Die richtige Lösung ist also D!

3. Zwischen Salz und Meerwasser besteht ein (Massen-)Verhältnis von 7 (kg) : 193 (kg); man kann sich überlegen, dass 193 kg ca. 5-Mal in 1000 kg Platz haben. Da es sich beim angegebenen Verhältnis um ein direkt proportionales handelt (je mehr Meerwasser, desto mehr Salz), muss auch die Masse des Salzes verfünffacht werden, was 7 kg · 5 = 35 kg ergibt. Dem Verhältnis 7 : 193 entspricht also (ungefähr) das Verhältnis 35 : 1000, womit A die richtige Antwort ist. Den kleinen Rundungsfehler kann man übrigens ruhig „in Kauf nehmen", da ja alle anderen möglichen Lösungen weit von der gesuchten abweichen.
Exakt(er)es Verhältnis: $7 : 193 = \frac{7}{193} \cdot 1000 : \frac{193}{193} \cdot 1000 \approx 36{,}27 : 1000$

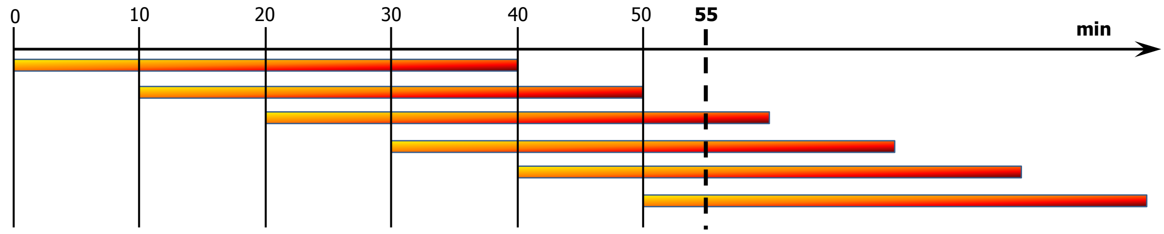


4. Wie Melanie ihre auszuschneidende Form auch dreht und wendet: Sie schafft es sicher nicht, mehr als drei dieser Figuren, die jeweils aus 4 kleinen Quadraten bestehen, aus dem großen quadratischen Stück Papier auszuschneiden (in der Abbildung siehst du eine solche Konstellation). Damit bleiben aber von den 4 · 4 = 16 Quadraten immer 4 übrig (16 – 3 · 4 = 4). Die richtige Lösung ist also C.

5. Wer sich hier nicht auf seine reine „Denkleistung" verlassen will, formuliert eine Gleichung, in der die Unbekannte x die Anzahl der tatsächlich von Matthias gefangenen Fische darstellt: 3x = x + 12. Durch Umformen (auf beiden Seiten x subtrahieren!) erhält man zunächst 2x = 12 und weiters (nach dem Dividieren der linken und rechten Seite durch 2) x = 6. Matthias hat also 6 Fische gefangen und bei einer dreifachen „Ausbeute" (3 · 6 = 18 Fische) wirklich um 12 Fische mehr, als er tatsächlich gefangen hat. Richtig ist somit Antwort B.

6. Ein besonderer „Glückpilz" könnte natürlich bereits nach 2-maligem Ziehen z.B. zwei weiße Kugeln erwischt haben. Um aber garantiert zwei Kugeln derselben Farbe zu erwischen, muss man vom „worst-case-Szenario" ausgehen, dass nämlich bei den ersten fünf Ziehungen lauter verschieden-farbige Kugeln dabei sind. Die Farbe der sechsten Kugel, die man dann aus dem Sack nimmt, muss – es gibt ja nur Kugeln in fünf verschiedenen Farben! – mit der Farbe einer zuvor gezogenen Kugel identisch sein. Einzig Lösung E ist somit richtig.
P.S.: Sicherlich ist dir auch aufgefallen, dass die richtige Lösung nicht von der Anzahl der Kugeln, sondern nur von der Anzahl unterschiedlicher Farben abhängt.

7. Alex entzündet bei seinem „Experiment“ zunächst eine Kerze und in Minute 10 die zweite, in Minute 20 die dritte, in Minute 30 die vierte, in Minute 40 die fünfte und schließlich in Minute 50 die sechste Kerze.
Da aber in Minute 40 die zu allererst angezündete Kerze bereits wieder erlosch und in Minute 50 auch die zweite Kerze nach 40-minütiger Brenndauer abgebrannt war, brennen nach 55 Minuten von den 6 angezündeten Kerzen nur mehr 4. Noch klarer erkennt man natürlich die richtige Antwort C, wenn man sich die Situation auf einer Zeitleiste veranschaulicht – 55 Minuten nach dem Start brennen noch 4 Kerzen:

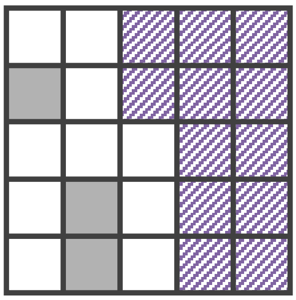


8. Kehrt man Maries Berechnung des arithmetischen Mittels um, muss ihr Ergebnis wieder mit 5 multipliziert werden. Nur im Fall C führt dies auf eine Zahl – nämlich $1{,}3 \cdot 5 = 6{,}5$ –, die nicht die Anzahl der im Dorf lebenden Kinder beschreiben kann.

9. Zu beachten gilt es hier, dass Tom und Laura nicht von der gleichen Position starten, sondern dass Laura sozusagen eine halbe Brunnen-Umrundung Vorsprung hat. Bezeichnen wir die Anzahl der (vollen) Runden, die Laura um den Brunnen gelaufen ist, bis Tom sie zum ersten Mal einholt, mit x, so hat Tom in derselben Zeit $\frac{9}{8}$ dieser Wegstrecke hinter sich gebracht (direkt proportionaler Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Weg!); berücksichtigt man noch den eingangs erwähnten Vorsprung Lauras von einer halben Brunnen-Runde, ergibt sich folgender Zusammenhang: $\frac{9}{8} \cdot x = x + \frac{1}{2}$. Dieser lässt sich über $\frac{1}{8} \cdot x = \frac{1}{2}$ zu $x = 4$ umformen. Nach 4 vollen Runden wird Laura also von Tom (erstmals) überholt. Richtig ist daher Lösung A.
Natürlich hätte man sich diese Lösung auch so überlegen können: Tom schafft während Laura einmal um den Brunnen läuft, eine volle Brunnen-Umrundung und noch einmal ein $\frac{1}{8}$ davon. Nach vier (vollen) Runden von Laura holt Tom sie ein, weil er dann $\frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u + \frac{1}{8}u = \frac{4}{8}u = \frac{1}{2}u$ genau ihren Vorsprung wettgemacht hat.

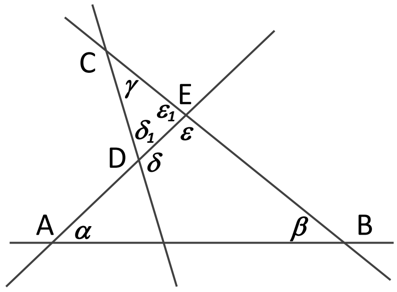
10. Am schnellsten kommt man hier weiter, wenn man sich die einzelnen Primfaktor-Zerlegungen anschaut: $x \cdot y = 14 = 7 \cdot 2$, $y \cdot z = 10 = 2 \cdot 5$ und $z \cdot x = 35 = 5 \cdot 7$; relativ schnell wird klar, dass für $x = 7$, $y = 2$ und $z = 5$ alle drei Gleichungen erfüllt sind. Somit ergibt die Summe $x + y + z = 7 + 2 + 5 = 14$, wodurch sich Antwort C als korrekte Lösung entpuppt. Freilich gibt es auch noch andere Lösungsansätze, die aber – mit mehr Aufwand verbunden – auf das gleiche Ergebnis hinauslaufen.

- 4 Punkte Beispiele -

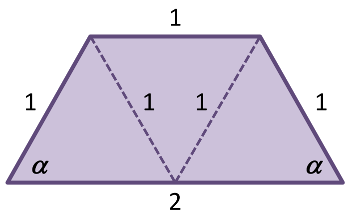


11. Auf Grund der Vorgabe, dass Schiffe weder direkt benachbart noch diagonal benachbart sein dürfen, kommt für die Platzierung des (rechteckigen) 3×1 Schiffes nur die in der Abbildung schraffierte Fläche des 5×5-Rasters in Frage. Dabei ergeben sich 2 waagrechte und 6 senkrechte, zusammen also 8 Positionierungsmöglichkeiten. Antwort E ist die gesuchte.

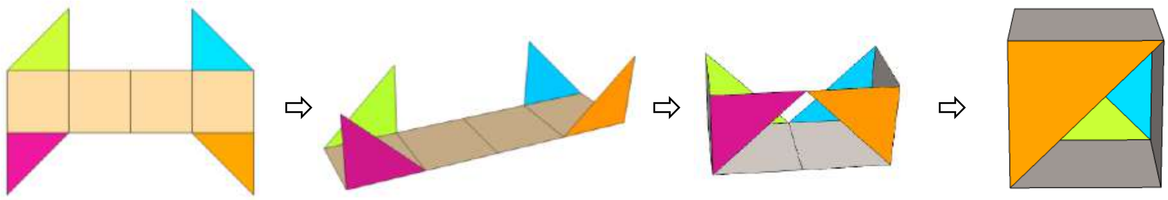
12. Die abgebildete Skizze ist leider nicht maßstabsgetreu. Mit dem GEO-Dreieck den Winkel δ zu messen, hilft uns daher nicht weiter; wir müssen uns der Lösung rechnerisch nähern:
Zunächst berechnet man sich über die Winkelsumme im Dreieck ABE den Winkel $\varepsilon = \angle AEB$: $\varepsilon = 180° - \alpha - \beta = 180° - 55° - 40° = 85°$; ε_1 ist zu ε supplementär, wodurch wir $\varepsilon_1 = 180° - \varepsilon = 180° - 85° = 95°$ erhalten.
Wieder über die Winkelsumme – jetzt aber im Dreieck CDE – ergibt sich für δ_1: $\delta_1 = \angle CDE = 180° - \gamma - \varepsilon_1 = 180° - 35° - 95° = 50°$; der gesuchte Winkel δ ist natürlich der Supplementär-Winkel zu Winkel δ_1: $\delta = 180° - \delta_1 = 180° - 50° = 130°$. Richtig ist daher Antwort E.



13. Laut Angabe ist für die Trapez-Form nur die in der Abbildung ersichtliche möglich: Die Basis ist 2 und die restlichen Seiten jeweils 1 lang: Es handelt sich also um ein so genanntes gleichschenkliges Trapez, in dem immer die zwei Winkel an der Basis gleich groß sind (gleiches gilt natürlich auch für die beiden gegenüberliegenden Winkel). Weil ja nach der Größe der beiden kleinsten Winkel gesucht ist, legen wir unser Augenmerk auf die beiden mit α bezeichneten spitzen Winkel an der Basis: Dazu verbindet man – wie in der Skizze durch strichlierte Linien angedeutet – die beiden oberen Ecken des Trapezes mit dem Mittelpunkt der Basis, und erkennt, dass sich unser Trapez aus drei gleichseitigen Dreiecken mit jeweils der Seitenlänge 1 zusammensetzt. Da in einem gleichseitigen Dreieck jeder Winkel immer 60° groß ist, wissen wir nun, dass für beide unserer gesuchten Winkel $\alpha = 60°$ und somit nur Antwort B gelten kann.



14. Mit etwas Phantasie und Vorstellungsvermögen – man muss ja immerhin Würfelnetze gedanklich falten! – kommt man drauf, dass Figur 3 (Antwort C) nicht zu einem Würfel gefaltet werden kann. Die „Spielverderber" hier sind die beiden dreieckigen Laschen, die in der Figur nach unten zeigen!
Spätestens dann, wenn man sich die einzelnen Faltvorgänge schrittweise veranschaulicht, sollte klar werden, dass sich die anfangs nach unten zeigenden Dreieckslaschen (pink & orange) schlussendlich überlappen und einen Blick in das Innere des (somit nicht vollständigen) Würfels gewähren:



15. Um zur richtigen Lösung zu gelangen, folgt man am besten einfach Willis Beispiel und schreibt „einige aufeinanderfolgende ganze Zahlen" auf und vergleicht dabei die Anzahl der ungeraden (rot & fett) zu den geraden (grün & kursiv) Zahlen:

Bsp. A: **3**; *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12* bzw. *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12*; **13** (Verhältnis ungerader zu geraden Zahlen ⇨ **5** : *5*)
Bsp. B: **3**; *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12*; **13** (Verhältnis ungerader zu geraden Zahlen ⇨ **6** : *5*)
Bsp. C: *4*; **5**; *6*; **7**; *8*; **9**; *10*; **11**; *12*; **13**; *14* (Verhältnis ungerader zu geraden Zahlen ⇨ **5** : *6*)

Auf Grund der alternierenden (= abwechselnden) Reihenfolge von ungeraden und geraden Zahlen muss es in einer von Willi fabrizierten Zahlenreihe offensichtlich gleich viele ungerade wie gerade Zahlen geben (Bsp. A) oder eine ungerade mehr (Bsp. B) bzw. weniger (Bsp. C) als gerade Zahlen. – Die jeweilige Situation hängt natürlich von der „Start-" bzw. „Endzahl" ab!
Möchte man nun herausfinden, welcher der fünf angegebenen Werte *nicht* den berechneten Prozentsatz der ungeraden Zahlen in Willis Zahlenreihe angeben kann, ergänzt man am besten jeden gegebenen Prozentsatz durch jenen der geraden Zahlen und kürzt dieses „Verhältnis" so weit wie möglich, d. h. durch den größten gemeinsamen Teiler (ggT):

Lösungs-möglichkeit	Prozentsatz ungerader Zahlen	Prozentsatz gerader Zahlen	Verhältnis (ungerade : gerade)	ggT	vollständig gekürztes Verhältnis (ungerade : gerade)
A	40%	60%	40 : 60	20	2 : 3
B	45%	55%	45 : 55	5	**9 : 11**
C	48%	52%	48 : 52	4	12 : 13
D	50%	50%	50 : 50	50	1 : 1
E	60%	40%	60 : 40	20	3 : 2

Wie man sieht, kann nur Fall B (Prozentsatz ungerader Zahlen: 45%) nicht auf die oben herausgearbeitete Eigenschaft (gleich viele ungerade wie gerade bzw. Unterscheidung der Anzahl ungerader und geraden Zahlen um 1) zurückgeführt werden.

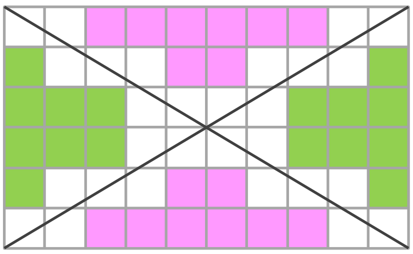
16. Da alle immer lügen, kann man aus Arons Aussage „Mein Stein hat dieselbe Farbe wie Bens Stein." folgern, dass sein und Bens Stein sich farblich unterscheiden. Dasselbe gilt auch für die Aussage von Ben („Mein Stein hat dieselbe Farbe wie Carls Stein."): Auch sein Stein und der von Carl haben unterschiedliche Farbe.
Aus der Ungleichungskette „Farbe von Arons Stein ≠ Farbe von Bens Stein ≠ Farbe von Carls Stein" lässt sich nun aber – auf Grund des Vorwissens, dass jeder von ihnen entweder einen roten oder grünen Stein besitzt – schließen, dass die Farbe von Arons und Carls Stein identisch sein muss. Schließlich klärt die (falsche) Aussage von Carl („Genau zwei von uns haben rote Steine.") die ganze Lügengeschichte auf: Die zwei Steine von Aron und Carl müssen grün sein! Somit ist Antwort A richtig.

17. Für die Belegung der Tausender-Stelle kommen nur 1, 2 & 3 in Frage. Ist diese Position nun besetzt, so kann die Hunderter-Stelle von zwei der restlichen Ziffern und der Null, die jetzt „zugelassen" ist, eingenommen werden. Sind die ersten beiden Stellen der vierstelligen Zahl nun besetzt, reduziert sich die Auswahlmöglichkeit für die Zehner-Stelle auf zwei Ziffern und nach deren Belegung muss die verbliebene Ziffer den Platz an der Einer-Stelle einnehmen: Insgesamt ergeben sich damit $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ unterschiedliche Konstellationen für die genannten Ziffern (in aufsteigender Reihenfolge):

1023		$\boxed{2013}$		$\boxed{3012}$
1032		2031		3021
1203		2103		3102
1230	±693	2130	±702	3120
1302		2301		3201
$\boxed{1320}$		$\boxed{2310}$		3210

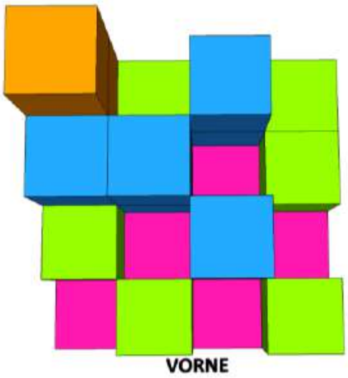
Ohne alle Differenzen zu berechnen: Die größten Differenzen ergeben sich logischerweise beim Wechsel der Tausender-Ziffer! Die größtmögliche ist demnach 702, also Antwort A.

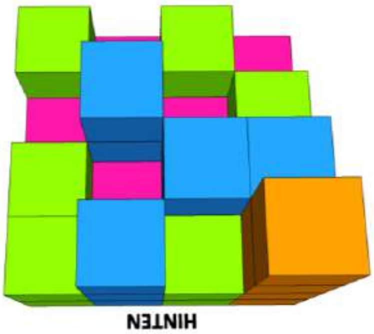
18. Am einfachsten kommen wir hier zur richtigen Lösung, indem wir auf kariertem Papier ein 10x6 Raster und dessen Diagonalen einzeichnen; anschließend zählen wir die nicht von den Diagonalen geschnittenen Kästchen ab: Sowohl im linken und rechten (grün eingefärbt) als auch im oberen und unteren (rosa eingefärbt) entstandenen Dreieck gibt es jeweils 8 „unberührte" Zellen. In Summe macht das 32, was auf die Antwort E schließen lässt.

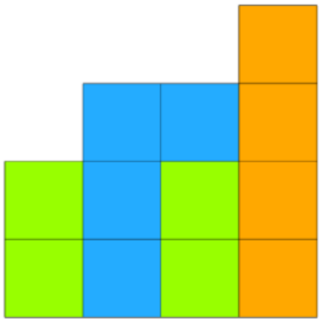


19. Vorab überlegt man sich, dass jenes Kind, das am 23. April 2000 geboren worden ist, am jüngsten sein muss. Die Information, dass sowohl Andi und Christa als auch Doris und Edi am selben Tag in verschiedenen Monaten geboren wurden, reicht aus, um Berti den Geburtstag 23.04.2000 zuordnen zu können. Somit ist die einzig mögliche Lösung die Antwort B.
P.S.: Wie wir sehen, sind die anfangs getätigten Aussagen „Andi und Edi haben im selben Monat Geburtstag." bzw. „Berti und Christa haben ebenfalls im selben Monat Geburtstag." für das Lösen der Aufgabe unwichtig!

20. Visualisiert man sich das Würfelturm-Gebilde (Türme gleicher Höhe sind in derselben Farbe dargestellt) und betrachtet es von vorne und auch von hinten aus der Vogelperspektive, so wird relativ rasch klar, dass Johann Bild C (vgl. „Ansicht von HINTEN“) sehen muss, wenn er von hinten auf die Türme schaut. Um ohne 3D-Visualisierung auf die richtige Lösung C zu stoßen, benötigt es schon einiges an Vorstellungskraft!



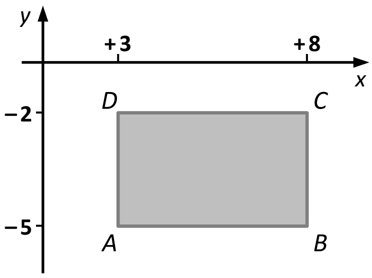



Ansicht von HINTEN

- 5 Punkte Beispiele -

21. Betrachtet man die Primfaktor-Zerlegung von 24 = 2 · 2 · 2 · 3, dann würde natürlich 2223 (und – unter Berücksichtigung des Vertauschungsgesetzes für die Multiplikation auch 2232, 2322 & 3222) die Auflage erfüllen, dass das Produkt der Ziffern 24 ergibt. Da wir aber nach der kleinsten Zahl suchen, die diese Eigenschaft hat, versuchen wir Teilprodukte der Primfaktor-Zerlegung von 24 (mit möglichst wenig Faktoren) zu bilden; dabei müssen wir darauf achten, dass keiner der Faktoren zweistellig ist, da z. B. zwar 24 = 2 · 12 gilt, das Produkt aus 212 aber nicht 24 liefert! 24 = 3 · 8 = 8 · 3 [⇨ 38 & 83] und 24 = 4 · 6 = 6 · 4 [⇨ 46 & 64]. Die kleinste Zahl, die also Ralf Karl nennen kann ist offensichtlich 38, deren Ziffernsumme 11 ergibt. Antwort E ist also die gesuchte!

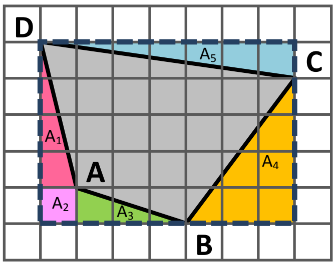
22. Das Zuweisen konkreter (und realistischer) Koordinaten für die Punkte ABCD (vgl. Abb.) und dem Berechnen des angeführten Bruches führt hier sicher am schnellsten zum richtigen Ergebnis (A). Betrachten wir diese Aufgabe trotzdem auch allgemein: Es ist hilfreich, sich zunächst zu überlegen, dass das Rechteck ABCD vollständig im 4. Quadranten liegt. Für Punkte, die darin liegen gilt, dass die x-Koordinate immer positiv (x > 0), die y-Koordinate hingegen immer negativ (y < 0) ist. Folglich ist auch für die Eckpunkte des Rechtecks der Bruch $\frac{\text{y−Koordinate}}{\text{x−Koordinate}}$ sicherlich negativ; eine negative Zahl ist aber umso kleiner, je weiter links sie auf der Zahlengeraden liegt oder – anders gesagt – je größer ihr Betrag ist (Beispielsweise ist -9 kleiner als -3, da ja |-9| = 9 größer |-3| = 3 gilt.)! Da wir einen (negativen!) Bruch suchen, der möglichst klein ist, müssen wir müssen also einen Bruch finden, der dem Betrag nach möglichst groß ist; das ist aber genau dann der Fall, wenn der Betrag der y-Koordinate möglichst groß und die x-Koordinate möglichst klein wird.



|y-Koordinate| ⇨ möglichst groß: Für A & B ist der Betrag der y-Koordinate [= Entfernung zur x-Achse] größer als der von D & C, die damit ausscheiden!

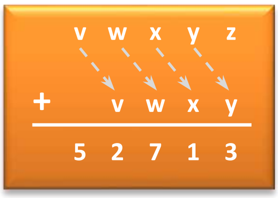
x-Koordinate ⇨ möglichst klein: Am nächsten zur y-Achse liegen A & D (sie haben also eine kleinere x-Koordinate als B & C).

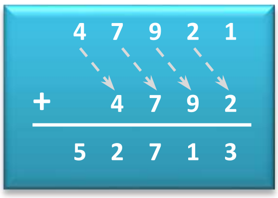
Die dem Betrag nach größtmögliche y-Koordinate und zugleich kleinstmögliche x-Koordinate weist also der Eckpunkt A auf. Die korrekte Lösung ist daher (ebenfalls) A.



23. Die einfachste Methode, um in dieser Aufgabe ans Ziel zu gelangen, ist es, dem grau eingefärbten Viereck ein Rechteck umzuschreiben, dessen Seiten parallel zu den Raster-Linien verlaufen (s. Abb.). Zieht man die so entstandenen fünf „Randflächen" (4 rechtwinklige Dreiecke & 1 Quadrat) von diesem Rechteck ab, erhält man die Fläche des gegebenen Vierecks:
$A_{grau} = A_{Rechteck} - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = 10 \cdot 14 - (\frac{8\cdot 2}{2} + 2 \cdot 2 + \frac{6\cdot 2}{2} + \frac{6\cdot 8}{2} + \frac{14\cdot 2}{2}) =$
$= 140 - (8 + 4 + 6 + 24 + 14) = 140 - 56 = 84\ cm^2$. Die richtige Fläche ist also in Antwort B angegeben.

24. Der „Schlüssel" zum Lösen dieser Aufgabe ist die Beobachtung, dass die Einerstelle der Summe (5271<u>3</u>) aus der vier- und fünfziffrigen Zahl ungerade ist, weshalb Robert in der ursprünglich fünfziffrigen Zahl die Einerziffer entfernt haben muss. – In allen anderen Fällen würden die vier- und fünfziffrige Zahl nämlich auf dieselbe Ziffer enden, deren Addition ausnahmslos eine gerade (!) Zahl liefern würde (s. linke Grafik). Mit etwas Tüfteln und Probieren kommt man relativ schnell zur richtigen Lösung (s. rechte Grafik). Die Ziffernsumme der ursprünglich fünfziffrigen Zahl ist demnach 4 + 7 + 9 + 2 + 1 = 23. Es stimmt also Lösung C.



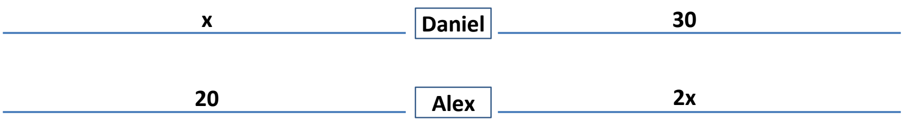


25. Symbolisieren wir einmal die zwanzig in einer Reihe stehenden Bäume mit Kreisen und nummerieren sie:

Da wir möglichst viele Eichen unterbringen wollen, beginnen wir – solange dies die Regel, dass zwischen zwei beliebigen Eichen nicht 3 Bäume stehen dürfen, erlaubt – Eichen (schwarz ausgefüllte Kreise) zu setzen:

Wir erkennen nun, dass an Position 5 keine Eiche mehr gepflanzt werden darf; sonst würde diese nämlich mit der Eiche an der 1. Stelle genau drei [beliebige] Bäume einschließen, was ja nicht zugelassen ist. Aus den gleichen Gründen stehen an den Positionen 6 bis 8 keine Eichen, sondern Linden. Setzt man dieses „Pflanzmuster" fort, finden im Park 12 Eichen (und 8 Linden) Platz. Die Antwort C ist die gesuchte:

26. Man weiß: Alex beendete den Geländelauf an Position 21; somit lagen 20 seiner Konkurrenten vor ihm. Aus der Information, dass 1,5-mal so viele Läufer hinter Daniel wie vor Alex lagen, ist nun aber auch bekannt, dass 20 · 1,5 = 30 hinter Daniel lagen. Aus der ersten Aussage kann man schließen, dass die Anzahl der Läufer hinter Alex doppelt so groß sein muss (⇨ 2x) wie die Anzahl jener, die vor Daniel lagen (⇨ x). Schematisch dargestellt, schaut die Situation bis jetzt folgendermaßen aus:

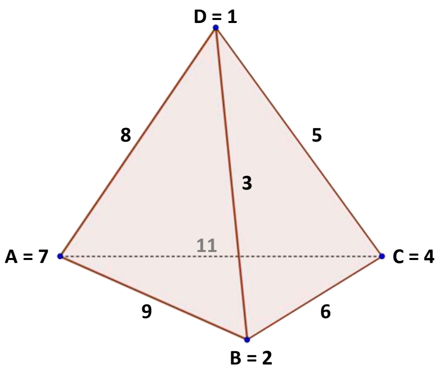


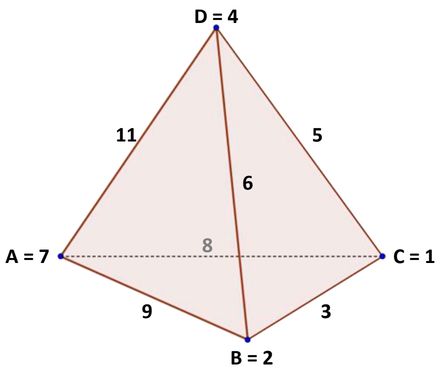
Da Alex und Daniel ja am selben Rennen teilgenommen haben, muss sich die Anzahl in beiden dargestellten Ranglisten entsprechen: x + 1 + 30 = 20 + 1 + 2x. Durch Umformen erhält man x = 10, woraus man schließen kann, dass insgesamt 20 Läufer sich hinter Alex platzierten. Die Teilnehmerzahl betrug demnach 41 (Antwort B). Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, dass Daniel als 11. – also 10 Läufer vor Alex – ins Ziel kam.

27. Setzen wir die Zahlenfolge zunächst einmal nach dem beschriebenen Bildungsprinzip fort (zur Verdeutlichung schreiben wir für eine positive 1 auch das Vorzeichen an):
+ 1; – 1; – 1; | + 1; – 1; – 1; | + 1; – 1; – 1; | + 1; – 1; – 1; | + 1; – 1; – 1; | + 1; – 1; – 1; | + 1; – 1; – 1; …
Wir sehen, dass sich die Vorzeichen der Einsen nach einem periodischen Muster (+ | – | –) wiederholen. Damit ist aber auch sofort klar, dass die Summe eines einzelnen Dreier-Blocks – 1 ergibt. Da die ersten 2013 Zahlen dieser Folge aber genau aus 2013 : 3 = 671 solcher 3er-Blöcke bestehen, muss – 1 insgesamt 671-mal addiert werden, was auf die Multiplikation (– 1) · 671 = – 671 hinausläuft. Das richtige Ergebnis ist also B.

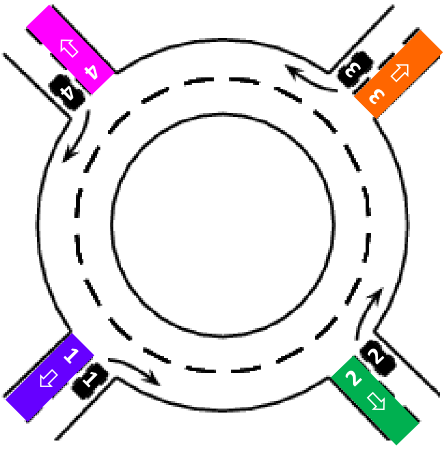
28. Um nicht den Überblick zu verlieren, stellen wir uns vor, dass Papa seine Palatschinken übereinander auf einem Teller stapelt. Somit liegt immer das zuletzt entstandene – und somit heißeste – Omelett an oberster Stelle. Würde also Papa alle seine sechs Palatschinken ungestört backen können, so läge der in der Abbildung gezeigte Fall vor: Die Kinder starten erst nach dem Entstehen des sechsten Pfannkuchens mit dem Verzehr und essen sich dann bis zum ersten durch (6 ⇨ 5 ⇨ 4 ⇨ 3 ⇨ 2 ⇨ 1; vgl. E). Im Fall A – umgekehrte Reihenfolge – stürmen die Kinder immer unmittelbar nach dem Entstehen jeder einzelnen Palatschinke in die Küche und verspeisen sie umgehend (1 ⇨ 2 ⇨ 3 ⇨ 4 ⇨ 5 ⇨ 6). – Auch diese Situation ist also vorstellbar. Im Fall B werden Omelett 1 und 2 direkt nach ihrem jeweiligen Entstehen verzehrt; Papa produziert dann Nummer 3, 4 & 5, bis seine Kinder wieder der Hunger packt und sie diese der Reihe nach – noch vor dem Entstehen der 6. Palatschinke – essen (1 ⇨ 2 ⇨ 5 ⇨ 4 ⇨ 3 ⇨ 6). Auch der Fall C kann eintreten: Nach dem Entstehen der 3. Palatschinke verspüren die Kinder Heißhunger auf zwei Palatschinken, kehren erneut nach dem Backen zweier weiterer Pfannkuchen (4 & 5) zurück, verspeisen diese und verlassen wieder die Küche. Erst nach dem Fertigstellen der letzten Palatschinke suchen sie erneut die Küche auf, um sich zunächst das (heißere) sechste und schließlich das mittlerweile schon etwas abgekühlte erste Omelett zu „genehmigen“ (3 ⇨ 2 ⇨ 5 ⇨ 4 ⇨ 6 ⇨ 1).
Fall D, den wir noch nicht untersucht haben, muss also jene Reihenfolge angeben, in der die Palatschinken nicht gegessen worden sein können. – Wir überlegen uns: Offensichtlich stillen Papas Schützlinge ihre Lust auf Pfannkuchen erst nachdem bereits Nummer 4 gebacken worden ist. Sie verspeisen nur die heißeste (= vierte) Palatschinke, verlassen wieder die Küche und wiederholen dieses „Ritual“ auch für Nummer 5 & 6. Auf dem Teller muss aber nun an oberster Stelle die 3. (und nicht die 2.) Palatschinke liegen, die von den verbleibenden Pfannkuchen auch noch am heißesten ist; die Folge 4 ⇨ 5 ⇨ 6 ⇨ <u>2</u> ⇨ <u>3</u> ⇨ 1 (Antwort D) kann nicht stimmen.

29. Ausgehend von der Kante AB, belegt man deren Eckpunkte A und B mit den möglichen Zerlegungen von 9 (1 + 8; 2 + 7; 3 + 6; 4 + 5). Bis auf A = 7 und B = 2 führen alle Kombinationen früher oder später zu einem Widerspruch. Da die höchste Zahl 11 nicht an einem der Eckpunkte des Tetraeders platziert werden darf (jede Addition von 11 und einer noch zur Verfügung stehenden Zahl würde eine Summe größer 11 ergeben!), setzen wir sie an eine von A ausgehende Kante: entweder AC (s. linke Abb.) oder AD (s. rechte Abb.). – Die Positionierung an einer von B ausgehenden Kante ist nicht möglich, da wir am gegenüberliegenden Eckpunkt die Zahl 9 (11 – 2) benötigen würden, die aber bereits vergeben ist. Das Verteilen der restlichen Zahlen ist nun nicht mehr ganz schwierig: Die Kante CD ist in beiden dargestellten mit der Zahl 5 markiert (Lösung B).
P.S.: Da 7 & 2 anfangs auch vertauscht platziert werden können, gibt es noch 2 weitere Tetraeder-Belegungen.





30. Um uns einen Überblick über die Situation zu verschaffen, nummerieren wir anfangs die Ausfahrten von 1 bis 4 und weisen gleichzeitig jedem der vier Autos, das aus der jeweiligen Ausfahrt in den Kreisverkehr einfährt dieselbe Zahl zu (s. Kreisverkehr-Grafik). Vorweg überlegen wir uns noch, dass alle Ausfahrten nur von einem Auto benutzt werden („… keine zwei Autos verlassen den Kreisverkehr bei derselben Ausfahrt.“) und kein Auto in jene Richtung den Kreisverkehr verlassen kann, aus der es in diesen einfuhr („Kein Auto fährt im Kreisverkehr eine ganze Runde …“).
Auto 1 muss den Kreisverkehr also über Ausfahrt 2, 3 oder 4 wieder verlassen – diese Situation siehst du in der 1. Spalte der Tabelle dargestellt. Im Fall, dass Auto 1 die Abfahrt 2 benützt, gibt es auch für Auto 2 drei verschiedene Ausfahrtmöglichkeiten, nämlich 3, 4 & 1. Andernfalls reduzieren sich für Auto 2 die Auswahlmöglichkeiten den Kreisverkehr zu verlassen auf (jeweils) zwei Fälle, da es ja die „eigene“ Ausfahrt 2 nicht benutzen darf (⇨ 2. Spalte).
Mit Hilfe ähnlicher Überlegungen können nun auch noch die verbleibenden Arten der Ausfahrtmöglichkeiten für Auto 3 (⇨ 3. Spalte) und Auto 4 (⇨ 4. Spalte) aufgelistet werden. Insgesamt können neun unterschiedliche Konstellationen eintreten. Richtig ist daher Lösung A.



Ausfahrt

1	2	3	4	Fälle
2	3	1	4	
		4	1	1.
	4	1	3	2.
	1	4	3	3.
3	4	1	2	4.
		2	1	5.
	1	4	2	6.
		2	4	
4	3	1	2	7.
		2	1	8.
	1	2	3	9.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2013
21.3.2013

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9-10

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Stadtgemeinde
Pressbaum

pwc

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2013" an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2015 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung: Vor- und Zuname des Teilnehmers sowie des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat, Schulstufe und Schule (genaue Adresse), Jahr des Wettbewerbs. Nach dem 31. Dezember 2015 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

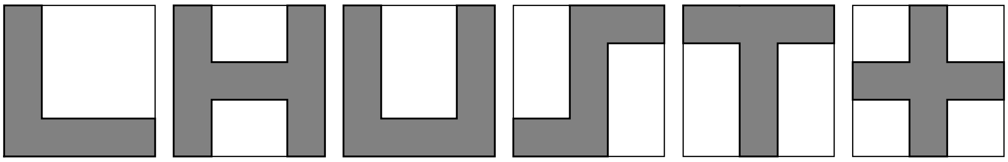
Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Junior (9.-10. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

- 3 Punkte Beispiele -

1) Welche Zahl ist kein Teiler von 200013 – 2013?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

2) Maria hat sechs gleich große quadratische Zeichenblätter. Auf jedes Blatt zeichnet sie jeweils eine der dargestellten Figuren. Wie viele dieser Figuren haben den gleichen Umfang wie ein solches Zeichenblatt?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Maiskolben im Sonderangebot!
1 Maiskolben 20 Cent
Jeder 6. Kolben gratis!

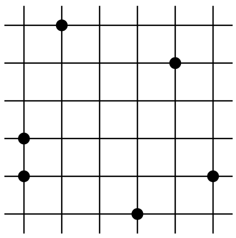
3) Frau Maisl kauft für jedes Mitglied ihrer vierköpfigen Familie vier Maiskolben und erhält den angebotenen Rabatt. Wie viel bezahlt sie?

(A) 0,80 € (B) 1,20 € (C) 2,80 € (D) 3,20 € (E) 80 €

4) Das Produkt von drei der Zahlen 2, 4, 16, 25, 50, 125 ist 1000. Wie groß ist die Summe dieser drei Zahlen?

(A) 70 (B) 77 (C) 131 (D) 143 (E) 177

5) In einem quadratischen Gitter aus lauter Einheitsquadraten sind sechs Punkte wie in der Abbildung gekennzeichnet. Drei davon bilden ein Dreieck mit kleinster Fläche. Wie groß ist dieser kleinste Flächeninhalt?

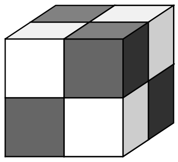


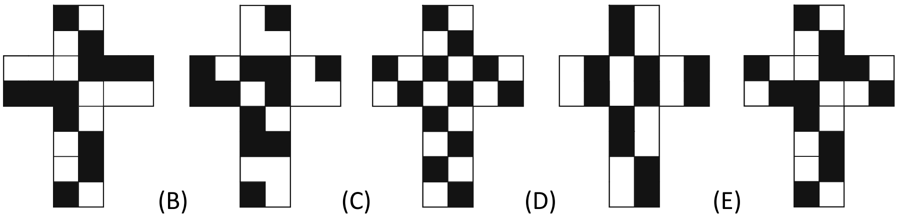
(A) 1/2 (B) 1/3 (C) 1/4 (D) 1 (E) 2

6) Wenn man 4^{15} und 8^{10} addiert, erhält man eine Zahl, die eine Zweierpotenz ist. Bestimme diese Zahl!

(A) 2^{10} (B) 2^{15} (C) 2^{20} (D) 2^{30} (E) 2^{31}

7) Ein Würfel ist bemalt, als wäre er aus vier weißen und vier schwarzen Würfeln zusammengesetzt, wobei keine gleichfarbigen Würfel nebeneinander liegen (siehe Abbildung). Welche der folgenden Figuren ist ein mögliches Netz dieses bemalten Würfels?



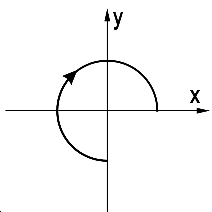


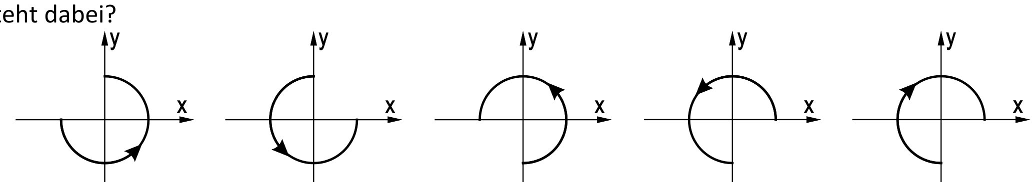
(A) (B) (C) (D) (E)

8) Die Zahl n ist die größte natürliche Zahl, für die 4n dreistellig ist, und m ist die kleinste natürliche Zahl, für die 4m dreistellig ist. Welchen Wert hat 4n – 4m?

(A) 900 (B) 899 (C) 896 (D) 225 (E) 224

9) In der Zeichnung sehen wir einen Dreiviertelkreis mit Mittelpunkt M und eingezeichnetem Orientierungspfeil. Dieser Dreiviertelkreis wird zuerst um 90° gegen den Uhrzeigersinn um M gedreht und dann an der x – Achse gespiegelt. Welches Bild entsteht dabei?





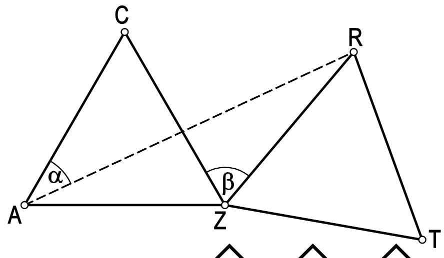
(A) (B) (C) (D) (E)

10) Welche der folgenden Zahlen ist die größte?

(A) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{20}\cdot 13$ (C) $20\cdot\sqrt{13}$ (D) $\sqrt{201}\cdot 3$ (E) $\sqrt{2013}$

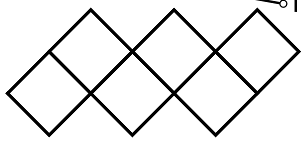
- 4 Punkte Beispiele -

11) Das Dreieck RZT entsteht durch Drehung des gleichseitigen Dreiecks AZC um den Punkt Z. Es gilt $\beta = \angle CZR = 70°$. Bestimme den Winkel $\alpha = \angle CAR$.



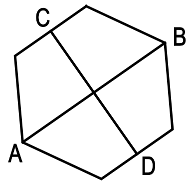
(A) 20° (B) 25° (C) 30° (D) 35° (E) 40°

12) Nebenstehende Figur besteht aus sechs Einheitsquadraten. Ihr Umfang beträgt 14 cm. An diese Figur werden so lange auf gleiche Art Quadrate angehängt, bis sie aus 2013 Einheitsquadraten besteht (zick-zack: abwechselnd rechts unten und oben). Wie groß ist der Umfang der so entstandenen Figur?



(A) 2022 (B) 4028 (C) 4032 (D) 6038 (E) 8050

13) A und B sind gegenüberliegende Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks, die Punkte C und D sind die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten. Der Flächeninhalt des regelmäßigen Sechsecks ist 60. Bestimme das Produkt der Längen der Strecken AB und CD!

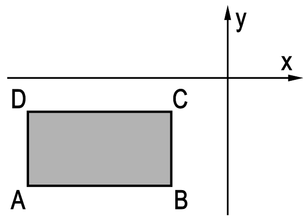


(A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 80 (E) 100

14) In einer Klasse wurde ein Test geschrieben. Wenn jeder Knabe um 3 Punkte mehr erreicht hätte, wäre der Punktedurchschnitt um 1,2 Punkte höher als jetzt. Wie viel Prozent der Kinder dieser Klasse sind Mädchen?

(A) 20% (B) 30% (C) 40% (D) 60% (E) Es ist zu wenig Information bekannt um dies zu bestimmen.

15) Die Seiten des Rechtecks ABCD sind parallel zu den Koordinatenachsen. Das Rechteck liegt unterhalb der x-Achse und links der y-Achse, wie in der Abbildung zu sehen ist. Für jeden dieser Punkte A, B, C, D wird der Quotient (y-Koordinate):(x-Koordinate) gebildet.
Für welchen Punkt erhält man den kleinsten Quotienten?

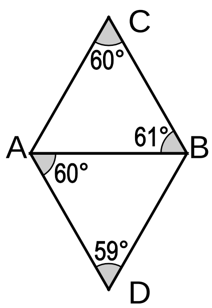


(A) A (B) B (C) C (D) D
(E) Es hängt von der Position des Rechtecks und von seinen Seitenlängen ab.

16) Hans und sein Sohn haben heute Geburtstag. Hans multipliziert sein Alter mit dem Alter seines Sohnes und erhält 2013. In welchem Jahr wurde Hans geboren?

(A) 1952 (B) 1953 (C) 1981 (D) 1982
(E) Es ist mehr Information notwendig um die Frage beantworten zu können.

17) Tarzan wollte aus zwei gleichseitigen Dreiecken einen Rhombus zeichnen. Er hat die Strecken ungenau aufgetragen. Als Jane die vier eingezeichneten Winkel nachmisst, stellt sie fest, dass sie nicht gleich groß sind (siehe Zeichnung). Welche der fünf eingezeichneten Strecken in dieser Figur ist die längste?

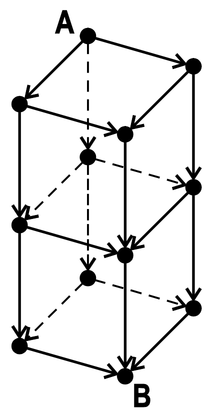


(A) AD (B) AC (C) AB (D) BC (E) BD

18) Fünf aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen haben folgende Eigenschaft: Die Summe von drei dieser Zahlen ist gleich groß wie die Summe der beiden anderen. Wie viele Mengen mit 5 solchen Zahlen gibt es?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) mehr als 3

19) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, in der dargestellten Figur von Punkt A zu Punkt B zu gelangen, wenn man sich nur in Pfeilrichtung bewegen darf?



(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 15

20) Gegeben ist eine sechsstellige Zahl, deren Ziffernsumme gerade und deren Ziffernprodukt ungerade ist. Welche der folgenden Behauptungen gilt für diese Zahl?

(A) Zwei oder vier Ziffern dieser Zahl sind gerade.
(B) Eine solche Zahl gibt es nicht.
(C) Die Anzahl der ungeraden Ziffern dieser Zahl ist ungerade.
(D) Die Zahl kann aus 6 verschiedenen Ziffern bestehen.
(E) Keine der Behauptungen (A) – (D) trifft zu.

- 5 Punkte Beispiele -

21) Wie viele Nachkommastellen sind nötig, um die Zahl $\frac{1}{1024000}$ als Dezimalzahl darzustellen?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 1024000

22) Die Jahreszahl 2013 ist aus den vier aufeinanderfolgenden Ziffern 0, 1, 2, 3 aufgebaut. Wie viele Jahre vor dem Jahr 2013 war die Jahreszahl zum letzten Mal aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern aufgebaut?

(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

23) Wir betrachten Rechtecke, bei denen eine Seite 5,0 cm lang ist. Unter ihnen gibt es welche, die man so zerschneiden kann, dass man ein Quadrat und ein Rechteck erhält, wobei einer der beiden Teile den Flächeninhalt 4,0 cm² hat. Wie viele derartige Rechtecke gibt es?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24) "Summenänderung" nennen wir jenen Vorgang, bei dem in einer Menge von drei Zahlen jede Zahl durch die Summe der beiden anderen ersetzt wird. So entsteht etwa aus {3, 4, 6} die Menge {10, 9, 7} und daraus wiederum {16, 17, 19}. Ausgangspunkt sei nun die Menge {1, 2, 3}. Wie viele solche Summenänderungen braucht man, damit 2013 in der Menge auftritt?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 2013 kommt öfter vor. (E) 2013 kommt niemals vor.

25) Es sei Q die Anzahl der Quadratzahlen unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 2013^6 und K die Anzahl der dritten Potenzen (Kubikzahlen) unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 2013^6. Dann gilt:

(A) $Q = 2013 \cdot K$ (B) $2Q = 3K$ (C) $3Q = 2K$ (D) $Q = K$ (E) $Q^3 = K^2$

26) Mit den Zahlen 1, 2, 3, …, 22 werden 11 Brüche $\frac{a}{b}$ gebildet, wobei jede Zahl genau einmal verwendet wird. Wie viele Brüche mit ganzzahligen Werten kann man dabei höchstens erhalten?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

27) Je drei Eckpunkte eines regelmäßigen 13-Ecks werden zu einem Dreieck verbunden. Bei wie vielen dieser Dreiecke liegt der Umkreismittelpunkt des 13-Ecks innerhalb des Dreiecks?

(A) 72 (B) 85 (C) 91 (D) 100 (E) eine andere Anzahl

28) Ein Auto startet in Punkt A und fährt auf einer geradlinig verlaufenden Straße mit 50 km/h. Nach jeweils einer Stunde verlässt wieder ein Auto Punkt A, dessen Geschwindigkeit um 1 km/h größer ist als die des vorhergehenden. Das letzte Auto verlässt A 50 Stunden nach dem ersten und fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h. Wie groß ist die Geschwindigkeit jenes Autos, das 100 Stunden nach dem Start des ersten Autos an vorderster Position fährt?

(A) 50 km/h (B) 66 km/h (C) 75 km/h (D) 84 km/h (E) 100 km/h

29) 100 Bäume (Eichen und Birken) stehen in einer Reihe. Die Anzahl der Bäume zwischen je zwei Eichen ist ungleich 5. Wie viele von den 100 Bäumen können höchstens Eichen sein?

(A) 60 (B) 52 (C) 50 (D) 48 (E) Diese Situation ist nicht möglich.

30. Eine positive ganze Zahl N ist kleiner als die Summe ihrer drei größten echten Teiler (N selbst ist kein echter Teiler von N). Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(A) Alle solchen Zahlen N sind durch 7 teilbar.
(B) Alle solchen Zahlen N sind durch 6 teilbar.
(C) Alle solchen Zahlen N sind durch 5 teilbar.
(D) Alle solchen Zahlen N sind durch 4 teilbar.
(E) Eine solche Zahl N gibt es gar nicht.

MATHEMATICS KANGAROO 2013
Austria - 21.3.2013

Group: Junior, Grades: 9-10

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 75 min.
Each correct answer, questions 1.-10.: 3 Points
Each correct answer, questions 11.-20.: 4 Points
Each correct answer, questions 21.-30.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 30 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the question number (1 to 30). Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2013“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2015 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung: Vor- und Zuname des Teilnehmers sowie des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat, Schulstufe und Schule (genaue Adresse), Jahr des Wettbewerbs. Nach dem 31. Dezember 2015 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

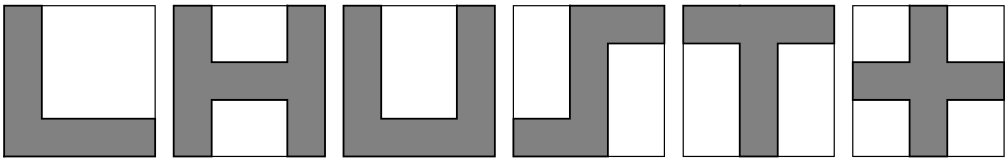
Mathematical Kangaroo 2013
Group Junior (Grade 9./10.)
Austria - 21.3.2013

- 3 Point Questions -

1) Which of the numbers is not a factor of 200013 – 2013?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

2) Maria has six equally big square pieces of plain paper. On each piece of paper she draws one of the figures shown below. How many of these figures have the same perimeter as the plain piece of paper itself?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

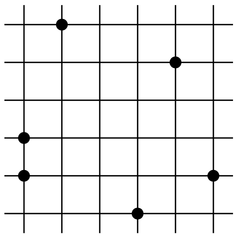
Special corn-on-the-cob offer!
1 Cob 20 Cent
Every 6th cob free!

3) Mrs. Maisl buys four pieces of corn-on-the-cob for each of the four members of her family and get the discount offered. How much does she end up paying?

(A) 0.80 € (B) 1.20 € (C) 2.80 € (D) 3.20 € (E) 80 €

4) The product of three numbers out of the numbers 2, 4, 16, 25, 50, 125 is 1000. How big is the sum of those three numbers?

(A) 70 (B) 77 (C) 131 (D) 143 (E) 177

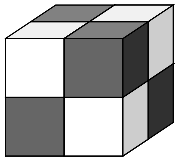


5) On a square grid made up of unit squares, six points are marked as shown on the right. Three of which form a triangle with the least area. How big is this smallest area?

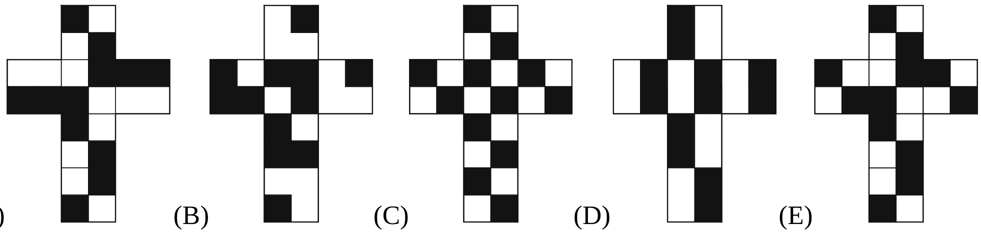
(A) 1/2 (B) 1/3 (C) 1/4 (D) 1 (E) 2

6) If you add 4^{15} and 8^{10}, you obtain a number that is a power of two. Determine that number!

(A) 2^{10} (B) 2^{15} (C) 2^{20} (D) 2^{30} (E) 2^{31}



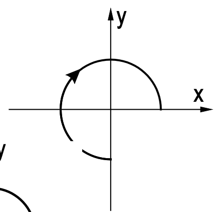
7) A cube is coloured on the outside as if it was made up of four white and four black cubes where no cubes of the same colour are next to each other (see picture).
Which of the following figures represents a possible net of the coloured cube?



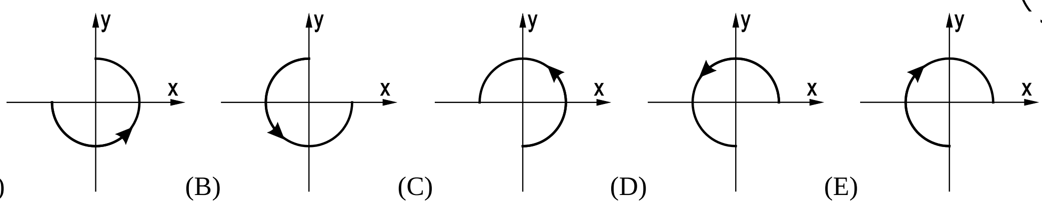
(A) (B) (C) (D) (E)

8) The number n is the biggest natural number for which 4n is three-digits long and m is the smallest natural number for which 4m is three-digits long. Which value does 4n – 4m have?

(A) 900 (B) 899 (C) 896 (D) 225 (E) 224



9) In a drawing we can see a three quarter circle with centre M and an indicated orientation arrow. This three-quarter circle is first turned 90° anti-clockwise about M and then reflected in the x – axis. Which is the resulting picture?



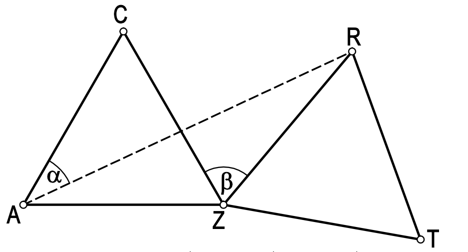
(A) (B) (C) (D) (E)

10) Which of the following numbers is biggest?

(A) $\sqrt{20} \times \sqrt{13}$ (B) $\sqrt{20} \times 13$ (C) $20 \times \sqrt{13}$ (D) $\sqrt{201} \times 3$ (E) $\sqrt{2013}$

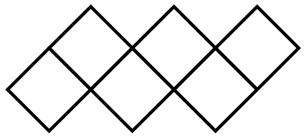
- 4 Point Questions -

11) Triangle RZT is generated by rotating the equilateral triangle AZC about point Z. Angle $\beta = \angle CZR = 70°$. Determine angle $\alpha = \angle CAR$.



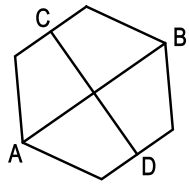
(A) 20° (B) 25° (C) 30° (D) 35° (E) 40°

12) The figure on the right is made up of six unit squares. Its perimeter is 14 cm. Squares will be added to this figure in the same way until it is made up of 2013 unit squares (zigzag: alternating bottom right and top right). How big is the perimeter of the newly created figure?



(A) 2022 (B) 4028 (C) 4032 (D) 6038 (E) 8050

13) A and B are opposite vertices of a regular six-side shape, the points C and D are the mid-points of two opposite sides. The area of the regular six-sided shape is 60. Determine the product of the lengths of the lines AB and CD!

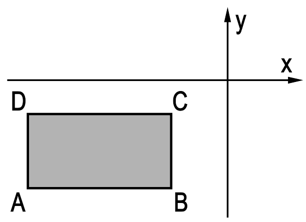


(A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 80 (E) 100

14) A class has written a test. If every boy had obtained 3 more points, the points average would be 1.2 points higher than now. Which percentage of the children in this class are girls?

(A) 20% (B) 30% (C) 40% (D) 60% (E) There is too little information given to determine the answer.

15) The sides of the rectangle ABCD are parallel to the co-ordinate axis. The rectangle lies below the x-axis and to the right of the y-axis, as shown in the diagram. For each of the points A, B, C, D the quotient (y-coordinate):(x- coordinate) is calculated. For which point will you obtain the smallest quotient?

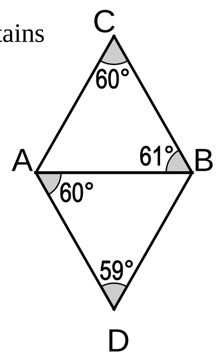


(A) A (B) B (C) C (D) D
(E) It depends on the position of the rectangle and its side lengths.

16) Today is Hans' and his son's birthday. Hans multiplies his age with the age of his son and obtains 2013. In which year was Hans born?

(A) 1952 (B) 1953 (C) 1981 (D) 1982
(E) More information is needed to be able to answer this question.

17) Tarzan wanted to draw a rhombus made up of two equilateral triangles. He drew the line segments inaccurately. When Jane checked the measurements of the four angles shown, she sees that they are not equally big (see diagram). Which of the five line segments in this diagram is the longest?

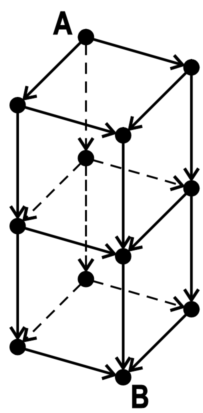


(A) AD (B) AC (C) AB (D) BC (E) BD

18) Five consecutive positive integers have the following property: The sum of three of the numbers is as big as the sum of the other two. How many sets of 5 such numbers are there?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) more than 3

19) How many different ways are there in the diagram shown, to get from point A to point B if you are only allowed to move in the directions indicated?



(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 15

20) Given a six-digit number whose digit sum is even and whose digit product is odd. Which of the following statements are true for this number?

(A) Two or four of the digits of this number are even.
(B) There is no such number.
(C) The number of odd digits of this number is odd.
(D) The number can be made up of 6 different digits.
(E) None of the statements (A) – (D) are correct.

- 5 Point Questions -

21) How many decimal places are necessary to write the number $\frac{1}{1024000}$ as a decimal?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 1024000

22) The date 2013 is made up of four consecutive digits 0, 1, 2, 3. How many years before the year 2013 was the date last made up of four consecutive digits?

(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

23) We are looking at rectangles where one side is of length 5.0 cm. Amongst those are some that can be cut into a square and a rectangle one of which has an area of 4,0 cm^2. How many such rectangles are there?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24) "Sum change" is a procedure where in a set of three numbers, each number is replaced by the sum of the other two. So for instance {3, 4, 6} becomes the set {10, 9, 7} and this again becomes {16, 17, 19}. Let the starting point be the set {1, 2, 3}.
How many such sum changes are necessary until the number 2013 appears in the set?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 2013 appears several times. (E) 2013 never comes up.

25) Let Q be the number of square numbers amongst the natural numbers from 1 to 2013^6 and K the number of cubic numbers (powers of three) amongst the natural numbers from 1 to 2013^6. Which of the following holds true:

(A) $Q = 2013 \times K$ (B) $2Q = 3K$ (C) $3Q = 2K$ (D) $Q = K$ (E) $Q^3 = K^2$

26) Using the numbers 1, 2, 3, …, 22, 11 fractions $\frac{a}{b}$ are formed where each number is used exactly once. What is the maximum number of fractions with whole number values that can be obtained?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

27) Any three vertices of a regular 13-sided-shape are joined up to form a triangle. How many of these triangles contain the circumcentre of the 13-sided-shape?

(A) 72 (B) 85 (C) 91 (D) 100 (E) another number

28) A car starts in point A and drives on a straight road at 50 km/h. Every hour after that another car leaves point A with a speed 1 km/h faster than the one before. The last car leaves A 50 hours after the first car and drives with a speed of 100 km/h. What is the speed of the car that is leading 100 hours after the start of the first car?

(A) 50 km/h (B) 66 km/h (C) 75 km/h (D) 84 km/h (E) 100 km/h

29) 100 trees (oaks and birches) are standing in a row. The number of trees between any two oaks is not equal to 5. What is the maximum number of trees out of the 100 that can be oak trees?
(A) 60 (B) 52 (C) 50 (D) 48 (E) This situation is not possible.

30. A positive integer N is smaller than the sum of its three biggest true factors (N itself is not a true factor of N). Which of the following statements is true?
(A) All such numbers N are divisible by 7.
(B) All such numbers N are divisible by 6.
(C) All such numbers N are divisible by 5.
(D) All such numbers N are divisible by 4.
(E) Such a number N does not exist.

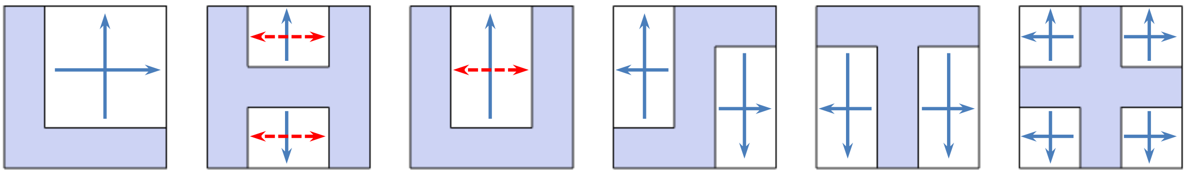
Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Junior (9./10. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

LÖSUNGEN

- 3 Punkte Beispiele -

1. 200 013 – 2 013 = 198 000. Aus den (hoffentlich) bekannten Teilbarkeitsregeln folgt, dass die Zahlen 2, 3 und 5 auf alle Fälle Teiler sein müssen. Entweder kennt man nun auch die Teilbarkeitsregel für 11 oder kann durch Probieren 7 als Teiler ausschließen. – Antwort D ist richtig.

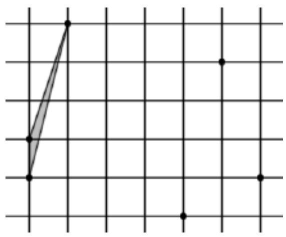
2. Die Figuren besitzen genau dann gleichen Umfang wie das Quadrat, wenn sie nur durch ‚Verschieben' von Kantenteilen entstanden sind. Dies ist bei der ersten, bei der vierten, bei der fünften und bei der sechsten Figur der Fall – also viermal und somit ist Antwort C richtig! Die „zulässigen" Kanten-Verschiebungen siehst du in der Abbildung unterhalb angedeutet (blaue Pfeile). Rote (strichlierte) Pfeile kennzeichnen „überschüssige" Kanten in Figuren, deren Umfang größer ist als der des quadratischen Blattes selbst:



3. Frau Maisl kauft also 16 Maiskolben, muss aber nur 14 Maiskolben bezahlen; daher zahlt sie 2,80 € und Antwort C ist richtig.

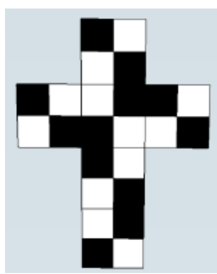
4. Man erkennt sehr schnell, dass es sich nur um die Zahlen 2, 4 und 125 handeln kann; daher ist die Summe dieser drei Zahlen 131. Wiederum ist Antwort C richtig.

5. Verbindet man drei Punkte zu einem Dreieck, berechnet sich der Flächeninhalt nach der Formel $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{a \cdot h}}{2}$. Der kleinstmögliche Flächeninhalt ergibt sich also für die kleinstmöglichen Werte für a und h. Bei der in der Grafik skizzierten Lösung gilt $\mathrm{a} = 1$ bzw. $\mathrm{h} = 1$. Kleiner geht's nicht! – Antwort A ist richtig.



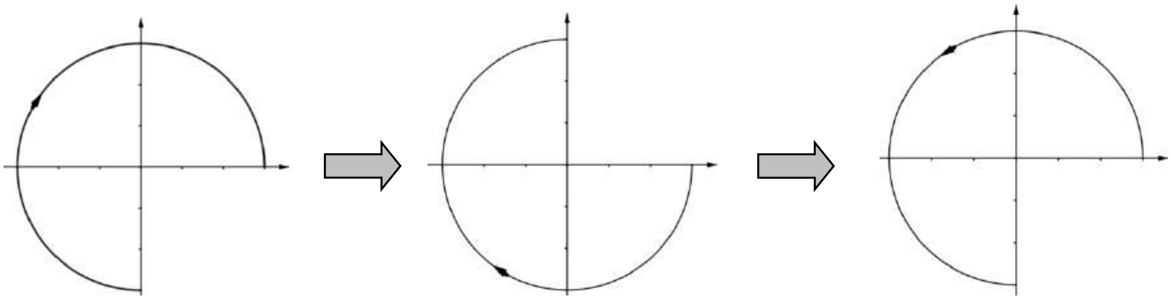
6. Hier ist ein wenig Potenzrechnen angesagt: $4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$. Antwort E ist also richtig.

7. Hilfreich wäre hier natürlich, sich ein Modell zu basteln. Das ist aber mit den erlaubten Hilfsmitteln wohl kaum möglich. Man schafft es aber sicherlich mit ein wenig Vorstellungsvermögen, sich das bemalte Netz des Würfels zu basteln, indem man es sich aufzeichnet (Kästchen für Kästchen). Antwort E ist richtig.



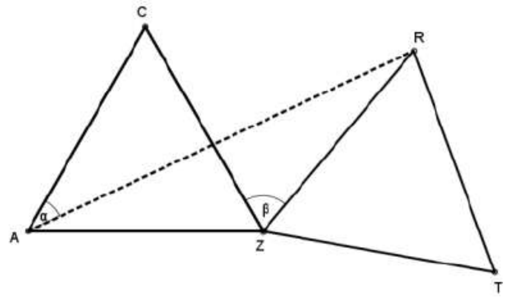
8. Die Zahl n ist 249, denn dies ist die größte natürliche Zahl, bei der noch gilt, dass 4n dreistellig ist, denn 4 · 249 = 996, aber 4 · 250 = 1 000. Die Zahl m muss 25 sein (4 · 25 = 100), denn dies ist die kleinste natürliche Zahl, bei der 4m dreistellig ist. Die Differenz 4n – 4m beträgt also 896. – Antwort C ist richtig.

9. Bei dieser Aufgabe empfiehlt es sich, sie über eine schnelle Skizze zu lösen! – Antwort D ist richtig.



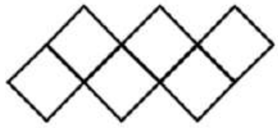
10. Diese Aufgabe erfordert ein wenig Wissen im Umgang mit Wurzeln und/oder das schnelle näherungsweise Berechnen ebendieser: Durch Überlegungen kann man leicht feststellen, dass aus A – C die Zahl C die größte sein muss (durch das Wurzelziehen werden Zahlen kleiner, also ist das Produkt das größte, bei der der größte Faktor übrig bleibt); wir berechnen uns dieses Ergebnis näherungsweise: $20 \cdot \sqrt{13} \sim 20 \cdot 3{,}5 = 70$, da aus $9 < 13 < 16$ folgt, dass $\sqrt{9} < \sqrt{13} < \sqrt{16}$, gilt $3 < \sqrt{13} < 4$.
Möglichkeit D: $\sqrt{201} \sim \sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = \sqrt{2} \cdot 10 \sim 14$ und $14 \cdot 3 = 42$
Möglichkeit E: $\sqrt{2013} \sim \sqrt{2000} = \sqrt{20 \cdot 100} = \sqrt{20} \cdot 10 \sim 4{,}5 \cdot 10 = 45$
Daher ist Antwort C richtig. – Auch das näherungsweise Lösen genügt hier, da die Ergebnisse sehr voneinander abweichen!

- 4 Punkte Beispiele -

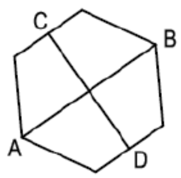


11. Da das Dreieck AZC ein gleichseitiges Dreieck ist, gilt für den Winkel $\angle AZC = 60°$ und somit für $\angle AZR = 130°$. Das Dreieck AZR ist gleichschenklig; daraus folgt, dass $\angle RAZ = \angle ZRA = 25°$ (Winkelsumme im Dreieck). Da wiederum $\angle ZAC = 60°$, folgt $\angle RAC = \alpha = 35°$. Somit ist Antwort D richtig.

12. Egal, wie viele Quadrate man anfügt, der Umfang wächst jeweils um 2 cm. Bei einem Quadrat beträgt der Umfang 4 cm, bei 2 Quadraten dann 6 cm … bei 6 Quadraten 14 cm, bei 7 Quadraten 16 cm usw.
Als Formel ergibt sich dafür u = (n + 1) · 2, wobei n die Anzahl der Quadrate angibt. Für n = 2013 ergibt sich für den Umfang der Zickzackfigur u = 4028 cm (Antwort B).

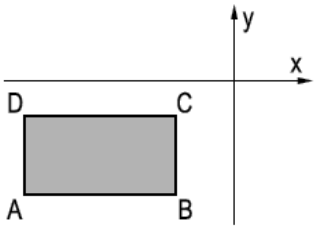


13. Ein regelmäßiges Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken; hier hat ein solches Dreieck einen Flächeninhalt von 10.
Durch eine Skizze bzw. durch Kennen der Formel kann man sich überlegen, dass für so ein Dreieck gilt: $A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{A}$ bzw. $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{A} \cdot \sqrt[6]{3}$. Da für die Strecken $\overline{AB} = 2a$ und $\overline{CD} = 2h$ gilt, folgt daraus $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{4}{\sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{A} \cdot 2 \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt[6]{3} = 8 \cdot A = 80$. – Antwort D ist richtig.



14. Jeder Knabe erreicht drei Punkte mehr. Wären alles Knaben, würde der Punktedurchschnitt gesamt um 3 Punkte steigen, da jeder der Teilnehmer ja 3 Punkte mehr erreichen würde. Der Schnitt steigt aber nur um 1,2 Punkte, das sind 40 % von den drei Punkten. Daraus folgt, dass auch nur 40 % der Teilnehmer Knaben sind (der Durchschnitt ist linear …). Daher sind 60 % der Kinder Mädchen und somit ist Antwort D richtig.

15. Das Zuweisen konkreter (und realistischer) Koordinaten für die Punkte ABCD (vgl. Abb.) und dem Berechnen des angeführten Bruches führt hier sicher am schnellsten zum richtigen Ergebnis (D). Betrachten wir diese Aufgabe trotzdem auch allgemein: Es ist hilfreich, sich zunächst zu überlegen, dass das Rechteck ABCD vollständig im 3. Quadranten liegt. Für Punkte, die darin liegen gilt, dass die x-Koordinate und die y-Koordinate immer negativ (x<0, y < 0) sind. Folglich ist auch für die Eckpunkte des Rechtecks der Bruch $\frac{\text{y–Koordinate}}{\text{x–Koordinate}}$ sicherlich positiv; Wann wird dieser Bruch nun am kleinsten? Folgendes muss gelten:



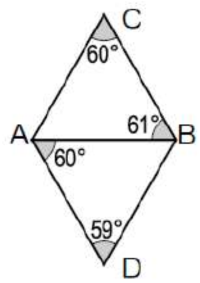
y-Koordinate (= Zähler): Muss vom Betrag her möglichst klein werden, als (negative) Zahl daher möglichst groß (Punkt möglichst weit „oben" im Koordinaten-System).

x-Koordinate (= Nenner): Muss vom Betrag her möglichst groß werden, als (negative) Zahl daher möglichst klein (Punkt möglichst weit „links" im Koordinaten-System).

Gesucht ist also der Punkt, der zugleich möglichst „hoch" und möglichst weit „links" liegt, dies ist der Punkt D und somit ist auch Antwort D richtig.

16. Das Produkt beider Alter ergibt 2013, daher müssen die Alter von Hans und seinem Sohn Teiler von 2013 sein. Dies ist nur für Antwort A der Fall: Wenn Hans 1952 geboren ist, wird er heute 61 Jahre alt, daher ist heute sein Alter ein Teiler von 2013 (61 · 33 = 2013).

17. Nehmen wir einmal an, AB habe die Länge 1. Dann lassen sich mit dem Sinussatz alle restlichen „Rhombenlängen" durch AB ausdrücken – wir können uns ja über die Winkelsumme im Dreieck (180°) alle weiteren Winkel bestimmen. Damit wir allerdings nicht so viel probieren müssen, noch eine einfache Tatsache im Dreieck: dem größten Winkel liegt die längste Seite gegenüber. Daher sind die potenziellen Kandidaten für die längste Seite AC (gegenüber von ∠ABC = 61°) und AD (gegenüber von Winkel ∠ABD = 61°). Das Umformen entsprechender Anwendungen des Sinussatzes liefert



$AC = \frac{\sin(61°)}{\sin(60°)} \cdot 1$ bzw. $AD = \frac{\sin(61°)}{\sin(59°)} \cdot 1$.

Die beiden Ausdrücke unterscheiden sich lediglich durch die Sinusterme im Nenner. Die Sinusfunktion ist im Intervall [0°, 90°[streng monoton steigend, daher gilt sin(60°) > sin(59°) und AD > AC. Damit ist AD die längste Seite in der Figur, Antwort A ist korrekt.

P.S.: Diese Antwort ist freilich unabhängig von der Seitenlänge AB: $AC = \frac{\sin(61°)}{\sin(60°)} \cdot AB < \frac{\sin(61°)}{\sin(59°)} \cdot AB = AD.$

Wer beim Lösen dieser Aufgabe mit dem Wissen aus der Unterstufe auskommen will, argumentiert so:
Nach dem Ergänzen der zwei fehlenden Winkel ist klar, dass die Dreiecke BAD und BCA ähnlich zueinander sind. Die längste Seite im „unteren" Dreieck ist AD, die längste im „oberen" AC, da sie ja auch dem größten Winkel (61°) gegenüberliegen. Da aber die den beiden Dreiecken gemeinsame Seite AB die kürzeste Seite im „unteren" Dreieck darstellt (liegt gegenüber des kleinsten Winkels von 59° bei D), aber gleichzeitig die zweitlängste Seite im „oberen" Dreieck ist (liegt gegenüber des zweitgrößten Winkels von 60° bei C), stellt das „obere" Dreieck eine (maßstabsgetreue) Verkleinerung des „unteren" Dreiecks dar. Somit gilt: AD > AC (Antwort A).

18. Fünf aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen – schreiben wir diese Zahlen folgendermaßen an:
a, (a + 1), (a + 2), (a + 3), (a + 4). Durch leichtes Ausprobieren erhält man sofort die gesuchte Lösung:
aus a + (a + 1) + (a + 2) = (a + 3) + (a + 4) erhält man a = 4; aus a + (a + 1) + (a + 3) = (a + 2) + (a + 4) folgt a = 2.
Da keine weiteren Kombinationen auf die geforderte Anforderung zutreffen, ist Antwort C richtig.

19. Auch diese Aufgabe löst man am schnellsten sicherlich durch reines Ausprobieren: Es gibt 12 Möglichkeiten und daher ist Antwort D richtig.

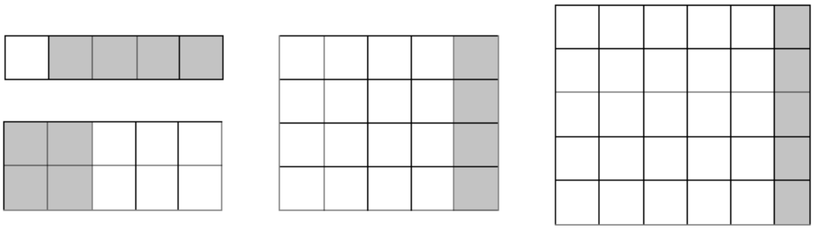
20. Okay, wir arbeiten anhand des Ausschlussprinzips: Antwort A geht nicht, denn falls zwei oder vier gerade Ziffern vorkommen würden, wäre das Ziffernprodukt sicherlich auch gerade (durch 2 teilbar). Antwort B kann ausgeschlossen werden, denn schon die Zahl 111 111 erfüllt beide Bedingungen. Antwort C kann auch nicht stimmen, da sonst die Ziffernsumme sicher ungerade ist. Antwort D: In der Zahl darf keine gerade Ziffer vorkommen (dann wäre ja das Ziffernprodukt immer gerade). Daher müssen alle sechs Ziffern ungerade sein. Da es aber nur 5 ungerade Ziffern gibt, kann Antwort D auch nicht stimmen, bleibt also nur Antwort E als richtige Antwort übrig.

- 5 Punkte Beispiele -

21. Zunächst einmal sollte man im Nenner die Zahl 1024 x 1000 = 2^{10} x 1000 erkennen.
Nun kann man für die ersten Zweierpotenzen die Nachkommastellenentwicklung studieren:
$\frac{1}{2} = 0{,}5.\quad \frac{1}{2^2} = 0{,}25.\quad \frac{1}{2^3} = 0{,}125.\quad \frac{1}{2^4} = 0{,}0625.\ \ldots$
Man sieht, dass pro steigenden Exponenten eine Nachkommastelle hinzukommt. Damit hat $\frac{1}{2^{10}}$ allein 10 Nachkommastellen. Nachträgliche Division durch 1000 ergibt zusätzliche 3 Kommastellen, was auf Antwort C, 13 Nachkommastellen, führt.

22. In diesem Jahrtausend ist 2013 die kleinste Jahreszahl, die sich aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern aufbauen lässt. Daher lag die letzte Jahreszahl, die dieselbe Eigenschaft besitzt, sicherlich im alten Jahrtausend und war 1432. Die Differenz zwischen diesen beiden Jahren beträgt 581, damit ist Antwort C richtig.
P.S.: Weitere Jahreszahlen mit demselben Bildungsprinzip waren im letzten Jahrtausend auch noch 1023, 1032, 1203, 1230, 1234, 1243, 1302, 1320, 1324, 1342, 1423;

23. Damit bei einem Rechteck überhaupt erst einmal die Fläche von 4 cm² bei einer Länge von 5 cm zustande kommt, muss die Breite mindestens 0,8 cm betragen. Dann ist das ganze Rechteck 4 cm² groß.
Vergrößert man die Breite ein wenig, wächst die Gesamtfläche über 4 cm² hinaus und irgendwann ist beim 5x1 cm²-Rechteck durch Zerschneiden ein 1x1 cm²-Quadrat und ein 4x1 cm²-Rechteck möglich.
Wächst die Breite auf 2 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein 2x2 cm²-Quadrat und ein 3x2 cm²-Rechteck. In diesem Fall ist der 4 cm² große Flächenteil das Quadrat selbst.
Wächst die Breite auf 4 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein 4x4 cm²-Quadrat und ein 1x4 cm²-Rechteck.
Wächst schließlich die Breite auf 5,8 cm, entstehen durch Zerschneiden ein 5x5 cm²-Quadrat und ein 0,8x5 cm²-Rechteck. Da das 5x5 cm²-Quadrat das größtmögliche Quadrat ist, das in einem 5 cm langen Rechteck Platz findet, gibt es darüber hinaus keine Möglichkeiten mehr. Daher gibt es 4 derartige Rechtecke, Antwort D.

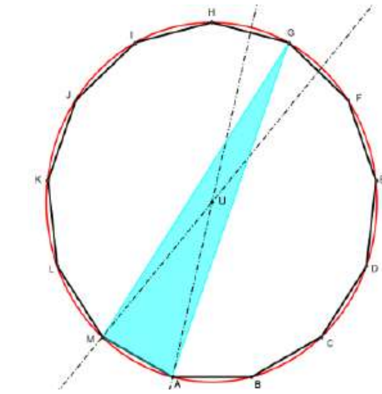


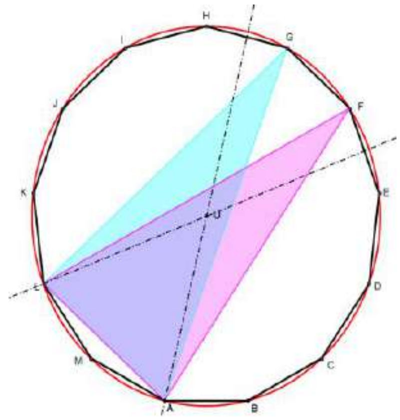
24. Wie oft bei solchen Aufgaben, ist es am besten, zunächst einmal etwas herumzuprobieren. Aus {1, 2, 3} wird durch Summenbildung {1+2, 1+3, 2+3} = {3, 4, 5}. Weiter geht's zu {3+4, 3+5, 4+5} = {7, 8, 9}. Und noch einmal: {7+8, 7+9, 8+9} = {15, 16, 17}. Was man nun erkennt:
(1) Die neuen Mengen bestehen immer aus drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen.
(2) Die mittlere Zahl ist immer eine Zweierpotenz.
Das allgemein zu zeigen, ist nicht schwer. Angenommen, schon die Startmenge hat die Eigenschaften (1) & (2). In unserem Fall ist das mit {1, 2, 3} natürlich so.
Dann hat die Startmenge die Form $\{2^n - 1, 2^n, 2^n + 1\}$.
Anwenden der Summenänderung führt auf $\{2^n - 1 + 2^n, 2^n - 1 + 2^n + 1, 2^n + 2^n + 1\} = \{2^{n+1} - 1, 2^{n+1}, 2^{n+1} + 1\}$: Die drei Elemente der Menge bleiben benachbarte Zahlen und in der Mitte steht die nächsthöhere Zweierpotenz. Nun sind die 2013 nächstgelegenen Zweierpotenzen $2^{10} = 1024$ und $2^{11} = 2048$ und die zugehörigen Mengen {1023, 1024, 1025} und {2047, 2048, 2049}. Damit kann 2013 nie in so einer Menge auftauchen: Antwort E.

25. Von 1 bis n^2 gibt es n Quadratzahlen und von 1 bis n^3 gibt es n Kubikzahlen. – Beispiel: von 1 bis 5^2 gibt's die Quadratzahlen $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ und eben $5^2 = 25$, mehr nicht. Daher: Von 1 bis $2013^6 = (2013^3)^2$ gibt es 2013^3 Quadratzahlen und von 1 bis $2013^6 = (2013^2)^3$ gibt es 2013^2 Kubikzahlen. Es gibt also 2013-mal mehr Quadratzahlen als Kubikzahlen; damit ist die korrekte Antwort A.

26. Die großen Primzahlen 13, 17 und 19 müssen in einem Zähler verstaut werden, um einen ganzzahligen Bruch zu erzeugen. Wenn sie im Zähler sind, kann b im Nenner nur 1 sein, damit a/b ganzzahlig wird.
b = 1 sollte daher Nenner eines Bruchs mit 13, 17 oder 19 als Zähler sein. Damit bleiben aber zwei Zähler ohne brauchbaren Nenner. Diese beiden „unbrauchbaren" Zahlen, zum Beispiel 17 und 19, sollte man daher beide in einem „Müllbruch" entsorgen.
Nun kann man schauen, ob die neben 13/1 restlichen 9 noch verbleibenden Brüche ganzzahlig werden können; und dies ist tatsächlich möglich: Durch systematisches Probieren kommt man relativ schnell auf eine Lösung:
$\frac{22}{11}, \frac{18}{9}, \frac{21}{7}, \frac{16}{8}, \frac{15}{3}, \frac{12}{6}, \frac{14}{2}, \frac{20}{4}, \frac{10}{5}$. Damit gibt es 10 mögliche ganzzahlige Brüche: Antwort B.

27. Vorab: Der Umkreismittelpunkt des 13-Ecks ist der Schnittpunkt zweier Streckensymmetralen des 13-Ecks. Diese Symmetralen bilden zeitgleich eine Symmetrieachse des 13-Ecks.
Nun, wie kommt man aber nun auf die Anzahl der Dreiecke, für die die Bedingung stimmt? Am besten skizziert man sich so ein 13-Eck.
Wählt man zwei Punkte, dann muss der dritte Eckpunkt des Dreiecks zwischen den Symmetrieachsen der beiden ersten Punkte liegen – siehe Abbildungen!
Nun erkennt man auch, dass durch einen Punkt (wie bei der Abbildung für A) die Anzahl der möglichen Dreiecke reihum zuerst ansteigt und dann wieder abnimmt – ergibt für den Eckpunkt A als ersten Eckpunkt der Dreiecke 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 mögliche Dreiecke. Es ist jedoch klar, dass sich diese Anzahl nun drastisch verringert. Für B sind es noch 20 Dreiecke (das Dreieck durch A und B wird nicht doppelt gezählt). Für C sind es nur noch 18 (2 Dreiecke durch A und C und eines durch B und C fallen weg). Für D dann nur noch 15 (3 Dreiecke durch A und D, 2 durch B und D und 1 durch C und D fallen weg). Für E kommen noch 11, für F noch 6 Dreiecke dazu. Aus Symmetriegründen war's das dann auch schon. Das wären dann 21 + 20 + 18 + 15 + 11 + 6 = 91 Dreiecke. Somit ist Antwort C richtig.





28. Zum Lösen der Aufgabe reicht es, die angegebenen Autos mit ihren Geschwindigkeiten einzeln zu betrachten:
Auto A fährt mit 50 km/h. Nach 100 Stunden hat es 50 x 100 = 5000 km zurückgelegt.
Auto B fährt mit 66 km/h. Es hat 16 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 84 Stunden hat es 66 x 84 = 5544 km zurückgelegt.
Auto C fährt mit 75 km/h. Es hat 25 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 75 Stunden hat es 75 x 75 = 5625 km zurückgelegt.
Auto D fährt mit 84 km/h. Es hat 34 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 66 Stunden hat es 84 x 66 = 5544 km zurückgelegt.
Auto E fährt mit 100 km/h. Es hat 50 Stunden weniger Fahrzeit als A zur Verfügung und nach 50 Stunden hat es 100 x 50 = 5000 km zurückgelegt.
Auto C liegt damit nach 100 Stunden in Front.

29. Symbolisieren wir einmal die ersten 25 von den 100 in einer Reihe stehenden Bäume mit Kreisen und nummerieren sie:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 …

Da wir möglichst viele Eichen unterbringen wollen, beginnen wir – solange dies die Regel, dass zwischen zwei beliebigen Eichen nicht 5 Bäume stehen dürfen, erlaubt – Eichen (schwarz ausgefüllte Kreise) zu setzen:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 …

Wir erkennen nun, dass an Position 7 keine Eiche mehr gepflanzt werden darf; sonst würde diese nämlich mit der Eiche an der 1. Stelle genau fünf [beliebige] Bäume einschließen, was ja nicht zugelassen ist. Aus den gleichen Gründen stehen an den Positionen 8 bis 12 keine Eichen, sondern Birken. Setzt man dieses „Pflanzmuster" fort, so erkennt man, dass immer (die ersten) sechs von 12 aufeinanderfolgenden Bäumen Eichen sind:

$$\underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12}_{\text{Erste 12er-Reihe}}\ \underbrace{13\ 14\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21\ 22\ 23\ 24}_{\text{Zweite 12er-Reihe}}\ 25\ \ldots$$

Da acht solche 12er-Reihen in eine 100er-Reihe passen (8 · 12 = 96), stehen auf jeden Fall bis Position 96 genau 8 · 6 = 48 Eichen. Ab Position 97 startet unser „Pflanzmuster" wieder von neuem, weshalb auch an die verbleibenden 4 Stellen (Positionen 97, 98, 99 & 100) Eichen gesetzt werden dürfen. Insgesamt finden daher höchstens 48 + 4 = 52 Eichen (und 48 Birken) Platz. Antwort B ist die gesuchte.

30. Wie kann N aussehen? Angenommen, die Zahl N ist nicht durch 2 teilbar. Damit die Summe echter Teiler größtmöglich wird, muss N aber durch 3, 5 und 7 teilbar sein. Dann sind die drei größten echten Teiler zusammenaddiert $\frac{N}{3}+\frac{N}{5}+\frac{N}{7}=\frac{71}{105}N$ groß. Damit ist N aber größer als die Summe und entspricht nicht den Anforderungen der Aufgabe. Daher muss 2 schon einmal ein Teiler von N sein. Angenommen, 2 ist nun ein Teiler von N, aber nicht 3. Dann ist die größtmögliche Summe echter Teiler von N $\frac{N}{2}+\frac{N}{4}+\frac{N}{5}=\frac{19}{20}N$ groß, entspricht also immer noch nicht unseren Anforderungen. Damit sollte neben 2 auch 3 ein Teiler von N sein, damit aber auch 6. Sind 4 und 5 keine Teiler von N, ist die Summe $\frac{N}{2}+\frac{N}{3}+\frac{N}{6}=N$ groß; N ist damit gerade noch gleich groß wie die Summe seiner drei größten echten Teiler.
Jetzt ist jedoch die Teilerstruktur von N klar: N muss in jedem Fall durch 2 und 3 teilbar sein und zugleich noch entweder durch 4 oder durch 5. In diesen Fällen ist N kleiner als die echte Teilersumme und dadurch, dass 2 und 3 in jedem Fall Teiler von N sind, ist es auch 6, somit ist die richtige Antwort B.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2013
21.3.2013

Kategorie: Student, ab 11. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Stadtgemeinde Pressbaum

pwc

Bitte die Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

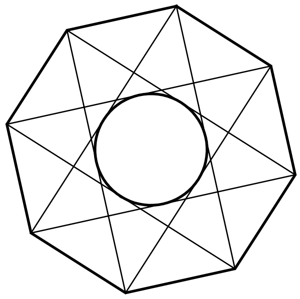
Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2013“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2015 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung: Vor- und Zuname des Teilnehmers sowie des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat, Schulstufe und Schule (genaue Adresse), Jahr des Wettbewerbs. Nach dem 31. Dezember 2015 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welche der folgenden Zahlen ist am größten?
(A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$



2. Das abgebildete regelmäßige Achteck hat Seiten der Länge 10. Ein Kreis berührt alle eingezeichneten Diagonalen dieses Achtecks. Wie groß ist der Radius dieses Kreises?
(A) 10 (B) 7,5 (C) 5 (D) 2,5 (E) 2

3. Die Oberfläche eines Prismas besteht aus 2013 Flächen. Wie viele Kanten hat das Prisma?
(A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033

4. Welchen Wert hat die dritte Wurzel von 3^{3^3} ? (Beachte: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)
(A) 3^3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} (D) 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

5. Die Jahreszahl 2013 ist aus den vier aufeinanderfolgenden Ziffern 0, 1, 2, 3 aufgebaut. Wie viele Jahre vor dem Jahr 2013 war die Jahreszahl zum letzten Mal aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern aufgebaut?
(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

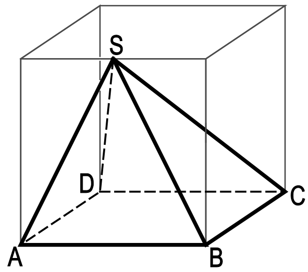
6. Es sei f eine lineare Funktion, für die $f(2013) - f(2001) = 100$ gilt. Wie groß ist der Wert von $f(2031) - f(2013)$?
(A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

7. Wir wissen, dass die Beziehung $2 < x < 3$ für eine Zahl x gilt. Wie viele der folgenden Aussagen sind in diesem Fall richtig?

$4 < x^2 < 9$ $\quad 4 < 2x < 9$ $\quad 6 < 3x < 9$ $\quad 0 < x^2 - 2x < 3$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

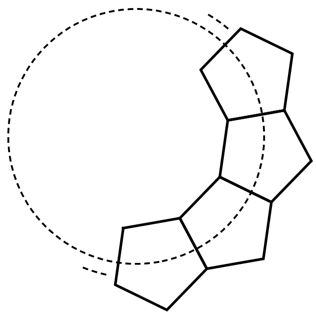
8. Jeder von sechs einsamen Helden hat Bösewichte gefangen. Insgesamt haben sie 20 Bösewichte erwischt: der erste Held einen Bösewicht, der zweite Held zwei Bösewichte, der dritte Held drei Bösewichte. Der vierte Held hat mehr Bösewichte gefangen als jeder andere Held. Bestimme die kleinste Anzahl von Bösewichten, die der vierte Held gefangen hat, bei der dies möglich ist.
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3



9. Im Inneren des abgebildeten Würfelgitters sieht man eine feste, nicht durchsichtige Pyramide $ABCDS$ mit Basisquadrat $ABCD$, deren Spitze S genau im Mittelpunkt einer Würfelkante liegt. Man betrachtet diese Pyramide von oben, von unten, von vorne, von hinten, von rechts und von links. Welche der folgenden Ansichten kann dabei nicht entstehen?

10. Schmilzt eine bestimmte Substanz, vergrößert sich ihr Volumen um $\frac{1}{12}$.
Um welchen Anteil verkleinert sich das Volumen, wenn die Substanz sich wieder verfestigt?
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

- 4 Punkte Beispiele -

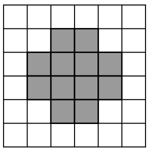
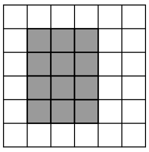
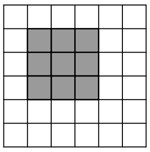
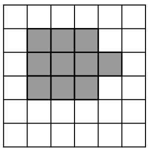
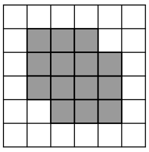


11. Ralf hat lauter gleich große Plastikplättchen in der Form eines regelmäßigen Fünfecks.
Er klebt sie längs der Seiten zu einem vollständigen Ring zusammen (siehe Abbildung).
Aus wie vielen Plättchen besteht dieser Ring?
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

12. Wie viele positive ganze Zahlen n gibt es mit der Eigenschaft, dass sowohl $\frac{n}{3}$ als auch $3n$ dreiziffrige ganze Zahlen sind?

(A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

13. Ein kreisrunder Teppich wird auf einen Boden gelegt, auf dem gleich große quadratische Fliesen verlegt sind. Alle Fliesen, die mindestens einen Punkt mit dem Teppich gemeinsam haben, werden grau gefärbt. Welches der abgebildeten Ergebnisse kann dabei nicht vorkommen?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

14. Wir betrachten die folgende Aussage über eine für alle ganzen Zahlen x definierte Funktion $f: Z \to Z$: "Für jedes gerade x ist $f(x)$ gerade." Wie lautet die Verneinung (Negation) dieser Aussage?

(A) Für jedes gerade x ist $f(x)$ ungerade.

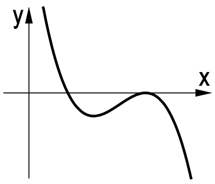
(B) Für jedes ungerade x ist $f(x)$ gerade.

(C) Für jedes ungerade x ist $f(x)$ ungerade.

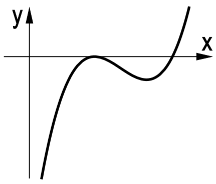
(D) Es existiert eine gerade Zahl x, für die $f(x)$ ungerade ist.

(E) Es existiert eine ungerade Zahl x, für die $f(x)$ ungerade ist.

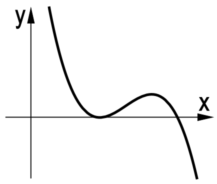
15. Unter den unten abgebildeten Graphen befindet sich auch der Graph der Funktion $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ mit $a < b$. Welcher ist es?



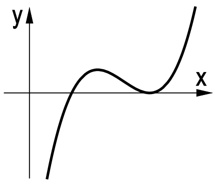
(A)



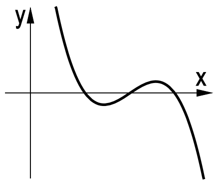
(B)



(C)



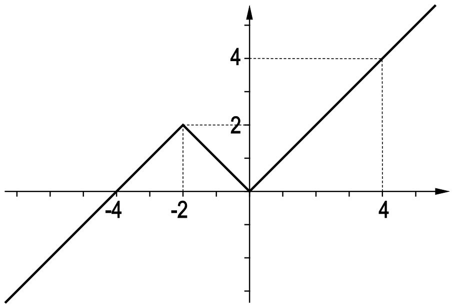
(D)



(E)

16. Wir betrachten Rechtecke, bei denen eine Seite 5,0 cm lang ist. Unter ihnen gibt es welche, die man so zerschneiden kann, dass man ein Quadrat und ein Rechteck erhält, wobei einer der beiden Teile den Flächeninhalt 4,0 cm^2 hat. Wie viele derartige Rechtecke gibt es?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



17. Peter hat den Graph einer Funktion $f: R \to R$ gezeichnet, der wie in der Abbildung angedeutet aus zwei Strahlen und einer Strecke besteht. Wie viele Lösungen hat die Gleichung $f(f(f(x))) = 0$?

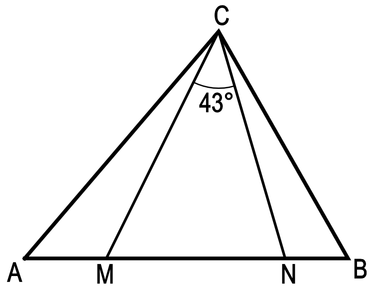
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

18. Wie viele Paare positiver ganzer Zahlen (x, y) lösen die Gleichung $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) Eine andere Zahl.

19. In einer Schachtel befinden sich 900 Karten, die von 100 bis 999 nummeriert sind. Auf zwei verschiedenen Karten stehen immer verschiedene Zahlen. Franz zieht einige Karten und bestimmt von jeder die Ziffernsumme. Wie viele Karten muss er mindestens ziehen, damit er unter den gezogenen sicher drei mit derselben Ziffernsumme hat?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55



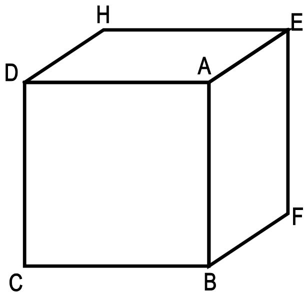
20. Im Dreieck ABC liegen die Punkte M und N auf der Seite AB so, dass AN = AC und BM = BC gilt. Bestimme $\angle$ACB, wenn $\angle$MCN = 43° gilt.

(A) 86° (B) 89° (C) 90° (D) 92° (E) 94°

- 5 Punkte Beispiele -

21. Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen gibt es mit $x \le y$, sodass ihr Produkt genau das Fünffache ihrer Summe ist?

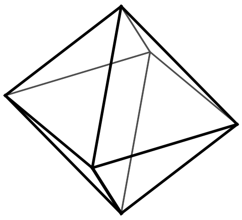
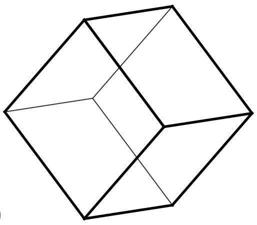
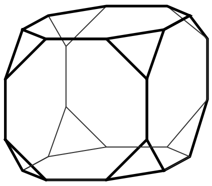
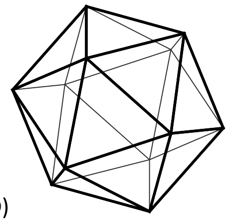
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8



22. Die Funktion $f: R \to R$ ist durch folgende Eigenschaften definiert:
f ist periodisch mit der Periode 5, und für $-3 \le x < 2$ gilt $f(x) = x^2$. Wie groß ist $f(2013)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

23. Der abgebildete Würfel wird mit einer Ebene geschnitten, die durch die drei zu A benachbarten Eckpunkte D, E und B geht. Auf ähnliche Weise wird der Würfel auch mit jenen Ebenen geschnitten, die jeweils durch die drei benachbarten Punkte aller sieben weiteren Eckpunkte gehen. Diese Ebenen zerteilen den Würfel in mehrere Stücke. Wie sieht das Stück aus, das den Würfelmittelpunkt enthält?

(A)  (B)  (C)  (D) 

(E) Der Würfelmittelpunkt gehört zu mehreren Teilen.

24. Wie viele Lösungen (x, y) mit reellen x und y hat die Gleichung $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

(A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) unendlich viele

25. Es sei $f: N \to N$ die Funktion, die durch $f(n) = \frac{n}{2}$ für gerade n, und durch $f(n) = \frac{n-1}{2}$ für ungerade n definiert ist. Ist k eine positive ganze Zahl, so bezeichne $f^k(n)$ den Ausdruck $f(f(\ldots f(n)\ldots))$, in dem k-mal das f auftritt. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f^{2013}(n) = 1$ ist

(A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} (D) 2^{2013} (E) unendlich

26. In der Ebene werden einige Geraden gezeichnet. Die Gerade a schneidet genau drei andere Geraden und die Gerade b schneidet genau vier andere Geraden. Die Gerade c schneidet genau n andere Geraden, mit $n \neq 3, 4$. Wie viele Geraden wurden in der Ebene gezeichnet?

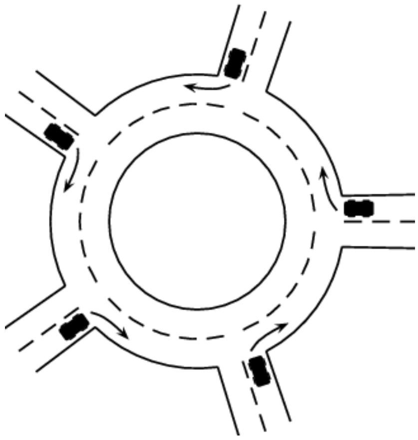
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) eine andere Anzahl

27. Addiert man die ersten n positiven ganzen Zahlen, so erhält man eine dreiziffrige Zahl mit lauter gleichen Ziffern. Wie groß ist die Ziffernsumme von n?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

28. Auf einer Insel wohnen nur Ehrliche (die immer die Wahrheit sagen) und Lügner (die niemals die Wahrheit sagen). Ich traf dort zwei Einwohner und fragte den größeren, ob sie beide Ehrliche seien. Er antwortete, aber ich konnte aus seiner Antwort nicht schließen, zu welcher Gruppe sie gehörten. Also fragte ich auch den kleineren, ob der größere ein Ehrlicher sei. Er antwortete, und danach wusste ich, von welchem Typ die beiden waren. Welche Aussage ist richtig?

(A) Beide waren Ehrliche.
(B) Beide waren Lügner.
(C) Der größere war ein Ehrlicher und der kleinere ein Lügner.
(D) Der größere war ein Lügner und der kleinere ein Ehrlicher.
(E) Es ist nicht genug Information gegeben, um eindeutig entscheiden zu können.



29. Julian hat einen Algorithmus geschrieben, um eine Zahlenfolge zu bilden. Es gilt $a_1 = 1$ und $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ für alle positiven ganzen Zahlen m und n. Bestimme den Wert von a_{100}.

(A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050

30. In einen Kreisverkehr fahren gleichzeitig fünf Autos ein (siehe Bild). Jedes Auto verlässt den Kreisverkehr nach weniger als einer Runde, und an jeder Ausfahrt fährt genau ein Auto ab. Wie viele verschiedene Kombinationen gibt es, wie die Autos den Kreisverkehr verlassen können?

(A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120

MATHEMATICS KANGAROO 2013
Austria - 21.3.2013

Group: Student, Grades: 11 onwards

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 75 min.
Each correct answer, questions 1.-10.: 3 Points
Each correct answer, questions 11.-20.: 4 Points
Each correct answer, questions 21.-30.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 30 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the question number (1 to 30). Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

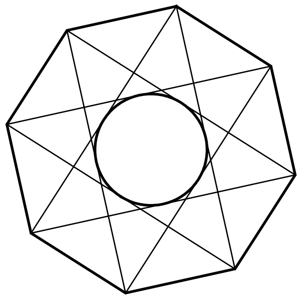
Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2013“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2015 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung: Vor- und Zuname des Teilnehmers sowie des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat, Schulstufe und Schule (genaue Adresse), Jahr des Wettbewerbs. Nach dem 31. Dezember 2015 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

Mathmatical Kangaroo 2013
Group Student (Grade 11. and above)
Austria - 21.3.2013

- 3 Point Questions -

1. Which of the following numbers is biggest?
(A) 2013 (B) 2^{0+13} (C) 20^{13} (D) 201^3 (E) $20 \cdot 13$



2. The regular eight-sided shape on the right has sides of length 10. A circle touches all inscribed diagonals of this eight-sided shape. What is the radius of this circle?
(A) 10 (B) 7,5 (C) 5 (D) 2,5 (E) 2

3. The surface of a prism is made of 2013 faces. How many edges does the prism have?
(A) 2011 (B) 2013 (C) 4022 (D) 4024 (E) 6033

4. The third root of 3^{3^3} takes which value? (Note: $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)
(A) 3^3 (B) 3^{3^3-1} (C) 3^{2^3} (D) 3^{3^2} (E) $(\sqrt{3})^3$

5. The date 2013 is made up of four consecutive digits 0, 1, 2, 3. How many years before the year 2013 was the date last made up of four consecutive digits?
(A) 467 (B) 527 (C) 581 (D) 693 (E) 990

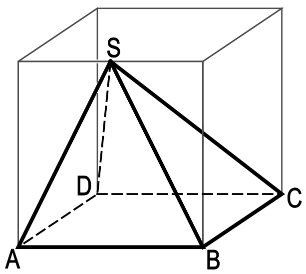
6. Let f be a linear function for which $f(2013) - f(2001) = 100$ gilt. holds true. What is the value of $f(2031) - f(2013)$?
(A) 75 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 180

7. We know that the relationship $2 < x < 3$ is valid for a number x**.** How many of the following statements are true in this case?

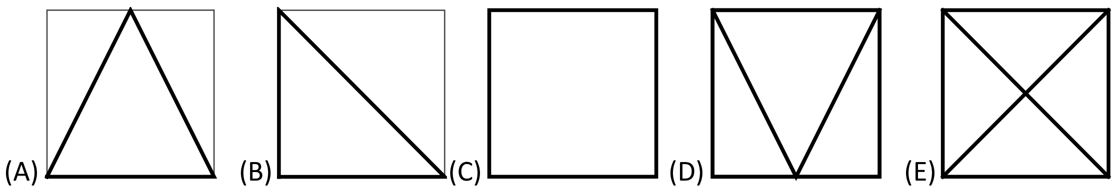
$4 < x^2 < 9$ $\quad 4 < 2x < 9$ $\quad 6 < 3x < 9$ $\quad 0 < x^2 - 2x < 3$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Each of six lone heros has captured wanted people. In total they have captured 20 wanted people: the first hero one wanted person, the second hero two wanted people, the third hero three wanted people. The fourth hero has captured more wanted people than any other hero. Determine the smallest number of wanted people that the fourth hero could have captured, so that this statement could be true.
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

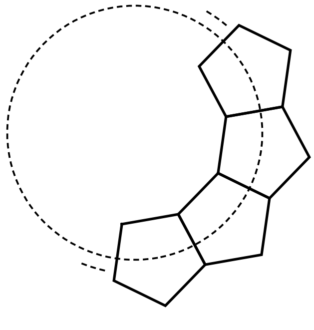


9. Inside the cube lattice pictured on the side one can see a solid, non-seethrough pyramid $ABCDS$ with square base $ABCD$, whose top S is exactly in the middle of one edge of the cube. If you look at the pyramid from above, from below, from the front, from the back, from the right and from the left – which of the following views cannot be possible?



10. If a certain substance melts the volume increases by $\frac{1}{12}$.
By how much does the volume decrease if the substance solidifies again?
(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) $\frac{1}{14}$

- 4 Point Questions -



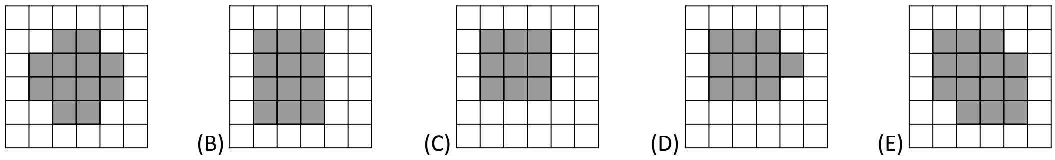
11. Ralf has a number of equally big plastic plates each in the form of a regular five sided shape. He glues them together along the sides to form a complete ring (see picture). Out of how many of these plates is the ring made up?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

12. How many positive integers n are there with the property that $\frac{n}{3}$ as well as $3n$ are three-digit numbers?

(A) 12 (B) 33 (C) 34 (D) 100 (E) 300

13. . A circular carpet is placed on a floor which is covered by equally big, square tiles. All tiles that have at least one point in common with the carpet are coloured in grey. Which of the following cannot be a result of this?



(A) (B) (C) (D) (E)

14. We are looking at the following statement about a function defined for all integers x $f: Z \to Z$: "For each even x $f(x)$ is even." What would be the negation of this statement?

(A) For each even x $f(x)$ is odd.

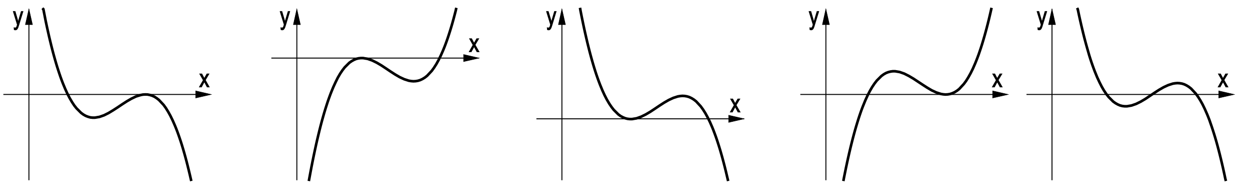
(B) For each odd x $f(x)$ is even.

(C) For each odd x $f(x)$ is odd.

(D) There is a number x, for which $f(x)$ is odd.

(E There is an odd number x, for which $f(x)$ is odd.

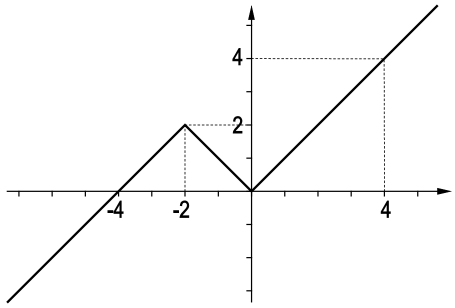
15. Amongst the graphs shown below there is the graph of the function $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ with $a < b$. Which is it?



(A) (B) (C) (D) (E)

16. We are considering rectangles which have one side of length of 5.0 cm. Amongst these there are some that can be cut to make a square and a rectangle, one of which having an area of 4.0 cm^2. How many such rectangles are there?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



17. Peter has drawn the graph of a function $f: R \to R$ which consists of two rays and a line segment as indicated on the right. How many solutions has the equation $f(f(f(x))) = 0$?

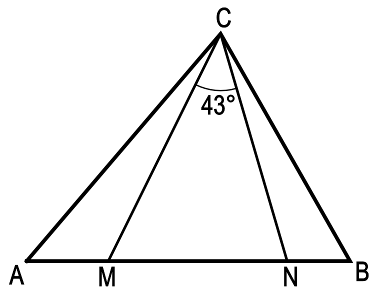
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

18. How many pairs of positive integers (x, y) solve the equation $x^2 \times y^3 = 6^{12}$

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) A different number.

19. In a box there are 900 cards that are numbered from 100 to 999. On any two different cards there are always different numbers. Franz picks a few cards and works out the sum of the digits on each card. What is the minimum number of cards he has to pick to have at least three with the same sum?

(A) 51 (B) 52 (C) 53 (D) 54 (E) 55



20. In a triangle ABC the points M and N are placed on side AB so that AN = AC and BM = BC. Determine ∠ACB if ∠MCN = 43°.

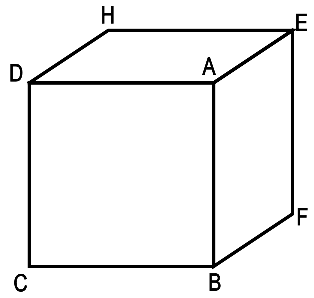
(A) 86° (B) 89° (C) 90° (D) 92° (E) 94°

- 5 Point Questions -

21. How many pairs of integers (x, y) with $x \le y$ are there such that their product is exactly five times their sum?

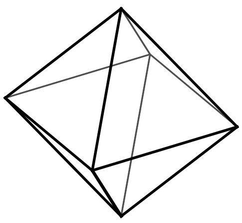
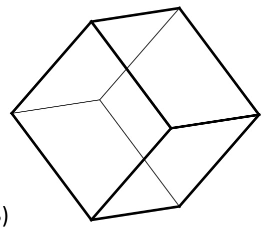
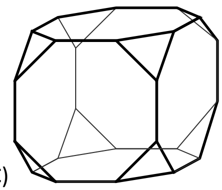
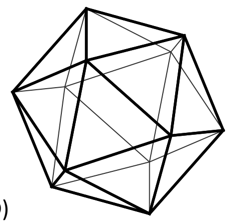
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. The function $f: R \to R$ is defined by the following properties:
f is periodic with period 5, and for $-3 \le x < 2$ f(x) = x^2 holds true. How big is f(2013)?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

23. The cube pictured on the side is intersected by a plane that passes through the three points adjacent to A, that is *D*, *E* and *B*. In a similar way the cube is also intersected by those planes that go through the three points adjacent to each of the other seven vertices. These planes dissect the cube into several pieces. What does the piece that contains the centre of the cube look like?

(A)  (B)  (C)  (D) 

(E) The centre of the cube belongs to several pieces.

24. How many solutions (x, y) with a real *x* and *y* has the equation $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?
(A) 1 (B) 5 (C) 8 (D) 9 (E) unendlich viele

25. Let $f: N \to N$ be the function that is defined by $f(n) = \frac{n}{2}$ for even *n*, and by $f(n) = \frac{n-1}{2}$ for odd *n*. If *k* is a positive integer then let $f^k(n)$ describe the expression $f(f(...f(n)...))$, in which *f* appears *k*-times. The number of solutions to the equation $f^{2013}(n) = 1$ is
(A) 0 (B) 4026 (C) 2^{2012} (D) 2^{2013} (E) unendlich

26. On the co-ordinate plane a number of straight lines have been drawn. Line *a* intersects exactly three other lines and line *b* intersects exactly four other lines. Line *c* intersects exactly *n* other lines with $n \neq 3, 4$. How many lines were drawn on the plane?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) eine andere Anzahl

27. If you add the first *n* positive integers, you obtain a three-digit number with all digits being the same. How big is the sum of the digits of *n*?
(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

28. On an island live only Truthtellers (who always speak the truth) and Liars (who never speak the truth). I met two inhabitants and asked the taller one whether they are both Truthtellers. He replied but from his answer I couldn't decide which group they belonged to. So I asked the smaller one whether the taller one is a Truthteller. He answered and then I knew which type they both were. Which statement is correct?
(A) Both were Truthtellers.
(B) Both were Liars.
(C) The taller one was a Truthteller and the smaller one a Liar.
(D) The taller one was a Liar and the smaller one a Truthteller.
(E) Not enough information is given to be able to decide for certain.

29. Julian wrote an algorithm to form a sequence of numbers. $a_1 = 1$ and $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ holds true for all positive integers *m* and *n*. Determine the value of a_{100}.
(A) 100 (B) 1000 (C) 2012 (D) 4950 (E) 5050

30. Five cars enter a roundabout at the same time (see picture). Each car leaves the roundabout having completed less than a whole round and exaclty one car leaves at each exit. How many different combinations are there of how the cars can leave the roundabout?

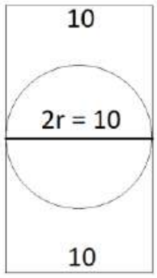
(A) 24 (B) 44 (C) 60 (D) 81 (E) 120

Känguru der Mathematik 2013
Gruppe Student (11. – 13. Schulstufe)
Österreich - 21.3.2013

LÖSUNGEN

- 3 Punkte Beispiele -

1. Am größten ist natürlich 20^{13}. Das sieht man recht schnell, indem man etwa die Anzahl der Stellen aller Zahlen abschätzt: 2013 ist vierstellig, $2^{0+13} = 2^{13} = 2^6 \times 2^7 = 64 \times 128$ ist vierstellig, $20^{13} = 2^{13} \times 10^{13}$ ist siebzehnstellig, 201^3 ist siebenstellig und 20 x 13 ist dreistellig. Damit lautet die richtige Antwort hier C.



2. Man betrachtet irgendein Paar von parallelen Diagonalen. Diese haben den gleichen Abstand voneinander wie die Seitenlänge des Achtecks, also 10. Diese Diagonalen tangieren beide den Kreis. Man kann normal zu diesen beiden Tangenten zwei Radien in den Kreis einzeichnen, die dieselbe Richtung haben und sich gegenseitig zu einem Durchmesser ergänzen: Der Durchmesser ist also 10 lang, der Radius somit 5; also stimmt Antwort C.

3. Ein Prisma besteht aus einer polygonalen Grundfläche, einer dazu kongruenten Deckfläche und mehreren Seitenflächen, die im allgemeinen Fall Parallelogramme sind. Da alle zusammen 2013 ergeben, hat das Prisma 2011 Seitenflächen. Damit müssen Grund- und Deckfläche 2011-Ecke sein.
Die Kanten kann man nun zum Beispiel so zählen: Eine Kante gehört immer zu ZWEI Flächen. Daher kann man zunächst einmal ALLE Kanten ALLER Flächen zählen und am Ende durch 2 dividieren, weil man dann jede Kante genau doppelt gezählt hat.
Also: Grund- und Deckfläche haben je 2011 Kanten, alle 2011 Seitenparallelogramme haben 4 x 2011 Kanten, das macht 6 x 2011 Kanten, dividiert durch zwei ergibt das 3 x 2011 = 6033 Kanten; also lautet die richtige Antwort E.

4. Hier ist ein sauberer Umgang mit Potenzrechengesetzen gefragt: $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 3^{9\cdot 3} = (3^9)^3$.
Die dritte Wurzel daraus ist $3^9 = 3^{3^2}$; richtig ist daher Antwort D.

5. In diesem Jahrtausend ist 2013 die kleinste Jahreszahl, die sich aus vier aufeinanderfolgenden Ziffern aufbauen lässt. Daher lag die letzte Jahreszahl, die dieselbe Eigenschaft besitzt, sicherlich im alten Jahrtausend und war 1432. Die Differenz zwischen diesen beiden Jahren beträgt 581, damit ist Antwort C richtig.
P.S.: Weitere Jahreszahlen mit demselben Bildungsprinzip waren im letzten Jahrtausend auch noch 1023, 1032, 1203, 1230, 1234, 1243, 1302, 1320, 1324, 1342, 1423;

6. Lineare Funktionen haben die Eigenschaft, dass sie immer die gleiche Änderungsrate alias Steigung aufweisen. Das heißt: Wenn f(2013) – f(2001) = 100 gilt, dann steigt die Funktion um 100 an, wenn sich x um 12 vergrößert.
f(2031) – f(2013) ist die Änderung der Funktion, wenn sich x um 18 ändert. Da 18 das 1,5-fache von 12 ist, steigt die Funktion in diesem Intervall um 1,5 x 100 = 150 an. D ist die richtige Antwort.

7. Wir checken die einzelnen Aussagen alle durch: $4 < x^2 < 9$ folgt aus der Beziehung durch direktes Quadrieren. Das ist hier unproblematisch, weil alle Größen positiv sind.
Verdoppeln der Beziehung liefert $4 < 2x < 6$, was natürlich auch bei Vergrößern von 6 zu 9 richtig bleibt.
Verdreifachen der Beziehung liefert direkt $6 < 3x < 9$.
$x^2 - 2x = x(x-2)$. Da man $x > 2$ voraussetzt, ist auch $(x-2)$ positiv und es gilt: $x^2 - 2x > 0$.
Andererseits wächst die Funktion $x(x-2)$ für $x > 2$, weil sowohl x als auch $(x-2)$ wachsen und damit auch ihr Produkt wächst. Da jedoch auch $x < 3$ gilt, ist $(x-2) < 1$ und das Produkt $x(x-2)$ bleibt kleiner als 3. Damit ist auch diese letzte Aussage richtig. Alle vier Aussagen stimmen und daher lautet die Antwort E.

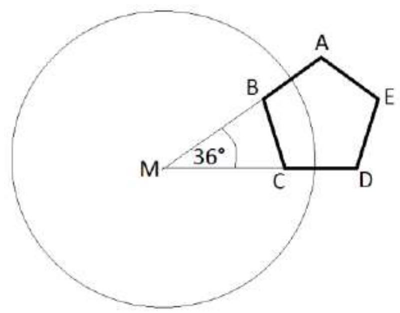
8. Der erste, zweite und dritte der einsamen Helden haben insgesamt 6 Bösewichte erwischt. Damit bleiben für die Helden Nr. 4, 5 und 6 noch 14 Bösewichte.
Hätte der vierte Held 7 Bösewichte geschnappt, würde es sich leicht ausgehen, dass er am meisten gefangen hätte, denn Held Nr. 5 und 6 könnten etwa 2 resp. 5 Bösewichte geschnappt haben.
Hätte der vierte Held 6 Bösewichte geschnappt, würde es sich auch ausgehen, dass er am meisten gefangen hätte, denn Held Nr. 5 und 6 könnten etwa 3 resp. 5 Bösewichte geschnappt haben.
Hätte der vierte Held 5 Bösewichte geschnappt, müssten Held Nr. 5 und 6 gemeinsam 9 Bösewichte schnappen. Dann muss aber einer von beiden mindestens 5 gefangen haben; somit kann der vierte Held nicht mehr am meisten Bösewichte geschnappt haben.
6 ist also die Minimalzahl von Bösewichten, bei der das möglich ist; also ist Antwort B richtig.

9. Nach dem Ausschlussprinzip folgert man: A (Ansicht von vorne auf die Pyramidenfläche ABS), B (Ansicht von rechts auf die Pyramidenfläche BCS), C (Ansicht von unten) und D (Ansicht von oben) können alle entstehen, E jedoch ist nicht möglich. Dazu müsste die Spitze der Pyramide in einem Flächenmittelpunkt liegen und man von oben auf die Pyramide schauen.

10. Wenn die Substanz schmilzt, vergrößert sich ihr Volumen von V um $\frac{1}{12}$ auf $\frac{13}{12}\mathrm{V}$. Wenn sich die Substanz wieder verfestigt, dann nimmt ihr Volumen von $\frac{13}{12}\mathrm{V}$ auf $\mathrm{V} = \frac{12}{12}\mathrm{V}$ ab: Sie besteht also vorher aus 13 Zwölftel-Volumina und beim Erstarren nur noch aus 12 Zwölftel-Volumina. Einer von 13 Volumenteilen geht verloren, damit verkleinert sich das Volumen um $\frac{1}{13}$. Antwort D ist richtig.

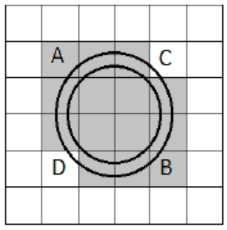
- 4 Punkte Beispiele -

11. Ergänzt man eines der Fünfecke um die Verlängerung der beiden Seiten AB und DC, so schneiden sich diese im Mittelpunkt des Kreises, wie in der Skizze zu sehen ist. Ein regelmäßiges Fünfeck hat eine Innenwinkelsumme von $3 \cdot 180° = 540°$ und jeder der Innenwinkel ist gleich groß, also 108°. Damit kann man die beiden Basiswinkel des Dreiecks MBC bestimmen: Sie ergänzen sich mit 108° auf einen gestreckten Winkel, sind also 72° groß. Damit beträgt aber der Winkel $\angle$BMC = 36°. Aus der Sicht des Kreismittelpunkts M nimmt ein Fünfeck also einen „Sichtwinkel“ von 36° ein, damit haben am Kreis 10 Plättchen (= 360° : 36°) Platz (Antwort C).



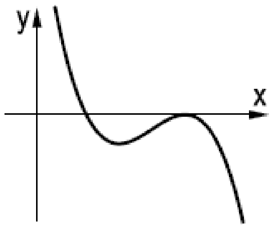
12. Der Reihe nach: Damit $\frac{n}{3}$ gerade noch dreiziffrig ist, muss der Bruch mindestens 100 groß sein und somit n also mindestens 300. Andererseits ist 3n als 999 gerade noch dreiziffrig, also kann n höchstens 333 groß sein. Damit hätte man 34 Kandidaten, aber Vorsicht: $\frac{n}{3}$ muss ja auch noch ganzzahlig sein. Das geht nur dann, wenn n durch 3 teilbar ist. Damit bleiben nicht mehr viele Zahlen übrig: 300, 303, 306, …. 330, 333. Das sind genau 12 Zahlen, damit stimmt Antwort A.

13. Das graue Muster in Lösung E kann nicht durch einen Kreis bedeckt werden. Da dieses Muster (auch) punktsymmetrisch ist, sollte der Kreis seinen Mittelpunkt im Symmetriezentrum des Musters haben. Ein kleiner Kreis, der die beiden weißen Einbuchtungen C und D meidet, meidet aber auch die äußeren Ecken A und B. Gleichzeitig durchquert ein etwas größerer Kreis, der A und B schneidet, auch C und D.



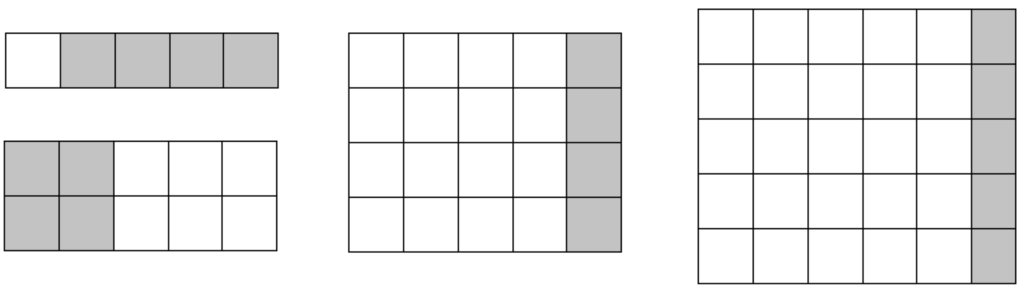
14. Die Negation lautet D: „Es existiert eine gerade Zahl x, für die f(x) ungerade ist.“
Die Negation behauptet eben, dass NICHT „für jedes gerade x f(x) gerade ist“, also muss es mindestens ein gerades x geben, für das f(x) ungerade ist. Und nachdem sowohl bei der Definitions- als auch Wertemenge ganze Zahlen im Spiel sind, gibt es dort nur gerade und ungerade Zahlen; daher ist innerhalb von Z „ungerade“ das Gegenteil von „gerade“.

15. Für das Aufspüren des Graphen von $f(x) = (a - x)(x - b)^2$ reicht es aus, einige kleine Dinge zu beobachten. Zunächst einmal kann man festhalten, dass $f(x) = 0$ dann wird, wenn $x = a$ oder wenn $x = b$ gilt. Das bedeutet, dass die Funktion genau 2 Nullstellen hat, wodurch Graph E ausscheidet.

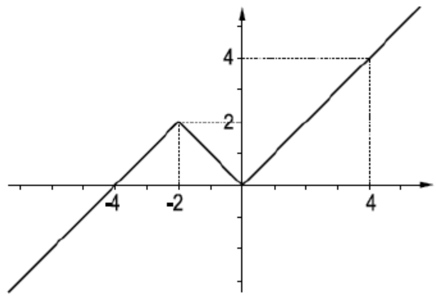


Da $(x - b)^2$ als Quadrat nie negativ ist, hängt das Vorzeichen der Funktion vom Faktor $(a - x)$ ab. Dieser Ausdruck ist positiv, wenn $x < a$ gilt, und negativ, wenn $x > a$.
Daraus kann man folgern, dass die Funktion an der Stelle $x = a$ einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen y-Werten vollzieht (Schnitt mit x-Achse). Laut Angabe ist $a < b$, daher muss der Schnitt mit der x-Achse bei der Nullstelle mit dem kleineren x-Wert sein; bei der zweiten Nullstelle berührt die Funktion die x-Achse nur (ohne Vorzeichenwechsel). Das ist nur bei Graph A der Fall.

16. Damit bei einem Rechteck überhaupt erst einmal die Fläche von 4 cm² bei einer Länge von 5 cm zustande kommt, muss die Breite mindestens 0,8 cm betragen. Dann ist das ganze Rechteck 4 cm² groß.
Vergrößert man die Breite ein wenig, wächst die Gesamtfläche über 4 cm² hinaus und irgendwann ist beim 5x1cm²-Rechteck durch Zerschneiden ein 1x1 cm²-Quadrat und ein 4x1 cm²-Rechteck möglich.
Wächst die Breite auf 2 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein 2x2 cm²-Quadrat und ein 3x2 cm²-Rechteck. In diesem Fall ist der 4 cm² große Flächenteil das Quadrat selbst.
Wächst die Breite auf 4 cm an, entstehen durch Zerschneiden ein 4x4 cm²-Quadrat und ein 1x4 cm²-Rechteck.
Wächst schließlich die Breite auf 5,8 cm, entstehen durch Zerschneiden ein 5x5 cm²-Quadrat und ein 0,8x5 cm²-Rechteck. Da das 5x5 cm²-Quadrat das größtmögliche Quadrat ist, das in einem 5 cm langen Rechteck Platz hat, gibt es darüber hinaus keine Möglichkeiten mehr. Daher gibt es 4 derartige Rechtecke (Antwort D).



17. Der Ausdruck f(f(f(x))) bedeutet, dass ein x-Wert in f(x) eingesetzt wird, dieses Ergebnis wird dann wiederum in f(x) eingesetzt [das ist dann f(f(x))]. Wird dieses Ergebnis wiederum in f(x) eingesetzt, entsteht der Ausdruck f(f(f(x))).
Wir sehen uns zunächst einmal an, wo die Funktion f ihre Nullstellen hat: Es gibt offensichtlich derer 2, nämlich $\boxed{f(-4) = 0}$ (1) und $\boxed{f(0) = 0}$ (2). Vergleicht man das mit f(f(f(x))) = 0, folgen die beiden neuen Gleichungen $\boxed{f(f(x)) = -4}$ (3) und $\boxed{f(f(x)) = 0}$ (4) – das Ergebnis von f(f(x)) muss ja offensichtlich – 4 oder 0 ergeben, damit f(f(f(x))) = 0 ergibt.
Gleichung (3) kann man vereinfachen, indem man am Graphen abliest, dass f(– 8) = – 4 gilt, somit folgt daraus die Gleichung f(x) = – 8. Diese hat aber die einzige Lösung x = – 12. Gleichung (4) kann man wiederum durch (1) und (2) in die neuen Gleichungen $\boxed{f(x) = -4}$ (5) und $\boxed{f(x) = 0}$ (6) überführen. Gleichung (5) hat als einzige Lösung x = – 8. Gleichung (6) hat die beiden Lösungen x = – 4 und x = 0.
Somit gibt es insgesamt 4 Lösungen zu Peters Gleichung:
f(f(f(– 12))) = f(f(f(– 8))) = f(f(f(– 4))) = f(f(f(0))) = 0.
Antwort A ist korrekt.



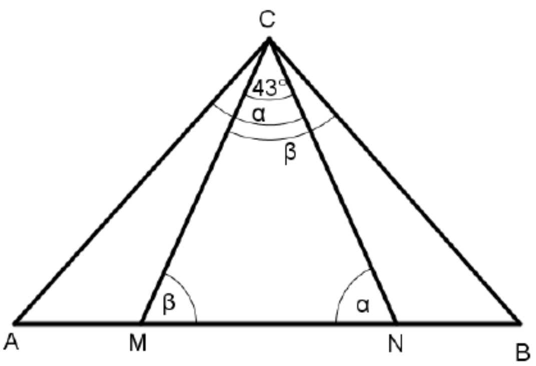
18. Man schreibt die Gleichung um zu $x^2y^3 = 2^{12} \cdot 3^{12}$. Nun helfen uns die Regeln der Potenzrechnung: Für x bzw. y setzt man nun Kombinationen von Potenzen der Faktoren 2 und 3. Hier wäre das Lösen durch Probieren aber noch sehr umständlich. Erkennt man aber, dass x^2 die beiden Faktoren 2 und 3 eine gerade Anzahl mal oft enthalten muss, y^3 dagegen die beiden Faktoren 2 und 3 eine Anzahl mal oft enthalten muss, die durch 3 teilbar ist. So ergibt $x^2y^3 = (2^3 \cdot 3^3)^2(2^2 \cdot 3^2)^3 = (2^6 \cdot 3^6)\,(2^6 \cdot 3^6) = 2^{12} \cdot 3^{12}$ das gewünschte Ergebnis.
Nun muss/kann man einfach durch systematisches Probieren alle Lösungen finden:

x	$2^6 \cdot 3^6$	$2^6 \cdot 3^3$	$2^6 \cdot 3^0$	$2^3 \cdot 3^6$	$2^3 \cdot 3^3$	$2^3 \cdot 3^0$	$2^0 \cdot 3^6$	$2^0 \cdot 3^3$	$2^0 \cdot 3^0$
y	$2^0 \cdot 3^0$	$2^0 \cdot 3^2$	$2^0 \cdot 3^4$	$2^2 \cdot 3^0$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^4$	$2^4 \cdot 3^0$	$2^4 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 3^4$

Die Zahl der Lösungen ist 9, somit ist E die richtige Antwort.

19. Die Ziffernsummen auf den Karten reichen von 1 (bei der Zahl 100) bis 27 (bei der Zahl 999), jede andere Ziffernsumme dazwischen kommt auch vor. Somit gibt es 27 verschiedene Werte für die Ziffernsumme der Karten. Nun betrachten wir den *„worst case“*: Angenommen, Franz zieht lauter Karten mit verschiedener Ziffernsumme, also 27 Stück: Dann hat er allerdings die beiden Karten 100 und 999 auch gezogen, und nun haben die restlichen Karten nur noch Ziffernsummen, die von 2 (bei 101 oder 110) bis 26 (bei 998, 989 oder 899) reichen, also gibt es nur noch 25 verschiedene Werte für die Ziffernsumme. Angenommen, er zieht nun neuerlich 25 Karten mit verschiedenen Ziffernsummen, dann besitzt er insgesamt 52 Karten, bei denen dieselbe Ziffernsumme höchstens doppelt vorkommt. Aber spätestens die 53. Karte hat eine Ziffernsumme, die schon zweimal vorliegt. Somit ist hier die richtige Antwort C.

20. Die beiden Dreiecke ANC und BCM sind gleichschenklig, daher treten zweimal der Winkel α (= $\angle CNA = \angle ACN$) und der Winkel β (= $\angle BMC = \angle MCB$) auf. Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck CMN gilt: $\alpha + \beta = 137°$. Andererseits überlappen sich der Winkel α und der Winkel β bei C um den Winkel 43°. Daher gilt: $\angle ACB = \alpha + \beta - 43° = 94°$. Antwort E stimmt.

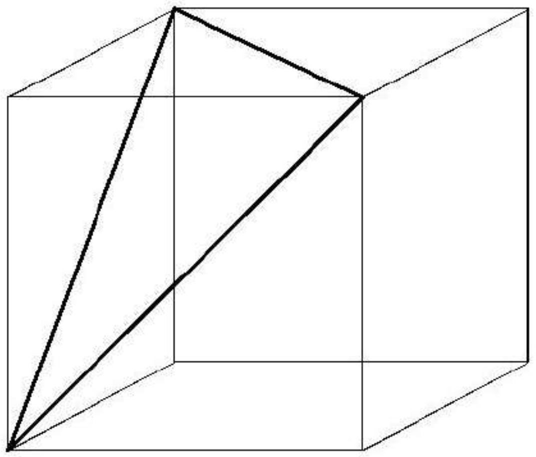


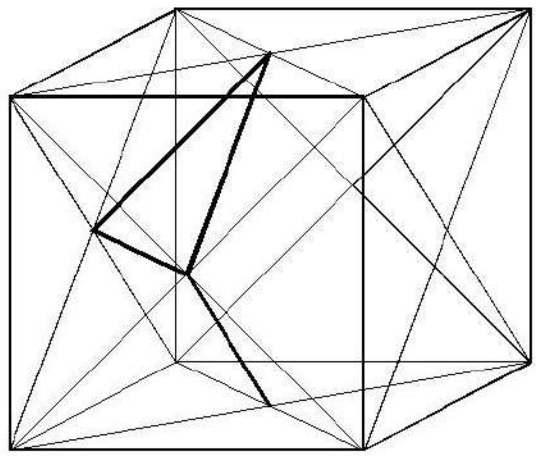
- 5 Punkte Beispiele -

21. Als Gleichung sieht die Behauptung so aus: $xy = 5(x + y)$. Um diese Gleichung systematisch zu lösen, kann man sie etwas umformen: $xy – 5x – 5y = 0$. Nun addiert man auf beiden Seiten 25: $xy – 5x – 5y + 25 = 25$. Dann steht nämlich links ein Produkt, und zwar $(x – 5)(y – 5) = 25$.
Da x und y ganze Zahlen sind, sind es $(x – 5)$ und $(y – 5)$ auch, und weil diese beiden ganzen Zahlen als Produkt 25 bilden, braucht man nur noch eine Liste aller Möglichkeiten zu finden, wie man die Zahl 25 als Produkt zweier ganzer Zahlen schreiben kann:
$25 = 1 \cdot 25 = 5 \cdot 5 = (-5) \cdot (-5) = (-25) \cdot (-1)$.
Diese Möglichkeiten führen zu den Lösungen: der jeweils erste Faktor ist nämlich $(x – 5)$ und der zweite $(y – 5)$.
Damit lauten die vier Lösungstupel: (6,30), (10,10), (0,0), (-20, 4); die richtige Antwort ist A.

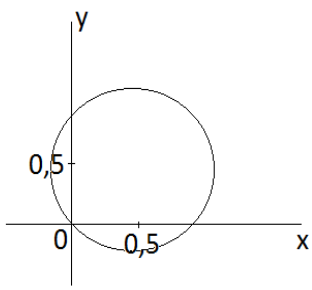
22. f hat eine Periode von 5, damit gilt, dass $f(x+5) = f(x)$.
Also gilt: $f(2013) = f(2008) = f(2003) = \ldots = f(3) = f(-2)$.
Für $x = -2$ lautet der Funktionswert aber $f(-2) = (-2)^2 = 4$; damit ist D richtig.

23. Am besten nimmt man sich einen Tonklumpen und probiert das Ganze dort aus. Beim Känguru-Test war das leider nicht erlaubt und daher musste man dieses Problem durch Nachdenken oder besser durch Zeichnen lösen. Nach Einzeichnen von drei bis vier Ebenen erkennt man langsam die Struktur des Oktaeders, der den Mittelpunkt des Würfels enthält.
Weitere Überlegung: jede Seitenfläche des Würfels wird viermal mit Flächen, die die Diagonale der Seitenfläche enthalten, geschnitten. Daher bleibt bei jeder Seitenfläche nur der Mittelpunkt ‚übrig'. Die entstehende Figur besitzt also 6 Eckpunkte: Diese Eigenschaft hat von den angegebenen Körpern nur das Oktaeder: Antwort A ist korrekt.



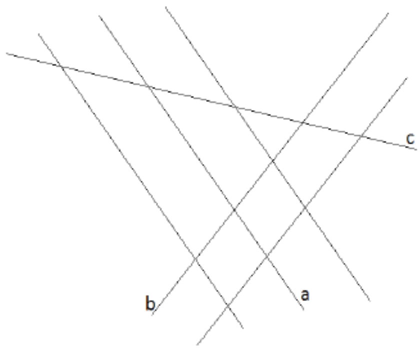


24. Beschränkt man sich für x und y zunächst nur einmal auf positive Werte, kann man die „unsympathischen" Betragszeichen weglassen und die Gleichung hat die Form $x^2 + y^2 = x + y$. Durch einfaches Umformen erhält man daraus die Gleichung $(x – 0{,}5)^2 + (y – 0{,}5)^2 = 0{,}5$. Einem geübten Auge ist diese Gleichung sofort als Kreisgleichung geläufig, und zwar mit Mittelpunkt in $(0{,}5|0{,}5)$ und $r^2 = 0{,}5$. Im ersten Quadranten, wo x und y beide positiv sind, gibt es unendlich viele Punkte als Zahlenpaare (x,y), die die Gleichung erfüllen; also ist Antwort E die gesuchte.



25. $f^{2013}(n) = 1$ schlüsseln wir einfach nach und nach auf:
$f^{2013}(n) = f(f^{2012}(n)) = 1$. Falls $f^{2012}(n)$ gerade war, gilt $f^{2012}(n) = 2$, da für gerade n $f(n) = n/2$. Falls $f^{2012}(n)$ ungerade war, gilt $f^{2012}(n) = 3$, da für gerade n $f(n) = (n – 1)/2$. $f^{2012}(n)$ kann also 2 oder 3 sein, um die ursprüngliche Gleichung zu erfüllen. Jetzt geht es weiter, die neuen, um eine Stufe reduzierten Gleichungen lauten:
$\boxed{f^{2012}(n) = 2}$ (1) und $\boxed{f^{2012}(n) = 3}$ (2)
Gleichung (1) lautet aufgeschlüsselt: $f^{2012}(n) = f(f^{2011}(n)) = 2$. $f^{2011}(n)$ kann 4 oder 5 sein, um sie zu erfüllen.
Gleichung (2) lautet aufgeschlüsselt: $f^{2012}(n) = f(f^{2011}(n)) = 3$. $f^{2011}(n)$ kann 6 oder 7 sein, um sie zu erfüllen.
Die vier neuen, um eine Stufe reduzierten Gleichungen lauten:
$\boxed{f^{2011}(n) = 4}$ (3) und $\boxed{f^{2011}(n) = 5}$ (4) und $\boxed{f^{2011}(n) = 6}$ (5) und $\boxed{f^{2011}(n) = 7}$ (6)
Nach demselben Ablauf wie oben ergeben sich für $f^{2010}(n)$ die möglichen Werte 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, also 8 Stück. Damit ist das Aufgabenschema klar: Pro Stufe, in der jeweils eine Verschachtelung abgearbeitet wird, verdoppelt sich die Zahl der Lösungen. Da die Funktion f insgesamt 2013-mal auf n angewandt wird, vordoppelt sich die Anzahl der Lösungen von ursprünglich 1 auf 2^{2013}; also ist D die richtige Lösung.

26. Durch ein wenig Herumprobieren kommt man auf die einzige Möglichkeit, wie a, b und c liegen können: a besitzt zwei Parallelen, b eine und c ist zu keiner der anderen Geraden parallel (vgl. Abb.).
Damit scheidet c die anderen Geraden in fünf Punkten und insgesamt wurden sechs Geraden in der Ebene gezeichnet. Es stimmt daher Antwort C.



27. Man kann diese Aufgabe natürlich auch durch Herumprobieren lösen und hat die Lösung nach nicht allzu langer Zeit gefunden. Schöner ist aber folgende Überlegung: Die Summe S(n) der ersten n positiven Zahlen war ja auch schon dem kleinen Gauß bekannt; der hat für sie – so sagt es zumindest die Legende – die Formel $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ hergeleitet. Anhand dieser Formel sieht man auch schnell, dass n nicht allzu groß werden kann, damit S(n) noch unter 1000 liegt. n = 50 etwa ist schon zu groß. Nun ist jede dreiziffrige Zahl mit 3 gleichen Ziffern ein Vielfaches von 111; 111 hat aber in der Primfaktorzerlegung 37, somit steckt in jeder dreiziffrigen Zahl der Form xxx der Faktor 37. Damit gilt jetzt die Beziehung $\frac{n(n+1)}{2} = 37m.$
Es gibt jetzt nur noch zwei Möglichkeiten: Entweder gilt n = 37 oder n + 1 = 37.
Wenn n = 37, liefert S(n) = 703, Fehlschlag. Wenn n + 1 = 37, liefert S(n) = 666, Bingo. Damit ist n = 36 und dessen Ziffernsumme ist 9 (Antwort B).

28. Es gibt vier Situationen:
(1) Angenommen, beide waren Ehrliche. Dann antwortet der Größere mit JA und der kleinere mit JA.
(2) Angenommen, beide waren Lügner. Dann antwortet der Größere mit JA und der kleinere mit JA.
(3) Angenommen, der Größere war ehrlich und der Kleinere ein Lügner. Dann antwortet der Größere mit NEIN und der Kleinere auch mit NEIN.
(4) Angenommen, der Größere war ein Lügner und der Kleinere ehrlich. Dann antwortet der Größere mit JA und der Kleinere mit NEIN.
Bei (3) hätte der Fragensteller sofort nach der ersten Antwort schließen können, wer von den beiden von welchem Typ ist, denn nur in dieser Konstellation gibt es zuerst ein NEIN. Da der Fragensteller nach der ersten Antwort aber noch nichts sagen kann, kann es sich nicht um die Situation (3) handeln. Da der Fragensteller aber nach der zweiten Antwort weiß, von welchem Typ die beiden sind, kann es sich nur um Situation (4) handeln, denn bei (1) und (2) kann der Fragensteller auch nach der zweiten Antwort noch nicht entscheiden, ob (1) oder (2) vorliegt. Es stimmt also Antwort D.

29. Julian muss seinen Algorithmus nur einige Male anwenden:
$a_2 = a_1 + a_1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.
$a_4 = a_2 + a_2 + 2 \cdot 2 = 3 + 3 + 4 = 10$.
$a_8 = a_4 + a_4 + 4 \cdot 4 = 10 + 10 + 16 = 36$.
$a_{16} = a_8 + a_8 + 8 \cdot 8 = 36 + 36 + 64 = 136$.
$a_{32} = a_{16} + a_{16} + 16 \cdot 16 = 136 + 136 + 256 = 528$.
$a_{64} = a_{32} + a_{32} + 32 \cdot 32 = 528 + 528 + 1024 = 2080$.
$a_{96} = a_{64} + a_{32} + 64 \cdot 32 = 2080 + 528 + 2048 = 4656$.
$a_{100} = a_{96} + a_4 + 96 \cdot 4 = 4656 + 10 + 384 = 5050$, Antwort E.
Übrigens: Wer die Herausforderung mag, kann zeigen, dass es sich bei a_n um nichts anderes handelt als die Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen, siehe Aufgabe 27. Dann ist die Aufgabe 29 rechentechnisch ein Klacks.

30. Die fünf Autos, nennen wir sie A, B, C, D, E, müssen alle an einer anderen Stelle ausfahren als sie eingefahren sind und jedem der Autos gehört eine eigene Ausfahrt. Mathematisch betrachtet, sucht man die Anzahl aller „fixpunktfreien Permutationen“ von 5 Elementen. Hat man das erkannt, dann weiß man auch, dass diese Anzahl mit der Subfakultät von 5 berechnet werden kann, kurz $!5$. Und dann weiß man natürlich auch die Formel für $!5$: $!5 = 5!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44$.
Spaß beiseite. Am einfachsten ist es wirklich, die Anzahl der Möglichkeiten durch Anschreiben zu erhalten. Wie viele Möglichkeiten gibt es die Buchstaben A, B, C, D, E anzuschreiben, damit A nicht an der ersten Stelle, B nicht an der zweiten Stelle usw. steht: BAECD, BADEC, BCAED, BCEAD, …
Es sollen hier nicht alle Lösungen angeschrieben werden. Es ergeben sich 44; die Lösung B ist richtig.
P.S.: Eine anschauliche grafische Lösung für dieselbe Herausforderung mit 4 Einfahrten ist bei den Lösungen für KADETT zu finden (Aufgabe 30).

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2014
20.3.2014

Kategorie: Felix, Schulstufe: 1-2

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.

jede richtige Antwort Beispiel 1.-5.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6.-10.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-15.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte	

dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

11	12	13	14	15

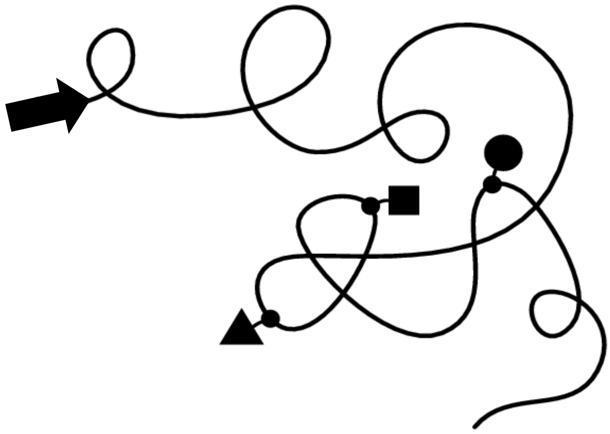
Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 20.3.2014

– 3 Punkte Beispiele –

1. Der Marienkäfer  möchte sich auf seine Blume setzen. Die Blüte hat fünf Blätter und der Stängel hat drei Blätter. Auf welche Blume muss sich der Marienkäfer setzen?

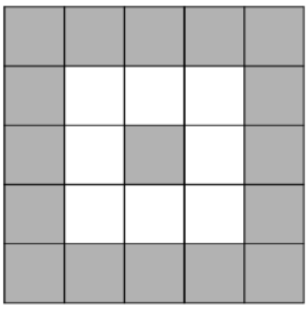
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Theresa fährt mit einem Stift entlang der Linie. Sie startet beim eingezeichneten Pfeil. In welcher Reihenfolge begegnet sie dabei den Figuren?



(A) ▲, ■, ● (B) ▲, ●, ■ (C) ●, ▲, ■
(D) ■, ▲, ● (E) ■, ●, ▲

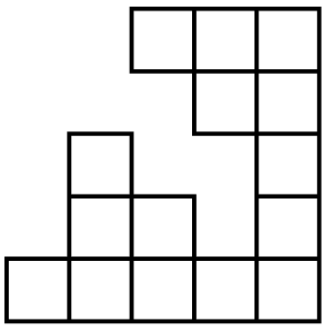
3. Es gibt mehr graue Kästchen als weiße. Um wie viele sind es mehr?



(A) 6 (B) 7 (C) 8
(D) 9 (E) 10

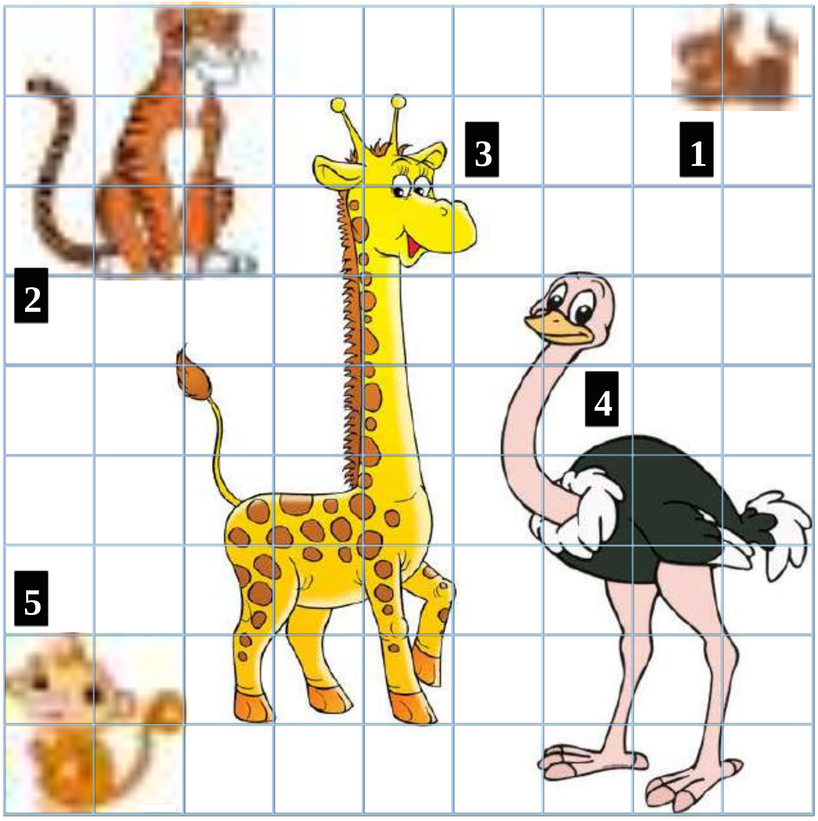
4. Ein großes Quadrat wurde aus 25 kleinen Quadraten zusammengelegt. Einige kleine Quadrate sind verloren gegangen. Wie viele kleine Quadrate sind verloren gegangen?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12



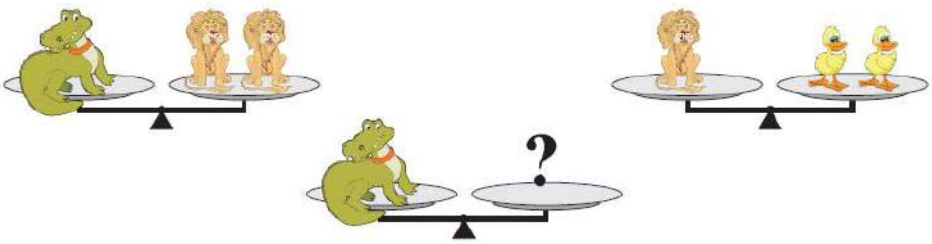
5. Ordne die Tiere der Größe nach. Beginne mit dem kleinsten.
Welches Tier steht dann in der Mitte?

(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4
(E) 5



– 4 Punkte Beispiele –

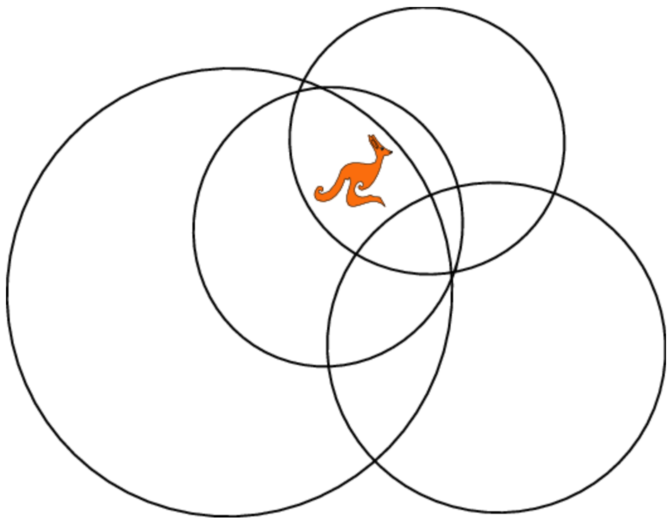
6. Wie viele Enten sind gleich schwer wie ein Krokodil?

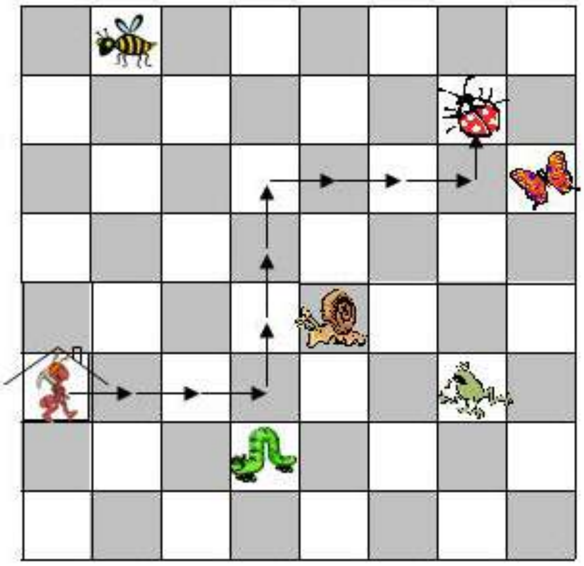


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. In wie vielen Kreisen befindet sich das Känguru?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5





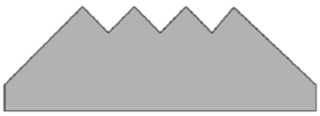
8. Wenn die Ameise  von Zuhause  entlang der Pfeile → 3, ↑ 3, → 3, ↑ 1 geht, dann kommt sie zum Marienkäfer .

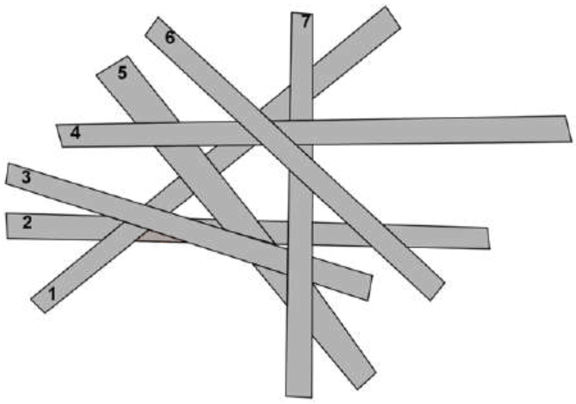
Zu welchem Tier kommt die Ameise , wenn sie von Zuhause  entlang der folgenden Pfeile geht: → 2, ↓ 2, → 3, ↑ 3, → 2, ↑ 2?

(A)    (B)    (C)    (D)    (E) 

9. Max hat ein Rechteck in zwei Teile zerschnitten. Ein Stück sieht so aus: 
Wie sieht das andere Stück aus?

(A)    (B) 

(C)    (D)    (E) 

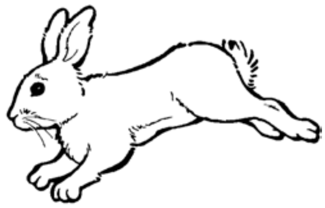


10. Sieben Stöcke liegen übereinander. Der Stock 2 liegt ganz unten. Der Stock 6 liegt ganz oben. Welcher Stock liegt genau in der Mitte?
(A) 1   (B) 3   (C) 4
(D) 5   (E) 7

– 5 Punkte Beispiele –

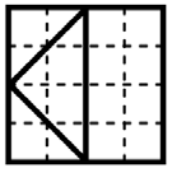
11. Wie viele Zahlen, die nur die Ziffern 1, 2 oder 3 enthalten dürfen, sind größer als 10 und kleiner als 32? In den Zahlen dürfen Ziffern auch öfters vorkommen.
(A) 2   (B) 4   (C) 6   (D) 7   (E) 8

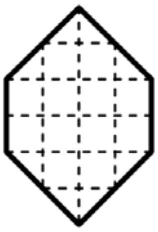
12. Die Hasenfamilie Hoppel frisst Kohl und Karotten.
Jeden Tag frisst sie entweder 10 Karotten oder 2 Kohlköpfe.
Innerhalb der ganzen letzten Woche hat sie 6 Kohlköpfe gefressen. Wie viele Karotten hat die Hasenfamilie letzte Woche gefressen?

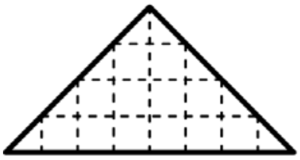


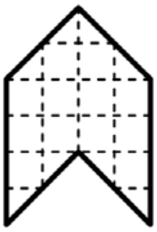
(A) 20 (B) 30 (C) 34 (D) 40 (E) 50

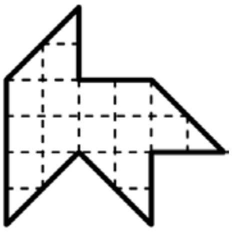
13. Ein Quadrat wurde in vier Teile zerschnitten. Welche der Figuren kann man mit diesen vier Teilen nicht zusammensetzen?

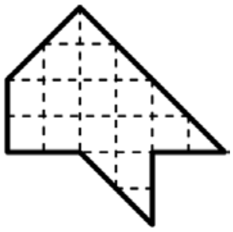


(A) 

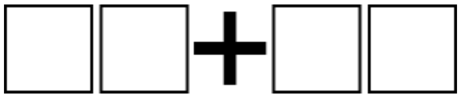
(B) 

(C) 

(D) 

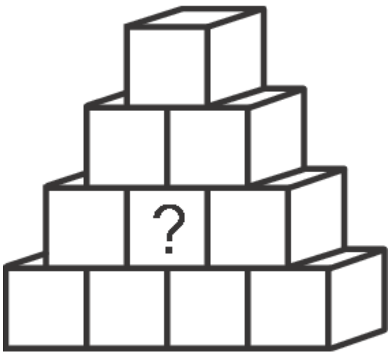
(E) 

14. Jede der Ziffern 2, 3, 4 und 5 wird in ein Kästchen eingesetzt. Dadurch entstehen zwei Zahlen, die zusammengezählt werden. Wie heißt die größte Zahl, die berechnet werden kann?



(A) 68 (B) 77 (C) 86 (D) 95 (E) 97

15. Ingrid hat 4 rote, 3 blaue, 2 grüne und 1 gelben Würfel. Sie baut damit die folgende Mauer:



Würfel derselben Farbe berühren sich nicht. Welche Farbe hat der Würfel mit dem Fragezeichen?

(A) rot (B) blau (C) grün (D) gelb

(E) Das lässt sich nicht eindeutig bestimmen.

MATHEMATICS KANGAROO 2014
Austria - 20.3.2014

Group: Felix, Grades: 1-2

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 60 min.
Each correct answer, questions 1.-5.: 3 Points
Each correct answer, questions 6.-10.: 4 Points
Each correct answer, questions 11.-15.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 15 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the questions number (1 to 15)
Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

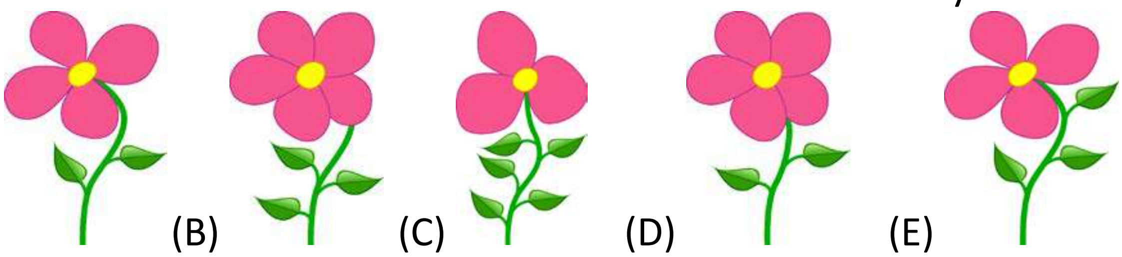
11	12	13	14	15

Information on the Kangaroo contest:
www.kaenguru.at

Mathematical Kangaroo 2014
Group Felix (Grade 1 and 2)
Austria – 20.3.2014

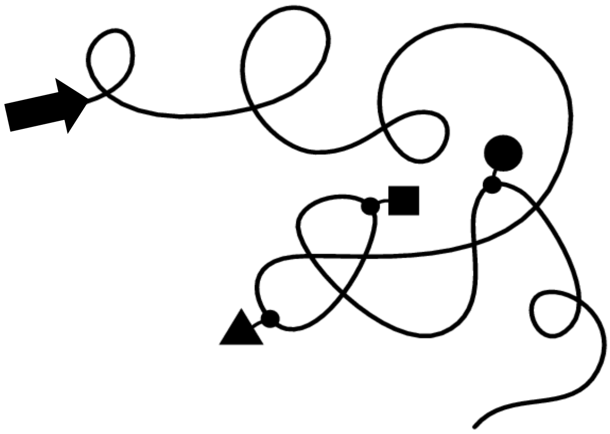
– 3 Point Questions –

1. The ladybird  would like to sit on his flower. The flower has five petals and the stem has three leaves. On which flower should the ladybird sit?



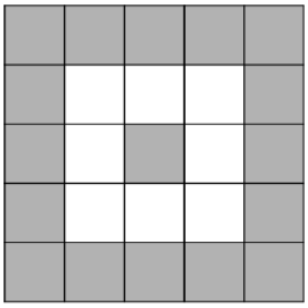
(A) (B) (C) (D) (E)

2. Theresa moves a pencil along the line. She starts at the arrow shown. In which order will she go past the shapes?



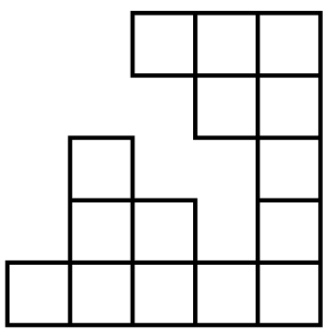
(A) ▲, ■, ● (B) ▲, ●, ■ (C) ●, ▲, ■
(D) ■, ▲, ● (E) ■, ●, ▲

3. There are more grey squares than white. How many more?



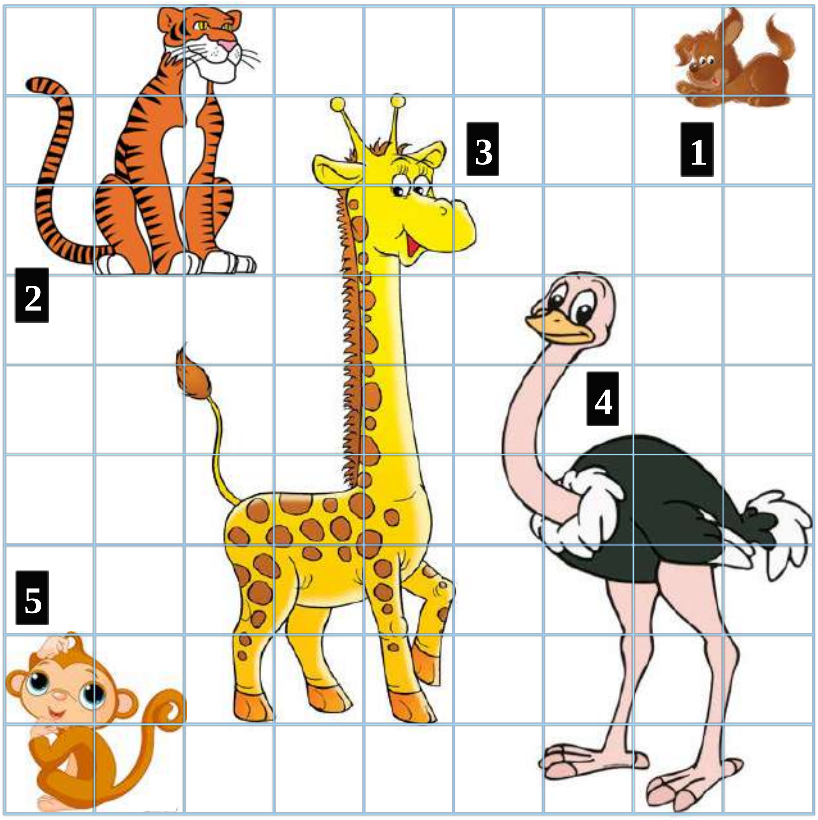
(A) 6 (B) 7 (C) 8
(D) 9 (E) 10

4. A big square is made from 25 small squares put together. A few of the small squares have been lost. How many have been lost?



(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

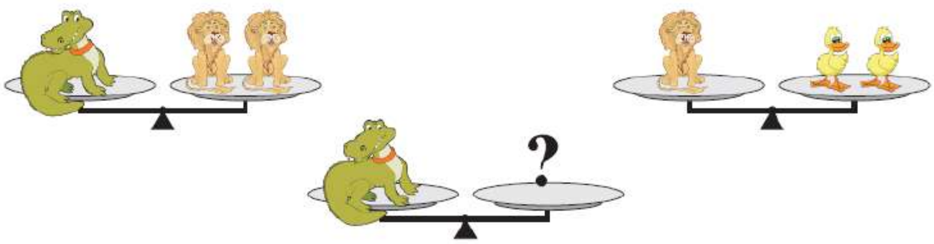
5. Put the animals in order of size. Begin with the smallest. Which animal will be in the middle?



(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4
(E) 5

– 4 Point Questions –

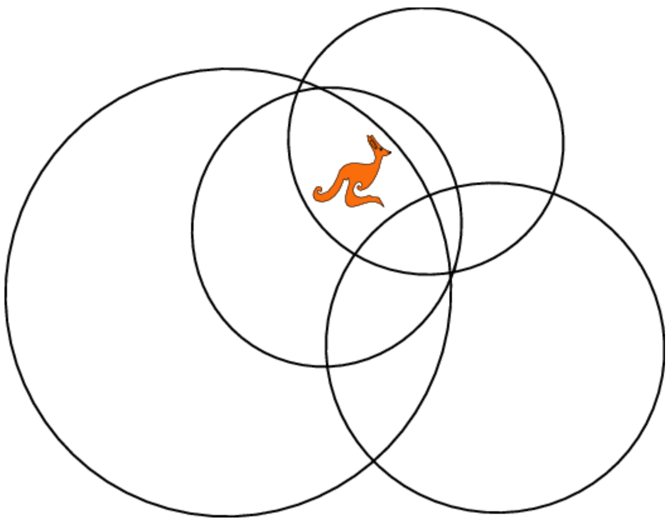
6. How many ducks weigh the same as a crocodile?

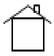


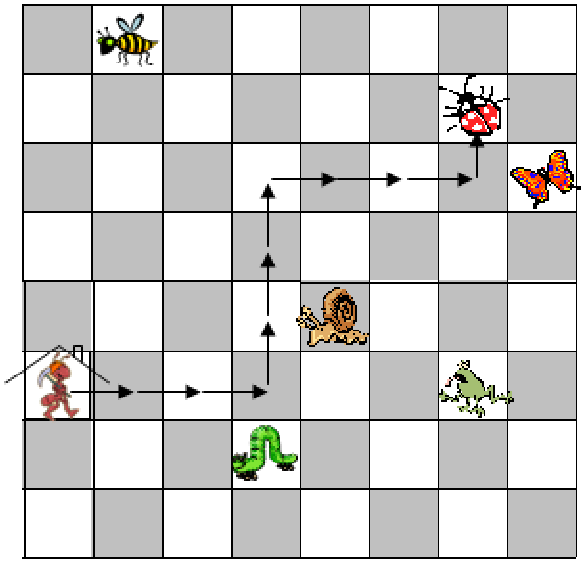
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

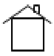
7. The kangaroo is inside how many circles?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5



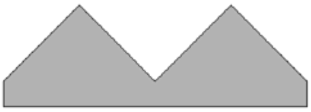
8. When the ant  walks from home  along the arrows → 3, ↑ 3, → 3, ↑ 1 ,he gets to the ladybird .

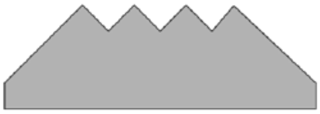


Which animal does the ant , get to when he walks from home  along the following arrows: → 2, ↓ 2, → 3, ↑ 3, → 2, ↑ 2?

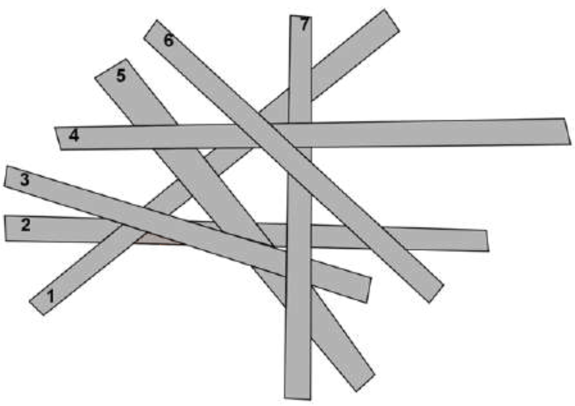
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

9. Max has cut a rectangle into two pieces. One piece looks like: 
What does the other piece look like?

(A)  (B) 

(C)  (D)  (E) 

10. Seven sticks lay on top of each other. Stick 2 lays right at the bottom. Stick 6 lays right on top. Which stick lays exactly in the middle?



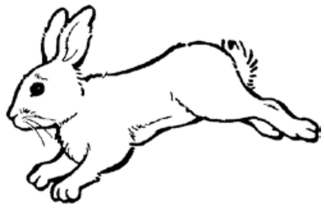
(A) 1 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) 7

– 5 Point Questions –

11. How many numbers, which are only allowed to contain the digits 1, 2 or 3 are bigger than 10 and smaller than 32? The digits can be used more than once in the numbers.

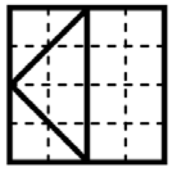
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

12. The rabbit family Hoppel eat cabbages and carrots. Each day they eat either 10 carrots or 2 cabbages. In the whole of last week they ate 6 cabbages. How many carrots did the rabbit family eat last week?

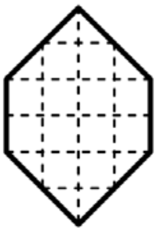


(A) 20 (B) 30 (C) 34 (D) 40 (E) 50

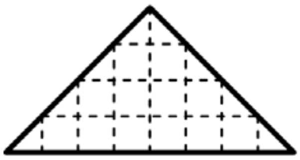
13. A square is cut into four pieces. Which shape can you not make with these four pieces?



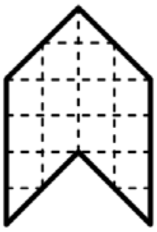
(A)



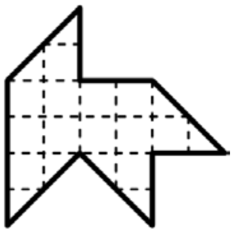
(B)



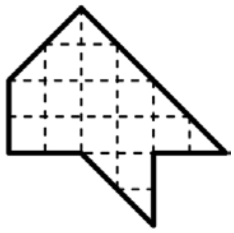
(C)



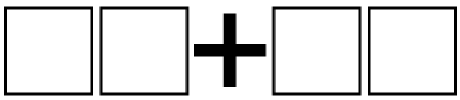
(D)



(E)

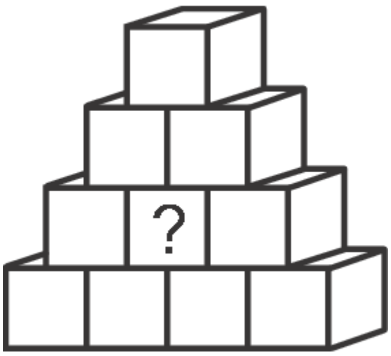


14. Each of the digits 2, 3, 4 and 5 will be placed in a square. Then there will be two numbers, which will be added together. What is the biggest number that they could make?



(A) 68 (B) 77 (C) 86 (D) 95 (E) 97

15. Ingrid has 4 red, 3 blue, 2 green and 1 yellow cube. She uses them to build the following object:



Cubes with the same colour don’t touch each other. Which colour is the cube with the question mark?

(A) red (B) blue (C) green (D) Yellow

(E) This cannot be worked out for certain.

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Lösungen

– 3 Punkte Beispiele –

1. Nur bei einer Blume hat die Blüte fünf Blätter und der Stängel drei Blätter:

(B) 

2. Die erste Figur, der Theresa begegnet, ist das Dreieck (▲), danach begegnet sie dem Quadrat (■) und zum Schluss dem Kreis (●):

(A) ▲, ■, ●

3. Die Anzahl der grauen Kästchen ist 17. Die Anzahl der weißen Kästchen ist 8. Somit gibt es um 9 graue Kästchen mehr:

(D) 9

4. Von den insgesamt 25 kleinen Quadraten sind noch immer 15 vorhanden. Das heißt, es sind 10 verloren gegangen:

(D) 10

5. Wenn man die Tiere der Größe nach (von klein nach groß) ordnet, dann ergibt sich folgende Reihung: Hund (1), Affe (5), **Tiger (2)**, Vogelstrauß (4), Giraffe (3). Der Tiger steht somit in der Mitte:

(B) 2

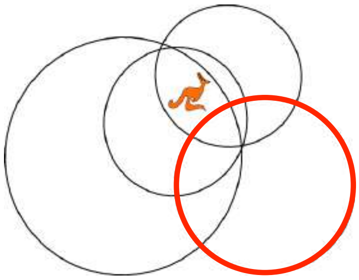
– 4 Punkte Beispiele –

6. Ein Löwe ist so schwer wie zwei Enten. Somit sind zwei Löwen so schwer wie vier Enten. Das ist aber auch das Gewicht von einem Krokodil:

(B) 

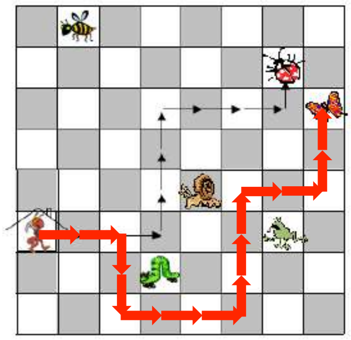
7. Es gibt insgesamt vier Kreise. Das Känguru ist nur von dem zweitgrößten Kreis (rot eingezeichnet) nicht eingeschlossen:

(C) 3



8. Der neue Weg ist im Bild mit roten Pfeilen eingezeichnet. Die Ameise kommt also zum Schmetterling:

(A) 



9. Nur mit einem Gegenstück lässt sich ein Rechteck (siehe Abbildung) zusammensetzten:

(E) 

10. Nachfolgend ist die Reihung der Stöcke von unten nach oben gelistet: 2, 1, 5, 3, 7, 4, 6. Das heißt, der Stock 3 liegt genau in der Mitte:

(B) 3

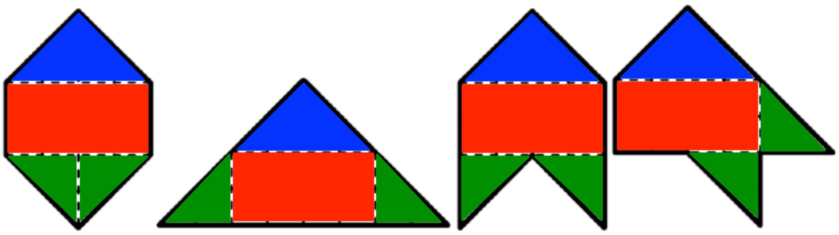
– 5 Punkte Beispiele –

11. Folgende Zahlen, welche größer als 10 und kleiner als 32 sind, enthalten nur die Ziffern 1, 2 oder 3: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31. Dies sind sieben Zahlen:

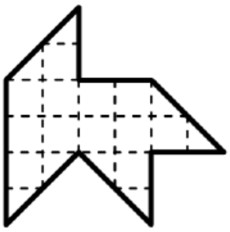
(D) 7

12. Wenn die Hasenfamilie Hoppel letzte Woche 6 Kohlköpfe gefressen hat, dann hat dies für drei Tage gereicht, nachdem 2 Kohlköpfe für einen Tag reichen. Die anderen vier Tage der Woche hat die Hasenfamilie Karotten gefressen. Familie Hoppel benötigt pro Tag 10 Karotten. Für vier Tage benötigt Familie Hoppel also 40 Karotten:
(D) 40

13. Die Figuren A, B, C und E können mit den gegebenen vier Teilen zusammengesetzt werden:

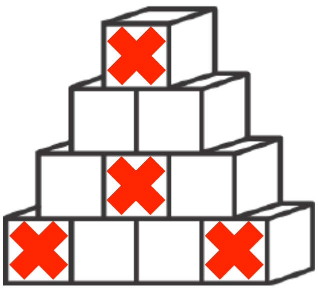


Nur die Figur D lässt sich nicht zusammensetzen:

(D) 

14. Es werden 2 zweistellige Zahlen zusammengezählt. Der höchste Stellenwert ist deshalb jeweils die Zehnerstelle. Um möglichst große Zahlen zu bekommen, werden entsprechend die Zehnerstellen mit den größten Ziffern besetzt (5 beziehungsweise 4). Es ist irrelevant, in welcher Art und Weise die Einerstellen besetzt werden; sowohl 52+43 als auch 53+42 liefern 95 als Ergebnis:
(D) 95

15. Wenn sich Würfel gleicher Farbe nicht berühren dürfen, dann gibt es nur eine mögliche Anordnung für die 4 roten Würfel. Diese Würfel sind in der Abbildung mit einem roten Kreuz markiert:
(A) rot



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2014
20.3.2014

Kategorie: Écolier, Schulstufe: 3-4

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9.-16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17.-24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Écolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 20.3.2014

– 3 Punkte Beispiele –

1. Luisa zeichnet einen Stern.
Sie schneidet in der Mitte der Zeichnung ein Stück heraus. Wie sieht das herausgeschnittene Stück aus?

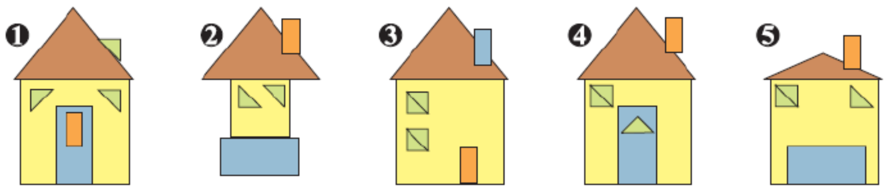
(A) (B) (C) (D) (E)

2. Marie möchte in der Zahl 2014 irgendwo die Ziffer 3 einfügen. Wohin muss sie die Ziffer 3 schreiben, damit die neue Zahl (mit nun fünf Ziffern) möglichst klein ist?

(A) vor 2014 (B) zwischen 2 und 0 (C) zwischen 0 und 1
(D) zwischen 1 und 4 (E) nach 2014

3. Für welche Häuser wurden die genau gleichen Bausteine verwendet?

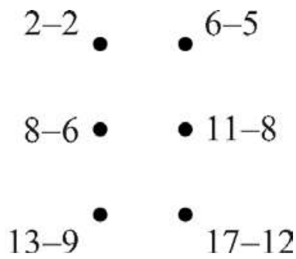
(A) Haus 1 und 4 (B) Haus 3 und 4
(C) Haus 1, 4 und 5 (D) Haus 3, 4 und 5
(E) Haus 1, 2, 4 und 5

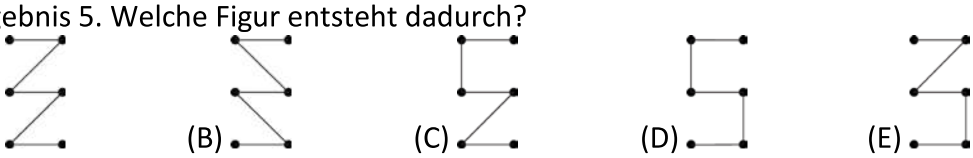


4. Immer dann, wenn Koko der Koalabär wach ist, frisst er 50 Gramm Blätter in der Stunde. Gestern hat Koko 20 Stunden geschlafen. Wie viele Gramm Blätter hat er gestern gefressen?

(A) 0 Gramm (B) 50 Gramm (C) 100 Gramm (D) 200 Gramm (E) 400 Gramm

5. Christoph löst die Rechnungen bei den Punkten, die du rechts siehst, und bekommt die Zahlen von 0 bis 5 heraus. Er verbindet nun die Punkte der Reihe nach. Er startet bei dem Punkt mit dem Ergebnis 0 und endet bei dem Punkt mit dem Ergebnis 5. Welche Figur entsteht dadurch?



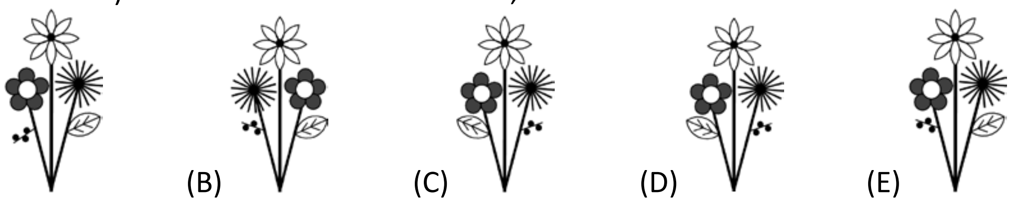


(A) (B) (C) (D) (E)

6. Anita hat weniger Sandburgen gebaut als Hans, aber mehr als Stefan. Fabian hat mehr Sandburgen gebaut als Anita und mehr als Hans. Bruno hat mehr Sandburgen gebaut als Hans, aber weniger als Fabian. Wer hat die meisten Sandburgen gebaut?

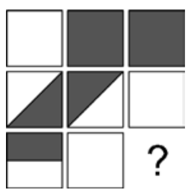
(A) Hans (B) Anita (C) Stefan (D) Bruno (E) Fabian

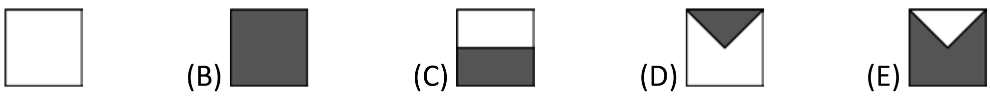
7. Herr Hofer hat ein Bild mit Blumen auf die Innenseite eines Schaufensters gezeichnet (großes Bild). Wie sehen diese Blumen aus, wenn man von draußen auf das Bild schaut?



(A) (B) (C) (D) (E)

8. Durch welches Quadrat muss man das Fragezeichen ersetzen, damit die weiße Fläche und die schwarze Fläche gleich groß werden?





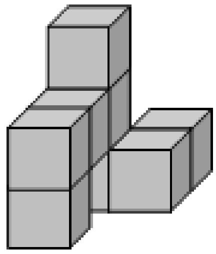
(A) (B) (C) (D) (E)

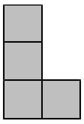
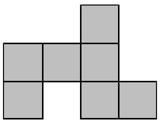
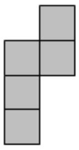
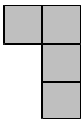
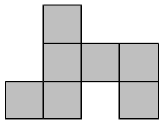
– 4 Punkte Beispiele –

9. Eine Schüssel war voll mit Zuckerln. Raphael nahm die Hälfte davon heraus. Danach hat Emanuel die Hälfte von den verbliebenen Zuckerln herausgenommen. Nun befinden sich nur mehr 12 Zuckerl in der Schüssel. Wie viele Zuckerl waren am Anfang in der Schüssel?

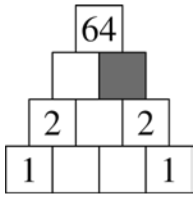
(A) 12 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 48

10. Der Körper in der Abbildung besteht aus 8 gleichen Würfeln.
Wie sieht dieser Körper aus, wenn man von oben darauf schaut?



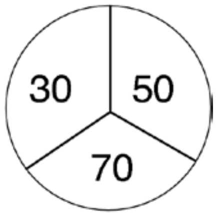
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Leo schreibt Zahlen in die Mal-Rechenmauer. Erklärung der Mal-Rechenmauer: Durch Multiplikation der Zahlen von zwei nebeneinander liegenden Feldern, wird die Zahl des (in der Mitte) darüber liegenden Feldes berechnet. Welche Zahl muss Leo in das graue Feld schreiben?

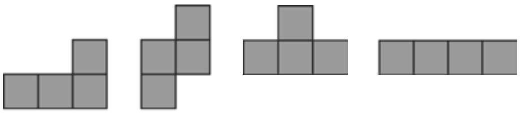
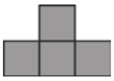


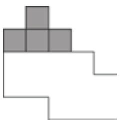
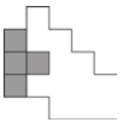
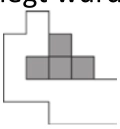
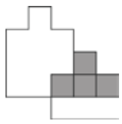
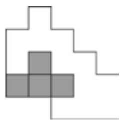
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8

12. Katja wirft mit Pfeilen auf die rechts abgebildete Zielscheibe. Wenn sie die Zielscheibe nicht trifft, bekommt sie keine Punkte. Katja wirft zweimal und addiert ihre Punkte. Was kann nicht ihr Gesamtergebnis sein?

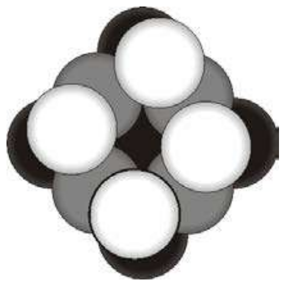


(A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90 (E) 100

13. Erwin hat die folgenden vier Papierstücke: 
Mit diesen vier Stücken muss er eine spezielle Figur genau bedecken. In welcher Zeichnung schafft er dies, wenn das Stück  bereits hingelegt wurde?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. Gerhard hat die gleiche Anzahl an weißen, grauen und schwarzen Spielplättchen. Einige dieser kreisrunden Spielplättchen hat er auf einen Haufen geworfen. Die dafür verwendeten Spielplättchen sind alle im Bild zusehen. Gerhard hat aber immer noch fünf Spielplättchen, die nicht auf dem Haufen liegen. Wie viele schwarze Spielplättchen hatte er am Anfang?



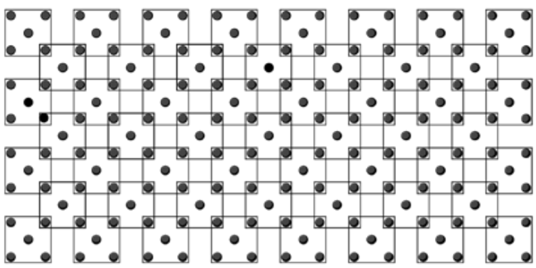
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 15 (E) 18

15. Der Hase Hubert liebt Kohl und Karotten. Er frisst an einem Tag entweder 9 Karotten oder 2 Kohlköpfe oder einen Kohlkopf und 4 Karotten. Innerhalb einer Woche hat Hubert 30 Karotten gefressen. Wie viele Kohlköpfe hat Hubert in dieser Woche gefressen?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

16. Wie viele Punkte befinden sich in diesem Bild?

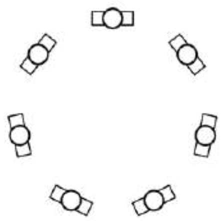
(A) 180 (B) 181 (C) 182
(D) 183 (E) 265



– 5 Punkte Beispiele –

17. Auf dem Känguru-Planeten hat jedes Kängu-Jahr 20 Kängu-Monate. Jedes Kängu-Monat hat 6 Kängu-Wochen. Wie viele Kängu-Wochen hat ein Viertel von einem Kängu-Jahr?
(A) 9 (B) 30 (C) 60 (D) 90 (E) 120

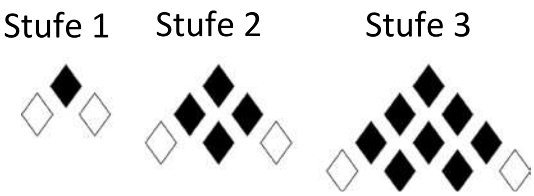
18. Sieben Kinder stehen in einem Kreis. Nirgends stehen zwei Buben nebeneinander. Nirgends stehen drei Mädchen nebeneinander. Was gilt für die Anzahl der Mädchen? Die Anzahl der Mädchen kann ...



(A) ... nur 3 sein. (B) ... 3 oder 4 sein. (C) ... nur 4 sein.
(D) ... 4 oder 5 sein. (E) ... nur 5 sein.

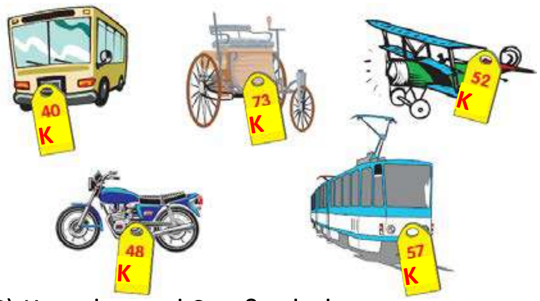
19. Elisabeth sortiert folgende Karten: O A R G O N K A
Sie darf bei jedem Spielzug nur zwei beliebige Karten miteinander vertauschen. Was ist die kleinste Anzahl an Spielzügen, die sie braucht, damit sie das Wort KANGAROO erhält?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. Die Anzahl der schwarzen Vierecke ◆ und weißen Vierecke ◇ folgt einem bestimmten System. Im Bild sind die ersten drei Stufen angegeben. Jede Stufe (ab der Stufe 2) hat eine Zeile mehr als die Stufe davor. Für jede Stufe gilt: In der letzten Zeile sind die beiden äußersten Vierecke weiß. Alle anderen Vierecke sind schwarz.
Wie viele schwarze Vierecke gibt es auf der Stufe 6?



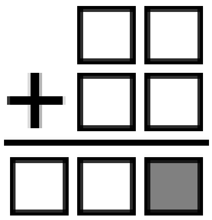
(A) 19 (B) 21 (C) 26 (D) 28 (E) 34

21. Känguru Heinzi hat Spielsachen gekauft. Er hat dafür dem Verkäufer 150 Kängu-Münzen (KM) gegeben und 20 Kängu-Münzen zurückbekommen. Noch vor dem Verlassen des Geschäfts hat er seine Meinung geändert und ein gekauftes Spielzeug gegen ein anderes umgetauscht. Deshalb hat Heinzi weitere 5 Kängu-Münzen vom Verkäufer zurückbekommen. Welche der abgebildeten Spielsachen hat Heinzi nun tatsächlich mit nach Hause genommen?

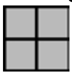


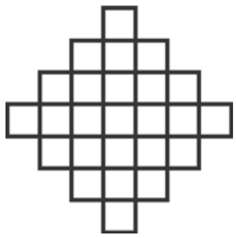
(A) Kutsche und Flugzeug (B) Kutsche und Bus (C) Kutsche und Straßenbahn
(D) Motorrad und Straßenbahn (E) Bus, Motorrad und Straßenbahn

22. In jedes Kästchen wird genau eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6 geschrieben. Dabei wird jede Ziffer nur einmal verwendet. Welche Zahl muss in das graue Kästchen geschrieben werden, damit die Rechnung richtig ist?



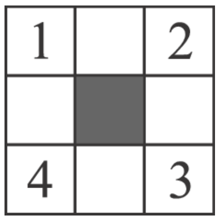
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

23. In der rechts stehenden Figur werden einige der kleinen Kästchen grau angemalt.
Dabei darf kein Quadrat  entstehen, das aus vier kleinen grauen Kästchen besteht. Wie viele Kästchen können in der angeführten Figur höchstens grau angemalt werden?



(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

24. Albin hat jede der Ziffern von 1 bis 9 in die Felder der Tabelle geschrieben. In der Abbildung sind nur vier dieser Ziffern ersichtlich. Albin hat für das Feld mit der Ziffer 5 bemerkt, dass die Summe der Ziffern in den benachbarten Feldern 13 ist (benachbarte Felder sind Felder mit einer gemeinsamen Seite). Er hat das Gleiche für das Feld mit der Ziffer 6 bemerkt. Welche Ziffer hat Albin dann in das graue Feld geschrieben?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

MATHEMATICS KANGAROO 2014
Austria - 20.3.2014

Group: Écolier, Grades: 3-4

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 60 min.
Each correct answer, questions 1.-8.: 3 Points
Each correct answer, questions 9.-16.: 4 Points
Each correct answer, questions 17.-24.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 24 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the questions number (1 to 24)
Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information on the Kangaroo contest:
www.kaenguru.at

Mathematical Kangaroo 2014
Group Ecolier (Grade 3 and 4)
Austria – 20.3.2014

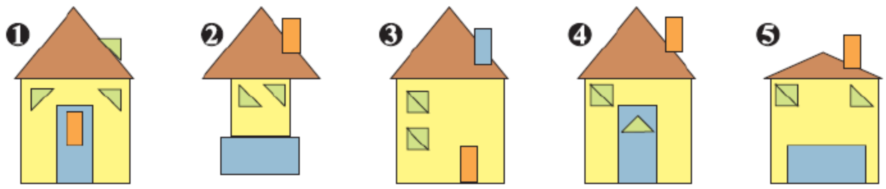
– 3 Point Questions –

1. Luisa draws a star.
She cuts a piece out of the middle of the drawing. What does this piece look like?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Marie wants to insert the digit 3 somewhere into the number 2014. Where must she put the digit 3 so that the new number (with all 5 digits) is as small as possible?
(A) in front of 2014 (B) between 2 and 0 (C) between 0 and 1
(D) between 1 and 4 (E) after 2014

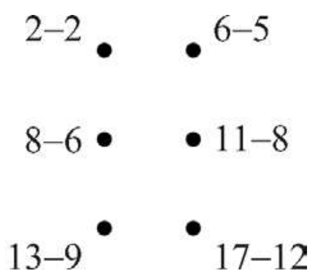
3. For which houses, were exactly the same building blocks used?

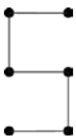


(A) House 1 and 4
(B) House 3 and 4
(C) House 1, 4 and 5
(D) House 3, 4 and 5 (E) House 1, 2, 4 and 5

4. Whenever Koko the koala bear is awake, he always eats 50 grams of leaves in one hour. Yesterday Koko slept for 20 hours. How many grams of leaves did he eat yesterday?
(A) 0 grams (B) 50 grams (C) 100 grams
(D) 200 grams (E) 400 grams

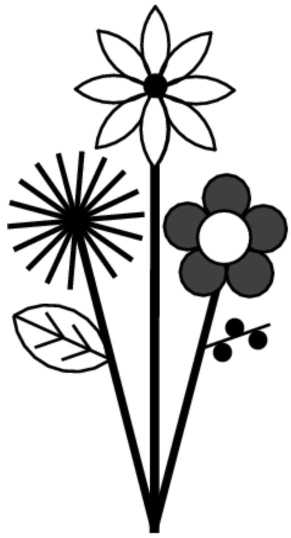
5. Christopher solved the sums next to the dots that you can see on the right, and got the answers 0 to 5. He joined the dots in order. He started with the dot that had the answer 0 and finished with the dot that had the answer 5. Which shape was he left with?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

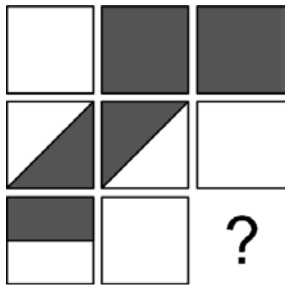
6. Anita has built fewer sandcastles than Hans but more than Steffan. Fabian has built more sandcastles than Anita and more than Hans. Bruno has built more sandcastles than Hans but less than Fabian. Who has built the most sandcastles?
(A) Hans (B) Anita (C) Stefan (D) Bruno (E) Fabian

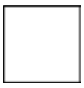
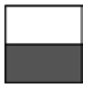
7. Mr Hofer has drawn a picture of flowers on the inside of a display window (large picture). What do these flowers look like when you look at the picture from the outside?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8. With which square do you have to swap the question mark, so that the white area and the black area are the same size?



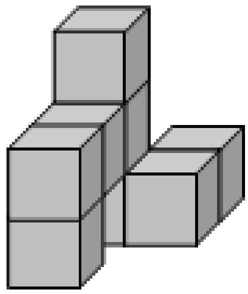
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

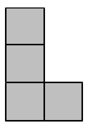
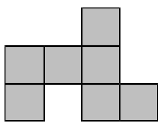
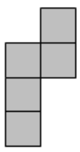
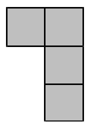
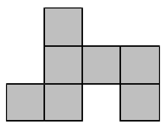
– 4 Point Questions –

9. A bowl was full with sweets. Raphael took half of them out. Afterwards Emanuel took out half of the remaining sweets. Now there are only 12 sweets left in the bowl. How many sweets were in the bowl to begin with?

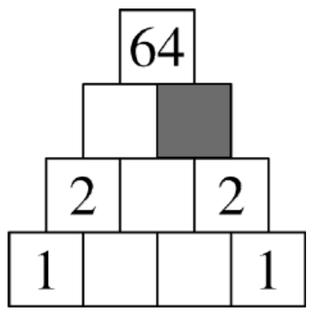
(A) 12 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 48

10. The solid in the diagram is made out of 8 identical cubes. What does the solid look like when viewed from above?



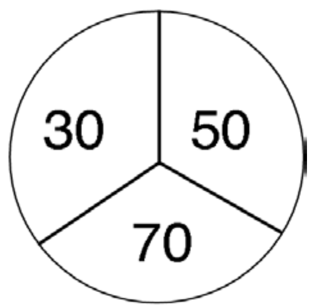
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Leo writes numbers in the multiplication pyramid. Explanation of the multiplication pyramid: By multiplying the numbers which are next to each other, the number directly above (in the middle) is calculated. Which number must Leo write in the grey field?

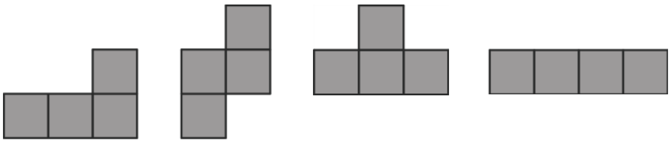
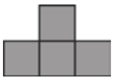


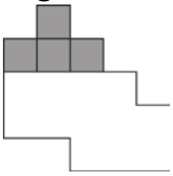
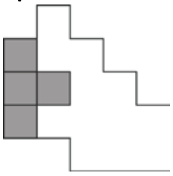
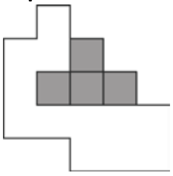
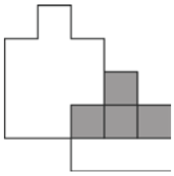
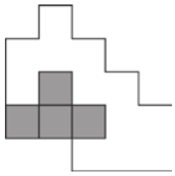
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 8

12. Katja throws darts at the target pictured on the right. If she does not hit the target she gets no points. She throws twice and adds her points. What can her total not be?

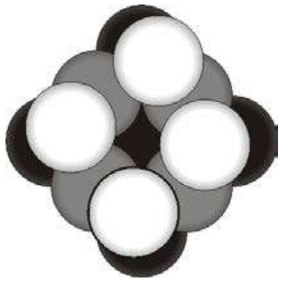


(A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90 (E) 100

13. Erwin has got the following paper pieces: 
With these four pieces he must exactly cover a special shape. In which drawing will he manage this, if the piece  is placed as shown?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

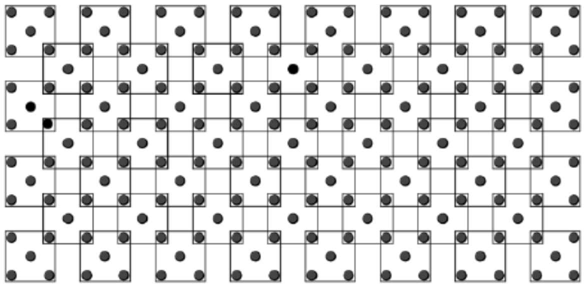
14. Gerhard has the same number of white, grey and black counters. He has thrown some of these circular pieces together onto a pile. All the pieces he has used for this, can be seen in the picture. He has however, got 5 counters left that will not stay on the pile. How many black counters did he have to begin with?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 15 (E) 18

15. Hubert the rabbit loves cabbages and carrots. In one day he eats either 9 carrots, or 2 cabbages, or one cabbage and 4 carrots. In one week Hubert had eaten 30 carrots. How many cabbages had he in eaten during this week?
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

16. How many dots are in the picture?

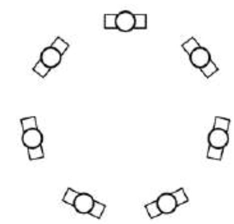


(A) 180 (B) 181 (C) 182
(D) 183 (E) 265

– 5 point questions –

17. On the Kangaroo planet each kangoo-year has 20 kangoo-months. Each kangoo-month has 6 kangoo-weeks. How many kangoo-weeks are in a quarter of a kangoo-year?
(A) 9 (B) 30 (C) 60 (D) 90 (E) 120

18. Seven children stand in a circle. Nowhere are two boys found standing next to each other. Nowhere are three girls found standing next to each other. What is possible for the number of girls? The number of girls can…

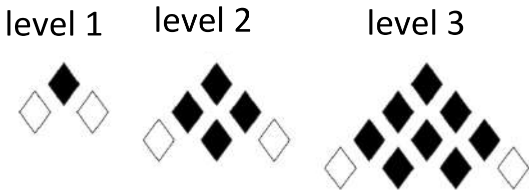


(A) ... only be 3. (B) ... be 3 or 4. (C) ... only be 4.
(D) ... be 4 or 5. (E) ... only be 5.

19. Elisabeth sorts the following cards: 

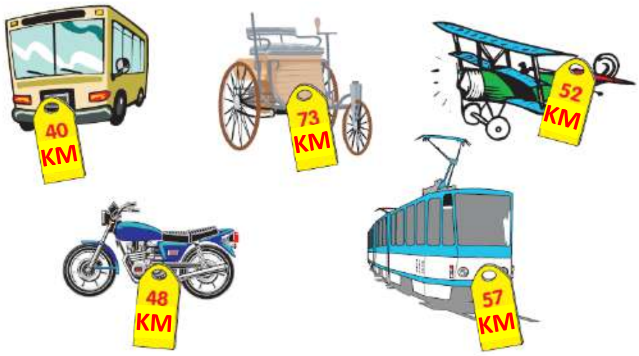
With each move she is allowed to swap any two cards with each other. What is the smallest number of moves she needs in order to get the word KANGAROO.
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. The number of black diamonds ◆ and white diamonds ◇ follow a fixed system. In the picture the first 3 levels are shown. Each level (from the 2nd level) has one row more than the level before. For each level the following applies: In the last row both of the outermost diamonds are white, all other diamonds are black. How many black diamonds are there in level 6?



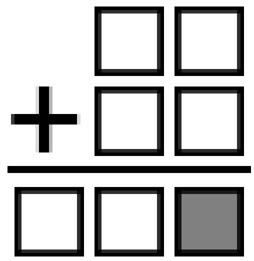
(A) 19 (B) 21 (C) 26 (D) 28 (E) 34

21. Heinzi the kangaroo has bought some toys. For this he gave 150 Kangoo-coins (KC) and received 20 kangoo-coins back. Just before leaving the shop he changed his mind, and exchanged one of the toys he had bought with another one. Therefore he received a further 5 kangoo-coins back from the shopkeeper. Which of the toys in the picture has Heinzi taken home with him?

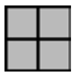


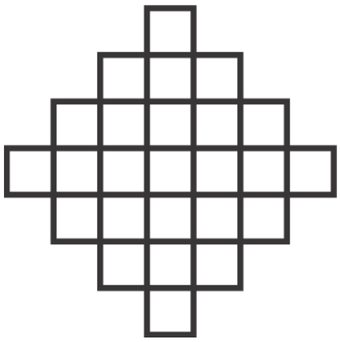
(A) Carriage and Aeroplane (B) Carriage and Bus (C) Carriage and Tram
(D) Motorbike and Tram (E) Bus, Motorbike and Tram

22. In each box exactly one of the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5 and 6 is to be written. Each digit will only be used once. Which digit has to be written in the grey box so that the sum is correct?



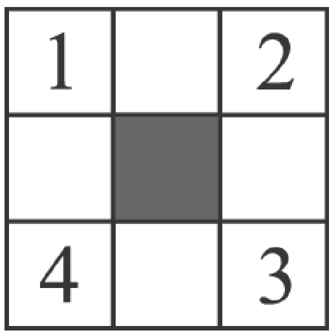
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

23. In the figure on the right a few of the small squares will be painted grey. In so doing no square  that is made from four small grey squares must appear. At most how many of the squares in the figure can be painted grey?



(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

24. Albin has put each of the digits from 1 to 9 in the fields of the table. In the diagram only 4 of these digits are visible. For the field containing the number 5, Albin noticed that the sum of the numbers in the neighbouring fields is 13. (neighbouring fields are fields which share a side). He noticed exactly the same for the field containing the digit 6. Which digit had Albin written in the grey field?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Lösungen

– 3 Punkte Beispiele –

1. Der gegebene Stern hat 9 Strahlen. Nur ein Ausschnitt weist diese Anzahl an Strahlen auf:

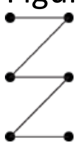
(D) 

2. Damit die Zahl möglichst klein wird, müssen die höchsten Stellenwerte mit den niedrigsten Ziffern besetzt werden. Die Ziffern 0, 1 und 2 sind kleiner als die Ziffer 3. Das heißt, die Ziffer 3 ist rechts von den Ziffern 0, 1 und 2 einzutragen. Nachdem die Zahl 20134 kleiner als die Zahl 20143 ist, muss die Ziffer 3 noch vor der Ziffer 4 eingetragen werden:
(D) zwischen 1 und 4

3. Nur für die Häuser 1 und 4 wurden die gleichen Bausteine verwendet. Nämlich drei grüne, ein oranger, ein (großer) gelber, ein (großer) blauer und ein (großer) roter:
(A) Haus 1 und 4

4. Wenn Koko 20 Stunden geschlafen hat, dann war er gestern vier Stunden wach. In dieser (Wach-)Zeit hat er 50 Gramm Blätter in einer Stunde gefressen. In vier Stunden hat er also 200 Gramm gefressen:
(D) 200 Gramm

5. Die Lösungen der Rechnungen lauten: 2-2=0; 6-5=1; 8-6=2; 11-8=3; 13-9=4; 17-12=5. Nun wird „0“ mit „1“, „1“ mit „2“, „2“ mit „3“, „3“ mit „4“ und „4“ mit „5“ verbunden. Es entsteht die Figur A:

(A) 

6. Ordnet man aufgrund der Aussagen die Namen nach der Anzahl der Sandburgen, welche die Personen gebaut haben, dann ergibt sich folgende Reihung:
Stefan „weniger als“ Anita „weniger als“ Hans „weniger als“ Bruno „weniger als“ **Fabian**:
(E) Fabian

7. Wenn man von draußen auf das Bild schaut, dann sieht man die ursprünglich gemalte Blume gespiegelt. Das heißt, die links gemalten Blüten erscheinen rechts und umgekehrt. Die Blüte in der Mitte wird an der gleichen Stelle gesehen. Dies ist bei A und E der Fall. Jedoch sind bei A die drei kleinen Blätter  falsch angeordnet:

(E) 

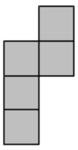
8. Im gegebenen Bild ist die weiße Fläche vier und ein halbes Quadrat groß. Die schwarze Fläche ist drei und ein halbes Quadrat groß. Damit die weiße Fläche und die schwarze Fläche gleich groß sind, muss ein ganzes schwarzes Quadrat für das Fragezeichen eingesetzt werden:

(B) 

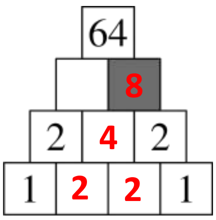
– 4 Punkte Beispiele –

9. Nach zweimaligen Halbieren sind nur mehr 12 Zuckerl in der Schüssel. Um zu ermitteln, wie viele Zuckerl am Anfang in der Schüssel waren, muss dementsprechend zweimal verdoppelt werden (2·2·12):
(E) 48

10. Wenn man von oben darauf schaut, dann sieht man folgendes Bild:

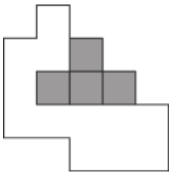
(C) 

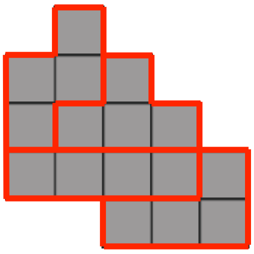
11. In der Abbildung sieht man die notwendigen Eintragungen (in rot geschrieben) in die Mal-Rechenmauer:
(E) 8



12. Katja kann folgende Gesamtergebnisse durch zweimaliges Werfen erreichen: 60=30+30; 70=0+70; 80=30+50; 100=50+50. Nur das Gesamtergebnis 90 ist nicht möglich:
(D) 90

13. Erwin schafft dies in der Figur C (siehe Abbildung):

(C) 



14. Im Bild sind 13 Spielplättchen zu sehen. Gerhard hat noch fünf Spielblättchen die nicht auf den Haufen geworfen wurden. Am Anfang hatte er somit 18 Spielplättchen. Nachdem er gleich viele weiße, graue und schwarz Spielblättchen hat, gibt es jeweils 6 Stück; also auch 6 schwarze:
(B) 6

15. Wenn Hubert 30 Karotten gefressen hat, dann kann dies nur so geschehen sein, dass er an zwei Tagen jeweils 9 Karotten und an drei Tagen jeweils 4 Karotten (und jeweils einen Kohlkopf) gefressen hat (2·9+3·4=30). An diesen insgesamt 5 Tagen hat er also bereits 3 Kohlköpfe gefressen. An den restlichen beiden Tagen der Woche hat er nur mehr Kohlköpfe gefressen, nämlich 2 pro Tag. In der ganzen Woche hat er also 7 (=3+2·2) Kohlköpfe gefressen:
(B) 7

16. Im Bild gibt es 4 „lange“ Reihen mit jeweils 8 Quadraten, innerhalb welcher sich jeweils 5 Punkte befinden. Das sind insgesamt 160 (=4·8·5) Punkte. Des Weiteren gibt es noch 3 „kurze“ Reihen mit jeweils 7 Quadraten. In diesen Quadraten wurden 4 der 5 Punkte bereits berücksichtigt. Das heißt, es kommen nur mehr 21 (=3·7·1) Punkte dazu. Dementsprechend gibt es 181 (=160+21) Punkte:
(B) 181

– 5 Punkte Beispiele –

17. Ein Kängu-Jahr hat 120 (=20·6) Kängu-Wochen. Ein Viertel davon sind 30 (=120:4) Kängu-Wochen:
(B) 30

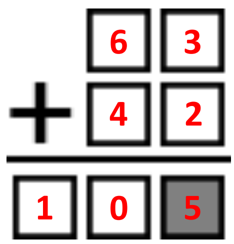
18. Die Anzahl der Mädchen muss 4 sein. Wäre die Anzahl der Mädchen kleiner als 4, dann würden irgendwo zwei Buben nebeneinander stehen. Wäre die Anzahl der Mädchen größer als 4, dann würden irgendwo drei Mädchen nebeneinander stehen:
(C) ... nur 4 sein.

19. Zuerst wird die erste Karte (erste Position) mit der siebenten Karte (siebenten Position) vertauscht, es entsteht KARGONOA. Nun vertauscht Elisabeth dritte und sechste Position, es entsteht KANGOROA. Schlussendlich muss sie nur noch die fünfte und achte Position vertauschen, es entsteht das gesuchte Wort KANGAROO. Dafür waren 3 Vertauschungen notwendig:
(B) 3

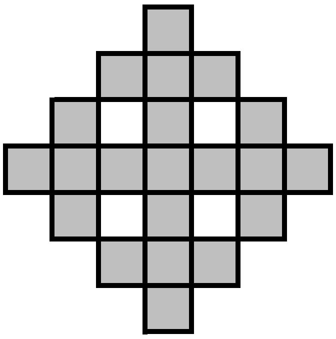
20. Auf der Stufe 1 gibt es insgesamt 3 (=1+2) Vierecke. Auf der Stufe 2 gibt es insgesamt 6 (=1+2+3) Vierecke. Auf der Stufe 3 gibt es insgesamt 10 (=1+2+3+4) Vierecke. Auf der Stufe 6 gibt es also insgesamt 28 (=1+2+3+4+5+6+7) Vierecke. Von diesen 28 Vierecken sind, wie auf jeder Stufe, 2 weiß. Das heißt, es gibt 26 (=28-2) schwarze Vierecke:
(C) 26

21. Wenn Heinzi dem Verkäufer 150 KM gegeben und 20 KM zurückbekommen hat, dann wollte er ursprünglich um 130 KM (=150-20) einkaufen. Heinzi wollte ursprünglich also die Kutsche und die Straßenbahn kaufen, denn nur diese beiden kosten zusammen 130 KM. Durch den Umtausch hat Heinzi 5 KM zurückbekommen. Das heißt, er hat entweder die Kutsche zurückgegeben und sich für ein um 5 KM günstigeres Spielzeug entschieden oder er hat die Straßenbahn zurückgegeben und sich für ein um 5 KM günstigeres Spielzeug entschieden. Nachdem es aber kein um 5 KM günstigeres Spielzeug als die Kutsche gibt, hat er die Straßenbahn zurückgegeben und das um 5 KM günstigere Flugzeug genommen:
(A) Kutsche und Flugzeug

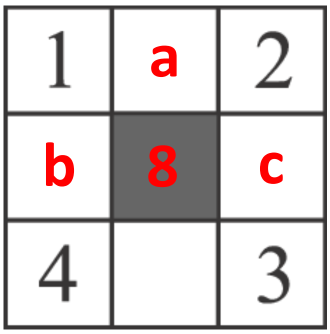
22. Damit die Rechnung richtig ist, muss in das graue Kästchen die Ziffer 5 geschrieben werden (siehe Abbildung). Begründung: Die Ziffer 0 kann nur dorthin geschrieben werden, wo sie eingetragen ist. Anderenfalls würde aus einer zweistelligen Zahl eine einstellige beziehungsweise aus einer dreistelligen Zahl eine zweistellige oder – bei Verwendung der Null an der Einerstelle eines Summanden beziehungsweise des Ergebnisses – es müsste eine Ziffer doppelt verwendet werden. Die 0 kann an der eingetragenen Stelle nur zustande kommen, wenn die Zehnerstellen der Summanden mit 4 und 6 belegt werden; die Reihenfolge ist hierbei irrelevant. Das führt dazu, dass die Hunderterstelle des Ergebnisses mit 1 belegt werden muss. Nun muss im grauen Kästchen zwingend 5 eingetragen werden. Die Einerstellen der Summanden müssen dementsprechend mit 2 und 3 belegt werden; die Reihenfolge ist wiederum irrelevant:
(D) 5



23. Es können höchstens 21 Kästchen grau angemalt werden (siehe Abbildung):
(D) 21



24. Albin hat die Ziffer 8 in das graue Feld geschrieben (siehe Abbildung). Begründung: Weder die Ziffer 5 noch 6 kann in das graue Kästchen geschrieben werden. In diesem Fall wären vier Felder benachbart und die Summe der übrigen Ziffern wäre größer als 13. Würde man die Ziffer 5 oder 6 in das Feld **a** schreiben, dann wären drei Felder benachbart. Die Summe der Ziffern von zwei dieser Felder ist 3 (=1+2). Somit müsste in das dritte Feld (das ist das graue Feld) die Zahl 10 eingetragen werden, welche keine Ziffer von 1 bis 9 ist. Es stehen also nur mehr drei Felder zum Eintragen der Ziffern 5 und 6 zur Verfügung, wobei in jedem Fall das graue Feld ein benachbartes Feld vom Feld mit der Ziffer 5 und ein benachbartes Feld vom Feld mit der Ziffer 6 ist. Zudem hat in jedem Fall sowohl das Feld mit der Ziffer 5 also auch das Feld mit der Ziffer 6 genau drei benachbarte Felder. Wenn nun die Summen von jeweils drei Zahlen ident (nämlich 13) und ein Summand in jeder Summe der gleiche (graues Feld) sein soll, dann müssen jeweils die beiden restlichen Summanden die gleiche „Zwischensumme" liefern. Dies ist nur möglich, wenn die beiden Ziffern 5 und 6 in die beiden Felder **b** und **c** eingetragen werden (1+4=2+3); die Reihenfolge ist irrelevant. Damit nun die Summe der Ziffern in den benachbarten Felder von 5 und auch von 6 gleich 13 ist, muss in das graue Feld die Ziffer 8 eingetragen werden (1+4+8=2+3+8=13):
(D) 8



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2014
20.3.2014

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5-6

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.

jede richtige Antwort Beispiel 1.-8.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9.-16.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17.-24.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte

jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

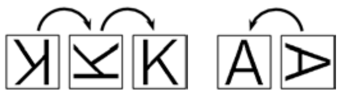
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

1. Arno legt mit 8 Karten das Wort KANGAROO. Einige Karten liegen aber verdreht.

Durch zweimaliges Drehen kann er den Buchstaben K korrigieren, durch einmaliges Drehen den Buchstaben A (siehe Zeichnung). Wie oft muss er drehen, damit er das Wort KANGAROO richtig lesen kann?

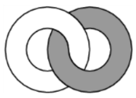


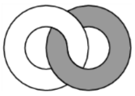
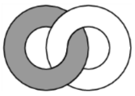
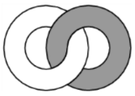
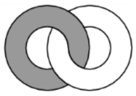
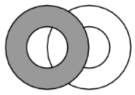
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

2. Ein Kuchen wiegt 900 g. Paul schneidet ihn in 4 Stücke. Das größte Stück wiegt genauso viel wie die anderen 3 Stücke zusammen. Wie viel wiegt das größte Stück?

(A) 250 g (B) 300 g (C) 400 g (D) 450 g (E) 600 g

3. Ein weißer und ein grauer Ring werden ineinander verkettet. Peter sieht die beiden Ringe von vorne so, wie sie in der rechten Abbildung zu sehen sind.
Paul sieht die Ringe von hinten. Was sieht er?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. In der nebenstehenden Addition wurden drei Ziffern durch Sterne ersetzt. Wie groß ist die Summe der drei fehlenden Ziffern?

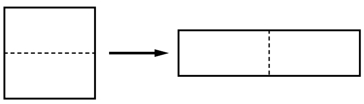
$$\begin{array}{rccc} & 1 & * & 2 \\ + & 1 & * & 3 \\ + & 1 & * & 4 \\ \hline & 3 & 0 & 9 \end{array}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 10

5. Wie groß ist die Differenz zwischen der kleinsten fünfstelligen und der größten vierstelligen Zahl?

(A) 1 (B) 10 (C) 1111 (D) 9000 (E) 9900

6. Ein Quadrat mit dem Umfang 48 cm wird durch einen Schnitt in zwei gleich große Teile zerlegt. Diese werden so wie in der Abbildung zu einem Rechteck zusammengefügt. Wie groß ist der Umfang dieses Rechtecks?

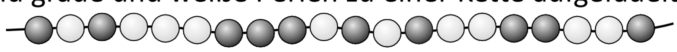


(A) 24 cm (B) 30 cm (C) 48 cm (D) 60 cm (E) 72 cm

7. Katrin hat 38 Streichhölzer. Sie benützt alle Streichhölzer und legt damit ein Dreieck und ein Quadrat. Das Dreieck und das Quadrat haben kein Streichholz gemeinsam. Jede Seite des Dreiecks besteht aus 6 Streichhölzern. Aus wie vielen Streichhölzern besteht eine Quadratseite?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

8. Auf einer Schnur sind graue und weiße Perlen zu einer Kette aufgefädelt.



Monika möchte 5 graue Perlen haben. Sie kann Perlen aber nur von den Enden der Kette ziehen. Deshalb muss sie auch einige weiße Perlen herunterziehen. Wie viele weiße Perlen muss sie mindestens nehmen, um 5 graue Perlen zu bekommen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

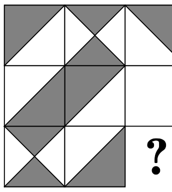
- 4 Punkte Beispiele -

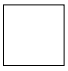
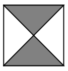
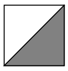
9. Die kleine Hexe nahm an einem Flugbesenwettbewerb teil, der aus 5 Runden bestand. Die Zeiten, an denen sie die Startlinie überflog, sind in der folgenden Tabelle zu sehen. In welcher Runde war sie am schnellsten?

	Zeit
Start	09:55
nach Runde 1	10:26
nach Runde 2	10:54
nach Runde 3	11:28
nach Runde 4	12:03
nach Runde 5	12:32

(A) in der ersten (B) in der zweiten (C) in der dritten
(D) in der vierten (E) in der fünften

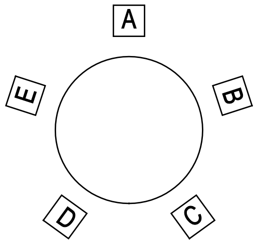
10. Durch welches Quadrat muss man das Fragezeichen ersetzen, damit die weiße Fläche und die schwarze Fläche gleich groß werden?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

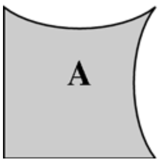
11. Auf einem Ferienlager essen 7 Kinder jeden Tag Eis, 9 essen jeden zweiten Tag Eis. Die übrigen Kinder essen überhaupt kein Eis. Gestern aßen 13 Kinder Eis. Wie viele Kinder werden heute Eis essen?
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

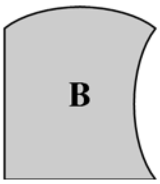
12. Die Kängurus A, B, C, D und E sitzen in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn um einen runden Tisch. Nach einem Glockenton tauschen bis auf ein Känguru alle die Plätze mit einem Nachbarn. Danach sitzen sie in folgender Reihenfolge im Uhrzeigersinn: A, E, B, D, C.
Welches Känguru hat den Platz nicht getauscht?

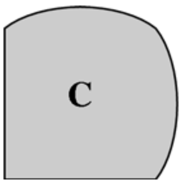


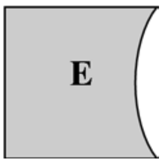
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

13. Aus vier der vorgegebenen Teile kann ein Quadrat gebaut werden. Welcher Teil wird dabei nicht verwendet?









(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

14. Werden die drei Ziffern einer dreistelligen Zahl miteinander multipliziert, so erhält man 135. Welches Ergebnis liefert die Addition der drei Ziffern?
(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

15. In einem Restaurant gibt es 16 Tische mit entweder 3, 4 oder 6 Stühlen. An den Tischen mit 3 oder 4 Stühlen können insgesamt 36 Gäste sitzen. Das Restaurant hat für 72 Gäste Platz. An wie vielen Tischen stehen 3 Stühle?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

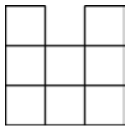
16. Die Punkte A, B, C, D, E, F liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Es sind die Längen der Strecken $AF = 35$, $AC = 12$, $BD = 11$, $CE = 12$ und $DF = 16$ bekannt.
Wie lang ist die Strecke BE?
(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

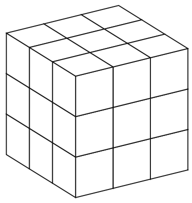
- 5 Punkte Beispiele -

17. Lea spielt mit ihren Murmeln. Sie legt diese in kleinen Gruppen auf den Tisch. Legt sie Dreiergruppen, bleiben ihr zwei Murmeln übrig. Legt sie Fünfergruppen, bleiben ihr auch zwei übrig. Wie viele Murmeln braucht Lea zusätzlich, damit sie die Murmeln sowohl in Dreiergruppen als auch in Fünfergruppen legen kann, und keine Murmel übrig bleibt?
(A) 3 (B) 1 (C) 4 (D) 10 (E) 13

18. Die Flächen eines Würfels werden mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bezeichnet. Die Flächen 1 und 6 haben eine gemeinsame Kante. Das gleiche gilt auch für die Flächen 1 und 5, die Flächen 1 und 2, die Flächen 6 und 5, die Flächen 6 und 4, und für die Flächen 6 und 2. Welche Zahl bezeichnet die Fläche, die der Fläche 4 gegenüber liegt?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

19. Der 3×3×3 Würfel besteht aus 27 kleinen Würfeln. Von den kleinen Würfeln werden einige weggenommen. Betrachtet man nun den Würfel von rechts, von oben oder von vorne, sieht man Folgendes:





Wie viele kleine Würfel wurden weggenommen?
(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

20. Auf einem MP3-Player gibt es 5 Songs: Der Song A dauert 3 min, Song B 2 min 30 s, Song C 2 min, Song D 1 min 30 s, und Song E 4 min. Diese 5 Songs werden hintereinander ununterbrochen gespielt. Der Song C spielte gerade, als Andy das Haus verließ. Genau eine Stunde später kehrte er zurück. Welcher Song spielte gerade, als Andy nach Hause kam?
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

21. Daniela füllt eine 3×3 Tabelle mit allen Ziffern von 1 bis 9 so aus, dass jedes Feld nur eine Ziffer enthält. Sie hat bereits die Ziffern 1, 2, 3 und 4 in die Tabelle, wie in der Abbildung zu sehen, eingetragen. Zwei Zahlen gelten als "benachbart", wenn die Felder, in denen sie stehen, eine Seite gemeinsam haben.

1		3
2		4

Nachdem sie die Tabelle fertig ausgefüllt hat, bemerkt sie: Die Summe der benachbarten Zahlen von 5 beträgt 9. Wie groß ist die Summe der benachbarten Zahlen von 6?
(A) 14 (B) 15 (C) 17 (D) 28 (E) 29

22. Der König reist mit seinen Boten mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h von seiner Burg zu seinem Sommerpalast. Jede Stunde sendet er einen Boten, der mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h unterwegs ist, zurück zur Burg. In welchem zeitlichen Abstand treffen zwei aufeinanderfolgende Boten in der Burg ein?
(A) 30 min (B) 60 min (C) 75 min (D) 90 min (E) 120 min

23. Mia schrieb drei einstellige Zahlen an die Tafel. Ali addierte sie und erhielt 15. Danach löschte er eine der drei Zahlen weg und ersetzte sie durch die Zahl 3. Resi multiplizierte diese drei Zahlen und erhielt 36. Welche Zahlen könnte Ali gelöscht haben?
(A) entweder 6 oder 7 (B) entweder 7 oder 8 (C) nur 6 (D) nur 7 (E) nur 8

24. Oma verschenkt 180 Murmeln an ihre zehn Enkel. Kein Kind bekommt gleich viele Murmeln wie ein anderes. Anna bekommt am meisten. Wie viele Murmeln bekommt Anna mindestens?
(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

MATHEMATICS KANGAROO 2014
Austria - 20.3.2014

Group: Benjamin, Grades: 5-6

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 60 min.
Each correct answer, questions 1.-8.: 3 Points
Each correct answer, questions 9.-16.: 4 Points
Each correct answer, questions 17.-24.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 24 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the questions number (1 to 24)
Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

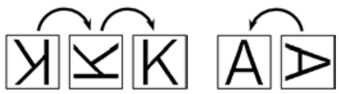
Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2014
Group Benjamin (Grade 5 and 6)
Austria - 20.3.2014

- 3 Point Questions -

1. Arno lays out the word KANGAROO using 8 cards. However, some cards are turned.

By turning it twice the letter K can be corrected, letter A can be corrected by turning it once (see drawing). How often does he have to turn so that the word KANGAROO can be read correctly?

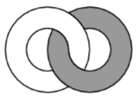


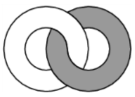
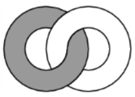
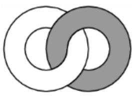
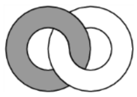
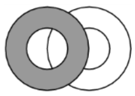
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

2. A cake weighs 900 g. Paul cuts it into 4 pieces. The biggest piece weights exactly as much as the other three pieces together. How much does the biggest piece weigh?

(A) 250 g (B) 300 g (C) 400 g (D) 450 g (E) 600 g

3. A white and a grey ring are interlinked with one another. Peter sees the two rings from the front as they are seen in the diagram on the right.
Paul sees the rings from the back. What does he see?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. In the addition sum to the right, three digits have been replaced with stars. How big is the sum of the three missing digits?

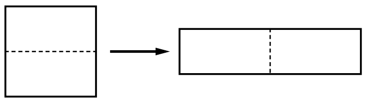
$$\begin{array}{r} 1\ *\ 2 \\ +\ 1\ *\ 3 \\ +\ 1\ *\ 4 \\ \hline 3\ 0\ 9 \end{array}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 10

5. How big is the difference between the smallest five-digit and the biggest four-digit number?

(A) 1 (B) 10 (C) 1111 (D) 9000 (E) 9900

6. A square with perimeter 48 cm is cut into two equally big pieces with one cut. They are fitted together to make a rectangle as shown in the diagram. How big is the perimeter of that rectangle?

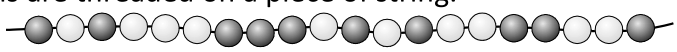


(A) 24 cm (B) 30 cm (C) 48 cm (D) 60 cm (E) 72 cm

7. Katrin has 38 matches. She uses all the matches and makes a triangle and a square. The triangle and the square do not share any matches. Each side of the triangle consists of 6 matches. One side of the square is made of how many matches?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

8. Grey and white pearls are threaded on a piece of string.



Monika wants to have 5 grey pearls. However, she can only pull off pearls from the end of the string. Therefore she has to pull off some white pearls as well. What is the minimum number of white pearls she has to pull off, to get 5 grey pearls?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

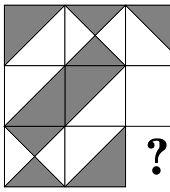
- 4 point questions -

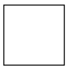
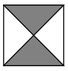
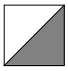
9. The little witch is taking part in a broomstick flying competition that is carried out in 5 rounds. The times in which she crossed the starting line can be seen in the table. Which round was her fastest?

	Zeit
Start	09:55
nach Runde 1	10:26
nach Runde 2	10:54
nach Runde 3	11:28
nach Runde 4	12:03
nach Runde 5	12:32

(A) the first (B) the second (C) the third
(D) the fourth (E) the fifth

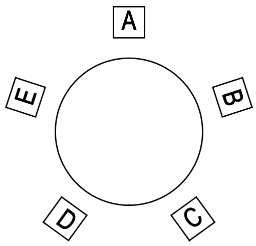
10. Which square has to replace the question mark so that the white area and the black area are equally big?



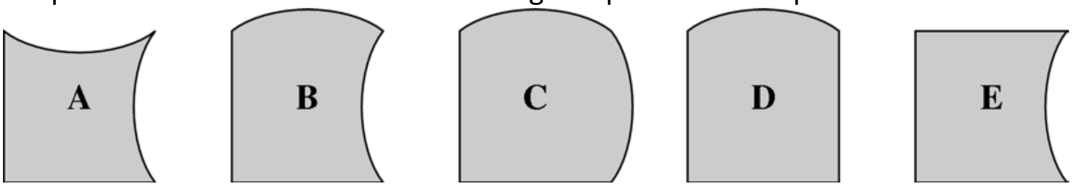
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. In a holiday camp 7 children eat ice cream every day, 9 eat ice cream every other day. The remaining children don't eat ice cream at all. Yesterday 13 children ate ice cream. How many children will eat ice cream today?
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

12. The kangaroos A, B, C, D and E sit in this order in a clockwise direction around a round table. After a bell sounds all but one kangaroo change seats with a neighbour. Afterwards they sit in the following order in a clockwise direction: A, E, B, D, C.
Which kangaroo did not change places?
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E



13. A square can be made out of four of the given pieces. Which piece will not be used?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

14. If the three digits of a three-digit number are multiplied you get 135. Which result to you get, by adding the three digits?
(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

15. In a restaurant there are 16 tables, with either 3, 4 or 6 chairs. A total of 36 guests can sit at the tables which have 3 or 4 chairs. The restaurant seats 72 guests. How many tables with three chairs are there?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

16. The points A, B, C, D, E, F are situated on a straight line in this order. The following distances on this line are known: $AF = 35$, $AC = 12$, $BD = 11$, $CE = 12$ and $DF = 16$.
How long is the distance BE?
(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

- 5 Point Questions -

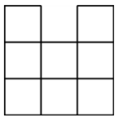
17. Lea plays with her marbles. She places them in small groups on the table. If she places them in groups of three, two marbles are left over. If she places them in groups of five, again two are left over. How many more marbles does Lea need so that she can place them in groups of three as well as groups of five without any marbles being left over?

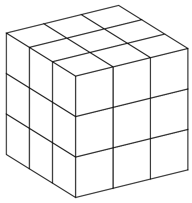
(A) 3 (B) 1 (C) 4 (D) 10 (E) 13

18. The faces of a die are labelled with the numbers 1, 2, 3, 4, 5 and 6. The faces 1 and 6 have one common edge. The same is true for the faces 1 and 5, the faces 1 and 2, the faces 6 and 5, the faces 6 and 4 and the faces 6 and 2. Which number labels the face that is opposite to face 4?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

19. The 3×3×3 cube consists of 27 small cubes. Some of the small cubes are removed. If you now look at the cube from the right, from above and from the front, you see the following:





How many little cubes were removed?

(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

20. There are 5 songs on an MP3-player: Song A lasts 3 mins, song B 2 mins 30 s, song C 2 mins, song D 1 min 30 s, and song E 4 mins. These 5 songs are played non-stop one after the other. Song C is playing when Andy left the house. Exactly one hour later he returns. Which song is playing when Andy came back?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

21. Daniela fills a 3×3 table using the digits 1 to 9 so that each field contains only one digit. She has already placed the digits 1, 2, 3 and 4 in the table as shown in the diagram. Two numbers count as "adjacent" if the fields which they fill have one common side. When she has finished filling the table she realised: the sum of the numbers adjacent to 5 is 9. How big is the sum of the numbers adjacent to 6?

1		3
2		4

(A) 14 (B) 15 (C) 17 (D) 28 (E) 29

22. The king travels with his messengers at a speed of 5 km/h from his castle to his summer residence. Each hour he sends a messenger with a speed of 10 km/h back to the castle. How much difference is time is there between two consecutive messengers arriving at the castle?

(A) 30 min (B) 60 min (C) 75 min (D) 90 min (E) 120 min

23. Mia writes three single-digit numbers on the board. Ali adds them and gets 15. Then he deletes one of the three numbers and replaces it with the number 3. Resi multiplies these three numbers and obtains 36. Which numbers could Ali have deleted?

(A) either 6 or 7 (B) either 7 or 8 (C) only 6 (D) only 7 (E) only 8

24. Grandma gives 180 marbles to her ten grandchildren. No two children get the same amount of marbles. Anna gets the most. What is the minimum number of marbles that Anna could get?

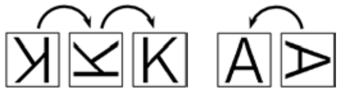
(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

1. Arno legt mit 8 Karten das Wort KANGAROO. Einige Karten liegen aber verdreht.

Durch zweimaliges Drehen kann er den Buchstaben K korrigieren, durch einmaliges Drehen den Buchstaben A (siehe Zeichnung). Wie oft muss er drehen, damit er das Wort KANGAROO richtig lesen kann?



(A) 4 (B) 5 **(C) 6** (D) 7 (E) 8

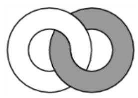
Der Buchstabe K muss 2-mal gedreht werden, der Buchstabe A 1-mal, der Buchstabe N ebenfalls 1-mal. Das G muss gar nicht gedreht werden, aber das A wieder 2-mal. Die letzten drei Buchstaben müssen gar nicht gedreht werden.
Insgesamt muss Arno also 6-mal drehen ($2 + 1 + 1 + 2 = 6$.

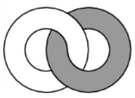
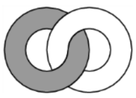
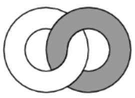
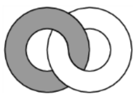
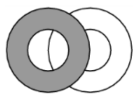
2. Ein Kuchen wiegt 900 g. Paul schneidet ihn in 4 Stücke. Das größte Stück wiegt genauso viel wie die anderen 3 Stücke zusammen. Wie viel wiegt das größte Stück?

(A) 250 g (B) 300 g (C) 400 g **(D) 450 g** (E) 600 g

Wenn das große Stück genauso viel wiegt, wie die anderen 3 Stücke gemeinsam, so ist das große Stück genau der halbe Kuchen. Damit hat das große Stück $900 : 2 = 450$ Gramm.

3. Ein weißer und ein grauer Ring werden ineinander verkettet. Peter sieht die beiden Ringe von vorne so, wie sie in der rechten Abbildung zu sehen sind.
Paul sieht die Ringe von hinten. Was sieht er?



(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Der weiße Ring liegt von vorne gesehen links. Von hinten betrachtet liegt der weiße Ring also rechts. An der unteren Seite ist der graue Ring im Vordergrund, das heißt, dass er von hinten betrachtet an der unteren Seite vom weißen Ring verdeckt wird.

4. In der nebenstehenden Addition wurden drei Ziffern durch Sterne ersetzt. Wie groß ist die Summe der drei fehlenden Ziffern?

$$\begin{array}{rccc} & 1 & * & 2 \\ + & 1 & * & 3 \\ + & 1 & * & 4 \\ \hline & 3 & 0 & 9 \end{array}$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 10

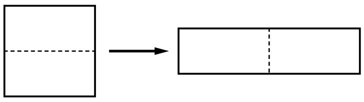
Die Summe der Einerziffern ergibt genau 9. Also gibt es keinen Übetrag von der Einerstelle auf die Zehnerstelle. Also ist die Summe der Sterne 0, 10 oder 20. Die Summe der Hunderterziffern ergibt genau 3. Es kann also keinen Übertrag von der Zehnerstelle auf die Hunderterstelle geben. Daher ist die Summe der Sterne nicht 10 oder 20 sondern 0.

5. Wie groß ist die Differenz zwischen der kleinsten fünfstelligen und der größten vierstelligen Zahl?

(A) 1 (B) 10 (C) 1111 (D) 9000 (E) 9900

Die kleinste fünfstellige Zahl ist 10000, die größte vierstellige Zahl ist 9999. Als Differenz ergibt sich $10000 - 9999 = 0$

6. Ein Quadrat mit dem Umfang 48 cm wird durch einen Schnitt in zwei gleich große Teile zerlegt. Diese werden so wie in der Abbildung zu einem Rechteck zusammengefügt. Wie groß ist der Umfang dieses Rechtecks?



(A) 24 cm (B) 30 cm (C) 48 cm **(D) 60 cm** (E) 72 cm

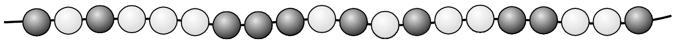
Die Seitenlänge des Quadrates (in cm) ist 48 : 4 = 12. Die beiden Teile sind also Rechtecke mit den Seitenlängen 12 cm und 6 cm. Das Rechteck hat dann den Umfang U = 2 · (24 + 6) cm = 60 cm.

7. Katrin hat 38 Streichhölzer. Sie benützt alle Streichhölzer und legt damit ein Dreieck und ein Quadrat. Das Dreieck und das Quadrat haben kein Streichholz gemeinsam. Jede Seite des Dreiecks besteht aus 6 Streichhölzern. Aus wie vielen Streichhölzern besteht eine Quadratseite?

(A) 4 **(B) 5** (C) 6 (D) 7 (E) 8

Sie benötigt für das Dreieck 3 · 6 = 18 Streichhölzer. Es bleiben ihr also noch 20 Streichhölzer für das Quadrat. Eine Quadratseite besteht dann aus 20 : 4 = 5 Streichhölzern.

8. Auf einer Schnur sind graue und weiße Perlen zu einer Kette aufgefädelt.



Monika möchte 5 graue Perlen haben. Sie kann Perlen aber nur von den Enden der Kette ziehen. Deshalb muss sie auch einige weiße Perlen herunterziehen. Wie viele weiße Perlen muss sie mindestens nehmen, um 5 graue Perlen zu bekommen?

(A) 2 **(B) 3** (C) 4 (D) 5 (E) 6

Wenn Monika vom linken Ende Perlen bis einschließlich der zweiten grauen Perle nimmt (also 3 Perlen) und vom rechten Ende bis einschließlich der dritten grauen Perle (also insgesamt 5 Perlen), so erhält sie ihre 5 gewünschten grauen, aber auch 3 weiße Perlen.
Würde sie vom linken Ende mindestens 3 graue Perlen nehmen, oder vom rechten Ende mindestens 4, so müsste sie dabei auch mindestens 4 weiße Perlen nehmen.
Damit ist 3 die geringste Anzahl an weißen Perlen, die sie nehmen muss.

- 4 Punkte Beispiele -

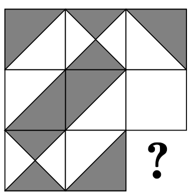
9. Die kleine Hexe nahm an einem Flugbesenwettbewerb teil, der aus 5 Runden bestand. Die Zeiten, an denen sie die Startlinie überflog, sind in der folgenden Tabelle zu sehen. In welcher Runde war sie am schnellsten?

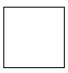
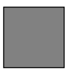
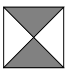
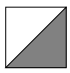
	Zeit
Start	09:55
nach Runde 1	10:26
nach Runde 2	10:54
nach Runde 3	11:28
nach Runde 4	12:03
nach Runde 5	12:32

(A) in der ersten **(B) in der zweiten** (C) in der dritten
(D) in der vierten (E) in der fünften

Die kleine Hexe benötigt 31 min für Runde 1, 28 min für Runde 2, 34 min für Runde 3, 35 min für Runde 4 und schließlich 29 min für die letzte Runde. Sie war also in der zweiten Runde am schnellsten.

10. Durch welches Quadrat muss man das Fragezeichen ersetzen, damit die weiße Fläche und die schwarze Fläche gleich groß werden?



(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

In jedem der Quadrate außer dem weißen Quadrat, ist jeweils die Hälfte der Fläche weiß bzw. schwarz. Somit muss das Fragezeichen durch das schwarze Quadrat ersetzt werden.

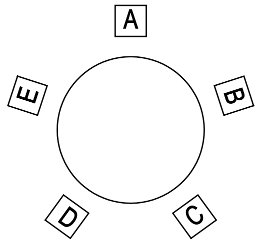
11. Auf einem Ferienlager essen 7 Kinder jeden Tag Eis, 9 essen jeden zweiten Tag Eis. Die übrigen Kinder essen überhaupt kein Eis. Gestern aßen 13 Kinder Eis. Wie viele Kinder werden heute Eis essen?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 **(D) 10** (E) 11

Unter den 13 Kindern, die gestern Eis aßen, sind auf jeden Fall die 7 Kinder, die jeden Tag Eis essen. Dazu kommen noch $13 - 7 = 6$ der 9 Kinder, die nur jeden zweiten Tag Eis essen. Diese 6 Kinder essen also heute kein Eis. Somit essen heute $7 + (9 - 6) = 10$ Kinder Eis.

12. Die Kängurus A, B, C, D und E sitzen in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn um einen runden Tisch. Nach einem Glockenton tauschen bis auf ein Känguru alle die Plätze mit einem Nachbarn. Danach sitzen sie in folgender Reihenfolge im Uhrzeigersinn: A, E, B, D, C.

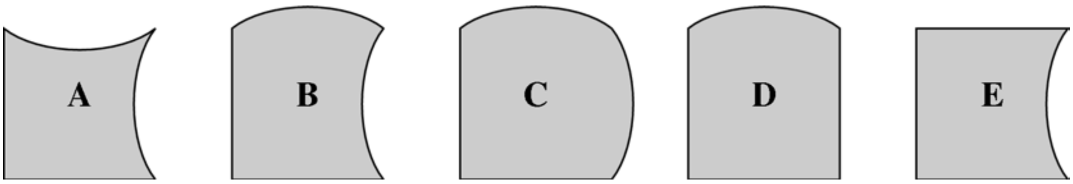
Welches Känguru hat den Platz nicht getauscht?



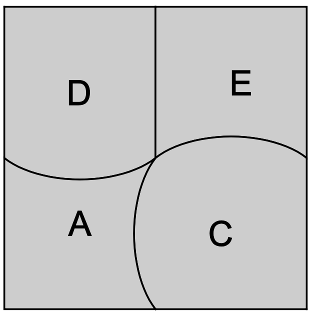
(A) A **(B) B** (C) C (D) D (E) E

Zuerst sitzen die Kängurus E und A in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn nebeneinander. Nach dem Glockenschlag sitzen die beiden in umgekehrter Reihenfolge. Sie müssen also ihre Plätze getauscht haben. Dasselbe gilt für Kängurus C und D. Nur das Känguru B hat seinen Platz beibehalten.

13. Aus vier der vorgegebenen Teile kann ein Quadrat gebaut werden. Welcher Teil wird dabei nicht verwendet?



(A) A(B) B (C) C (D) D (E) E



14. Werden die drei Ziffern einer dreistelligen Zahl miteinander multipliziert, so erhält man 135. Welches Ergebnis liefert die Addition der drei Ziffern?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 **(D) 17** (E) 18

Es gilt $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Da $3 \cdot 5 > 9$ und somit keine Ziffer ist, sind die drei Ziffern 3, 5, 9 eindeutig bestimmt. Addiert man diese drei Ziffern, so erhält man 17.

15. In einem Restaurant gibt es 16 Tische mit entweder 3, 4 oder 6 Stühlen. An den Tischen mit 3 oder 4 Stühlen können insgesamt 36 Gäste sitzen. Das Restaurant hat für 72 Gäste Platz. An wie vielen Tischen stehen 3 Stühle?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Auf den 6-er Tischen haben $72 - 36 = 36$ Gäste Platz. Es gibt also $36 : 6 = 6$ dieser Tische und somit noch 10 Tische mit 3 oder 4 Stühlen. Nun berechnet man die Summe der Gäste an diesen 10 Tischen für die Möglichkeiten an 3-er Tischen:

Anzahl 3-er Tische	Anzahl 4-er Tische	Summe Gäste
4	6	$4 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 36$
5	5	35
6	4	34
7	3	33
8	2	32

Nur im ersten Fall haben die angegebenen 36 Personen an den 10 Tischen Platz. Es gibt also 4 Tische mit 3 Stühlen.

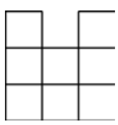
16. Die Punkte A, B, C, D, E, F liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Es sind die Längen der Strecken $AF = 35$, $AC = 12$, $BD = 11$, $CE = 12$ und $DF = 16$ bekannt.
Wie lang ist die Strecke BE?
(A) 13 (B) 14 (C) 15 **(D) 16** (E) 17
Die Länge der Strecke EF können wir bestimmen, indem wir von der Länge der Strecke AF die beiden Längen AC und CE abziehen. Wir erhalten $EF = 35 – 12 – 12 = 11$. Da wir wissen, dass $BD = 11$ und $DF = 16$ gilt, können wir EF von der Summe abziehen um BE zu erhalten. Es gilt also:
$BE = BD + DF – \mathrm{EF} = 11 + 16 – 11 = 16$.

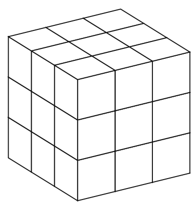
- 5 Punkte Beispiele -

17. Lea spielt mit ihren Murmeln. Sie legt diese in kleinen Gruppen auf den Tisch. Legt sie Dreiergruppen, bleiben ihr zwei Murmeln übrig. Legt sie Fünfergruppen, bleiben ihr auch zwei übrig. Wie viele Murmeln braucht Lea zusätzlich, damit sie die Murmeln sowohl in Dreiergruppen als auch in Fünfergruppen legen kann, und keine Murmel übrig bleibt?
(A) 3 (B) 1 (C) 4 (D) 10 **(E) 13**
Wenn Lea ihre Murmeln sowohl in Dreiergruppen als auch in Fünfergruppen aufteilen kann, ohne dass eine Murmel übrig bleibt, dann ist die Anzahl ihrer Murmeln ein Vielfaches von 3 und ein Vielfaches von 5. Die Anzahl ist dann auch ein Vielfaches von 15. Sie kann also ihre Murmeln auch in 15-er Gruppen aufteilen.
Somit kann sie die ursprüngliche Anzahl an Murmeln in 15-er Gruppen aufteilen, sodass ebenfalls 2 Murmeln übrig bleiben. Nimmt sie 13 Murmeln dazu, kann sie alle Murmeln in 15-er Gruppen aufteilen und es bleibt keine Murmel übrig.

18. Die Flächen eines Würfels werden mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 bezeichnet. Die Flächen 1 und 6 haben eine gemeinsame Kante. Das gleiche gilt auch für die Flächen 1 und 5, die Flächen 1 und 2, die Flächen 6 und 5, die Flächen 6 und 4, und für die Flächen 6 und 2. Welche Zahl bezeichnet die Fläche, die der Fläche 4 gegenüber liegt?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6
Die Fläche 6 hat gemeinsame Kanten mit den Flächen 1, 2, 4 und 5. Die Fläche 3 muss ebenfalls mit vier Flächen eine Kante gemeinsam haben. Dies müssen die Flächen 1, 2, 4 und 5 sein (die Fläche 6 hat schon alle Kanten fixiert). Nun wissen wir aber auch alle Flächen, die mit der Fläche 1 eine gemeinsame Kante haben, nämlich 2, 3, 5 und 6 und damit liegt die Fläche 1 gegenüber von 4.

19. Der 3×3×3 Würfel besteht aus 27 kleinen Würfeln. Von den kleinen Würfeln werden einige weggenommen. Betrachtet man nun den Würfel von rechts, von oben oder von vorne, sieht man Folgendes:





Wie viele kleine Würfel wurden weggenommen?
(A) 1 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Von den oberen 9 Würfeln wurde das Kreuz in der Mitte weggenommen. Das sind 5 Würfel. Zusätzlich wurden noch die Würfel der hinteren, mittleren Reihe entfernt. Davon waren aber nur mehr zwei Würfel übrig. Somit wurden 7 Würfel weggenommen.

20. Auf einem MP3-Player gibt es 5 Songs: Der Song A dauert 3 min, Song B 2 min 30 s, Song C 2 min, Song D 1 min 30 s, und Song E 4 min. Diese 5 Songs werden hintereinander ununterbrochen gespielt. Der Song C spielte gerade, als Andy das Haus verließ. Genau eine Stunde später kehrte er zurück. Welcher Song spielte gerade, als Andy nach Hause kam?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Insgesamt dauern die 5 Songs 13 min. Nach vier kompletten Durchläufen sind 52 min vergangen, es läuft wieder der Song C. Der Song C dauert noch zwischen 0 s und 2 min. Die Songs C, D und E dauern zusammen noch zwischen 5 min 30 s und 7 min 30 s.
Mit den vier kompletten Durchläufen sind also nach dem Song E zwischen 57 min 30 s und 59 min 30 s vergangen. Da der nächste Song (Song A) 3 min dauert, läuft nach genau einer Stunde sicher Song A.

21. Daniela füllt eine 3×3 Tabelle mit allen Ziffern von 1 bis 9 so aus, dass jedes Feld nur eine Ziffer enthält. Sie hat bereits die Ziffern 1, 2, 3 und 4 in die Tabelle, wie in der Abbildung zu sehen, eingetragen. Zwei Zahlen gelten als "benachbart", wenn die Felder, in denen sie stehen, eine Seite gemeinsam haben.

1		3
2		4

Nachdem sie die Tabelle fertig ausgefüllt hat, bemerkt sie: Die Summe der benachbarten Zahlen von 5 beträgt 9. Wie groß ist die Summe der benachbarten Zahlen von 6?

(A) 14 (B) 15 (C) 17 (D) 28 **(E) 29**

Die Ziffer 5 kann nicht im mittleren Feld stehen, denn dann wäre die Summe der benachbarten Zahlen 6 + 7 + 8 + 9 > 9. Die Ziffer 5 steht daher in einem der anderen zu füllenden Felder und ist mit genau einer der Zahlen 6, 7, 8 oder 9 benachbart, diese Zahl steht dann im mittleren Feld. Da die Summe der zu 5 benachbarten Ziffern 9 beträgt, kann 5 nur mit 1, 2 und 6 benachbart sein. Die Ziffer 6 ist daher mit 5, 7, 8 und 9 benachbart. Die Summe dieser Zahlen beträgt daher 29.

22. Der König reist mit seinen Boten mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h von seiner Burg zu seinem Sommerpalast. Jede Stunde sendet er einen Boten, der mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h unterwegs ist, zurück zur Burg. In welchem zeitlichen Abstand treffen zwei aufeinanderfolgende Boten in der Burg ein?

(A) 30 min (B) 60 min (C) 75 min **(D) 90 min** (E) 120 min

Wenn der König einen Boten ausschickt, hat er seit der letzten Sendung 5 km zurückgelegt. Der vorige Bote ist in der Zwischenzeit 10 km in die entgegengesetzte Richtung gelaufen. Zwei aufeianderfolgende Boten haben also einen Abstand von 15 km. Erreicht ein Bote die Burg, ist der andere eben diese 15 km von der Burg entfernt. Da er mit 10 km/h unterweg ist, benötigt er 1 h und 30 min, um die Burg zu erreichen.

23. Mia schrieb drei einstellige Zahlen an die Tafel. Ali addierte sie und erhielt 15. Danach löschte er eine der drei Zahlen weg und ersetzte sie durch die Zahl 3. Resi multiplizierte diese drei Zahlen und erhielt 36. Welche Zahlen könnte Ali gelöscht haben?

(A) entweder 6 oder 7 **(B) entweder 7 oder 8** (C) nur 6 (D) nur 7 (E) nur 8

Resi erhielt als Produkt von drei Ziffern 36. Da 36 = 2 · 2 · 3 · 3, können die Ziffern auf der Tafel 3, 3, 4 oder 2, 3, 6 sein. Bevor Ali eine Zahl durch 3 ersetzt hat, standen also 3, 4 und eine weitere Ziffer, oder 2, 6 und eine weitere Ziffer an der Tafel.
Ali erhielt als Summe der drei Ziffern die Zahl 15. Die dritte Ziffer war also 15 – 3 – 4 = 8 oder 15 – 2 – 6 = 7.

24. Oma verschenkt 180 Murmeln an ihre zehn Enkel. Kein Kind bekommt gleich viele Murmeln wie ein anderes. Anna bekommt am meisten. Wie viele Murmeln bekommt Anna mindestens?

(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 **(E) 23**

Wenn Anna 22 Murmeln bekommt, dann bekommen die anderen Enkel höchstens 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14 bzw. 13 Murmeln. Dann hätte die Oma aber höchstens 22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 = 175 Murmeln verteilt. Anna bekommt also sicher mehr als 22 Murmeln.
Wenn sie 23 Murmeln bekommt, dann könnten die anderen Enkel zum Beispiel 22, 21, 20, 19, 17, 16, 15, 14 bzw. 13 Murmeln bekommen (23 + 22 + 21 + 20 + 19 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 = 180).
Anna bekommt also mindestens 23 Murmeln.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2014
20.3.2014

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7-8

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

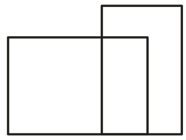
Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter:
www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

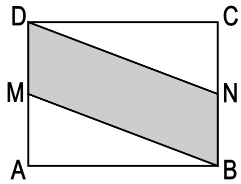
1. Der Känguruwettbewerb findet jedes Jahr am dritten Donnerstag im März statt.
Was ist das letztmögliche Datum, an dem der Wettbewerb stattfinden könnte?
(A) 14. März (B) 15. März (C) 20. März (D) 21. März (E) 22. März

2. Wie viele Vierecke beliebiger Größe sind in der abgebildeten Figur zu sehen?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 5



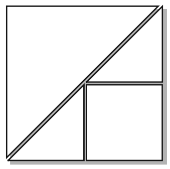
3. Wie lautet das Ergebnis von $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2013 (D) 2014 (E) 4028

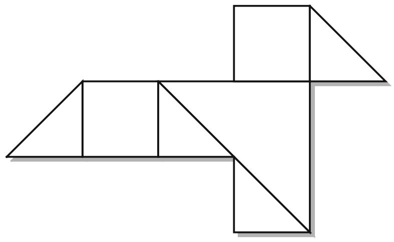
4. Der Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks *ABCD* beträgt 10. *M* und *N* sind die Mittelpunkte der Seiten *AD* bzw. *BC*. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks *MBND*?
(A) 0,5 (B) 5 (C) 2,5 (D) 7,5 (E) 10



5. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen beträgt 36 und ihre Summe 37.
Wie groß ist die (positive) Differenz der beiden Zahlen?
(A) 1 (B) 4 (C) 10 (D) 26 (E) 35

6. Wanda hat mehrere quadratische Blätter Papier, wobei jedes Blatt den Flächeninhalt 4 hat. Sie zerschneidet jedes dieser Blätter in rechtwinklige Dreiecke und Quadrate (siehe linke Abbildung). Sie nimmt einige dieser Stücke und legt daraus die rechts abgebildete Figur. Wie groß ist der Flächeninhalt dieser Figur?

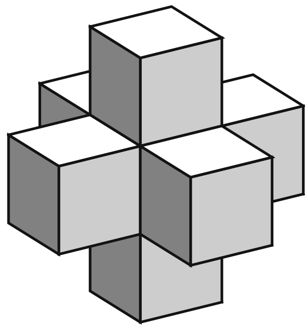




(A) 3 (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 5 (E) 6

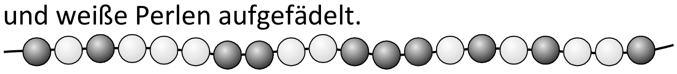
7. Ein Kübel ist mit Wasser halb gefüllt. Eine Reinigungskraft schüttet weitere 2 Liter Wasser in den Kübel. Danach ist der Kübel zu dreiviertel voll. Wie viele Liter Wasser passen insgesamt in den Kübel?
(A) 10 Liter (B) 8 Liter (C) 6 Liter (D) 4 Liter (E) 2 Liter

8. Georg baute aus sieben Würfeln, jeder mit Kantenlänge 1, die abgebildete Skulptur. Wie viele solche Würfel muss er dieser Skulptur noch hinzufügen, um daraus einen großen Würfel mit Kantenlänge 3 zu bauen?
(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20



9. Welche der folgenden Rechnungen liefert das größte Ergebnis?
(A) $44 \cdot 777$ (B) $55 \cdot 666$ (C) $77 \cdot 444$ (D) $88 \cdot 333$ (E) $99 \cdot 222$

10. Auf einer Schnur sind graue und weiße Perlen aufgefädelt.

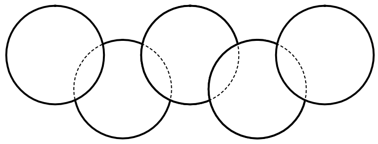


Toni zieht Perlen von den Enden der Kette. Nach dem Ziehen der fünften grauen Perle hört er damit auf. Wie viele weiße Perlen kann er höchstens heruntergezogen haben?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

- 4 Punkte Beispiele -

11. Max hat zweimal pro Woche je eine Stunde Klavierunterricht, Hanna nur jede zweite Woche eine Stunde. Der Klavierunterricht findet eine bestimmte Anzahl von Wochen hindurch statt.
Wie viele Wochen sind dies, wenn Max in diesem Zeitraum um 15 Stunden mehr Unterricht bekommt als Hanna?
(A) 30 Wochen (B) 25 Wochen (C) 20 Wochen (D) 15 Wochen (E) 10 Wochen

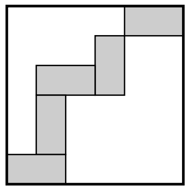
12. Fünf Kreise mit je 1 cm^2 Flächeninhalt, die einander überlappen, bilden die abgebildete Figur. Das überlappende Flächenstück zweier Kreise hat jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{8}$ cm^2. Wie groß ist der Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der abgebildeten Figur überdeckt wird?



(A) $4\,\text{cm}^2$ (B) $\frac{9}{2}\,\text{cm}^2$ (C) $\frac{35}{8}\,\text{cm}^2$ (D) $\frac{39}{8}\,\text{cm}^2$ (E) $\frac{19}{4}\,\text{cm}^2$

13. Eine Großmutter, ihre Tochter und ihre Enkelin stellen fest, dass die Summe ihrer Alter 100 ist. Außerdem ist jedes Alter eine Potenz der Zahl 2 (also ein Produkt von lauter Zweiern). Wie alt ist die Enkelin?

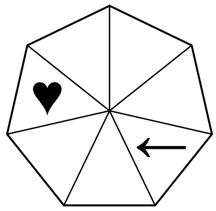
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16



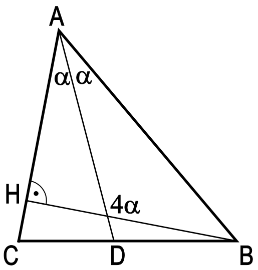
14. In einem Quadrat mit Seitenlänge 24 cm sind fünf kongruente Rechtecke, wie in der Abbildung zu sehen, angeordnet. Wie groß ist der Flächeninhalt eines dieser Rechtecke?

(A) 12 cm^2 (B) 16 cm^2 (C) 18 cm^2 (D) 24 cm^2 (E) 32 cm^2

15. In der folgenden Figur sind das Herz und der Pfeil wie abgebildet angeordnet. Zum selben Zeitpunkt beginnen sich das Herz und der Pfeil zu bewegen. Der Pfeil wandert in der Figur um 3 Felder im Uhrzeigersinn und das Herz um 4 Felder gegen den Uhrzeigersinn, danach bleiben sie stehen. Dieser Vorgang wiederholt sich immer wieder. Nach wie vielen dieser Vorgänge wird sich der Pfeil das erste Mal im gleichen dreieckigen Feld wie das Herz befinden?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) Das wird nie passieren.



16. Im Dreieck *ABC* (siehe Skizze) ist *AD* die Winkelsymmetrale des Winkels in *A* und *BH* die Höhe auf die Seite *AC*. Der stumpfe Winkel zwischen *BH* und *AD* ist viermal so groß wie der Winkel $\angle DAB$. Wie groß ist der Winkel $\angle CAB$?

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75° (E) 90°

17. Sechs Burschen leben gemeinsam in einer Wohnung, in der es zwei Badezimmer gibt. Jeden Morgen ab 7:00 benützen sie vor dem Frühstück die beiden Bäder, wobei sie sich jeweils 8, 10, 12, 17, 21 und 22 Minuten durchgehend alleine in einem der beiden Badezimmer aufhalten. Wann können alle sechs Burschen frühestens gemeinsam frühstücken?

(A) 7:45 (B) 7:46 (C) 7:47 (D) 7:48 (E) 7:50

18. Die Seiten eines Rechtecks sind 6 cm und 11 cm lang. Man wählt eine lange Seite aus. Dann werden die Winkelsymmetralen der Winkel in den Endpunkten dieser Seite gezeichnet. Sie unterteilen die gegenüberliegende andere lange Seite in drei Teilstücke. Wie lang sind diese Teilstücke?

(A) 1 cm, 9 cm, 1 cm (B) 2 cm, 7 cm, 2 cm (C) 3 cm, 5 cm, 3 cm (D) 4 cm, 3 cm, 4 cm (E) 5 cm, 1 cm, 5 cm

19. Captain Sparrow und seine Piraten erbeuten einige Goldmünzen. Sie teilen die Münzen gleichmäßig untereinander auf. Wenn sie vier Piraten weniger wären, dann würde jeder von ihnen 10 Münzen mehr bekommen. Wäre die Anzahl der Münzen um 50 weniger, würde jede Person um 5 Münzen weniger erhalten. Wie viele Münzen teilen sie untereinander auf?

(A) 80 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 250

20. Der Durchschnittswert zweier positiver Zahlen ist um 30% geringer als eine der beiden Zahlen. Um welchen Prozentsatz ist der Durchschnittswert größer als die andere Zahl?

(A) 75% (B) 70% (C) 30% (D) 25% (E) 20%

- 5 Punkte Beispiele -

21. Andy füllt eine 3×3-Tabelle mit allen Ziffern von 1 bis 9 so aus, so dass jedes Feld nur eine Ziffer enthält. Er hat bereits die Ziffern 1, 2, 3 und 4 in die Tabelle, wie in der Abbildung zu sehen, eingetragen. Zwei Zahlen gelten als "benachbart", wenn die Felder, in denen sie stehen, eine Seite gemeinsam haben. Nachdem er die Tabelle fertig ausgefüllt hat, bemerkt er: Die Summe der benachbarten Zahlen von 9 beträgt 15. Wie groß ist die Summe der benachbarten Zahlen von 8?

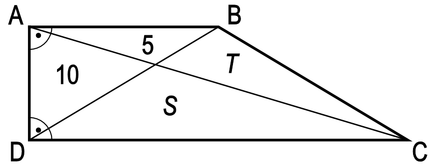
1		3
2		4

(A) 12 (B) 18 (C) 20 (D) 26 (E) 27

22. Eine Waage zeigt die Masse nicht immer genau an. Wenn etwas leichter als 1000 g ist, zeigt sie die genaue Masse an. Wenn etwas 1000 g oder mehr wiegt, zeigt sie irgendeine Masse über 1000 g an.
Man hat 5 Kugeln mit den Massen A g, B g, C g, D g und E g, jede weniger als 1000 g. Wenn man diese paarweise abwiegt, zeigt die Waage folgendes an: $B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$.
Welche der Kugeln ist am schwersten?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

23. Das Viereck $ABCD$ besitzt nur in den Ecken A und D rechte Winkel. Die Zahlen in der Abbildung geben jeweils die Größe des Flächeninhalts des Dreiecks an, in dem sie stehen. Wie groß ist der Flächeninhalt von $ABCD$?



(A) 60 (B) 45 (C) 40 (D) 35 (E) 30

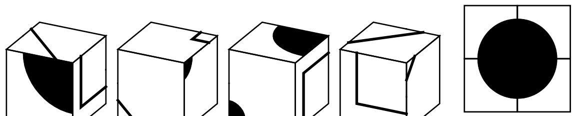
24. Jan und Eva tragen einen Wettstreit im Lösen von mathematischen Aufgaben aus. Jeder bekommt eine gleiche Liste mit 100 Aufgaben. Für jede gelöste Aufgabe bekommt der erste, der sie löst, 4 Punkte, während der langsamere 1 Punkt für die Lösung bekommt. Jan löst 60 Aufgaben und auch Eva löst 60 Aufgaben. Zusammen erringen sie 312 Punkte.
Wie viele der Aufgaben wurden sowohl von Jan als auch von Eva gelöst?

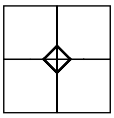
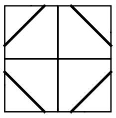
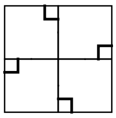
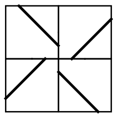
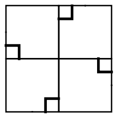
(A) 53 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

25. David fährt mit seinem Fahrrad von Edinburgh zu seiner außerhalb von Edinburgh lebenden Tante. Er möchte genau um 15 Uhr bei ihr ankommen. Nach 2/3 seiner von ihm geplanten Fahrzeit hat er bereits 3/4 des Weges zurückgelegt. Deshalb fuhr er danach langsamer und kam genau pünktlich an seinem Ziel an. In welchem Verhältnis stehen die Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden Teile seiner Fahrt zueinander?

(A) 5 : 4 (B) 4 : 3 (C) 3 : 2 (D) 2 : 1 (E) 3 : 1

26. Vier identische Würfel (siehe Abbildung) werden aneinander gefügt. Betrachtet man das entstandene Gebilde von vorne, sieht man einen schwarzen Kreis (rechtes Bild).
Was sieht man auf der Rückseite des Gebildes?


Ansicht von vorne

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

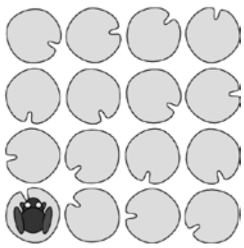
27. Eine Gruppe von 25 Personen besteht aus Rittern, Gaunern und Wankelmütigen. Die Ritter sagen immer die Wahrheit, die Gauner immer die Unwahrheit und die Wankelmütigen antworten abwechselnd ehrlich und verlogen (oder umgekehrt).
Auf die erste an alle gestellte Frage, "Bist du ein Ritter?", antworteten 17 von ihnen mit "Ja!".
Auf die zweite an alle gestellte Frage, "Bist du ein Wankelmütiger?", antworteten 12 von ihnen mit "Ja!"
Auf die dritte an alle gestellte Frage, "Bist du ein Gauner?", antworteten 8 mit "Ja!"
Wie viele Ritter gab es in dieser Personengruppe?

(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 13 (E) 17

28. Mehrere verschiedene positive ganze Zahlen werden auf eine Tafel geschrieben. Genau zwei dieser Zahlen sind durch 2 teilbar und genau 13 dieser Zahlen sind durch 13 teilbar. Die größte an der Tafel stehende Zahl ist M.
Was ist der kleinste Wert, den M haben kann?

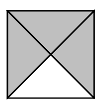
(A) 169 (B) 260 (C) 273 (D) 299 (E) 325

29. Auf einem Teich befinden sich 16 Seerosenblätter angeordnet in einem 4×4 Raster wie in der Abbildung zu sehen. Ein Frosch sitzt auf einem Blatt in einer der Ecken des Rasters (siehe Bild). Der Frosch springt von einem Blatt zu einem anderen Blatt horizontal oder vertikal. Dabei überspringt er immer mindestens ein Blatt. Auf keinem Blatt landet er zweimal. Auf wie vielen Blättern, einschließlich des Blattes, auf dem er sitzt, kann er höchstens landen?



(A) 16 (B) 14 (C) 8 (D) 6 (E) 4

30. Ein 5×5 Quadrat wird aus 1×1 Fliesen gelegt. Das Muster auf jeder Fliese besteht aus drei dunklen und einem hellen Dreieck (siehe Abbildung). Bei benachbarten Fliesen haben die beiden Dreiecke an der gemeinsamen Kante jeweils die gleiche Farbe.



Der Rand des großen Quadrats besteht aus dunklen und hellen Dreiecken. Was ist die kleinste Anzahl von dunklen Dreiecken, die sich darunter befinden können?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

MATHEMATICS KANGAROO 2014
Austria - 20.3.2014

Group: Kadett, Grades: 7-8

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 75 min.
Each correct answer, questions 1.-10.: 3 Points
Each correct answer, questions 11.-20.: 4 Points
Each correct answer, questions 21.-30.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 30 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the question number (1 to 30). Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

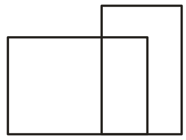
Mathematical Kangaroo 2014
Group Kadett (Grade 7 and 8)
Austria - 20.3.2014

- 3 Point Questions -

1. The Mathematical Kangaroo takes place each year on the third Thursday of March. What is the latest possible date on which the competition could take place?

(A) 14 March (B) 15 March (C) 20 March (D) 21 March (E) 22 March

2. How many quadrilaterals of any size are to be found in the diagram pictured.

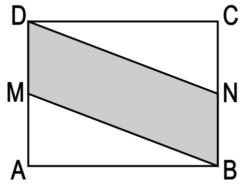


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 5

3. What is the answer to $2014 \times 2014 \div 2014 - 2014$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2013 (D) 2014 (E) 4028

4. The area of rectangle *ABCD* in the diagram is 10. *M* and *N* are the midpoints of the sides *AD* and *BC* respectively. How big is the area of the quadrilateral *MBND*?



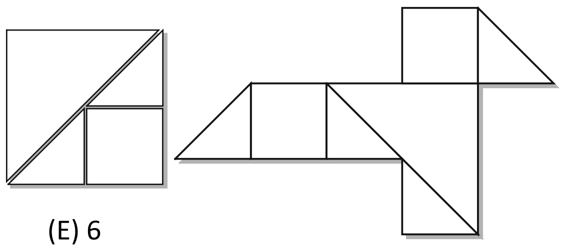
sides

(A) 0·5 (B) 5 (C) 2·5 (D) 7·5 (E) 10

5. The product of two natural numbers is 36, and their sum 37. How big is the (positive) difference between the two numbers?

(A) 1 (B) 4 (C) 10 (D) 26 (E) 35

6. Wanda has lots of pages of square paper, whereby each page has an area of 4. She cuts each of the pages into right-angled triangles and squares (see the left hand diagram). She takes a few of these pieces and forms the shape in the right hand diagram. How big is the area of this shape?

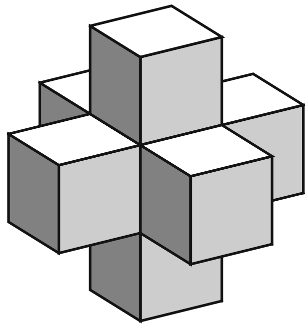


(A) 3 (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 5 (E) 6

7. A bucket is filled halfway with water. A cleaning liquid fills another 2 litres of liquid into the bucket. Now the bucket is three-quarters full. How many litres of water in total can fit into the bucket?

(A) 10 Litre (B) 8 Litre (C) 6 Litre (D) 4 Litre (E) 2 Litre

8. George builds the sculpture shown from seven cubes each of edge length 1. How many more of these cubes must he add to the sculpture so that he builds a large cube of edge length 3?

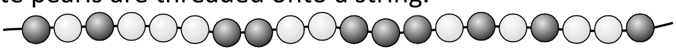


(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

9. Which of the following sums gives the biggest answer?

(A) 44×777 (B) 55×666 (C) 77×444 (D) 88×333 (E) 99×222

10. Gray and white pearls are threaded onto a string.



Tony pulls pearls from the ends of the chain. After pulling off the fifth gray pearl he stops. At most, how many white pearls could he have pulled off?

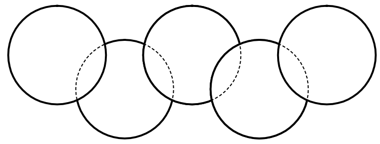
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

- 4 Point Questions -

11. Max has a one hour piano lesson twice a week, Hanna only has a one hour lesson every second week. The piano lessons run over a particular number of weeks. How many weeks is this, if during this time Max has 15 more hours of lessons than Hanna?

(A) 30 Weeks (B) 25 Weeks (C) 20 Weeks (D) 15 Weeks (E) 10 Weeks

12. Five circles each with an area of 1 cm^2 overlap each other to form the figure in the diagram. The sections where two circles overlap, each have an area of $\frac{1}{8}$ cm^2. How big is the area, which is completely covered by the figure in the diagram?

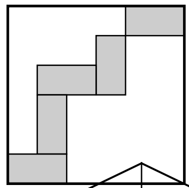


(A) $4 cm^2$ (B) $\frac{9}{2} cm^2$ (C) $\frac{35}{8} cm^2$ (D) $\frac{39}{8} cm^2$ (E) $\frac{19}{4} cm^2$

13. A grandmother, her daughter and her granddaughter find that the sum of their ages is 100. Also each age is a power of two (that is, several two's multiplied together). How old is the granddaughter?

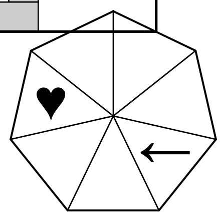
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

14. 5 congruent rectangles are positioned in a square with side length 24 as shown in the diagram. How big is the area of one of these rectangles?

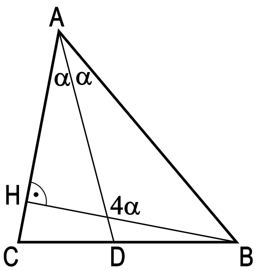


(A) 12 cm^2 (B) 16 cm^2 (C) 18 cm^2 (D) 24 cm^2 (E) 32 cm^2

15. In the following figure, the heart and the arrow are arranged as pictured. At the same moment the heart and the arrow begin to move. The arrow moves around the figure 3 spaces clockwise and the heart 4 spaces anticlockwise and then they stop. This process repeats itself over and over again. After how many repetitions does the arrow find itself for the first time in the same triangle as the heart?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) That will never happen



16. In triangle *ABC* (see sketch) *AD* is the angle bisector of the angle at *A* and *BH* is the height from side *AC*. The obtuse angle between *BH* and *AD* is four times the size of angle $\angle DAB$. How big is the angle $\angle CAB$?

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75° (E) 90°

17. Six boys live together in an apartment, which has two bathrooms. Each morning from 7:00 they use both of the bathrooms before breakfast whereby they are 8, 10, 12, 17, 21, and 22 minutes respectively, constantly alone in one of the two bathrooms. What is the earliest time that all six boys can have breakfast together?

(A) 7:45 (B) 7:46 (C) 7:47 (D) 7:48 (E) 7:50

18. The sides of a rectangle are 6cm and 11cm long. You select one of the long sides. Then the angle bisectors of the angles at the ends of this side are drawn. They split the opposite long side into three pieces. How long are these pieces?

(A) 1 cm, 9 cm, 1 cm (B) 2 cm, 7 cm, 2 cm (C) 3 cm, 5 cm, 3 cm (D) 4 cm, 3 cm, 4 cm (E) 5 cm, 1 cm, 5 cm

19. Captain Sparrow and his pirates loot some gold coins. They share the coins equally amongst themselves. If they were four pirates less they would each get 10 coins more. If the number of coins was 50 less, they would each get 5 coins less. How many coins did they share between themselves?

(A) 80 (B) 100 (C) 120 (D) 150 (E) 250

20. The average value of two positive numbers is 30% less than one of the two numbers. By which percentage is the average value bigger than the other number?

(A) 75% (B) 70% (C) 30% (D) 25% (E) 20%

- 5 Point Questions -

21. Andy fills a 3×3 table with all the digits from 1 to 9 so that each cell only contains one digit. He has already put the digits 1, 2, 3 and 4 in the table as shown in the diagram. Two numbers are 'neighbouring' when the cells they are in share one side. After he had finished filling in the table he noticed: The sum of the numbers neighbouring 9 equals 15. How big is the sum of the numbers neighbouring 8?

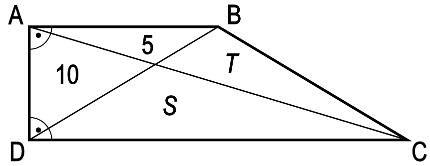
1		3
2		4

(A) 12 (B) 18 (C) 20 (D) 26 (E) 27

22. A set of scales does not always show the correct mass. If something is less than 1000g they show the exact mass. When something weighs 1000g or more, they show some mass over 1000g. You have 5 balls with the masses A g, Bg, C g, D g and E g each less than 1000g. When you weigh these in pairs the scales show the following: $B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$. Which ball is the heaviest?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

23. The quadrilateral $ABCD$ has right angles only in corners A and D. The numbers in the diagram give the respective areas of the triangles in which they are located. How big is the area of $ABCD$?



(A) 60 (B) 45 (C) 40 (D) 35 (E) 30

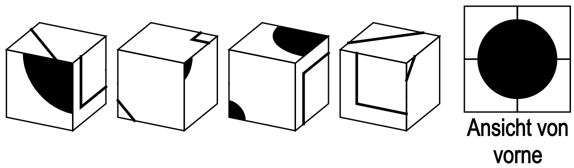
24. Jan and Eva undertake a challenge to solve mathematics questions. They each get an identical list of 100 questions. For each correctly solved question, the first to solve it gets 4 points while the slower person gets 1 point. Jan solved 60 questions and Eva also solved 60 questions. Together they score 312 points. How many questions were solved by both Jan and Eva?

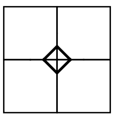
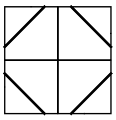
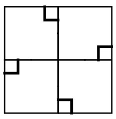
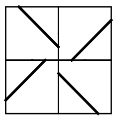
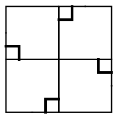
(A) 53 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

25. David cycles from Edinburgh to his aunty who lives outside of Edinburgh. He wants to arrive at exactly 15:00 hours. After 2/3 of his planned travel time he had covered 3/4 of the way. Therefore he began to cycle slower and arrived exactly on time at his destination. In which ratio are the average speeds of the two sections of his journey?

(A) 5 : 4 (B) 4 : 3 (C) 3 : 2 (D) 2 : 1 (E) 3 : 1

26. Four identical cubes (see diagram) were fitted together. If the resulting shape is viewed from the front you see a black circle (picture on the right). What will you see on the back of the shape?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

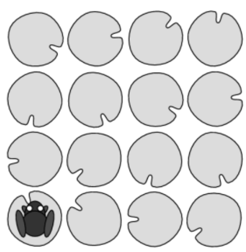
27. A group of 25 people is made up of knights, rascals and shilly-shalliers. The knights always tell the truth, the rascals are always untruthful, and the shilly-shalliers answer alternately truthfully and falsely (or the other way around).
After the first question asked to everybody, "are you a knight?" 17 of them answered "yes!"
After the second question asked to everybody "are you a shilly-shallier?" 12 of them answered "yes!"
After the third question asked to everybody "are you a rascal?" 8 of them answered "yes!"
How many knights are in this group of people?

(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 13 (E) 17

28. Lots of different positive whole numbers were written on a blackboard. Exactly two of these numbers are divisible by 2 and exactly 13 of these numbers are divisible by 13. The biggest number on the board is M. What is the smallest value that M can have?

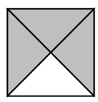
(A) 169 (B) 260 (C) 273 (D) 299 (E) 325

29. On a pond 16 lilly pads are arranged in a 4×4 grid as can be seen in the diagram. A frog sits on a lilly pad in one of the corners of the grid (see picture). The frog jumps from one lilly pad to another horizontally or vertically. In doing so he always jumps over at least one lilly pad. He never lands on the same lilly pad twice. What is the maximum number of lilly pads, including the one he is sitting on, on which he can land?



(A) 16 (B) 14 (C) 8 (D) 6 (E) 4

30. A 5×5 square is covered with 1×1 tiles. The design on each tile is made up of three dark triangles and one light triangle (see diagram). The triangles of neighbouring tiles always have the same colour where they join along an edge. The border of the large square is made of dark and light triangles. What is the smallest number of dark triangles that could be amongst them?



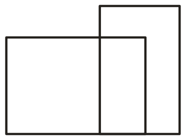
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

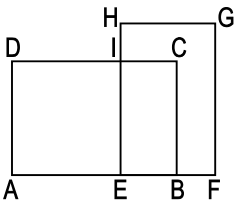
- 3 Punkte Beispiele -

1. Der Känguruwettbewerb findet jedes Jahr am dritten Donnerstag im März statt. Was ist das letztmögliche Datum, an dem der Wettbewerb stattfinden könnte?
(A) 14. März (B) 15. März (C) 20. März **(D) 21. März** (E) 22. März

Der letztmögliche Termin ist 3 Wochen = 21 Tage nach dem letzten Tag im Februar.
Das ist der 21. März.



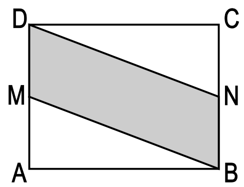
2. Wie viele Vierecke beliebiger Größe sind in der abgebildeten Figur zu sehen?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 **(D) 4** (E) 5



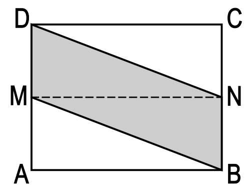
ABCD, EFGH, EBCI, AEID

3. Wie lautet das Ergebnis von $2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2013 (D) 2014 (E) 4028

$2014 \cdot 2014 : 2014 - 2014 = 2014^2 : 2014 - 2014 = 2014 - 2014 = 0$



4. Der Flächeninhalt des abgebildeten Rechtecks *ABCD* beträgt 10. *M* und *N* sind die Mittelpunkte der Seiten *AD* bzw. *BC*. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks *MBND*?
(A) 0,5 **(B) 5** (C) 2,5 (D) 7,5 (E) 10



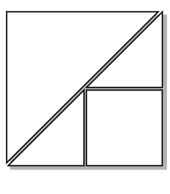
Durch die gestrichelte Linie wird ABCD in 4 kongruente Dreiecke zerteilt.
Daher gilt: $A_{MBND} = 2 \cdot \frac{10}{4} = 5$.

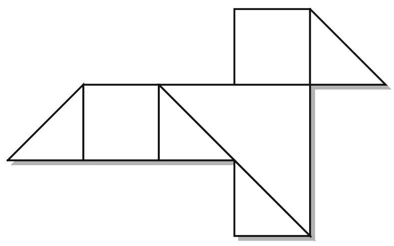
5. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen beträgt 36 und ihre Summe 37.
Wie groß ist die (positive) Differenz der beiden Zahlen?
(A) 1 (B) 4 (C) 10 (D) 26 **(E) 35**

Lösung 1: Mögliche Produkte: $1 \cdot 36$, $2 \cdot 18$, $3 \cdot 12$, $4 \cdot 9$, $6 \cdot 6$;
$1 + 36 = 37 \Rightarrow 36 - 1 = 35$

Lösung 2: I: $x + y = 37$ also $y = 37 - x$; II: $x \cdot y = 36$
Aus I und II folgt der Ansatz $x \cdot (37 - x) = 36$. Daraus ergibt sich die folgende quadratische Gleichung:
$x^2 - 37x - 36 = 0$. Die beiden Lösungen der Gleichung sind $x = 1$ oder $x = 36$ und damit $y = 36$ oder $y = 1$.
$|x - y| = 35$

6. Wanda hat mehrere quadratische Blätter Papier, wobei jedes Blatt den Flächeninhalt 4 hat. Sie zerschneidet jedes dieser Blätter in rechtwinklige Dreiecke und Quadrate (siehe linke Abbildung). Sie nimmt einige dieser Stücke und legt daraus die rechts abgebildete Figur. Wie groß ist der Flächeninhalt dieser Figur?





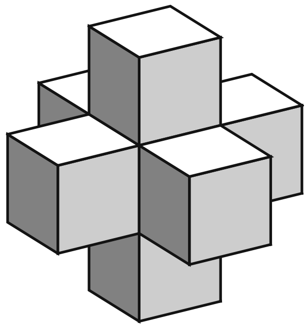
(A) 3 (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 5 **(E) 6**

Der Flächeninhalt des großen Dreiecks beträgt 2. Der Flächeninhalt des Quadrates beträgt 1 und der Flächeninhalt eines kleinen Dreiecks beträgt 0,5.
Gesamtfläche der Figur: $2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}5 = 6$.

7. Ein Kübel ist mit Wasser halb gefüllt. Eine Reinigungskraft schüttet weitere 2 Liter Wasser in den Kübel. Danach ist der Kübel zu dreiviertel voll. Wie viele Liter Wasser passen insgesamt in den Kübel?

(A) 10 Liter **(B) 8 Liter** (C) 6 Liter (D) 4 Liter (E) 2 Liter

$\frac{K}{2}+2=\frac{3K}{4}$. Daher $\frac{K}{4}=2$. Damit $K=8$



8. Georg baute aus sieben Würfeln, jeder mit Kantenlänge 1, die abgebildete Skulptur. Wie viele solche Würfel muss er dieser Skulptur noch hinzufügen, um daraus einen großen Würfel mit Kantenlänge 3 zu bauen?

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 **(E) 20**

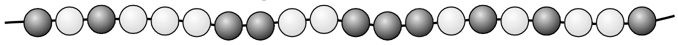
Der gesuchte Würfel besteht aus $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleinen Würfeln. Es fehlen 20 Würfeln.

9. Welche der folgenden Rechnungen liefert das größte Ergebnis?

(A) $44 \cdot 777$ **(B) $55 \cdot 666$** (C) $77 \cdot 444$ (D) $88 \cdot 333$ (E) $99 \cdot 222$

Entweder durch genaue Rechnung oder Überschlagsrechnung.

10. Auf einer Schnur sind graue und weiße Perlen aufgefädelt.



Toni zieht Perlen von den Enden der Kette. Nach dem Ziehen der fünften grauen Perle hört er damit auf. Wie viele weiße Perlen kann er höchstens heruntergezogen haben?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D) 7** (E) 8

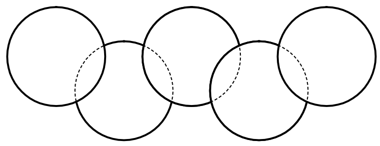
Zuerst löst man 2 graue und 4 weiße Perlen von der linken Seite der Kette. Dann löst man 3 graue und 3 weiße Perlen von der rechten Seite der Kette. Damit hat man insgesamt 7 weiße Perlen von der Kette gelöst.

- 4 Punkte Beispiele -

11. Max hat zweimal pro Woche je eine Stunde Klavierunterricht, Hanna nur jede zweite Woche eine Stunde. Der Klavierunterricht findet eine bestimmte Anzahl von Wochen hindurch statt.
Wie viele Wochen sind dies, wenn Max in diesem Zeitraum um 15 Stunden mehr Unterricht bekommt als Hanna?

(A) 30 Wochen (B) 25 Wochen (C) 20 Wochen (D) 15 Wochen (E) 10 Wochen

Lösung 1: Nach 2 Wochen hat Max 3 Stunden mehr als Hanna erhalten. Damit hat er nach 10 Wochen 15 Stunden mehr Unterricht als Hanna erhalten.
Lösung 2: $2x-\frac{x}{2}=15 \Rightarrow x=10$ (x Anzahl der Wochen)



12. Fünf Kreise mit je 1 cm^2 Flächeninhalt, die einander überlappen, bilden die abgebildete Figur. Das überlappende Flächenstück zweier Kreise hat jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{8}$ cm^2. Wie groß ist der Flächeninhalt des Flächenstücks, das von der abgebildeten Figur überdeckt wird?

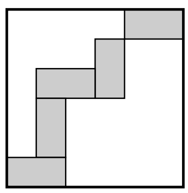
(A) $4\,cm^2$ **(B) $\frac{9}{2}\,cm^2$** (C) $\frac{35}{8}\,cm^2$ (D) $\frac{39}{8}\,cm^2$ (E) $\frac{19}{4}\,cm^2$

$5-4\cdot\frac{1}{8}=4{,}5\ cm^2$

13. Eine Großmutter, ihre Tochter und ihre Enkelin stellen fest, dass die Summe ihrer Alter 100 ist. Außerdem ist jedes Alter eine Potenz der Zahl 2 (also ein Produkt von lauter Zweiern). Wie alt ist die Enkelin?

(A) 1 (B) 2 **(C) 4** (D) 8 (E) 16

$2^6 + 2^5 + 2^2 = 64 + 32 + 4 = 100$. Großmutter 64 Jahre, Mutter 32 Jahre, Enkelin 4 Jahre

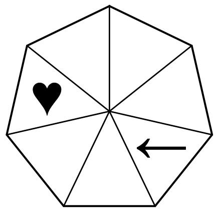


14. In einem Quadrat mit Seitenlänge 24 cm sind fünf kongruente Rechtecke, wie in der Abbildung zu sehen, angeordnet. Wie groß ist der Flächeninhalt eines dieser Rechtecke?

(A) 12 cm^2 (B) 16 cm^2 (C) 18 cm^2 (D) 24 cm^2 **(E) 32 cm^2**

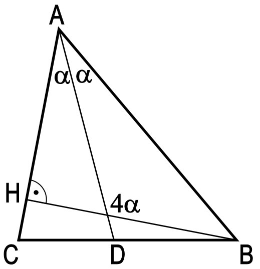
Sei a die Länge und b die Breite eines solchen Rechtecks. Damit ergeben sich zwei Bedingungen:
I: $2a + b + (a - b) = 24$ und II: $3b + a + (a - b) = 24$. Durch Umformung erhält man aus I: $a = 8$ und aus II: $2b + 2a = 24$.
Damit muss $b = 4$ gelten. Die Fläche eines Rechtecks ist daher $8 \cdot 4 = 32$ cm^2.

15. In der folgenden Figur sind das Herz und der Pfeil wie abgebildet angeordnet. Zum selben Zeitpunkt beginnen sich das Herz und der Pfeil zu bewegen. Der Pfeil wandert in der Figur um 3 Felder im Uhrzeigersinn und das Herz um 4 Felder gegen den Uhrzeigersinn, danach bleiben sie stehen. Dieser Vorgang wiederholt sich immer wieder. Nach wie vielen dieser Vorgänge wird sich der Pfeil das erste Mal im gleichen dreieckigen Feld wie das Herz befinden?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 **(E) Das wird nie passieren.**

Da ein Bewegen um 3 Felder im Uhrzeigersinn dasselbe ergibt, wie das Bewegen um 4 Felder gegen den Uhrzeigersinn, bleibt die relative Position der beiden Symbole zueinander stets gleich, d.h. E ist richtig.



16. Im Dreieck *ABC* (siehe Skizze) ist *AD* die Winkelsymmetrale des Winkels in *A* und *BH* die Höhe auf die Seite *AC*. Der stumpfe Winkel zwischen *BH* und *AD* ist viermal so groß wie der Winkel $\angle DAB$. Wie groß ist der Winkel $\angle CAB$?

(A) 30° (B) 45° **(C) 60°** (D) 75° (E) 90°

$\angle ABH = 90 - 2\alpha$ (rechtwinkeliges Dreieck AHB).
Daher gilt $\alpha + 4\alpha + (90 - 2\alpha) = 180°$. Damit gilt $\alpha = 30°$. $\angle CAB = 2\alpha = 60°$.

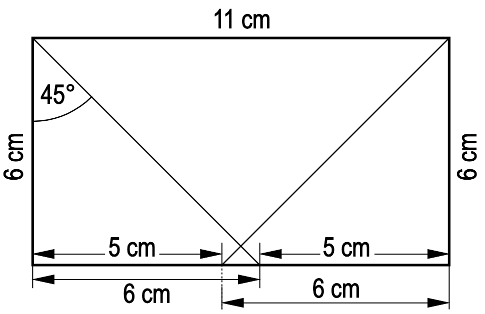
17. Sechs Burschen leben gemeinsam in einer Wohnung, in der es zwei Badezimmer gibt. Jeden Morgen ab 7:00 benützen sie vor dem Frühstück die beiden Bäder, wobei sie sich jeweils 8, 10, 12, 17, 21 und 22 Minuten durchgehend alleine in einem der beiden Badezimmer aufhalten. Wann können alle sechs Burschen frühestens gemeinsam frühstücken?

(A) 7:45 **(B) 7:46** (C) 7:47 (D) 7:48 (E) 7:50

Durchschnittlich braucht jeder Bursche 15 Minuten für die Morgentoilette. Damit wäre jedes Bad bei optimaler Ausnutzung 45 Minuten besetzt. Die Abweichungen der einzelnen Burschen vom Mittelwert 15 betragen $-7, -5, -3, +2, +6$ und $+7$ Minuten. Kombiniert man negative Abweichung mit positiver Abweichung optimal (d.h. mit in Summe möglichst geringer Abweichung von 0), so ergeben sich die beiden 3er-Gruppen $-7 + 2 + 8 = +1$ und $+7 - 5 - 3 = -1$. Die Belegung der Badezimmer ist daher 21, 17, 8 (= 46 min) und 22, 12, 10 (= 44 min). $\Rightarrow$ 7.46

18. Die Seiten eines Rechtecks sind 6 cm und 11 cm lang. Man wählt eine lange Seite aus. Dann werden die Winkelsymmetralen der Winkel in den Endpunkten dieser Seite gezeichnet. Sie unterteilen die gegenüberliegende andere lange Seite in drei Teilstücke. Wie lang sind diese Teilstücke?

(A) 1 cm, 9 cm, 1 cm (B) 2 cm, 7 cm, 2 cm (C) 3 cm, 5 cm, 3 cm (D) 4 cm, 3 cm, 4 cm **(E) 5 cm, 1 cm, 5 cm**



19. Captain Sparrow und seine Piraten erbeuten einige Goldmünzen. Sie teilen die Münzen gleichmäßig untereinander auf. Wenn sie vier Piraten weniger wären, dann würde jeder von ihnen 10 Münzen mehr bekommen. Wäre die Anzahl der Münzen um 50 weniger, würde jede Person um 5 Münzen weniger erhalten. Wie viele Münzen teilen sie untereinander auf?

(A) 80 (B) 100 (C) 120 **(D) 150** (E) 250

Aus der zweiten Aussage kann man schließen, dass es 10 Piraten gibt ($50 : 5 = 10$). Dadurch verbleiben bei der ersten Bedingung 6 Piraten, die jeweils um 10 Goldmünzen mehr bekommen, also in Summe um 60 Goldmünzen mehr untereinander aufteilen können. Das heißt, dass jeder der 4 wegfallenden Piraten bei 15 Goldstücke bekommen hätte. Bei einer Anzahl von 10 Piraten ergeben sich damit $10 \cdot 15 = 150$ Goldmünzen.

20. Der Durchschnittswert zweier positiver Zahlen ist um 30% geringer als eine der beiden Zahlen.
Um welchen Prozentsatz ist der Durchschnittswert größer als die andere Zahl?
(A) 75% (B) 70% (C) 30% (D) 25% (E) 20%

Nehmen wir an, der Wert der größeren Zahl beträgt 100. Dann beträgt der Durchschnittswert 70. Damit der Durchschnittswert zwischen 100 und der zweiten Zahl 70 beträgt, muss die kleinere Zahl einen Wert von 40 haben. 70 ist aber um 30 d.h. um 75% größer als 40.

- 5 Punkte Beispiele -

21. Andy füllt eine 3×3-Tabelle mit allen Ziffern von 1 bis 9 so aus, so dass jedes Feld nur eine Ziffer enthält. Er hat bereits die Ziffern 1, 2, 3 und 4 in die Tabelle, wie in der Abbildung zu sehen, eingetragen. Zwei Zahlen gelten als "benachbart", wenn die Felder, in denen sie stehen, eine Seite gemeinsam haben. Nachdem er die Tabelle fertig ausgefüllt hat, bemerkt er: Die Summe der benachbarten Zahlen von 9 beträgt 15.
Wie groß ist die Summe der benachbarten Zahlen von 8?

1		3
2		4

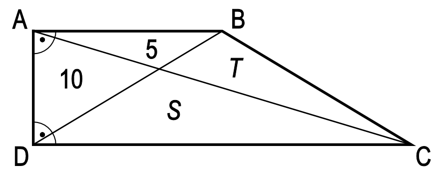
(A) 12 (B) 18 (C) 20 (D) 26 **(E) 27**

Die Summe der benachbarten Zahlen von 9 ist 15. Damit muss 9 aber auf einem Feld am Rande der Tabelle stehen, da sonst die Summe der benachbarten Zahlen zu groß wäre. Das Feld zwischen 3 und 4 erfüllt als einziges die Bedingungen wobei im Feld im Zentrum die Zahl 8 stehen muss. Die Nachbarn von 8 sind 9, 5, 6, 7. Die Summe der Nachbarzahlen beträgt 27.

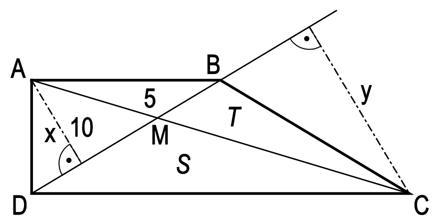
22. Eine Waage zeigt die Masse nicht immer genau an. Wenn etwas leichter als 1000 g ist, zeigt sie die genaue Masse an. Wenn etwas 1000 g oder mehr wiegt, zeigt sie irgendeine Masse über 1000 g an.
Man hat 5 Kugeln mit den Massen *A* g, *B* g, *C* g, *D* g und *E* g, jede weniger als 1000 g. Wenn man diese paarweise abwiegt, zeigt die Waage folgendes an: $B + D = 1200$, $C + E = 2100$, $B + E = 800$, $B + C = 900$, $A + E = 700$.
Welche der Kugeln ist am schwersten?
(A) *A* (B) *B* (C) *C* **(D) *D*** (E) *E*

Wegen (1) B + E = 800 und (2) A + E = 900 gilt B < A. Wegen (1) B + E = 800 und (3) B + C = 900 gilt <u>E < C</u>.
Aus (1) und (3) folgt außerdem, dass (4) C = E + 100 und damit ergibt sich zusammen mit (2), dass (5) A + C = 1000.
Weiters gilt (6) C + E ≥ 1000 und daher zusammen mit (4), dass C + C – 100 ≥ 1000 ⇔ 2C ≥ 1100 ⇔(7) C ≥ 550.
Aus (5) folgt nun zusammen mit (7), dass <u>A < C</u>. Aus (3) und (7) folgt, dass <u>B < C</u>. A, B, E sind also leichter als C.
Da (8) B + D ≥ 1000, gilt zusammen mit (3), dass D > C. Damit ist D am schwersten.

23. Das Viereck *ABCD* besitzt nur in den Ecken *A* und *D* rechte Winkel. Die Zahlen in der Abbildung geben jeweils die Größe des Flächeninhalts des Dreiecks an, in dem sie stehen. Wie groß ist der Flächeninhalt von *ABCD*?



(A) 60 **(B) 45** (C) 40 (D) 35 (E) 30



In der Zeichnung bezeichnet x die Höhe des Dreiecks *DBA* auf die Seite *DM*. Aber x ist auch die Höhe des Dreiecks *MBA* auf die Seite *MB*. Da $10 = \frac{1}{2}\cdot DM\cdot x$ und $5=\frac{1}{2}\cdot MB\cdot x$ ist und 10 = 2 · 5, muss gelten (1) $DM = 2\cdot MB$.
Die Dreiecke *ABD* und *ABC* haben die Seite AB gemeinsam. Da *AB* parallel zu *DC* liegt, ist die Höhe des Dreiecks ABD auf die Seite AB auch gleichzeitig Höhe des Dreiecks *ABC*. Damit ist die Fläche von $A_{ABD} = A_{ABC} = 15$ und daher $T = 10$.
In der Zeichnung ist y die Höhe des Dreiecks *MCB* auf die Seite MB. Man sieht, dass y auch die Höhe im Dreieck *DCM* auf *DM* ist. Da nach (1) $DM = 2\cdot MB$, ist $S = A_{DCM} = 2 \cdot A_{MCB} = 2 \cdot T = 2 \cdot 10 = 20$.
Der Flächeninhalt von *ABCD* ist daher 10 + 5 + 10 + 20 = 45.

24. Jan und Eva tragen einen Wettstreit im Lösen von mathematischen Aufgaben aus. Jeder bekommt eine gleiche Liste mit 100 Aufgaben. Für jede gelöste Aufgabe bekommt der erste, der sie löst, 4 Punkte, während der langsamere 1 Punkt für die Lösung bekommt. Jan löst 60 Aufgaben und auch Eva löst 60 Aufgaben. Zusammen erringen sie 312 Punkte.
Wie viele der Aufgaben wurden sowohl von Jan als auch von Eva gelöst?
(A) 53 (B) 54 (C) 55 **(D) 56** (E) 57

Jan löst als erster x Aufgaben und bekommt dafür 4·x Punkte. Weiters löst er noch (60 – x) Aufgaben als zweiter, für die er noch jeweils 1 Punkt d.h. insgesamt (60 – x) Punkte bekommt.
Eva löst y Aufgaben als erste, für die sie 4·y Punkte bekommt und (60 – y) Aufgaben als zweite, für die sie insgesamt (60 – y) Punkte erhält. Beide zusammen haben 312 Punkte bekommen. Daher gilt die Gleichung

$4x + (60 - x) + 4y + (60 - y) = 312$
Durch Vereinfachung dieser Gleichung erhält man
$x + y = 64$
Beide haben insgesamt 64 Fragen als erstes beantwortet und dafür $64 \cdot 4 = 256$ Punkte bekommen.
Es bleiben $312 - 256 = 56$ Punkte über, die sie für als zweite beantwortete Fragen bekommen haben. Da sie für jede dieser Antworten jeweils 1 Punkt erhalten haben, müssen dies deshalb 56 Fragen gewesen sein.

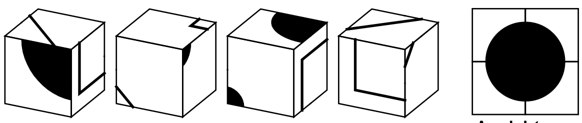
25. David fährt mit seinem Fahrrad von Edinburgh zu seiner außerhalb von Edinburgh lebenden Tante. Er möchte genau um 15 Uhr bei ihr ankommen. Nach 2/3 seiner von ihm geplanten Fahrzeit hat er bereits 3/4 des Weges zurückgelegt. Deshalb fuhr er danach langsamer und kam genau pünktlich an seinem Ziel an. In welchem Verhältnis stehen die Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden Teile seiner Fahrt zueinander?
(A) 5 : 4 (B) 4 : 3 **(C) 3 : 2** (D) 2 : 1 (E) 3 : 1

Sei s der Weg von Edinburgh zur Tante und t die geplante Fahrzeit. Für $\frac{3}{4}$ des Weges also $\frac{3}{4}s$ benötigt David $\frac{2}{3}$ der Zeit also $\frac{2}{3}t$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit v_1 für diesen Teil des Wegs (Geschwindigkeit = Weg : Zeit) beträgt also $v_1 = \frac{\frac{3}{4}s}{\frac{2}{3}t} = \frac{9}{8} \cdot \frac{s}{t}$. Analog benötigt er für den Rest des Weges also $\frac{1}{4}s$ die restliche Zeit also $\frac{1}{3}t$. Die

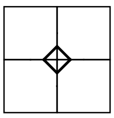
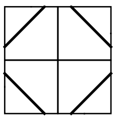
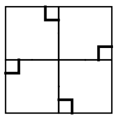
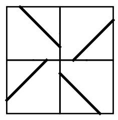
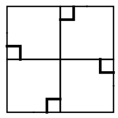
Durchschnittsgeschwindigkeit v_2 für diesen Teil des Weges beträgt $v_2 = \frac{\frac{1}{4}s}{\frac{1}{3}t} = \frac{3}{4} \cdot \frac{s}{t}$.

$v_1 : v_2 = \frac{9}{8} : \frac{3}{4} = 9 : 6 = 3 : 2$

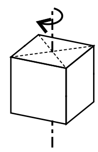
26. Vier identische Würfel (siehe Abbildung) werden aneinander gefügt. Betrachtet man das entstandene Gebilde von vorne, sieht man einen schwarzen Kreis (rechtes Bild).
Was sieht man auf der Rückseite des Gebildes?



Ansicht von vorne

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Es genügt die ganz linke und ganz rechte der vier abgebildeten Würfel zu betrachten. Da sieht man, dass man durch Drehen des linken Würfels um 90° im Uhrzeigersinn die ganz rechte Abbildung erhält. Als Drehachse verwendet man die zur Basisfläche senkrecht stehende Würfelachse. Am ganz rechten Würfel sieht man auf der rechten Würfelseite das dem Viertelkreis gegenüberliegende Bild.
Damit ist Antwort A richtig.



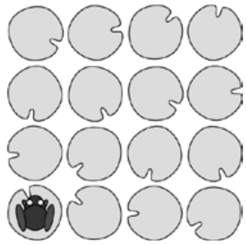
27. Eine Gruppe von 25 Personen besteht aus Rittern, Gaunern und Wankelmütigen. Die Ritter sagen immer die Wahrheit, die Gauner immer die Unwahrheit und die Wankelmütigen antworten abwechselnd ehrlich und verlogen (oder umgekehrt).
Auf die erste an alle gestellte Frage, "Bist du ein Ritter?", antworteten 17 von ihnen mit "Ja!".
Auf die zweite an alle gestellte Frage, "Bist du ein Wankelmütiger?", antworteten 12 von ihnen mit "Ja!"
Auf die dritte an alle gestellte Frage, "Bist du ein Gauner?", antworteten 8 mit "Ja!"
Wie viele Ritter gab es in dieser Personengruppe?
(A) 4 **(B) 5** (C) 9 (D) 13 (E) 17

Sei r die Anzahl der Ritter. Auf die dritte Frage können nur 8 Wankelmütige mit "Ja" geantwortet haben. Ritter würden sonst nämlich lügen und Gauner die Wahrheit sagen. Dieselben 8 haben auch bei der ersten Frage mit "Ja" und bei der zweiten Frage mit "Nein" geantwortet. Auf die zweite Frage haben 13 Personen mit "Nein" geantwortet. Diese 13 setzen sich aus den erwähnten 8 Wankelmütigen und Rittern zusammen. Lügner können nicht unter diesen 13 sein, da sie sonst ja die Wahrheit sprechen würden. Damit ist $8 + r = 13$ und daher $r = 5$.

28. Mehrere verschiedene positive ganze Zahlen werden auf eine Tafel geschrieben. Genau zwei dieser Zahlen sind durch 2 teilbar und genau 13 dieser Zahlen sind durch 13 teilbar. Die größte an der Tafel stehende Zahl ist *M*.
Was ist der kleinste Wert, den *M* haben kann?
(A) 169 (B) 260 **(C) 273** (D) 299 (E) 325

Da die Zahl M möglichst klein gehalten werden muss, müssen unter den Zahlen zwei Zahlen dabei sein, die sowohl durch 2 als auch durch 13 geteilt werden können. Daher lauten die ersten vier Zahlen 13, 26, 39, 52. Die nächste Zahl ist 65 ($5 \cdot 13$). Jetzt fehlen noch die nächsten 8 ungeraden Vielfachen von 13. Die höchste und gleichzeitig möglichst kleine dieser Zahlen ist $21 \cdot 13 = 273$. ($5 \cdot 13 + (2 \cdot 8) \cdot 13 = 21 \cdot 13$)

29. Auf einem Teich befinden sich 16 Seerosenblätter angeordnet in einem 4×4 Raster wie in der Abbildung zu sehen. Ein Frosch sitzt auf einem Blatt in einer der Ecken des Rasters (siehe Bild). Der Frosch springt von einem Blatt zu einem anderen Blatt horizontal oder vertikal. Dabei überspringt er immer mindestens ein Blatt. Auf keinem Blatt landet er zweimal. Auf wie vielen Blättern, einschließlich des Blattes, auf dem er sitzt, kann er höchstens landen?

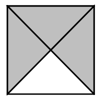


(A) 16 (B) 14 (C) 8 (D) 6 (E) 4

13	7	12	14
3	5	2	4
10	8	11	9
16	6	1	15

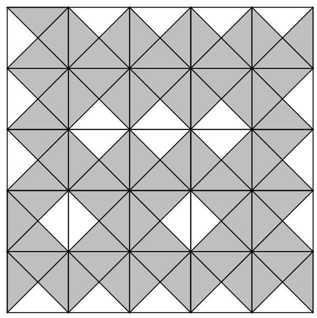
Eine der möglichen Lösungen. Die 4 mittleren Felder sollten möglichst früh erreicht werden, da es von dort die wenigsten Möglichkeiten zum Weiterhüpfen gibt.

30. Ein 5×5 Quadrat wird aus 1×1 Fliesen gelegt. Das Muster auf jeder Fliese besteht aus drei dunklen und einem hellen Dreieck (siehe Abbildung). Bei benachbarten Fliesen haben die beiden Dreiecke an der gemeinsamen Kante jeweils die gleiche Farbe.



Der Rand des großen Quadrats besteht aus dunklen und hellen Dreiecken. Was ist die kleinste Anzahl von dunklen Dreiecken, die sich darunter befinden können?
(A) 4 **(B) 5** (C) 6 (D) 7 (E) 8

Der Raster muss mit 25 Fliesen, auf denen sich jeweils 3 dunklen Dreiecke befinden, ausgelegt werden. Damit befinden sich im fertigen Bild insgesamt $75 = 25 \cdot 3$ dunkle Dreiecke. Das ist eine ungerade Anzahl. Im Inneren bilden sich immer Paare gleichfärbiger Dreiecke. Daher liegt innen eine gerade Anzahl von dunklen Dreiecken. Dadurch bleiben für Außen nur eine ungerade Anzahl dunkler Dreiecke.
(ungerade minus gerade = ungerade). In der neben abgebildeten Parkettierung gibt es 5 dunkle Dreiecke. Die Anzahl "4" ist wegen der oben angestellten Überlegungen nicht möglich.



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2014
20.3.2014

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9-10

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2014“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2016 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Vor- und Zuname des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2016 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

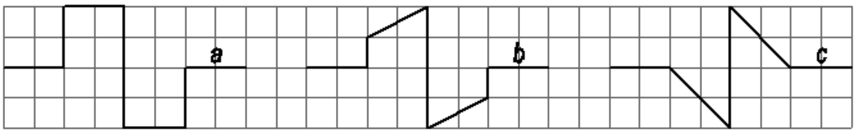
1. Der Känguruwettbewerb findet jedes Jahr am dritten Donnerstag im März statt. Welcher Tag ist der frühestmögliche Termin für den Bewerb?

(A) 14.3. (B) 15.3. (C) 20.3. (D) 21.3. (E) 22.3.

2. Das Containerschiff MSC Fabiola ist mit 12500 gleich langen Containern beladen. Aneinander gereiht ergeben sie eine 75 km lange Containerschlange. Wie lang ist ein Container ungefähr?

(A) 6 m (B) 16 m (C) 60 m (D) 160 m (E) 600 m

3. Mit a, b und c werden die Längen der abgebildeten unterschiedlich geformten Drahtstücke bezeichnet. Welche der folgenden Ungleichungen ist richtig?



(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<a<c$ (D) $b<c<a$ (E) $c<b<a$

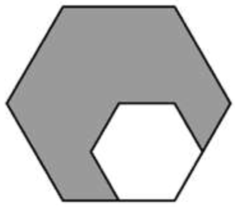
4. Welche Zahl ist auf der Zahlengeraden gleich weit von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ entfernt?

(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{15}$ (E) $\frac{5}{8}$

5. In der Jahreszahl 2014 ist die letzte Ziffer größer als die Summe der drei anderen Ziffern. Vor wie vielen Jahren war dies das letzte Mal der Fall?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

6. Die Seiten des großen regelmäßigen Sechsecks sind doppelt so lang wie jene des kleinen regelmäßigen Sechsecks. Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Sechsecks, wenn das kleine eine Fläche von 4 cm^2 hat?



(A) 16 cm^2 (B) 14 cm^2 (C) 12 cm^2 (D) 10 cm^2 (E) 8 cm^2

7. Welche Aussage ist sicher richtig, wenn folgende Aussage falsch ist: „Jeder hat mehr als 20 Probleme gelöst."

(A) Niemand hat mehr als 20 Probleme gelöst.
(B) Jemand hat weniger als 21 Probleme gelöst.
(C) Jeder hat weniger als 21 Probleme gelöst.
(D) Jemand hat genau 20 Probleme gelöst.
(E) Jemand hat mehr als 20 Probleme gelöst.

8. Tom zeichnet ein Quadrat in ein Koordinatensystem ein. Eine Diagonale liegt auf der x-Achse. Ihre Endpunkte sind $(-1|0)$ und $(5|0)$. Welcher der folgenden Punkte ist auch ein Eckpunkt dieses Quadrats?

(A) $(2|0)$ (B) $(2|3)$ (C) $(2|-6)$ (D) $(3|5)$ (E) $(3|-1)$

9. In Kängurucity gibt es m Männer, f Frauen und k Kinder. Es gilt $m : f = 2 : 3$ und $f : k = 8 : 1$.
In welchem Verhältnis steht die Anzahl der Erwachsenen (Männer und Frauen) zur Anzahl der Kinder?

(A) 5 : 1 (B) 10 : 3 (C) 13 : 1 (D) 12 : 1 (E) 40 : 3

10. Der Umfang des großen Rades beträgt 4,2 m, jener des kleinen 0,9 m. Zu Beginn sind die Ventile der beiden Räder am tiefsten Punkt; dann bewegt sich das Fahrrad nach links. Nach einigen Metern sind beide Ventile wieder gleichzeitig am tiefsten Punkt. Nach wie vielen Metern ist dies zum ersten Mal der Fall?

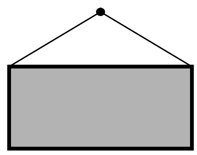
(A) 4,2 m (B) 6,3 m (C) 12,6 m (D) 25,2 m (E) 37,8 m

- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine Großmutter, ihre Tochter und ihre Enkelin hatten alle im Februar Geburtstag. Nun können sie sagen, dass sie in Summe 100 Jahre alt sind, und dass das Alter jeder Person eine Potenz von 2 ist. In welchem Jahr wurde die Enkelin geboren?

(A) 1998 (B) 2006 (C) 2010 (D) 2012 (E) 2013

12. Paul hängt rechteckige Bilder an eine Wand. Für jedes Bild schlägt er 2,5 m über dem Fußboden einen Nagel in die Wand. An jedem Bild bringt er an den oberen beiden Ecken eine Schnur mit einer Gesamtlänge von 2 m an (siehe Abbildung).
Bei welchem Bildformat (Breite in cm $\times$ Höhe in cm) ist die untere Kante dem Boden am nächsten?

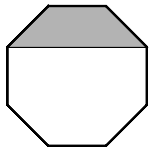


(A) 60×40 (B) 120×50 (C) 120×90 (D) 160×60 (E) 160×100

13. In einer Wohngemeinschaft, in der sechs Mädchen wohnen, gibt es zwei Badezimmer. Jeden Morgen ab 7:00 benützen die Mädchen vor dem Frühstück die Bäder, wobei sie sich jeweils 9, 11, 13, 18, 22 und 23 Minuten durchgehend alleine in einem der beiden Badezimmer aufhalten. Wann können alle sechs Mädchen frühestens gemeinsam frühstücken?

(A) 7:48 (B) 7:49 (C) 7:50 (D) 7:51 (E) 8:03

14. Der grau gefärbte Flächenanteil des regelmäßigen Achtecks beträgt 3 cm^2.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Achtecks?



(A) $8+4\sqrt{2}$ cm^2 (B) 9 cm^2 (C) $8\sqrt{2}$ cm^2 (D) 12 cm^2 (E) 14 cm^2

15. Beim größten Krokodil in einem Zoo macht die Länge des Schwanzes ein Drittel der Gesamtlänge des Krokodils aus. Der Kopf ist 93 cm lang und hat damit ein Viertel der Länge des Krokodils ohne Schwanz. Wie lang ist das Krokodil?

(A) 558 cm (B) 496 cm (C) 490 cm (D) 372 cm (E) 186 cm

16. Addiert man die Zahlen von gegenüberliegenden Seiten dieses "Spezialwürfels", erhält man dreimal dieselbe Summe. Die Zahlen auf den nicht sichtbaren Seiten dieses Würfels sind Primzahlen. Welche Zahl liegt auf der gegenüberliegenden Seite von 14?

(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23

17. Anna geht eine Strecke von 8 km mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h. Dann läuft sie eine Zeit lang mit 8 km/h. Wie viele Minuten muss sie laufen, damit sie insgesamt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 5 km/h unterwegs ist?

(A) 15 min (B) 20 min (C) 30 min (D) 35 min (E) 40 min

18. Ein Schachspieler spielt 40 Partien und erreicht dabei 25 Punkte, wobei ein Sieg 1 Punkt, ein Remis $\frac{1}{2}$ Punkt und eine verlorene Partie 0 Punkte zählt. Um wie viele Partien gewinnt er mehr als er verliert?

(A) 5 (B) 7 (C) 10 (D) 12 (E) 15

19. Die Drillinge Meike, Monika und Zita wollten jeweils einen gleich teuren Hut kaufen. Allerdings war das Ersparte von Meike um $\frac{1}{3}$, das von Monika um $\frac{1}{4}$ und jenes von Zita um $\frac{1}{5}$ kleiner als der Kaufpreis eines Hutes. Nachdem diese Hüte um je 9,40 € billiger wurden, legten die Drillinge ihr Erspartes zusammen und jede von ihnen kaufte einen Hut. Es blieb kein Cent übrig. Wie viel hat ein Hut ursprünglich gekostet?

(A) 12 € (B) 16 € (C) 28 € (D) 36 € (E) 112 €

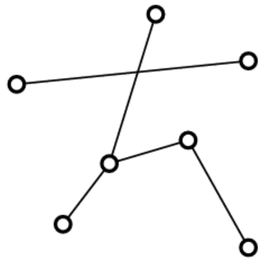
20. p, q und r sind positive ganze Zahlen mit $p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}}=\frac{25}{19}$. Dann ist der Wert des Produktes pqr gleich

(A) 6 (B) 10 (C) 18 (D) 36 (E) 42

- 5 Punkte Beispiele -

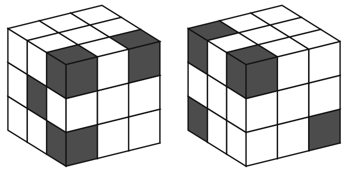
21. In der Gleichung $N \times U \times (M + B + E + R) = 33$ steht jeder Buchstabe für eine andere Ziffer (0, 1, 2, …, 9). Auf wie viele verschiedene Arten können die Buchstaben durch unterschiedliche Ziffern ersetzt werden?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 48 (E) 60



22. In der Abbildung möchte Karl Verbindungsstrecken zwischen je zwei markierten Punkten hinzufügen, sodass von jedem der sieben markierten Punkte dieselbe Anzahl von Verbindungen zu den anderen markierten Punkten geht.
Wie viele Verbindungsstrecken muss er mindestens zeichnen?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) 10



23. In der Abbildung sieht man denselben Würfel von zwei verschiedenen Seiten. Der Würfel besteht aus 27 kleinen Würfeln, die entweder schwarz oder weiß sind.
Wie viele schwarze Würfel gibt es höchstens?

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

24. Auf einer Insel sind Frösche entweder grün oder blau. Die Anzahl der blauen Frösche nimmt um 60% zu, während die Anzahl der grünen um 60% abnimmt. Das hat zur Folge, dass dann das neue Verhältnis der Anzahl der blauen zur Anzahl der grünen Frösche mit dem ursprünglichen Verhältnis der Anzahl der grünen zur Anzahl der blauen Frösche übereinstimmt. Um wie viel Prozent hat sich die Gesamtanzahl der Frösche geändert?

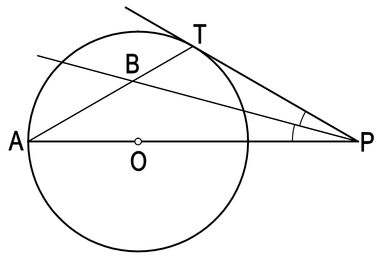
(A) 0% (B) 20% (C) 30% (D) 40% (E) 50%

25. Tom hat einige verschiedene positive ganze Zahlen aufgeschrieben, die kleiner als 101 sind. Ihr Produkt ist nicht durch 18 teilbar. Wie viele Zahlen konnte er höchstens aufschreiben?

(A) 5 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

26. Je drei Eckpunkte eines Würfels bilden ein Dreieck. Wie viele solche Dreiecke gibt es, deren Eckpunkte nicht alle derselben Seitenfläche des Würfels angehören?

(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 40 (E) 48

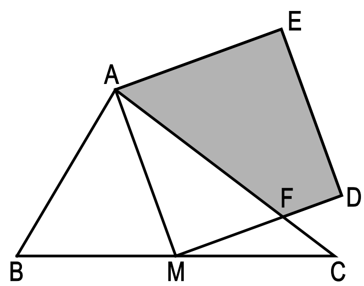


27. *PT* ist die Tangente an einen Kreis mit Mittelpunkt *O*, und *PB* ist die Winkelsymmetrale des Winkels *TPA* (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Winkel *TBP*?

(A) 30° (B) 45° (C) 50° (D) 75°
(E) Das hängt von der Lage des Punktes *P* ab.

28. Wir betrachten die Menge aller siebenstelligen Zahlen, die man erhält, wenn man für jede Zahl alle Ziffern von 1 bis 7 verwendet. Wir schreiben diese Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an und teilen diese Liste genau in der Mitte, sodass zwei gleich große Zahlenmengen entstehen. Wie lautet die letzte Zahl der ersten Menge dieser sortierten Liste?

(A) 1234567 (B) 3765421 (C) 4123567 (D) 4352617 (E) 4376521



29. Im Dreieck *ABC* ist $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm und $BC = 10$ cm. *M* ist der Mittelpunkt der Seite *BC*. *AMDE* ist ein Quadrat und *MD* schneidet *AC* im Punkt *F*.
Wie groß ist die Fläche des Vierecks *AFDE* in cm^2?

(A) $\frac{124}{8}$ (B) $\frac{125}{8}$ (C) $\frac{126}{8}$ (D) $\frac{127}{8}$ (E) $\frac{128}{8}$

30. 2014 Personen stehen nebeneinander in einer Reihe. Jede Person ist entweder ein Lügner (der immer lügt) oder ein Ritter (der immer die Wahrheit sagt).
Jede Person sagt: „Links von mir stehen mehr Lügner als rechts von mir Ritter stehen."
Wie viele Lügner stehen in dieser Reihe?

(A) 0 (B) 1 (C) 1007 (D) 1008 (E) 2014

MATHEMATICS KANGAROO 2014
Austria - 20.4.2014

Group: Junior, Grades: 9-10

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 75 min.
Each correct answer, questions 1.-10.: 3 Points
Each correct answer, questions 11.-20.: 4 Points
Each correct answer, questions 21.-30.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 30 points.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the question number (1 to 30). Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2014" an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen. Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2016 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Vor- und Zuname des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2016 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

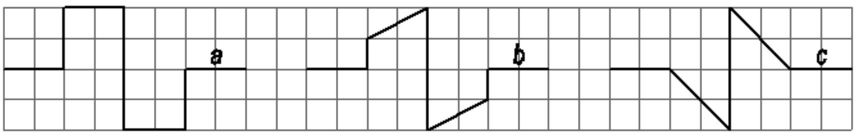
Mathematical Kangaroo 2014
Group Junior (Grades 9. und 10.)
Austria - 20.3.2014

- 3 Point Questions -

1. The Kangaroo competition takes place each year on the third Thursday of March. Which day is the earliest possible date for the competition?
(A) 14/3. (B) 15/3 (C) 20/3 (D) 21/3 (E) 22/3.

2. The container ship MSC Fabiola carries 12500 identically long containers. When put next to each other in a row they make a 75km long container line. Roughly, how long is one container?
(A) 6 m (B) 16 m (C) 60 m (D) 160 m (E) 600 m

3. a, b and c show the lengths of the different of pieces of wire pictured. Which of the following inequalities is correct?

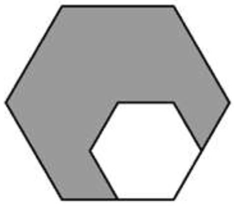


(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<a<c$ (D) $b<c<a$ (E) $c<b<a$

4. Which number is an equal distance from $\frac{2}{3}$ and $\frac{4}{5}$ on the number line?
(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{15}$ (E) $\frac{5}{8}$

5. In the year number 2014, the last digit is bigger than the sum of the three other digits. How many years ago did this last happen?
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

6. The side lengths of the large regular hexagon are twice the length of those of the small regular hexagon. What is the area of the large hexagon if the small hexagon has an area of 4 cm^2?
(A) 16 cm^2 (B) 14 cm^2 (C) 12 cm^2 (D) 10 cm^2 (E) 8 cm^2



7. Which statement is definitely correct if the following statement is false: „Everybody has solved more than 20 problems.“
(A) Nobody has solved more than 20 problems.
(B) Somebody has solved less than 21 problems.
(C) Everybody has solved less than 21 problems.
(D) Somebody has solved exactly 20 problems.
(E) Somebody has solved more than 20 problems.

8. Tom draws a square on the co-ordinate plane. One diagonal sits on the x-axis. Its endpoints are (–1,0) and (5,0). Which of the following points is also a corner point of the square?
(A) (2,0) (B) (2,3) (C) (2,–6) (D) (3,5) (E)(3,–1)

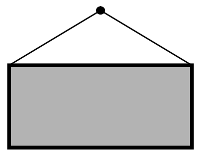
9. In Kangaroo city there are m men, f women and k children. It is true that $m : f = 2 : 3$ and $f : k = 8 : 1$.
In what ratio is the number of adults (men and women) to the number of children?
(A) 5 : 1 (B) 10 : 3 (C) 13 : 1 (D) 12 : 1 (E) 40 : 3

10. The circumference of the large wheel measures 4·2m, and that of the small wheel 0·9m. To begin with the valves on both wheels are at the lowest point, and then the bicycle moves to the left. After a few metres both valves are again at the lowest point at the same time. After how many metres does this happen for the first time?
(A) 4·2 m (B) 6·3 m (C) 12·6 m (D) 25·2 m (E) 37·8 m

- 4 Point Questions -

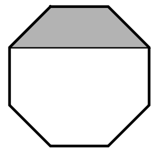
11. A Grandmother, her daughter and her Granddaughter each have their birthday in February. They can say that they are in total 100 years old and that each persons age is a power of 2. In which year was the granddaughter born?
(A) 1998 (B) 2006 (C) 2010 (D) 2012 (E) 2013

12. Paul hangs rectangular pictures on a wall. For each picture he hammers a nail into the wall 2·5m above the floor. He ties a 2m long string to the upper corners of each picture (see diagram). which picture size (width in cm × height in cm) has its lower edge nearest to the floor?
(A) 60×40 (B) 120×50 (C) 120×90 (D) 160×60 (E) 160×100



13. In a shared apartment where six girls live there are 2 bathrooms. Each morning from 7:00 the girls use the bathrooms before breakfast whereby they are 9, 11, 13, 18, 22 and 23 minutes respectively, constantly alone in one of the two bathrooms. What is the earliest time that all six girls can have breakfast together?
(A) 7:48 (B) 7:49 (C) 7:50 (D) 7:51 (E) 8:03

14. The shaded part of the regular octagon has an area of 3 cm^2. How big is the area of the octagon?
(A) $8+4\sqrt{2}\ cm^2$ (B) $9\ cm^2$ (C) $8\sqrt{2}\ cm^2$ (D) $12\ cm^2$ (E) $14\ cm^2$



15. The length of the tail of the biggest crocodile in a zoo is one third of the total length of the crocodile. The head is 93cm long and makes up one quarter of the length of the crocodile without its tail included. How long is the crocodile?
(A) 558 cm (B) 496 cm (C) 490 cm (D) 372 cm (E) 186 cm

16. If you add the numbers on opposite faces of this special die, you will get the same total three times. The numbers on the hidden faces of the die are prime numbers. Which number is on the face opposite to 14?
(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23

17. Anna walks a distance of 8 km at a speed of 4 km/h. Then she runs for a while at 8 km/h. How many minutes must she run for, so that she has been underway with an overall average speed 5 km/h?
18. (A) 15 min (B) 20 min (C) 30 min (D) 35 min (E) 40 min

19. A chess player plays 40 matches and gains from these 25 points, whereby a win gives 1 point, a draw $\frac{1}{2}$ point, and a loss 0 points. How many more matches does he win than he loses?
(A) 5 (B) 7 (C) 10 (D) 12 (E) 15

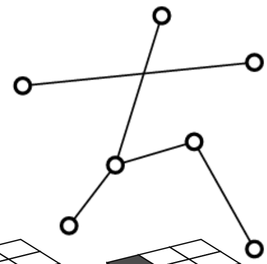
20. The triplets Meike, Monika and Zita each want to buy equally expensive hats. However, Meike's savings were $\frac{1}{3}$, Monika's $\frac{1}{4}$ and those from Zita $\frac{1}{5}$ smaller than the price of a hat. After these hats were reduced by €9·40, the triplets put their savings together and they each bought a hat. Not a single cent was left over. How much had a hat cost originally?
(A) 12 € (B) 16 € (C) 28 € (D) 36 € (E) 112 €

21. p, q und r are positive whole numbers where $p+\dfrac{1}{q+\frac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$. The value of the product pqr is then equal to;
(A) 6 (B) 10 (C) 18 (D) 36 (E) 42

- 5 point questions-

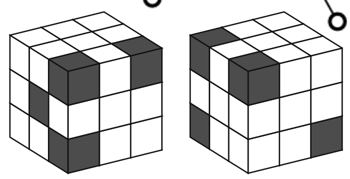
22. In the equation $N \times U \times (M + B + E + R) = 33$ each letter represents a different digit (0, 1, 2, …, 9). In how many different ways can the letters, be replaced by different digits?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 48 (E) 60



23. In the diagram Karl wants to add lines joining two of the marked points at a time, so that each of the seven marked points is joined to the same number of other marked points. What is the minimum number of lines he must draw?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) 10



24. The diagram shows two different views of the same cube. The cube is made from 27 small cubes, which are either white or black. At most how many black cubes are there?

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

25. On an island the frogs are either green or blue. The number of blue frogs increases by 60%, and the number of green frogs decreases by 60%. This has the effect that the new ratio of the number of blue frogs to the number of green frogs, matches the original ratio of the number of green frogs to the number of blue frogs. By what percentage has the total number of frogs changed?

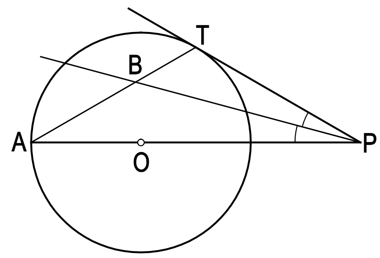
(A) 0% (B) 20% (C) 30% (D) 40% (E) 50%

26. Tom has written down a few different positive whole numbers which are all smaller than 101. The product of the numbers is not divisible by 18. At most how many numbers could he have written down?

(A) 5 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

27. Every group of three vertices of a cube form a triangle. How many such triangles are there, such that the vertices do not all belong to the same face of the cube?

(A) 16 (B) 24 (C) 32 (D) 40 (E) 48



28. *PT* is the tangent to a circle *O*, and *PB* is the angle bisector of the angle *TPA* (see diagram). How big is the angle *TBP*?

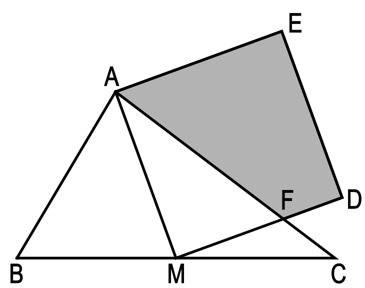
(A) 30° (B) 45° (C) 50° (D) 75°
(E) It depends on the location of point P

29. We consider all 7 digit numbers that result, when for each number you use all the digits from 1 to 7. We write these numbers down in increasing order of size and split the list exactly in the middle, so that two lists of equal size result. What is the last number of the first of these ordered lists?

(A) 1234567 (B) 3765421 (C) 4123567 (D) 4352617 (E) 4376521

30. In triangle *ABC*, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm and $BC = 10$ cm. *M* is the midpoint of the side *BC*. *AMDE* is a square and *MD* intersects *AC* at point *F*.
What is the area of the quadrilateral *AFDE* in cm^2?

(A) $\frac{124}{8}$ (B) $\frac{125}{8}$ (C) $\frac{126}{8}$ (D) $\frac{127}{8}$ (E) $\frac{128}{8}$



31. 2014 people stand next to each other in a row. Each person is either a liar (who always lie) or a knight (who always tell the truth). Each person says "to the left of me are more liars than to the right of me there are knights." How many liars are in the row?

(A) 0 (B) 1 (C) 1007 (D) 1008 (E) 2014

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

1. Der Känguruwettbewerb findet jedes Jahr am dritten Donnerstag im März statt. Welcher Tag ist der frühestmögliche Termin für den Bewerb?

(A) 14.3. **(B) 15.3.** (C) 20.3. (D) 21.3. (E) 22.3.

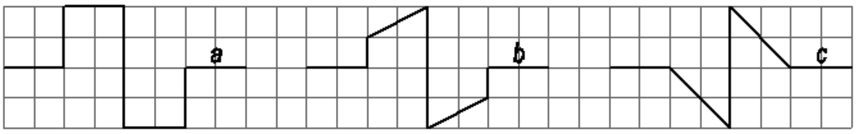
Der erste Donnerstag im März kann frühestens auf den 1. März fallen. Der dritte Donnerstag im März ist 2 · 7 = 14 Tage später. 1 + 14 = 15, daher ist der frühestmögliche Termin für den Bewerb der 15.3.

2. Das Containerschiff MSC Fabiola ist mit 12500 gleich langen Containern beladen. Aneinander gereiht ergeben sie eine 75 km lange Containerschlange. Wie lang ist ein Container ungefähr?

(A) 6 m (B) 16 m (C) 60 m (D) 160 m (E) 600 m

$75 \text{ km} = 75000 \text{ m}$; $75000 : 12500 = 750 : 125 = 6$. Jeder Container ist ungefähr 6 m lang.

3. Mit a, b und c werden die Längen der abgebildeten unterschiedlich geformten Drahtstücke bezeichnet. Welche der folgenden Ungleichungen ist richtig?



(A) $a<b<c$ (B) $a<c<b$ (C) $b<a<c$ (D) $b<c<a$ **(E)** $c<b<a$

4. Welche Zahl ist auf der Zahlengeraden gleich weit von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ entfernt?

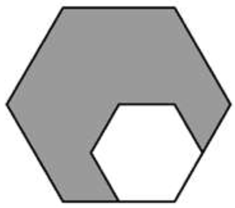
(A) $\frac{11}{15}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{6}{15}$ (E) $\frac{5}{8}$

Die gesuchte Zahl m ist größer als $\frac{2}{3}$ und kleiner als $\frac{4}{5}$. Daher erfüllt sie die Gleichung $m-\frac{2}{3}=\frac{4}{5}-m$. Umformen dieser Gleichung ergibt $m=\frac{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}{2}=\frac{10+12}{30}=\frac{11}{15}$; m kann also als Mittelwert („arithmetisches Mittel") von $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ berechnet werden.

5. In der Jahreszahl 2014 ist die letzte Ziffer größer als die Summe der drei anderen Ziffern. Vor wie vielen Jahren war dies das letzte Mal der Fall?

(A) 1 (B) 3 **(C) 5** (D) 7 (E) 11

Für jede Jahreszahl ab 2010, die vor 2014 liegt, ist die letzte Ziffer E nicht größer als die Summe $T+H+Z=2+0+1=3$ ihrer drei anderen Ziffern.
Für die Jahreszahl 2009 gilt hingegen $2+0+0=2<9$; damals, also vor 5 Jahren, war die letzte Ziffer der Jahreszahl größer als die Summe der drei anderen Ziffern.



6. Die Seiten des großen regelmäßigen Sechsecks sind doppelt so lang wie jene des kleinen regelmäßigen Sechsecks. Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Sechsecks, wenn das kleine eine Fläche von 4 cm^2 hat?

(A) 16 cm^2 (B) 14 cm^2 (C) 12 cm^2 (D) 10 cm^2 (E) 8 cm^2

Verhalten sich in zwei ähnlichen Figuren die Längen entsprechender Strecken wie $1:k$, so verhalten sich ihre Flächen wie $1:k^2$. Weil die Seiten des großen Sechsecks 2-mal so lang sind wie die des kleinen Sechsecks, ist die Fläche des großen Sechsecks 4-mal so groß sind wie die des kleinen Sechsecks, beträgt also 4 · 4 cm² = 16 cm².

7. Welche Aussage ist sicher richtig, wenn folgende Aussage falsch ist: „Jeder hat mehr als 20 Probleme gelöst.“

(A) Niemand hat mehr als 20 Probleme gelöst.
(B) Jemand hat weniger als 21 Probleme gelöst.
(C) Jeder hat weniger als 21 Probleme gelöst.
(D) Jemand hat genau 20 Probleme gelöst.
(E) Jemand hat mehr als 20 Probleme gelöst.

Wenn die Aussagen „Jeder hat mehr als 20 Probleme gelöst“ falsch ist, muss es mindestens eine Person geben, die nicht mehr als 20 (d.h. höchstens 20) Probleme und damit weniger als 21 Probleme gelöst hat. (Das müssen aber nicht genau 20 Probleme gewesen sein!)

8. Tom zeichnet ein Quadrat in ein Koordinatensystem ein. Eine Diagonale liegt auf der x-Achse. Ihre Endpunkte sind $(-1|0)$ und $(5|0)$. Welcher der folgenden Punkte ist auch ein Eckpunkt dieses Quadrats?

(A) $(2|0)$ **(B) $(2|3)$** (C) $(2|-6)$ (D) $(3|5)$ (E) $(3|-1)$

In jedem Quadrat stehen die Diagonalen normal zu einander, beide Diagonalen sind gleich lang und der Diagonalenschnittpunkt halbiert beide Diagonalen.
Für das gegeben Quadrat ist die Diagonalenlänge $5 - (-1) = 6$, der Mittelpunkt ist $(2|0)$. Die fehlenden Eckpunkte haben die Koordinaten $(2|-3)$ und $(2|3)$.

9. In Kängurucity gibt es m Männer, f Frauen und k Kinder. Es gilt $m : f = 2 : 3$ und $f : k = 8 : 1$.
In welchem Verhältnis steht die Anzahl der Erwachsenen (Männer und Frauen) zur Anzahl der Kinder?

(A) 5 : 1 (B) 10 : 3 (C) 13 : 1 (D) 12 : 1 **(E) 40 : 3**

Es gilt $m : f = 2 : 3 = 16 : 24$ und $f : k = 8 : 1 = 24 : 3$. Daraus folgt $m : f : k = 16 : 24 : 3$. Weil die Anzahl der Erwachsenen durch $m + f$ gegeben ist, ist das gesuchte Verhältnis $(m+f) : k = (16+24) : 3 = 40 : 3$.

10. Der Umfang des großen Rades beträgt 4,2 m, jener des kleinen 0,9 m. Zu Beginn sind die Ventile der beiden Räder am tiefsten Punkt; dann bewegt sich das Fahrrad nach links. Nach einigen Metern sind beide Ventile wieder gleichzeitig am tiefsten Punkt. Nach wie vielen Metern ist dies zum ersten Mal der Fall?

(A) 4,2 m (B) 6,3 m **(C) 12,6 m** (D) 25,2 m (E) 37,8 m

Die Umfänge der beiden Räder betragen 42 dm beziehungsweise 9 dm. Weil bis zu dem Zeitpunkt, zu dem erstmals wieder beide Ventile gleichzeitig am tiefsten Punkt sind, jedes Rad eine ganzzahlige Anzahl von Umdrehungen gemacht haben muss, ist die bis dahin zurückgelegte Entfernung (in dm) das kleinste gemeinsame Vielfache von 42 und 9. Wegen $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $9 = 3^2$ gilt $\text{kgV}(9, 42) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$. 126 dm = 12,6 m.

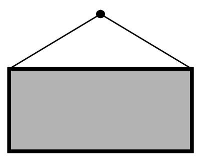
- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine Großmutter, ihre Tochter und ihre Enkelin hatten alle im Februar Geburtstag. Nun können sie sagen, dass sie in Summe 100 Jahre alt sind, und dass das Alter jeder Person eine Potenz von 2 ist. In welchem Jahr wurde die Enkelin geboren?

(A) 1998 (B) 2006 **(C) 2010** (D) 2012 (E) 2013

Die als Alter in Frage kommenden Potenzen von 2 sind 1, 2, 4, 8, 16, 32 und 64. Um durch drei dieser Zahlen die Summe 100 zu erreichen, muss 64 (als Alter der Großmutter) unter den drei Zahlen vorkommen. Die Summe der anderen zwei Summanden ist daher 36, also muss auch 32 (als Alter der Tochter) verwendet werden. Die Enkelin ist daher (seit Februar 2014) 4 Jahre alt und wurde 2010 geboren.

12. Paul hängt rechteckige Bilder an eine Wand. Für jedes Bild schlägt er 2,5 m über dem Fußboden einen Nagel in die Wand. An jedem Bild bringt er an den oberen beiden Ecken eine Schnur mit einer Gesamtlänge von 2 m an (siehe Abbildung).
Bei welchem Bildformat (Breite in cm × Höhe in cm) ist die untere Kante dem Boden am nächsten?



(A) 60 × 40 (B) 120 × 50 **(C) 120 × 90** (D) 160 × 60 (E) 160 × 100

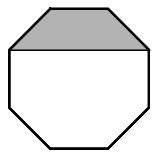
In jedem Fall bilden die (gespannte) Schnur und die Oberkante des Bildes ein gleichschenkliges Dreieck. Die Basislänge ist jeweils die Breite des Bildes, die Schenkellänge stimmt mit der halben Länge der Schnur überein, beträgt also $1m = 10dm$.
Die untere Kante des Bildes ist dem Boden am nächsten, wenn ihr Abstand vom Nagel am größten ist. Diesen Abstand erhält man als Summe der Höhe des Bildes und der Höhe des gleichschenkligen Dreiecks oberhalb des Bildes.
Für die Bildformate (D) und (E) (Breite 16 dm) ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks $\sqrt{10^2 - 8^2} = 6dm$. Format (E) ist höher als (D) und liefert den Abstand 10 dm + 6 dm = 16 dm.
Für die Bildformate (B) und (C) (Breite 12 dm) ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8dm$. Format (C) ist höher als (B) und liefert den Abstand 9 dm + 8 dm = 17 dm.
Für Format (A) ist die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks kleiner als 10 dm (= halbe Schnurlänge), der Abstand also kleiner als 10 dm + 4 dm = 14 dm.

13. In einer Wohngemeinschaft, in der sechs Mädchen wohnen, gibt es zwei Badezimmer. Jeden Morgen ab 7:00 benützen die Mädchen vor dem Frühstück die Bäder, wobei sie sich jeweils 9, 11, 13, 18, 22 und 23 Minuten durchgehend alleine in einem der beiden Badezimmer aufhalten. Wann können alle sechs Mädchen frühestens gemeinsam frühstücken?

(A) 7:48 **(B) 7:49** (C) 7:50 (D) 7:51 (E) 8:03

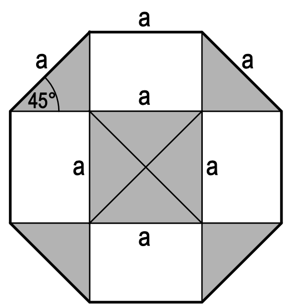
Insgesamt werden die beiden Badezimmer 96 Minuten benützt, daher ist (mindestens) eines der beiden Badezimmer mindestens 48 Minuten besetzt. Es ist unter der 6 gegebenen „Toilettenzeiten“ nicht möglich, eine Auswahl derart zu treffen, dass sich die Summe 48 Minuten ergibt, hingegen gilt 9 + 18 + 22 = 49. Daher kann das letzte Mädchen aus dem länger benützten Bad um 7:49 (aber nicht früher) zum Frühstück kommen.

14. Der grau gefärbte Flächenanteil des regelmäßigen Achtecks beträgt 3 cm^2.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Achtecks?



(A) $8+4\sqrt{2}$ cm^2 (B) 9 cm^2 (C) $8\sqrt{2}$ cm^2 **(D) 12 cm^2** (E) 14 cm^2

Wie man aus der rechts stehenden Abbildung sieht, setzt sich die 8-ecks-Fläche aus 8 kongruenten gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecken und 4 kongruenten Rechtecken zusammen. Das grau gefärbte Trapez aus der Angabe besteht aus 2 solchen Dreiecken und einem Rechteck und hat den Flächeninhalt 3 cm^2.
Damit hat das Achteck genau das Vierfache nämlich 12 cm^2 als Flächeninhalt.

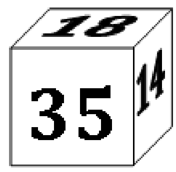


15. Beim größten Krokodil in einem Zoo macht die Länge des Schwanzes ein Drittel der Gesamtlänge des Krokodils aus. Der Kopf ist 93 cm lang und hat damit ein Viertel der Länge des Krokodils ohne Schwanz. Wie lang ist das Krokodil?

(A) 558 cm (B) 496 cm (C) 490 cm (D) 372 cm (E) 186 cm

Ohne Schwanz ist das Krokodil 4 · 93 cm = 372 cm lang; das sind zwei Drittel seiner Gesamtlänge. Daher beträgt die Gesamtlänge des Krokodils $\frac{3}{2} \cdot 372cm = 558cm$.

16. Addiert man die Zahlen von gegenüberliegenden Seiten dieses "Spezialwürfels", erhält man dreimal dieselbe Summe. Die Zahlen auf den nicht sichtbaren Seiten dieses Würfels sind Primzahlen. Welche Zahl liegt auf der gegenüberliegenden Seite von 14?



(A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 **(E) 23**

Unter den sichtbaren Zahlen 14, 18 und 35 kommen gerade und ungerade Zahlen vor. Weil die Summen einander gegenüberliegender Zahlen jeweils gleich sind, müssen also auch unter den gegenüberliegenden Primzahlen gerade und ungerade vorkommen. Einzige gerade Primzahl ist aber 2, also steht 2 der einzigen in der Abbildung sichtbaren ungeraden Zahl 35 gegenüber, und die dreimal auftretende Summe ist 35 + 2 = 37. Daher liegt gegenüber der Zahl 14 die Zahl 37 – 14 = 23.

17. Anna geht eine Strecke von 8 km mit einer Geschwindigkeit von 4 km/h. Dann läuft sie eine Zeit lang mit 8 km/h. Wie viele Minuten muss sie laufen, damit sie insgesamt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 5 km/h unterwegs ist?

(A) 15 min (B) 20 min (C) 30 min (D) 35 min **(E) 40 min**

Anna legt einen Weg von 8 km + 8·t km zurück. (t ist die gesuchte Zeit). Insgesamt ist sie damit 2 Std. + t Std. unterwegs. Ansatz für die Durchschnittsgeschwindigkeit: $\frac{8+8 \cdot t}{2+t}=5$. Aus dieser Gleichung erhält man $t=\frac{2}{3}$ (in h). $\frac{2}{3}\,\text{h}=40$ min.

18. Ein Schachspieler spielt 40 Partien und erreicht dabei 25 Punkte, wobei ein Sieg 1 Punkt, ein Remis $\frac{1}{2}$ Punkt und eine verlorene Partie 0 Punkte zählt. Um wie viele Partien gewinnt er mehr als er verliert?

(A) 5 (B) 7 **(C) 10** (D) 12 (E) 15

Mit gleich vielen Siegen wie Niederlagen in 40 Partien hätte der Schachspieler genau 20 Punkte erreicht.
Ein besseres Ergebnis ergibt sich
i) durch ein Remis statt einer Niederlage ($+\frac{1}{2}$ Punkt), ii) durch einen Sieg statt eines Remis ($+\frac{1}{2}$ Punkt),
iii) durch einen Sieg statt einer Niederlage ($+1$ Punkt).
Die Differenz von gewonnenen und verlorenen Spielen vergrößert sich in den ersten beiden Fällen um 1, im dritten Fall um 2. Ein halber Punkt mehr bedeutet in jedem Fall eine um 1 größere Differenz von gewonnenen und verlorenen Spielen. Insgesamt 25 Punkte (und damit 5 Punkte mehr als bei identischer Anzahl von Siegen und Niederlagen) erzielt der Spieler also, wenn er 10 Spiele mehr gewinnt als verliert.

19. Die Drillinge Meike, Monika und Zita wollten jeweils einen gleich teuren Hut kaufen. Allerdings war das Ersparte von Meike um $\frac{1}{3}$, das von Monika um $\frac{1}{4}$ und jenes von Zita um $\frac{1}{5}$ kleiner als der Kaufpreis eines Hutes. Nachdem diese Hüte um je 9,40 € billiger wurden, legten die Drillinge ihr Erspartes zusammen und jede von ihnen kaufte einen Hut. Es blieb kein Cent übrig. Wie viel hat ein Hut ursprünglich gekostet?

(A) 12 € (B) 16 € (C) 28 € **(D) 36 €** (E) 112 €

Bezeichnen wir den ursprünglichen Preis eines Hutes (in €) mit x, dann ist der Betrag, der den Drillingen zum Kauf fehlt, $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}=\frac{47x}{60}$. Dieser Betrag entspricht genau der Ersparnis beim Kauf der drei ermäßigten Hüte. Das ergibt die Gleichung $\frac{47x}{60}=3\cdot 9{,}4$. Daraus folgt $x=\frac{3\cdot 9{,}4\cdot 60}{47}=36$.

20. p , q und r sind positive ganze Zahlen mit $p+\dfrac{1}{q+\frac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$. Dann ist der Wert des Produktes pqr gleich

(A) 6 (B) 10 **(C) 18** (D) 36 (E) 42

$\frac{25}{19}=1+\frac{6}{19}$, also gilt p = 1 und $q+\frac{1}{r}=\frac{19}{6}=3+\frac{1}{6}$. Daraus folgt q = 3, r = 6 und letztlich $pqr = 1\cdot 3\cdot 6 = 18$

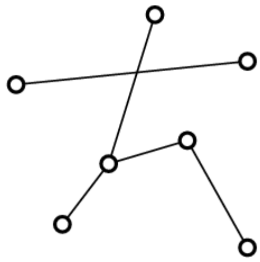
- 5 Punkte Beispiele -

21. In der Gleichung $N\times U\times(M+B+E+R)=33$ steht jeder Buchstabe für eine andere Ziffer (0, 1, 2, …, 9).
Auf wie viele verschiedene Arten können die Buchstaben durch unterschiedliche Ziffern ersetzt werden?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 **(D) 48** (E) 60

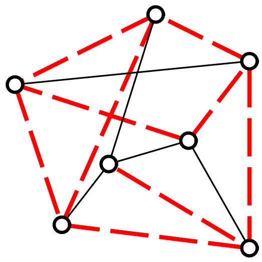
Die Zahl 33 enthält den Primfaktor 11. Wegen $N, U < 10$ gilt also $11 = M+B+E+R$ und $N\cdot U=3$.
Daher werden die Ziffern 1 und 3 für die Buchstaben N und U verwendet (2 Möglichkeiten).
Weil die Buchstaben durch unterschiedliche Ziffern zu ersetzen sind, stehen nach Bestimmung von N und U für die restlichen vier Buchstaben *M*, *B*, *E* und *R* nur mehr die Ziffern 0, 2, 4, 5, 6, … zur Verfügung, die größte dieser vier Zahlen muss also mindestens 5 sein. Weil aber schon 0 + 2+ 4 +5 = 11 gilt, folgt aus $11 = M+B+E+R$, dass genau die vier Ziffern 0, 2, 4, und 5 für die Buchstaben *M*, *B*, *E* und *R* einzusetzen sind. Dafür gibt es $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. In Verbindung mit den 2 Möglichkeiten für die Auswahl von *N* und *U* können die Buchstaben also auf $2\cdot 24 = 48$ Arten durch unterschiedliche Ziffern ersetzt werden.

22. In der Abbildung möchte Karl Verbindungsstrecken zwischen je zwei markierten Punkten hinzufügen, sodass von jedem der sieben markierten Punkte dieselbe Anzahl von Verbindungen zu den anderen markierten Punkten geht.
Wie viele Verbindungsstrecken muss er mindestens zeichnen?

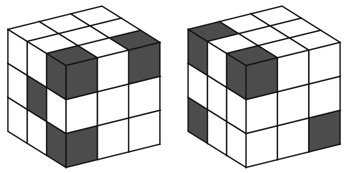


(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D) 9** (E) 10

Wird jeder der sieben markierten Punkte mit *n* anderen markierten Punkten verbunden, dann gibt es 7*n* Verbindungsstrecken. Jede dieser Strecken verbindet genau 2 Punkte, daher muss
n gerade sein. Weil es in der gegebenen Abbildung einen Punkt gibt, der schon mit 3 anderen Punkten verbunden ist, muss n ≥ 4 sein. Die Abbildung zeigt, dass das durch Einzeichnen von 9 Strecken möglich ist.

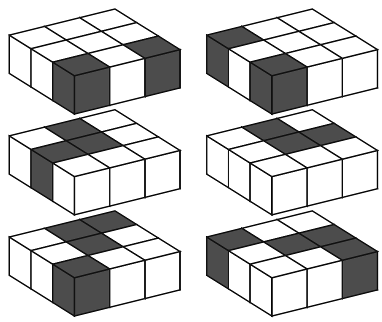


23. In der Abbildung sieht man denselben 3 × 3 × 3 Würfel von zwei verschiedenen Seiten. Der Würfel besteht aus 27 kleinen Würfeln, die entweder schwarz oder weiß sind. Wie viele kleine schwarze Würfel gibt es höchstens?



(A) 5 (B) 7 (C) 8 **(D) 9** (E) 10

Unter den 8 Würfeln in den Ecken des 3 × 3 × 3 Würfels gibt es ein nur genau ein Paar weißer Würfel, das an den Enden einer Raumdiagonale des Würfels liegt (linke Abbildung: rechts unten, links oben; rechte Abbildung: vorne unten, hinten oben). An den Enden des anderen drei Raumdiagonalen liegt jeweils mindestens ein schwarzer Würfel (linke Abbildung: rechte Seitenfläche; rechte Abbildung: linke Seitenfläche). Zwei schwarzen „Eckwürfeln" liegt ein weißer Eckwürfel gegenüber (siehe linke Abbildung), darüber hinaus gibt es eine Raumdiagonale des 3 × 3 × 3 Würfels mit zwei schwarzen Würfeln an den Enden (rechte Abbildung). Daher ist der in der linken Abbildung nicht sichtbare Würfel in der hinteren unteren Ecke schwarz, und die rechte Abbildung zeigt gegenüber der linken Abbildung eine um 90° um eine senkrechte Achse verdrehte Ansicht des 3 × 3 × 3 Würfels.
Von den 9 kleinen Würfeln der obersten Schicht sind 2 schwarz und 7 weiß. Alle sind in beiden Ansichten sichtbar.
Von den Würfeln in der mittleren und der unteren Schicht sind in jeder der beiden Ansichten genau 5 sichtbar, jeweils 7 der 9 Würfel in jeder der beiden Schichten sind in mindestens einer Ansicht sichtbar.
In der mittleren Schicht ist von diesen da oder dort sichtbaren Würfeln nur einer schwarz, 6 sind weiß. Daher enthält die mittlere Schicht höchstens 3 schwarze Würfel.
In der unteren Schicht sieht man in mindestens einer Ansicht 5 weiße und 2 schwarze Würfel; der in der linken Ansicht sichtbare (vorn liegende) schwarze Würfel liegt in der rechten Ansicht links. Daher sind höchstens 4 Würfel der untersten Schicht schwarz. Daher gibt es höchstens 9 schwarze Würfel.



24. Auf einer Insel sind Frösche entweder grün oder blau. Die Anzahl der blauen Frösche nimmt um 60% zu, während die Anzahl der grünen um 60% abnimmt. Das hat zur Folge, dass dann das neue Verhältnis der Anzahl der blauen zur Anzahl der grünen Frösche mit dem ursprünglichen Verhältnis der Anzahl der grünen zur Anzahl der blauen Frösche übereinstimmt. Um wie viel Prozent hat sich die Gesamtanzahl der Frösche geändert?

(A) 0% **(B) 20%** (C) 30% (D) 40% (E) 50%

Wir bezeichnen die ursprüngliche Anzahl der blauen Frösche mit *b*, die ursprüngliche Anzahl der grünen Frösche mit *g*.
Nach der Veränderung gibt es 1,6·*b* blaue Frösche und 0,4·*g* grüne Frösche, und es gilt $\frac{1{,}6\cdot b}{0{,}4\cdot g}=\frac{g}{b}$, also $g^2=4b^2$ und daher $g=2b$.
Damit war die Gesamtanzahl aller Frösche ursprünglich $3b$. Sie ändert sich auf $1{,}6b+0{,}4g=1{,}6b+0{,}8b=2{,}4b$, nimmt also um $0{,}6b$, also 20% ab.

25. Tom hat einige verschiedene positive ganze Zahlen aufgeschrieben, die kleiner als 101 sind. Ihr Produkt ist nicht durch 18 teilbar. Wie viele Zahlen konnte er höchstens aufschreiben?

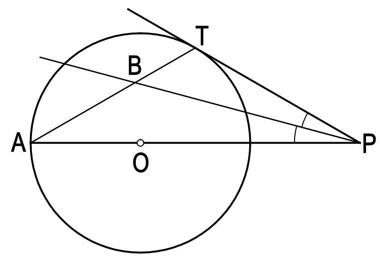
(A) 5 (B) 17 **(C) 68** (D) 69 (E) 90

Schreibt Tom nur ungerade positive ganze Zahlen kleiner als 101 auf, dann ist das Produkt dieser Zahlen ungerade und nicht durch 18 teilbar. So könnte er höchstens 50 Zahlen aufschreiben; die 51. Zahl wäre gerade und ergäbe zusammen mit der dann notwendigerweise schon ausgewählten ungeraden Zahl 9 ein durch 18 teilbares Produkt.
Darüber hinaus lässt sich ein durch 18 teilbares Produkt auch dadurch vermeiden, dass er zunächst keine Zahl anschreibt, die durch 3 teilbar ist. Von den 100 in Betracht kommenden positiven ganzen Zahlen kleiner als 100 sind 33 (nämlich $3 = 1 \cdot 3$, $6 = 2 \cdot 3$, …, $99 = 33 \cdot 3$) durch 3 teilbar, die übrigen 67 sind es nicht. Neben diesen 67 Zahlen kann Tom noch genau eine durch 3, aber nicht durch 9 teilbare Zahl aufschreiben, ohne dass sich ein durch 18 teilbares Produkt ergibt. Daher kann er höchstens 68 Zahlen aufschreiben.

26. Je drei Eckpunkte eines Würfels bilden ein Dreieck. Wie viele solche Dreiecke gibt es, deren Eckpunkte nicht alle derselben Seitenfläche des Würfels angehören?

(A) 16 (B) 24 **(C) 32** (D) 40 (E) 48

Jedes derartige Dreieck hat entweder zwei Eckpunkte in der Basisfläche des Würfel und einen in der Deckfläche (Typ 1) oder eine Ecke in der Basis und zwei Ecken in der Deckflächen (Typ 2). Von beiden Arten gibt es gleich viele, weil es zu jedem Dreieck der ersten Art ein symmetrisch liegendes der zweiten Art gibt.
Wir betrachten Dreiecke mit 2 Ecken in der Basis (Typ 1). Sind die beiden Ecken Endpunkte einer Würfelkante, so kann der dritte Eckpunkt nur einer der beiden Endpunkte der gegenüber liegenden Würfelkante sein. Es gibt also genau zwei Möglichkeiten für jede der vier Basiskanten, also 8 derartige Dreiecke. Sind die beiden Ecken Endpunkte einer der zwei Diagonale der Basis, so kann als dritter Eckpunkt jede der vier Ecken der Deckfläche gewählt werden. Daher gibt es auch 8 derartige Dreiecke.
Somit gibt es 16 Dreiecke vom Typ 1 und 16 Dreiecke vom Typ 2, also insgesamt 32 Dreiecke, deren Eckpunkte nicht alle derselben Seitenfläche des Würfels angehören.



27. *PT* ist die Tangente an einen Kreis mit Mittelpunkt *O*, und *PB* ist die Winkelsymmetrale des Winkels *TPA* (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Winkel *TBP*?

(A) 30° **(B) 45°** (C) 50° (D) 75° (E) Das hängt von der Lage des Punktes *P* ab.

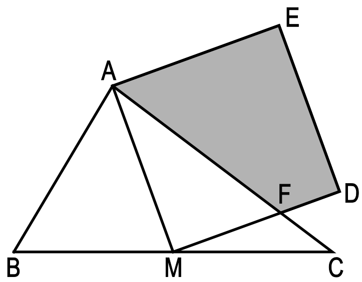
Es sei $\angle TPA = 2\alpha$. Weil die Tangente *TP* normal zu Berührradius *OT* steht, folgt daraus $\angle POT = 90° - 2\alpha$, $\angle TOA = 90° + 2\alpha$. Weil das Dreieck ATO gleichschenkelig ist, folgt daraus $\angle OAT = \angle ATO = 45° - \alpha$ und $\angle BTP = \angle ATP = \angle ATO + \angle OTP = 45° - \alpha + 90° = 135° - \alpha$. Über die Winkelsumme im Dreieck *BTP* ergibt sich schließlich $\angle TBP = 45°$.

28. Wir betrachten die Menge aller siebenstelligen Zahlen, die man erhält, wenn man für jede Zahl alle Ziffern von 1 bis 7 verwendet. Wir schreiben diese Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an und teilen diese Liste genau in der Mitte, sodass zwei gleich große Zahlenmengen entstehen. Wie lautet die letzte Zahl der ersten Menge dieser sortierten Liste?

(A) 1234567 (B) 3765421 (C) 4123567 (D) 4352617 **(E) 4376521**

Unter den betrachteten siebenstelligen Zahlen gibt es gleich viele mit den Anfangsziffern 1 und 7, 2 und 6 sowie 3 und 5. Daher hat die gesuchte Zahl die vorderste Ziffer 4. Unter den betrachten siebenstelligen Zahlen mit vorderster Ziffer 4 gibt es wieder gleich viele mit zweiter Ziffer 1 und 7, 2 und 6 sowie 3 und 5. Daher ist die gesuchte Zahl die größte mögliche Zahl, die mit der Ziffernfolge 43 beginnt, also 4376521.

29. Im Dreieck ABC ist $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm und $BC = 10$ cm. M ist der Mittelpunkt der Seite BC. $AMDE$ ist ein Quadrat und MD schneidet AC im Punkt F.
Wie groß ist die Fläche des Vierecks $AFDE$ in cm^2?



(A) $\frac{124}{8}$ **(B) $\frac{125}{8}$** (C) $\frac{126}{8}$ (D) $\frac{127}{8}$ (E) $\frac{128}{8}$

Wegen $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 100$ ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck. Daher ist M zugleich Umkreismittelpunkt, also gilt $MA = MB = MC = \frac{1}{2} \cdot BC = 5$ cm. Daher ist das Dreieck ACM gleichschenklig, und das Dreieck MFA ist wegen $\angle MAF = \angle ACM$, $\angle FMA = \angle BAC = 90°$ ist ähnlich zum Dreieck ABC. Daraus folgt

$MF : MA = AB : AC$, also $MF = \frac{MF \cdot MB}{AC} = \frac{5 \cdot 6}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$.

Damit erhalten wir als Flächeninhalt der Dreiecks AMF $\frac{15}{4} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{75}{8}$ cm².

Weil $AMDE$ eine Fläche von 25 cm² hat, hat das Viereck $AFDE$ eine Flächen von $\frac{125}{8}$ cm².

30. 2014 Personen stehen nebeneinander in einer Reihe. Jede Person ist entweder ein Lügner (der immer lügt) oder ein Ritter (der immer die Wahrheit sagt).
Jede Person sagt: „Links von mir stehen mehr Lügner als rechts von mir Ritter stehen."
Wie viele Lügner stehen in dieser Reihe?

(A) 0 (B) 1 **(C) 1007** (D) 1008 (E) 2014

Am linken Ende der Reihe steht sicher ein Lügner. Er lügt, da links von dieser Person niemand steht, sodass keinesfalls mehr Lügner links von dieser Person als Ritter rechts von dieser Person stehen können.
Damit steht am rechten Ende der Reihe ein Ritter. Er sagt die Wahrheit, denn während rechts von dieser Person niemand, also sicher kein Ritter steht, steht links mindestens der eine Lügner am linken Ende der Reihe.
Damit steht als zweite Person von links wieder ein Lügner. Er lügt, weil dem einen Lügner zur Linken mindestens ein Ritter zur Rechten gegenüber steht.
Folglich sagt auch die zweite Person von rechts die Wahrheit: Zwei Lügnern zur Linken steht ein Ritter zur Rechten gegenüber.
Analog lässt sich Schritt für Schritt begründen, dass je einem Lügner auf der linken Seite ein Ritter auf der rechten Seite gegenübersteht. Somit sind genau die Hälfte aller Personen Lügner, also stehen 1007 Lügner in der Reihe.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2014
20.3.2014

Kategorie: Student, ab 11. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1.-10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11.-20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21.-30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2014“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2016 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

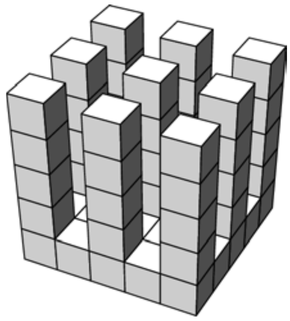
- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Vor- und Zuname des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2016 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -



1. Entfernt man von einem 5×5×5 Würfel einige 1×1×1 Würfel, erhält man den abgebildeten Körper. Dieser besteht aus einigen gleich hohen Säulen, die auf einer gemeinsamen Grundplatte stehen. Wie viele kleine Würfel werden entfernt?
(A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80

2. Heute haben Carmen, Gerda und Sabine Geburtstag. Die Summe ihrer Alter ist jetzt 44. Wie groß wird die Summe ihrer Alter sein, wenn sie zum nächsten Mal eine zweiziffrige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist?
(A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99

3. Wie groß ist der Wert von a^{-3k}, wenn $a^k = \frac{1}{2}$ gilt?
(A) $\frac{1}{8}$ (B) 8 (C) -8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

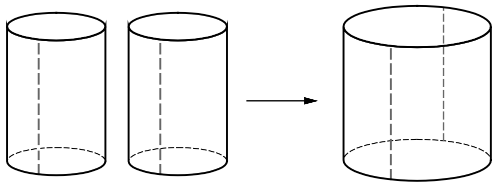
4. In drei verschieden großen Körben liegen insgesamt 48 Bälle. Im kleinsten und größten Korb liegen zusammen doppelt so viele Bälle wie im mittleren. Im kleinsten Korb liegen halb so viele Bälle wie im mittleren. Wie viele Bälle liegen im größten Korb?
(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 32

5. $\dfrac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}=?$
(A) 2^{2011} (B) 2^{2012} (C) 2^{2013} (D) 1 (E) 2

6. Welcher der folgenden Ausdrücke enthält den Faktor $b+1$ nicht?
(A) $2b+2$ (B) b^2-1 (C) b^2+b (D) $-1-b$ (E) b^2+1

7. Wie viele Ziffern hat das Ergebnis der Rechnung $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2$?
(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111

8. Der fesche Fritz hat eine geheime E-Mail-Adresse, die nur vier seiner Freunde kennen. Heute erhielt er auf dieser Adresse acht E-Mails. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?
(A) Fritz hat von jedem Freund zwei E-Mails erhalten.
(B) Fritz kann nicht von einem Freund acht E-Mails erhalten haben.
(C) Fritz hat von jedem Freund mindestens ein E-Mail erhalten.
(D) Fritz hat von einem seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.
(E) Fritz hat von mindestens zwei seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.



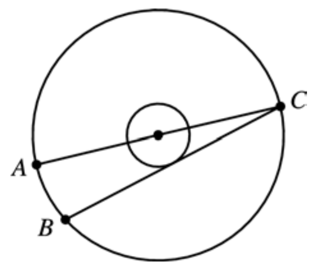
9. Zwei identische Zylindermäntel werden wie abgebildet längs der senkrechten strichlierten Linien aufgeschnitten und dann zu einem großen Zylindermantel zusammengeklebt. Was kann man über das Volumen des resultierenden Zylinders im Vergleich zum Volumen eines kleinen Zylinders sagen?
(A) Es ist 2-mal so groß. (B) Es ist 3-mal so groß.
(C) Es ist π-mal so groß. (D) Es ist 4-mal so groß.
(E) Es ist 8-mal so groß.

10. In der Jahreszahl 2014 sind alle Ziffern verschieden, und die letzte Ziffer ist größer als die Summe der anderen drei Ziffern. Vor wie vielen Jahren war dies zuletzt der Fall?
(A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 395 (E) 485

- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine quaderförmige Schachtel hat die Maße $a \times b \times c$ mit $a < b < c$. Vergrößert man a oder b oder c um 5 cm, vergrößert sich auch das Volumen der Schachtel. Wann ist die Zunahme am größten?
(A) Wenn man a vergrößert. (B) Wenn man b vergrößert.
(C) Wenn man c vergrößert. (D) Die Antwort ist von den Werten von a, b und c abhängig.
(E) Das Volumen vergrößert sich in den Fällen (A), (B) und (C) immer gleich stark.

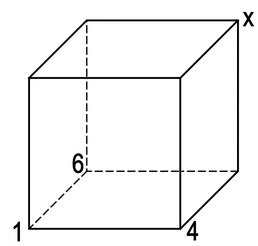
12. Das Siegerteam eines Fußballspiels erhält 3 Punkte und das Verliererteam 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten die Teams je einen Punkt. Vier Teams A, B, C und D spielen ein Turnier. Jedes Team spielt genau einmal gegen jedes andere Team. Am Ende des Turniers hat das Team A 7 Punkte, und die Teams B und C haben je 4 Punkte. Wie viele Punkte hat das Team D?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4



13. Das Verhältnis der Radien zweier konzentrischer Kreise ist 1 : 3. Die Strecke AC ist ein Durchmesser des großen Kreises. Eine Sehne BC des großen Kreises berührt den kleinen Kreis (siehe Abbildung). Die Strecke AB hat die Länge 12. Wie groß ist der Radius des großen Kreises?
(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

14. Wie viele Tripel (a,b,c) ganzer Zahlen mit $a > b > c > 1$ erfüllen die Bedingung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$?
(A) keine (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) unendlich viele

15. Sechs Wochen sind $n!$ ($= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$) Sekunden. n = ?
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

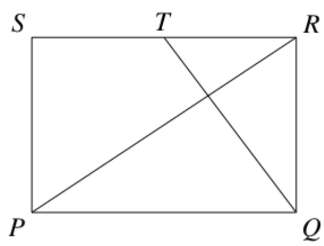


16. Die Eckpunkte eines Würfels werden so mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet, dass die Summe der Zahlen an den vier Eckpunkten einer Seitenfläche für alle Seitenflächen des Würfels gleich ist. Die Zahlen 1, 4 und 6 sind im Bild schon zu sehen. Welche Zahl steht an der Stelle x?
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

17. Auf der Weichkäseverpackung steht: 24 % gesamter Fettanteil. Auf derselben Verpackung steht auch: 64% Fett in der Trockensubstanz. Wie groß ist der Prozentanteil von Wasser in diesem Weichkäse?
(A) 88 % (B) 62,5 % (C) 49 % (D) 42 % (E) 37,5 %

18. Die Funktion $f(x) = ax + b$ erfüllt die Bedingungen $f(f(f(1))) = 29$ und $f(f(f(0))) = 2$. Welchen Wert hat a?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

19. Unter 10 verschiedenen positiven ganzen Zahlen sind genau 5 durch 5 teilbar und genau 7 durch 7 teilbar. Es sei M die größte unter den gegebenen Zahlen. Was ist der kleinstmögliche Wert von M?
(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 (E) ein anderer Wert

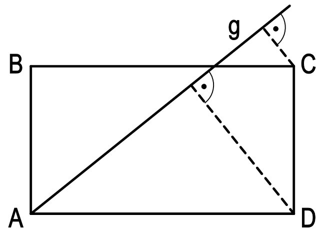


20. $PQRS$ ist ein Rechteck. T ist der Mittelpunkt von RS. QT steht normal zur Diagonale PR. Wie lautet das Verhältnis der Längen PQ : QR?
(A) 2 : 1 (B) $\sqrt{3}$: 1 (C) 3 : 2 (D) $\sqrt{2}$: 1 (E) 5 : 4

- 5 Punkte Beispiele -

21. Es sind a,b,c von Null verschiedene reelle Zahlen und n eine positive ganze Zahl. Es ist bekannt, dass die Zahlen $(-2)^{2n+3}\cdot a^{2n+2}\cdot b^{2n-1}\cdot c^{3n+2}$ und $(-3)^{2n+2}\cdot a^{4n+1}\cdot b^{2n+5}\cdot c^{3n-4}$ dasselbe Vorzeichen haben. Welche der folgenden Aussagen ist sicher wahr?

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

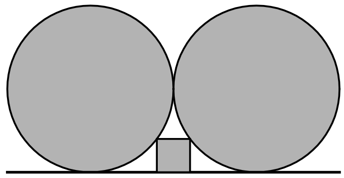


22. Die Gerade g geht durch den Eckpunkt A des abgebildeten Rechtecks $ABCD$. Der Normalabstand von C zu g ist 2 und der von D zu g ist 6. AD ist doppelt so lang wie AB. Bestimme die Länge von AD.

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$

23. Es gibt 9 Kängurus die Greatkangs genannt werden. Diese sind entweder weiß oder schwarz gefärbt. Treffen sich drei Greatkangs zufällig, ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines davon weiß ist, genau zwei Drittel. Wie viele Greatkangs sind schwarz?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8



24. In nebenstehender Abbildung ist folgendes zu sehen: eine Gerade, die gemeinsame Tangente zweier berührender Kreise mit Radius 1 ist, und ein Quadrat mit einer Seite auf der Geraden und je einem Eckpunkt auf den beiden Kreisen. Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) $\frac{1}{2}$

25. Thomas möchte einige paarweise verschiedene positive ganze Zahlen aufschreiben, von denen keine größer als 100 sein soll. Ihr Produkt soll nicht durch 54 teilbar sein. Wie viele Zahlen kann er höchstens aufschreiben?

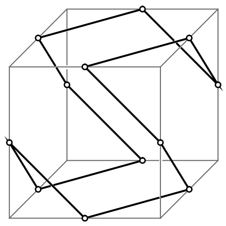
(A) 8 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

26. Zwei regelmäßige Vielecke mit der Seitenlänge 1 liegen auf gegenüberliegenden Seiten der gemeinsamen Seite AB. Eines davon ist das 15-Eck $ABC_1D_1E_1$... und das andere ist das n-Eck $ABC_2D_2E_2$... . Für welchen Wert von n ist der Abstand von C_1 zu C_2 genau 1?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

27. Die Gleichungskette $k=(2014+m)^{\frac{1}{n}}=1024^{\frac{1}{n}}+1$ soll für positive ganze Zahlen k, m, n gelten. Wie viele verschiedene Werte kann m annehmen?

(A) keine (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) unendlich viele



28. Im Bild sehen wir ein geschlossenes Vieleck, dessen Eckpunkte jeweils die Mittelpunkte der Würfelkanten sind. Ein Innenwinkel wird wie üblich als der Winkel definiert, den zwei Vieleckseiten im gemeinsamen Endpunkt einschließen. Wie groß ist die Summe aller Innenwinkel des Vielecks?

(A) 720° (B) 1080° (C) 1200° (D) 1440° (E) 1800°

29. Die Abbildung $f: Z \to Z$ erfüllt die Bedingungen $f(4) = 6$ und $x\cdot f(x) = (x-3)\cdot f(x+1)$. Welchen Wert hat der Ausdruck $f(4)\cdot f(7)\cdot f(10)\cdot\ldots\cdot f(2011)\cdot f(2014)$?

(A) 2013 (B) 2014 (C) $2013\cdot 2014$ (D) 2013! (E) 2014!

30. In den Wäldern eines magischen Inselreichs gibt es drei Tierarten: Löwen, Wölfe und Ziegen. Wölfe können Ziegen fressen und Löwen können sowohl Wölfe als auch Ziegen fressen. Da es sich um ein magisches Inselreich handelt, verwandelt sich ein Wolf, der eine Ziege frisst, in einen Löwen. Ein Löwe, der eine Ziege frisst, verwandelt sich in einen Wolf und ein Löwe, der einen Wolf frisst, verwandelt sich in eine Ziege. Zu Beginn befanden sich 17 Ziegen, 55 Wölfe und 6 Löwen auf der Insel. Nach einiger Zeit ist kein weiteres Fressen mehr möglich. Wie groß ist die maximale Anzahl der Tiere, die sich dann noch auf der Insel befinden können?

(A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35

MATHEMATICS KANGAROO 2014
Austria - 20.4.2014

Group: Student, Grades: 11 onwards

Name:	
School:	
Class:	

Time allowed: 75 min.
Each correct answer, questions 1.-10.: 3 Points
Each correct answer, questions 11.-20.: 4 Points
Each correct answer, questions 21.-30.: 5 Points
Each question with no answer given: 0 Points
Each incorrect answer: Lose ¼ of the points for that question.
You begin with 30 points.

S-VERSICHERUNG
VIENNA INSURANCE GROUP

pwc

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer under the question number (1 to 30).
Write neatly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information on the Kangaroo contest: www.kaenguru.at
If you want to do more in this area, check out the Austrian Mathematical Olympiad. Info at: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2014“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50% der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2016 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

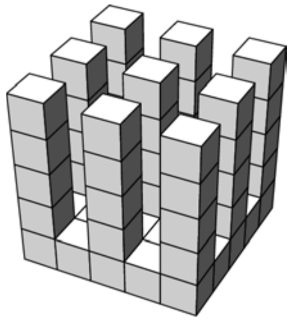
- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Vor- und Zuname des Erziehungsberechtigten, der die Zustimmung erteilt hat
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2016 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

Unterschrift:

Mathematical Kangaroo 2014
Group Student (Grade 11 onwards)
Austria - 20.3.2014

- 3 point questions -



1. If one removes some 1×1×1 cubes from a 5×5×5 cube, you obtain the solid shown. It consists of several equally high pillars that are built upon a common base. How many little cubes have been removed?

(A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80

2. Today is Carmen, Gerda and Sabine's birthday. The sum of their ages is now 44. How big will the sum of their ages be, the next time it is a two-digit number with two equal digits?

(A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99

3. How big is the value of a^{-3k}, if $a^k = \frac{1}{2}$?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) 8 (C) -8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

4. In three differently sized baskets there are 48 balls in total. Together the smallest and the biggest basket hold twice as many balls as the middle one. The smallest basket holds half as many balls as the middle one. How many balls are there in the biggest basket?

(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 32

5. $\dfrac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}=?$

(A) 2^{2011} (B) 2^{2012} (C) 2^{2013} (D) 1 (E) 2

6. For which of the following expressions is $b+1$ not a factor?

(A) $2b+2$ (B) b^2-1 (C) b^2+b (D) $-1-b$ (E) b^2+1

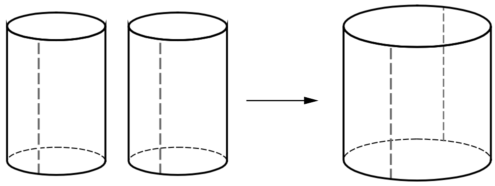
7. How many digits has the result of the calculation $(2^{22})^5 \times (5^{55})^2$?

(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111

8. Handsome Fritz has a secret e-mail-adress which is only known by four of his friends. Today he received eight e-mails at this address. Which of the following statements is definitely correct?

(A) Fritz has received two e-mails from each friend.
(B) Fritz cannot have received eight e-mails from one friend.
(C) Fritz has received at least one e-mail from each friend.
(D) Fritz has received at least two e-mails from one of his friends.
(E) Fritz has received at least two e-mails from at least two of his friends.

9. The curved surfaces of two identical cylinders are cut open along the vertical dotted line, as shown and then stuck together to create the curved surface of one big cylinder. What can be said about the volume of the resulting cylinder compared to the volume of one of the small cylinders?



(A) It is 2-times as big. (B) It is 3-times as big.
(C) It is π-times as big. (D) It is 4-times as big.
(E) It is 8-times as big.

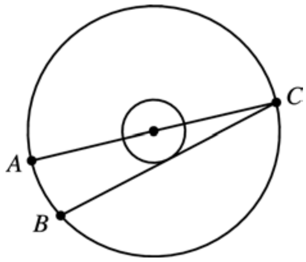
10. In the year 2014 all digits are different and the last digit is bigger that the sum of the other three digits. How many years ago was this last the case?

(A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 395 (E) 485

- 4 Point Questions -

11. A cuboid-shaped box has the measurements $a \times b \times c$ with $a < b < c$. If one increases a or b or c by 5 cm, the volume of the box increases as well. When is the increase biggest?
(A) If one increases a. (B) If one increases b.
(C) If one increases c. (D) The answer is depending on the values of a, b and c.
(E) The volume increases in the cases (A), (B) and (C) by an equal amount.

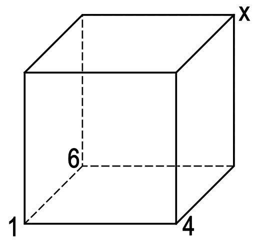
12. The winning team of a football match gets 3 points and the losing team 0 points. In the case of a draw both teams get one point each. Four teams A, B, C and D play a tournament. Each team plays each other team exactly once. At the end of the tournament Team A has 7 points, and Teams B and C have 4 points each. How many points has Team D got?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4



13. The ratio of the radii of two concentric circles is 1 : 3. The line AC a diameter of the biggest circle. A chord BC of the big circle touches the small circle (see diagram). The line AB has length 12. How big is the radius of the big circle?
(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26

14. How many whole number triples (a,b,c) with $a > b > c > 1$ fulfil the condition $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$?
(A) none (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) infinitely many

15. Six weeks are $n!$ (= $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$) seconds. n = ?
(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

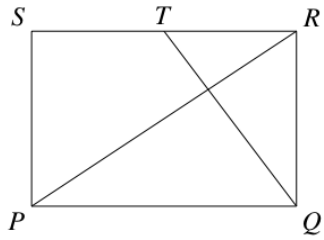


16. The vertices of a die are numbered 1 to 8, so that the sum of the four numbers on the vertices of each face are the same. The numbers 1, 4 and 6 are already indicated in the picture. Which number is in position x?
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

17. On the packaging of a soft cheese it says: total amount of fat 24%. On the same packaging it also says: 64% fat in the dry substance. How much water as a percentage is in the soft cheese?
(A) 88 % (B) 62·5 % (C) 49 % (D) 42 % (E) 37·5 %

18. The function $f(x) = ax + b$ fulfils the conditions $f(f(f(1))) = 29$ and $f(f(f(0))) = 2$. What is the value of a?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

19. Amongst 10 different positive whole numbers there are exactly 5 that are divisible by 5 and exactly 7 that are divisible by 7. Let M be the biggest amongst these numbers. What is the smallest possible value of M?
(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 (E) another value

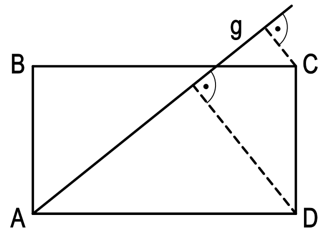


20. $PQRS$ is a rectangle. T is the midpoint of RS. QT is normal to the diagonal PR. What is the ratio of the lengths $PQ : QR$?
(A) 2 : 1 (B) $\sqrt{3}$: 1 (C) 3 : 2 (D) $\sqrt{2}$: 1 (E) 5 : 4

- 5 Point Questions -

21. Let *a,b,c* be different real numbers not equal to zero and *n* be a positive whole number. It is known that the numbers $(-2)^{2n+3} \times a^{2n+2} \times b^{2n-1} \times c^{3n+2}$ and $(-3)^{2n+2} \times a^{4n+1} \times b^{2n+5} \times c^{3n-4}$ have the same sign. Which of the following statements is definitely true?

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

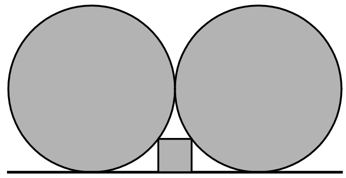


22. The straight line *g* runs through the vertex *A* of the rectangle *ABCD shown*. The perpendicular distance from *C* to *g* is 2 and from *D* to *g* is 6. *AD* is twice as long as *AB*. Determine the length of *AD*.

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$

23. There are 9 kangaroos that are called the Greatkangs. They are either coloured white or black. If three Greatkangs meet by chance, the probability that none of them is white is exactly two thirds. How many Greatkangs are black?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 8



24. In the diagram on the right the following can be seen: a straight line, which is the common tangent of two touching circles with radius 1, and a square with one edge on the straight line and the other vertices one on each of the two circles. How big is the side length of the square?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) $\frac{1}{2}$

25. Thomas wants to write down pairwise, different positive whole numbers none of which should be bigger than 100. Their product should not be divisible by 54. How many numbers can he write down at the most?

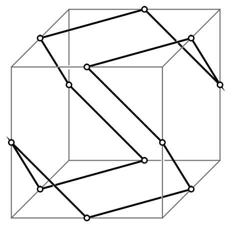
(A) 8 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

26. Two regular polygons with side length 1, lay on opposite sides of the common edge *AB*. One of them is the 15-sided polygon $ABC_1D_1E_1$... and the other one is the n-sided polygon $ABC_2D_2E_2$... . For which value of *n* is the distance between C_1 to C_2 exactly 1?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

27. The chain of equations $k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1$ should be valid for the positive whole numbers *k*, *m*, *n*. How many different values can *m* assume?

(A) none (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) infinitely many



28. In the diagram a closed polygon can be seen whose vertices are the midpoints of the edges of the die. The interior angles are as usual defined as the angle that two sides of the polygon describe in a common vertex. How big is the sum of all interior angles of the polygon?

(A) 720° (B) 1080° (C) 1200° (D) 1440° (E) 1800°

29. The mapping $f: Z \to Z$ fulfils the conditions $f(4) = 6$ and $xf(x) = (x-3)f(x+1)$. What is the value of the expression $f(4) \times f(7) \times f(10) \times ... \times f(2011) \times f(2014)$?

(A) 2013 (B) 2014 (C) $2013 \cdot 2014$ (D) 2013! (E) 2014!

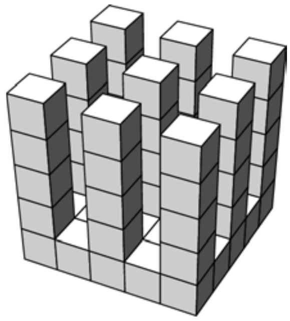
30. In the forests of a magical island kingdom there are three kinds of animals: lions, wolves and goats. Wolves can eat goats and lions can eat wolves as well as goats. Since it is a magical island kingdom, the wolf that eats a goat changes into a lion. A lion that eats a goat changes into a wolf and a lion that eats a wolf changes into a goat. To begin with there were 17 goats, 55 wolves and 6 lions on the island. After some time no more eating is possible. How big is the maximum amount of animals that can still be on the island?

(A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35

Känguru der Mathematik 2014
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 20.3.2014

- 3 Punkte Beispiele -

1. Entfernt man von einem 5×5×5 Würfel einige 1×1×1 Würfel, erhält man den abgebildeten Körper. Dieser besteht aus einigen gleich hohen Säulen, die auf einer gemeinsamen Grundplatte stehen. Wie viele kleine Würfel werden entfernt?



(A) 56 (B) 60 **(C) 64** (D) 68 (E) 80

In jeder der oberen vier Ebenen entfernt man 16 Würfel, insgesamt also 4·16 = 64 Würfel.
Oder: In der unteren Ebene bleiben 25 Würfel über, und die 9 Säulen enthalten je 4 Würfel. Also bleiben 25 + 4·9 = 25 + 36 = 61 Würfel übrig. Ursprünglich waren 5·5·5 = 125 Würfel im großen Würfel, also wurden 125 – 61 = 64 Würfel entfernt.

2. Heute haben Carmen, Gerda und Sabine Geburtstag. Die Summe ihrer Alter ist jetzt 44. Wie groß wird die Summe ihrer Alter sein, wenn sie zum nächsten Mal eine zweiziffrige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist?

(A) 55 (B) 66 **(C) 77** (D) 88 (E) 99

Die Summe ihrer Alter wächst jedes Jahr um 3: In einem Jahr werden sie zusammen 47 Jahre alt sein, im Jahr darauf 50, et cetera. Also ist die Summe nach einem Jahr um 3 größer, nach zwei Jahren um 6, nach drei Jahren um 9, et cetera. Andererseits muss die Summe aber um ein Vielfaches von 11 vergrößert werden, um wieder eine zweiziffrige Zahl mit zwei gleichen Ziffern zu erhalten. Die erste durch 11 teilbare Zahl, die in der 3er-Reihe vorkommt, ist 33, also muss die Summe um 33 vergrößert werden.

3. Wie groß ist der Wert von a^{-3k}, wenn $a^k = \frac{1}{2}$ gilt?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B) 8** (C) –8 (D) 6 (E) $\frac{1}{6}$

$$a^{-3k} = \left(a^k\right)^{-3} = \left(\left(a^k\right)^{-1}\right)^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^3 = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = 2^3 = 8$$

4. In drei verschieden großen Körben liegen insgesamt 48 Bälle. Im kleinsten und größten Korb liegen zusammen doppelt so viele Bälle wie im mittleren. Im kleinsten Korb liegen halb so viele Bälle wie im mittleren. Wie viele Bälle liegen im größten Korb?

(A) 16 (B) 20 **(C) 24** (D) 30 (E) 32

Im kleinen und großen Korb gemeinsam liegen also zwei Drittel aller Bälle. (Sei x die Anzahl der Bälle im mittleren Korb, dann enthalten der große und kleine Korb gemeinsam $2x$ Bälle. Also gibt es insgesamt $3x$ Bälle.) Im mittleren Korb ist daher ein Drittel der Bälle, also 16. Da im kleinen Korb halb so viele Bälle sind wie im mittleren, sind es 8 Bälle. Somit bleiben 48 – 16 – 8 = 24 Bälle für den großen Korb übrig.

5. $\dfrac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = ?$

(A) 2^{2011} (B) 2^{2012} (C) 2^{2013} (D) 1 **(E) 2**

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = \frac{2^{2013} \cdot (2-1)}{2^{2012} \cdot (2-1)} = \frac{2^{2013}}{2^{2012}} = 2$$

Oder:

$$\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}} = 2 \cdot \frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2 \cdot (2^{2013} - 2^{2012})} = 2 \cdot \frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2014} - 2^{2013}} = 2 \cdot 1 = 2$$

6. Welcher der folgenden Ausdrücke enthält den Faktor $b + 1$ nicht?

(A) $2b + 2$ (B) $b^2 - 1$ (C) $b^2 + b$ (D) $-1 - b$ **(E) $b^2 + 1$**

(A) $2b + 2 = 2(b + 1)$ (B) $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$ (C) $b^2 + b = b(b + 1)$ (D) $-1 - b = -(b + 1)$

E: $b^2 + 1$ ist nicht reduzierbar. zB für $b = 3$ ist $b^2 + 1 = 10$ und $b + 1 = 4$, aber 4 ist kein Faktor von 10.

7. Wie viele Ziffern hat das Ergebnis der Rechnung $\left(2^{22}\right)^5 \cdot \left(5^{55}\right)^2$?

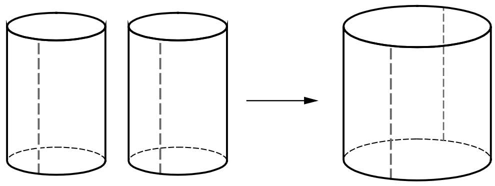
(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 **(E) 111**

$$(2^{22})^5 \cdot (5^{55})^2 = 2^{22 \cdot 5} \cdot 5^{55 \cdot 2} = 2^{110} \cdot 5^{110} = 10^{110}$$

Das Ergebnis ist also ein 1er gefolgt von 110 Nullen, zusammen also 111 Ziffern.

8. Der fesche Fritz hat eine geheime E-Mail-Adresse, die nur vier seiner Freunde kennen. Heute erhielt er auf dieser Adresse acht E-Mails. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?
(A) Fritz hat von jedem Freund zwei E-Mails erhalten.
(B) Fritz kann nicht von einem Freund acht E-Mails erhalten haben.
(C) Fritz hat von jedem Freund mindestens ein E-Mail erhalten.
(D) Fritz hat von einem seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.
(E) Fritz hat von mindestens zwei seiner Freunde mindestens zwei E-Mails erhalten.
Gegenbeispiel zu (A), (B), (C) und (E): Alle acht E-Mails stammen von einem Freund.
Nehmen wir an, (D) wäre falsch, also Fritz hätte von jedem Freund höchstens ein E-Mail erhalten. Dann hätte er insgesamt höchstens fünf E-Mails erhalten können. Also kann (D) nicht falsch sein.

9. Zwei identische Zylindermäntel werden wie abgebildet längs der senkrechten strichlierten Linien aufgeschnitten und dann zu einem großen Zylindermantel zusammengeklebt. Was kann man über das Volumen des resultierenden Zylinders im Vergleich zum Volumen eines kleinen Zylinders sagen?



(A) Es ist 2-mal so groß. (B) Es ist 3-mal so groß.
(C) Es ist π-mal so groß. **(D) Es ist 4-mal so groß.**
(E) Es ist 8-mal so groß.
Bezeichne r den Radius des kleinen Zylinders und R den Radius des großen Zylinders. Der Umfang U des großen Zylinders ist doppelt so groß wie der Umfang u des kleinen Zylinders, also muss auch sein Radius doppelt so groß sein: $2R\pi = U = 2u = 2(2r\pi) = 4r\pi \Rightarrow R = 2r$
Für die Volumen v bzw. V gilt also: $V = R^2\pi h = (2r)^2 \pi h = 4r^2\pi h = 4v$

10. In der Jahreszahl 2014 sind alle Ziffern verschieden, und die letzte Ziffer ist größer als die Summe der anderen drei Ziffern. Vor wie vielen Jahren war dies zuletzt der Fall?
(A) 5 (B) 215 **(C) 305** (D) 395 (E) 485
Wir betrachten, von oben beginnend, einige Intervalle von Zahlen:
2010 bis 2013: Die Summe der ersten 3 Ziffern genau 3, also müsste die vierte Ziffer mindestens 4 sein.
2000 bis 2009: Die zweite und dritte Ziffer sind gleich.
1900 bis 1999: Bereits die Summe der ersten beiden Ziffern ist 10, die vierte Ziffer müsste also mindestens 11 sein. So eine Ziffer gibt es nicht.
1800 bis 1899: Bereits die Summe der ersten beiden Ziffern ist 9, die vierte Ziffer müsste also mindestens 10 sein. So eine Ziffer gibt es nicht.
1700 bis 1799: Die Summe der ersten beiden Ziffern ist 8. Falls die dritte Ziffer größer als 0 ist, ist die Summe der ersten drei Ziffern mindestens 9, also müsste die vierte Ziffer mindestens 10 sein, was nicht möglich ist. Falls die dritte Ziffer 0 ist, so erhalten wir die einzige mögliche Lösung in diesem Intervall, nämlich 1709. Dieses Jahr liegt 305 Jahre zurück.

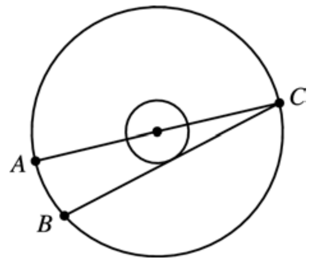
- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine quaderförmige Schachtel hat die Maße $a \times b \times c$ mit $a < b < c$. Vergrößert man a oder b oder c um 5 cm, vergrößert sich auch das Volumen der Schachtel. Wann ist die Zunahme am größten?
(A) Wenn man *a* vergrößert. (B) Wenn man b vergrößert.
(C) Wenn man c vergrößert. (D) Die Antwort ist von den Werten von a, b und c abhängig.
(E) Das Volumen vergrößert sich in den Fällen (A), (B) und (C) immer gleich stark.
Wir betrachten das Volumen des dazugekommenen Bereichs. Vergrößert man a, so hat dieser ein Volumen von $5 \cdot b \cdot c$; Wenn man b vergrößert ist das Volumen $5 \cdot a \cdot c$, und wenn man c vergrößert, ist es $5 \cdot a \cdot b$. Da $a < b < c$ gilt, ist auch $a \cdot b < a \cdot c < b \cdot c$. Also ist $5 \cdot b \cdot c$ am größten.

12. Das Siegerteam eines Fußballspiels erhält 3 Punkte und das Verliererteam 0 Punkte. Bei einem Unentschieden erhalten die Teams je einen Punkt. Vier Teams A, B, C und D spielen ein Turnier. Jedes Team spielt genau einmal gegen jedes andere Team. Am Ende des Turniers hat das Team A 7 Punkte, und die Teams B und C haben je 4 Punkte. Wie viele Punkte hat das Team D?

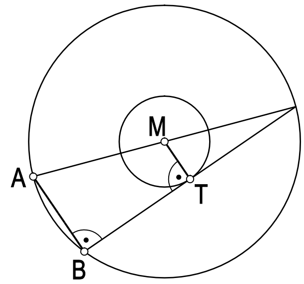
(A) 0 **(B) 1** (C) 2 (D) 3 (E) 4

Team A muss 2 Siege und ein Unentschieden erreicht haben, um auf eine Summe von genau 7 Punkten zu kommen. Teams B und C müssen jeweils einen Sieg, eine Niederlage und ein Unentschieden zu verzeichnen haben. Insgesamt muss es gleich viele Siege wie Niederlagen geben. Die Teams A, B und C haben gemeinsam 4 Siege und 2 Niederlagen erlebt, also muss Team D die restlichen 2 Niederlagen erlitten haben. Die Anzahl der Unentschieden muss insgesamt gerade sein. Teams A, B und C haben zusammen 3 Unentschieden erlebt, also muss Team D bei einem Match unentschieden gespielt haben, damit die Gesamtanzahl gerade ist.
Somit hat Team D zwei Niederlagen und ein Unentschieden erreicht, also genau 1 Punkt.



13. Das Verhältnis der Radien zweier konzentrischer Kreise ist 1 : 3. Die Strecke *AC* ist ein Durchmesser des großen Kreises. Eine Sehne *BC* des großen Kreises berührt den kleinen Kreis (siehe Abbildung). Die Strecke *AB* hat die Länge 12. Wie groß ist der Radius des großen Kreises?

(A) 13 **(B) 18** (C) 21 (D) 24 (E) 26



Sei *M* der Mittelpunkt des Kreises, und sei *T* der Berührpunkt von *BC* mit dem kleinen Kreis. Der Winkel <*MTC* beträgt 90°, da *CT* eine Tangente ist. Der Winkel *ABC* beträgt auf Grund des Thalessatzes ebenfalls 90°, da *AC* ein Durchmesser des Kreises ist. Also sind *AB* und *MT* zueinander parallel (als zwei Normalen auf dieselbe Strecke), und die Dreiecke *ABC* und *MTC* ähnlich (da ihre Seiten jeweils zueinander parallel sind).
Die Strecke *MC* ist halb so lang wie die Strecke *AC*, also ist auf Grund der Ähnlichkeit auch *MT* halb so lang wie *AB*. Somit gilt *MT* = 6.
MT ist ein Radius des kleinen Kreises. Das Verhältnis der Radien ist 1 : 3, also ist der Radius des großen Kreises 18.

14. Wie viele Tripel (*a*,*b*,*c*) ganzer Zahlen mit *a* > *b* > *c* > 1 erfüllen die Bedingung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$?

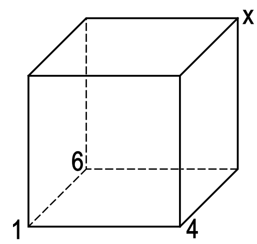
(A) keine (B) 1 **(C) 2** (D) 3 (E) unendlich viele

Je kleiner die Zahlen *a*, *b* und *c* sind, desto größer ist die Summe ihrer Kehrwerte. Wir beginnen also mit den kleinstmöglichen Werten, *c* = 2, *b* = 3 und *a* = 4. Für diese ist die Summe der Kehrwerte größer als 1. Die nächstgrößere Möglichkeit erhalten wir, indem wir *a* auf 5 erhöhen; Auch hier ist die Summe der Kehrwerte noch größer als 1. Erhöhen wir *a* aber auf 6 oder mehr, so ist die Summe der Kehrwerte auf jeden Fall kleiner oder gleich 1 (da *c* = 2 und *b* = 3 ja bereits die günstigste Wahl für die anderen beiden Zahlen ist). Für *a* ≥ 6 gibt es also keine weiteren Lösungen. Damit bleiben nur noch die Möglichkeiten (5,4,2) und (5,4,3) zu betrachten; Auch diese liefern aber keine weiteren Lösungen.

15. Sechs Wochen sind *n*! (= $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$) Sekunden. *n* = ?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 **(D) 10** (E) 12

Sechs Wochen = $6\cdot 7\cdot 24\cdot 60\cdot 60 = (2\cdot 3)\cdot 7\cdot(2^3\cdot 3)\cdot(2^2\cdot 3\cdot 5)\cdot (2^2\cdot 3\cdot 5)=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7 =1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 10!$



16. Die Eckpunkte eines Würfels werden so mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet, dass die Summe der Zahlen an den vier Eckpunkten einer Seitenfläche für alle Seitenflächen des Würfels gleich ist. Die Zahlen 1, 4 und 6 sind im Bild schon zu sehen. Welche Zahl steht an der Stelle x?

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

Die Summe aller Zahlen von 1 bis 8 beträgt 36. Betrachtet man jeweils zwei gegenüberliegende Seitenflächen, zum Beispiel die linke und die rechte, so muss die Summe der vier Ecken der einen Seitenfläche gleich sein wie die der anderen, während die Summe aller 8 Ecken der beiden Seitenflächen zusammen genau 36 betragen muss. Jede Seitenfläche für sich hat also eine Summe von genau 18.
Für die untere Fläche, von der wir bereits drei Zahlen kennen, folgt damit sofort, dass die vierte Ecke mit der Zahl 7 beschriftet werden muss (1 + 4 + 6 + 7 = 18). Von der hinteren Fläche sind die beiden unteren Ecken bekannt, deren Summe 6 + 7 = 13 beträgt. Die Summe der beiden hinteren oberen Eckpunkte muss also 18 – 13 = 5 betragen. Wir haben noch die Zahlen 2, 3, 5, und 8 zur Auswahl, und können somit schließen, dass die beiden hinteren oberen Ecken mit 2 und 3 beschriftet werden müssen, wobei wir noch nicht wissen, welche der Zahlen rechts und welche links ist. Für die vorderen oberen Ecken bleiben die Werte 5 und 8 übrig.
Nun betrachten wir die rechte Seitenfläche. Die unteren Ecken haben zusammen eine Summe von 4 + 7 = 11, also müssen die oberen gemeinsam eine Summe von 18 – 11 = 7 haben. Von den beiden vorderen oberen Zahlen (5 und

8) muss also 5 auf der rechten Seite stehen (8 wäre zu groß), und von den hinteren oberen Zahlen (2 und 3) steht somit 2 auf der rechten Seite. Also gilt $x = 2$.

17. Auf der Weichkäseverpackung steht: 24 % gesamter Fettanteil. Auf derselben Verpackung steht auch: 64% Fett in der Trockensubstanz. Wie groß ist der Prozentanteil von Wasser in diesem Weichkäse?

(A) 88 % **(B) 62,5 %** (C) 49 % (D) 42 % (E) 37,5 %

Betrachten wir 100g Weichkäse. 24g davon sind Fett. Das sind 64% der Trockensubstanz. Bezeichne x die Menge an Trockensubstanz, dann gilt $x \cdot \frac{64}{100} = 24\text{g}$, also $x = 24 \cdot \frac{64}{100}\,\text{g} = \frac{24 \cdot 64}{100}\,\text{g} = 37.5$ g. Die Menge an Wasser ist daher 100g – 37.5g = 62.5g. Pro 100g Weichkäse sind also 62.5g Wasser enthalten, also 62.5%.

18. Die Funktion $f(x) = ax + b$ erfüllt die Bedingungen $f(f(f(1))) = 29$ und $f(f(f(0))) = 2$. Welchen Wert hat a?

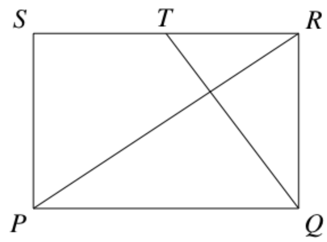
(A) 1 (B) 2 **(C) 3** (D) 4 (E) 5

Für jedes y gilt $f(f(f(y))) = f(f(ay + b)) = f(a(ay + b) + b) = f(a^2y + ab + b) = a(a^2y + ab + b) + b = a^3y + a^2b + ab + b$.
Für $y = 0$ erhalten wir $f(f(f(0))) = a^3 \cdot 0 + a^2b + ab + b = 2$, und für $y = 1$ erhalten wir $f(f(f(1))) = a^3 \cdot 1 + a^2b + ab + b = 29$.
Berechnen wir die Differenz: $f(f(f(1))) - f(f(f(0))) = 29 - 2 = 27 = (a^3 \cdot 1 + a^2b + ab + b) - (a^3 \cdot 0 + a^2b + ab + b) = a^3$.
Also gilt $a = 3$.

19. Unter 10 verschiedenen positiven ganzen Zahlen sind genau 5 durch 5 teilbar und genau 7 durch 7 teilbar. Es sei M die größte unter den gegebenen Zahlen. Was ist der kleinstmögliche Wert von M?

(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 **(E) ein anderer Wert**

Mindestens 2 der Zahlen müssen sowohl durch 5 als auch durch 7 teilbar sein, sonst bräuchten wir mehr als 10 Zahlen um beide Bedingungen zu erfüllen. Die beiden kleinsten Zahlen, die durch 5 und durch 7 teilbar sind, sind 35 und 70. Tatsächlich erhalten wir eine Lösung mit **5**, <u>7</u>, **10**, <u>14</u>, **15**, <u>21</u>, <u>28</u>, **<u>35</u>**, <u>42</u>, **<u>70</u>**, wobei die **durch 5 teilbaren Zahlen fett** und die <u>durch 7 teilbaren Zahlen unterstrichen</u> sind.



20. $PQRS$ ist ein Rechteck. T ist der Mittelpunkt von RS. QT steht normal zur Diagonale PR. Wie lautet das Verhältnis der Längen $PQ : QR$?

(A) 2 : 1 (B) $\sqrt{3} : 1$ (C) 3 : 2 **(D) $\sqrt{2} : 1$** (E) 5 : 4

Bezeichne D den Schnittpunkt und α den Winkel RPQ, dann gilt weiters:
$\sphericalangle PRQ = 90° - \sphericalangle RPQ = 90° - \alpha$ (Winkelsumme in PRQ mit rechtem Winkel in Q)
$\sphericalangle TRP = 90° - \sphericalangle PRQ = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ (die beiden Winkel ergeben zusammen den Winkel $\sphericalangle TRQ = 90°$).
Oder: $\sphericalangle TRP = \sphericalangle RPQ = \alpha$ (Parallelwinkelsatz zwischen parallelen Strecken TR und PQ)
$\sphericalangle RTD = 90° - \sphericalangle TRD = 90° - \alpha$ (Winkelsumme in RTD mit rechtem Winkel in D)
$\sphericalangle RQD = 90° - \sphericalangle DRQ = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ (Winkelsumme in RQD mit rechtem Winkel in D)
Also sind die Dreiecke PQR und QRT zueinander ähnlich. Für die Verhältnisse ihrer Seiten gilt also $PQ : QR = QR : RT$.
Sei $x = RT$ und $y = QR$. Da T der Mittelpunkt von SR ist und $SR = PQ$, gilt $PQ = 2x$. Damit gilt:

$$PQ:QR = QR:RT$$
$$\frac{2x}{y} = \frac{y}{x}$$
$$2x^2 = y^2$$
$$y = \sqrt{2} \cdot x$$
$$PQ:QR = \frac{2x}{y} = \frac{2x}{\sqrt{2} \cdot x} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

- 5 Punkte Beispiele -

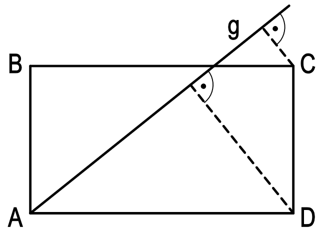
21. Es sind a,b,c von Null verschiedene reelle Zahlen und n eine positive ganze Zahl. Es ist bekannt, dass die Zahlen $(-2)^{2n+3} \cdot a^{2n+2} \cdot b^{2n-1} \cdot c^{3n+2}$ und $(-3)^{2n+2} \cdot a^{4n+1} \cdot b^{2n+5} \cdot c^{3n-4}$ dasselbe Vorzeichen haben. Welche der folgenden Aussagen ist sicher wahr?

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ **(D) $a < 0$** (E) $b < 0$

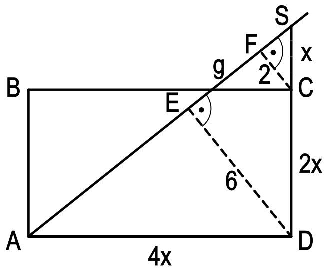
-2 hat eine ungerade Hochzahl, also ist $(-2)^{2n+3}$ negativ. Die Hochzahl von -3 ist gerade, also ist $(-3)^{2n+2}$ positiv.
b hat sowohl links als auch rechts eine ungerade Hochzahl, also ist das Vorzeichen von b^{2n-1} auf der linken Seite gleich wie das Vorzeichen von b^{2n+5} auf der rechten Seite (unabhängig von der Wahl von b und n).
Die Hochzahlen von c auf der linken und rechten Seite sind entweder beide gerade oder beide ungerade, also sind auch die Vorzeichen von c^{3n+2} und c^{3n-4} gleich (für jede Wahl von c und n).
a dagegen hat links eine gerade und rechts eine ungerade Hochzahl. Falls a positiv ist, sind sowohl a^{2n+2} als auch a^{4n+1} positiv. Ist a dagegen negativ, so ist genau einer der beiden Werte negativ und der andere positiv. Um die

verschiedenen Vorzeichen von $(-2)^{2n+3}$ und $(-3)^{2n+2}$ auszugleichen und insgesamt das gleiche Vorzeichen zu erhalten, muss *a* also negativ sein.

22. Die Gerade *g* geht durch den Eckpunkt *A* des abgebildeten Rechtecks *ABCD*. Der Normalabstand von *C* zu *g* ist 2 und der von *D* zu *g* ist 6. *AD* ist doppelt so lang wie *AB*. Bestimme die Länge von *AD*.



(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) $4\sqrt{3}$



Sei *S* der Schnittpunkt von *DC* und *g*, sei *E* der Fußpunkt des Normalabstandes von *D* auf *g*, und sei *F* der Fußpunkt des Normalabstandes von *C* auf *g*. Die Dreiecke *SED* und *SFC* sind zueinander ähnlich, da ihre Seiten jeweils zueinander parallel sind. Somit gilt $SC : SD = FC : ED = 2 : 6 = 1 : 3$. Sei also $SC = x$, folglich $SD = 3x$, $CD = 2x$, und laut Angabe weiters $AD = 2CD = 4x$. Gemäß des Satzes von Pythagoras folgt $AS^2 = AD^2 + DS^2 = (4x)^2 + (3x)^2 = 25x^2$, also $AS = 5x$.
Nun sehen wir weiters, dass die Dreiecke *ADE* und *ASD* zueinander ähnlich sind, da sie die gleichen Winkel haben. (Beide haben einen rechten Winkel, und den gemeinsamen Winkel <*SAD* = <*DAE*, somit muss auch der dritte Winkel übereinstimmen.) Also gilt:

$$AD : DE = AS : SD$$

$$\frac{4x}{6} = \frac{5x}{3x} \Leftrightarrow \frac{4x}{6} = \frac{5}{3}$$

$$AD = 4x = \frac{5}{3} \cdot 6 = 10$$

23. Es gibt 9 Kängurus die Greatkangs genannt werden. Diese sind entweder weiß oder schwarz gefärbt. Treffen sich drei Greatkangs zufällig, ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines davon weiß ist, genau zwei Drittel. Wie viele Greatkangs sind schwarz?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 **(E) 8**

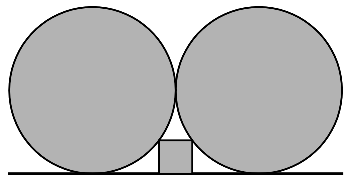
Sei *x* die Anzahl der schwarzen Greatkangs. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem zufälligen Treffen dreier Greatkangs drei schwarze zu sehen, entspricht der Anzahl aller möglichen Auswahlen von drei schwarzen Greatkangs, dividiert durch die Anzahl aller überhaupt möglichen Auswahlen von drei Greatkangs (d.h. günstige durch mögliche Fälle):

$$\frac{2}{3} = \frac{\binom{x}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{x(x-1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{x(x-1)(x-2)}{9\cdot 8\cdot 7}$$

$$x(x-1)(x-2) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 6 \cdot 8 \cdot 7$$

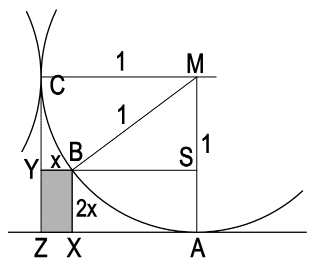
Also $x = 8$.

24. In nebenstehender Abbildung ist folgendes zu sehen: eine Gerade, die gemeinsame Tangente zweier berührender Kreise mit Radius 1 ist, und ein Quadrat mit einer Seite auf der Geraden und je einem Eckpunkt auf den beiden Kreisen.
Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?



(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (E) $\frac{1}{2}$

Wir betrachten einen vergrößerten Ausschnitt. Sei *M* der Mittelpunkt des rechten Kreises, *A* der Berührpunkt mit der gemeinsamen Tangenten, *B* der Berührpunkt mit dem Quadrat, und *C* der Berührpunkt mit dem anderen Kreis. Es gilt $MA = MB = MC = 1$, da alles Radien des Kreises sind. Weiters sei *X* der untere Eckpunkt des Quadrates wie in der Zeichnung (also der Lotfußpunkt von *B* auf die Tangente), sei *Y* der Mittelpunkt der oberen Quadratseite, und sei *Z* der Mittelpunkt der unteren Quadratseite. *ZAMC* ist also ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Bezeichne $2x$ die Seitenlänge des Quadrates, dann gilt $ZX = YB = x$ und $XB = 2x$. Zuletzt sei *S* der Lotfußpunkt von *B* auf *AM*. Dann gilt $BS = 1 - x$ und $SM = 1 - 2x$. Weiters ist *BSM* rechtwinkelig. Somit folgt aus dem Satz von Pythagoras, dass



$$1^2 = BM^2 = BS^2 + SM^2 = (1-x)^2 + (1-2x)^2 = 1 - 2x + x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 2 - 6x + 5x^2$$
$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 5\cdot 1}}{5\cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \frac{6 \pm 4}{10} = \left\{1, \tfrac{1}{5}\right\}$$

Die Lösung $x_1=1$ macht keinen Sinn, somit ist $x_2=1/5$ die halbe Länge des Quadrates.

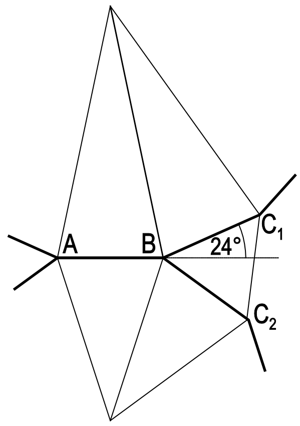
25. Thomas möchte einige paarweise verschiedene positive ganze Zahlen aufschreiben, von denen keine größer als 100 sein soll. Ihr Produkt soll nicht durch 54 teilbar sein. Wie viele Zahlen kann er höchstens aufschreiben?

(A) 8 (B) 17 (C) 68 **(D) 69** (E) 90

Damit das Produkt nicht durch $54=2\cdot3^3$ teilbar ist, darf es entweder keinen 2er, oder höchstens zwei 3er enthalten. Um eine Menge zu wählen, deren Produkt keine 2er enthält, können wir alle ungeraden Zahlen von 1 bis 100 auswählen. Gerade Zahlen dürfen wir keine hinzufügen, also erhalten wir höchstens 50 Zahlen.
Um eine Menge zu erhalten, deren Produkt höchstens zwei 3er enthält, wählen wir zunächst alle Zahlen von 1 bis 100, die nicht durch 3 teilbar sind, also alle Zahlen außer 3, 6, 9, 12, ..., 99. Das sind 67 Zahlen. Nun dürfen wir noch maximal zwei Zahlen hinzufügen, die jeweils einen 3er enthalten, beispielsweise 3 und 6. Auf diese Weise können wir also bis zu 69 Zahlen auswählen.

26. Zwei regelmäßige Vielecke mit der Seitenlänge 1 liegen auf gegenüberliegenden Seiten der gemeinsamen Seite *AB*. Eines davon ist das 15-Eck $ABC_1D_1E_1$... und das andere ist das *n*-Eck $ABC_2D_2E_2$... . Für welchen Wert von *n* ist der Abstand von C_1 zu C_2 genau 1?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18



Wenn ich mit einem Auto entlang des Vielecks ein Mal rundherum fahre, dreht sich das Auto insgesamt um 360°, und zwar bei jeder Ecke gleich weit. Beim 15-Eck dreht sich das Auto also an jeder Ecke um 360°/15 = 24° (»Außenwinkel«). Beim *n*-Eck dreht sich das Auto an jeder Ecke um 360°/*n*.
Betrachten wir das Dreieck BC_1C_2. Jede der drei Seiten hat eine Länge von 1, also ist das Dreieck gleichseitig und hat somit drei Winkel mit je 60°. Der Winkel C_1BC_2 setzt sich zusammen aus einem Außenwinkel des 15-Ecks und einem Außenwinkel des *n*-Ecks. Der Außenwinkel des *n*-Ecks ist somit 60°-24°=36° groß, also ist *n* (wegen 36° = 360°/*n*) gleich 10.

27. Die Gleichungskette $k=(2014+m)^{\frac{1}{n}}=1024^{\frac{1}{n}}+1$ soll für positive ganze Zahlen *k*, *m*, *n* gelten. Wie viele verschiedene Werte kann *m* annehmen?

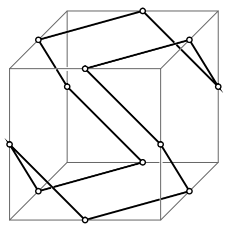
(A) keine (B) 1 **(C) 2** (D) 3 (E) unendlich viele

Zunächst muss $1024^{\frac{1}{n}}+1$ eine ganze Zahl sein, damit *k* ganzzahlig ist. Es gilt $1024^{\frac{1}{n}}=(2^{10})^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{10}{n}}$. Dies ist ganzzahlig dann und nur dann, wenn die Hochzahl 10/*n* eine ganze Zahl ist. Somit bleiben für *n* nur die möglichen Werte 1, 2, 5 und 10 übrig. Für diese berechnen wir nun, was sich dann für die Zahl *m* ergeben würde, wobei nach Umformung gilt, dass $m=\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^n-2014$:

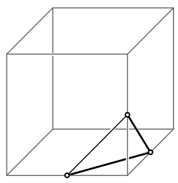
n	$2^{\frac{10}{n}}+1$	$\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^n$	$m=\left(2^{\frac{10}{n}}+1\right)^n-2014$
1	1025	1025	-989
2	33	1089	-925
5	5	3125	1111
10	3	59049	57035

Somit gibt es zwei Lösungen, in denen auch *m* positiv und ganzzahlig ist.

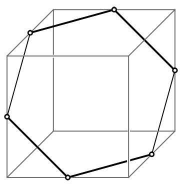
28. Im Bild sehen wir ein geschlossenes Vieleck, dessen Eckpunkte jeweils die Mittelpunkte der Würfelkanten sind. Ein Innenwinkel wird wie üblich als der Winkel definiert, den zwei Vieleckseiten im gemeinsamen Endpunkt einschließen. Wie groß ist die Summe aller Innenwinkel des Vielecks?



(A) 720° (B) 1080° (C) 1200° (D) 1440° (E) 1800°



Wir haben zwei Arten von Winkeln: Etwas spitzere, bei denen die beiden benachbarten Eckpunkte auf einer gemeinsamen Seitenfläche liegen, und etwas stumpfere, bei denen die benachbarten Eckpunkte auf gegenüberliegenden Seitenflächen liegen.
Für erstere zeichnen wir noch eine zusätzliche Linie zwischen den beiden benachbarten Eckpunkten ein und sehen, dass wir somit ein gleichseitiges Dreieck erhalten. Der Winkel muss also 60° betragen.



Für die zweite Art von Winkeln betrachten wir die abgebildete Figur, die aus 6 derartigen Winkeln nacheinander besteht: Alle Punkte dieses Sechsecks liegen auf einer Ebene, und alle Seiten sind gleich lang, somit ist das Sechseck gleichseitig, und jeder Innenwinkel beträgt 120°.
Insgesamt haben wir je 6 Winkel von der ersten und 6 Winkel von der zweiten Art, zusammen also $6\cdot60° + 6\cdot120° = 1080°$.

29. Die Abbildung $f: Z \to Z$ erfüllt die Bedingungen $f(4) = 6$ und $x \cdot f(x) = (x-3) \cdot f(x+1)$. Welchen Wert hat der Ausdruck $f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots \cdot f(2011) \cdot f(2014)$?

(A) 2013 (B) 2014 (C) 2013·2014 **(D) 2013!** (E) 2014!

Für jedes *x* gilt also $f(x+1) = f(x) \cdot \frac{x}{x-3}$. Wir berechnen die ersten Werte auf diese Art und versuchen, ein Muster zu erkennen:

$$f(4) = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$f(5) = f(4) \cdot \frac{4}{1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$f(6) = f(5) \cdot \frac{5}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} = 3 \cdot 4 \cdot 5$$
$$f(7) = f(6) \cdot \frac{6}{3} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{6}{3} = 4 \cdot 5 \cdot 6$$

Wir vermuten:

$$f(n) = (n-3)(n-2)(n-1)$$

Beweis durch Vollständige Induktion:
Basis: Siehe oben.
Annahme: Für 1, 2, ..., *N* gilt die Gleichung.
Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass sie dann auch für *N* + 1 gilt. Es gilt:

$$f(N+1) = f(N) \cdot \frac{N}{N-3} = (N-3)(N-2)(N-1) \cdot \frac{N}{N-3} = (N-2)(N-1)N$$

Für das Produkt erhalten wir somit:

$$f(4) \cdot f(7) \cdot f(10) \cdot \ldots f(2011) \cdot f(2014) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 = 2013!$$

30. In den Wäldern eines magischen Inselreichs gibt es drei Tierarten: Löwen, Wölfe und Ziegen. Wölfe können Ziegen fressen und Löwen können sowohl Wölfe als auch Ziegen fressen. Da es sich um ein magisches Inselreich handelt, verwandelt sich ein Wolf, der eine Ziege frisst, in einen Löwen. Ein Löwe, der eine Ziege frisst, verwandelt sich in einen Wolf und ein Löwe, der einen Wolf frisst, verwandelt sich in eine Ziege. Zu Beginn befanden sich 17 Ziegen, 55 Wölfe und 6 Löwen auf der Insel. Nach einiger Zeit ist kein weiteres Fressen mehr möglich. Wie groß ist die maximale Anzahl der Tiere, die sich dann noch auf der Insel befinden können?

(A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35

Kein Fressen ist erst dann mehr möglich, wenn nur noch eine Tierart übrig bleibt.
Durch Ausprobieren erhalten wir den folgenden Ablauf als Lösung:

	Löwen	Wölfe	Ziegen
Anfangsstand	6	55	17
17 Wölfe fressen je eine Ziege und werden zu Löwen	23	38	0
19 Löwen fressen je einen Wolf und werden zu Ziegen	4	19	19
19 Wölfe fressen je eine Ziege und werden zu Löwen	23	0	0

Zu zeigen, dass es keine Lösung gibt, bei der mehr Tiere übrig bleiben, ist etwas trickreicher.
Zunächst sehen wir, dass es drei Arten von Fressvorgängen gibt und betrachten, wie sich diese auf die Gesamtpopulation auswirken:

	Löwen	Wölfe	Ziegen
A: Löwe frisst Ziege und wird zu Wolf	-1	+1	-1
B: Wolf frisst Ziege und wird zu Löwe	+1	-1	-1
C: Löwe frisst Wolf und wird zu Ziege	-1	-1	+1

Wir sehen also, dass die Parität der Differenz zweier Arten immer gleich bleibt: Wenn die Differenz zwischen zwei Arten vor dem Fressen ungerade ist, so ist sie es auch danach. Ist die Differenz dagegen vorher gerade, so bleibt sie gerade.
Damit kein weiteres Fressen mehr möglich ist, müssen zwei Arten auf 0 reduziert werden. Zu Beginn ist die Anzahl der Löwen gerade, die der Wölfe und Ziegen aber ungerade. Nehmen wir an, die Löwen wären eine der beiden Arten, die auf 0 reduziert werden. Die Differenz zwischen Löwen und Wölfen ist am Anfang ungerade, und bleibt es somit auch während des gesamten Verlaufes. Falls es 0 Löwen gibt, muss es also eine ungerade Anzahl von Wölfen geben, also mehr als 0. Aber auch die Differenz zwischen Löwen und Ziegen ist ungerade, also müsste auch eine ungerade Anzahl von Ziegen existieren. Es ist also nicht möglich, eine Situation zu erreichen, in der die Anzahl der Löwen und die Anzahl einer weiteren Tierart gleichzeitig 0 sind. Folglich müssen es die Löwen sein, die am Ende übrig bleiben.

Nehmen wir nun an, insgesamt wurde A Mal die erste Art des Fressens durchgeführt, B Mal die zweite, und C Mal die dritte. Dann gilt für die Anzahl am Ende:

Löwen = 6 – A + B – C

Wölfe = 55 + A – B – C = 0

Ziegen = 17 – A – B + C = 0

Wir addieren die letzten beiden Zeilen und erhalten 72 – 2B = 0, also B = 36. Es muss im gesamten Verlauf also genau 36 Mal ein Wolf durch das Fressen von einer Ziege zu einem Löwen werden. Würde das gleich am Anfang passieren, wäre der Populationsstand somit folgender:

	Löwen	Wölfe	Ziegen
Anfangsstand	6	55	17
36 Wölfe fressen je eine Ziege und werden zu Löwen	42	19	-19

Da die Anzahl der Ziegen am Ende aber nicht negativ sein kann, müssen noch mindestens 19 Ziegen entstehen, indem 19 Löwen je einen Wolf fressen:

19 Löwen fressen je einen Wolf und werden zu Ziegen	23	0	0

Damit haben wir unser Ziel bereits erreicht und benötigen keine weiteren Fressvorgänge mehr. Somit haben wir bewiesen, dass *höchstens* 23 Tiere überleben können. Dass es eine Reihenfolge gibt, mit der wir diese obere Grenze auch tatsächlich erreichen können, haben wir bereits am Anfang durch Probieren gefunden.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Felix, Schulstufe: 1 – 2

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
15 Basispunkte

jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte
jede falsche Antwort:	Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

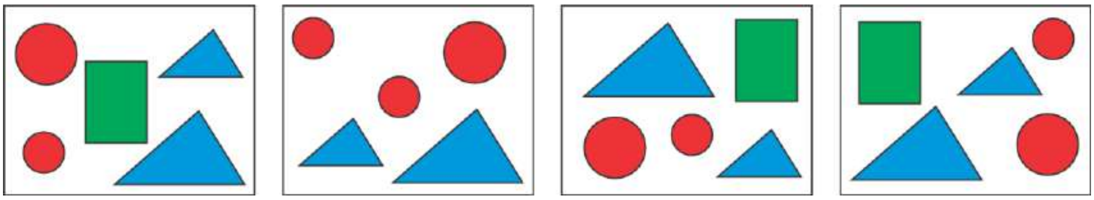
11	12	13	14	15

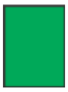
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Felix (ab 1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2015

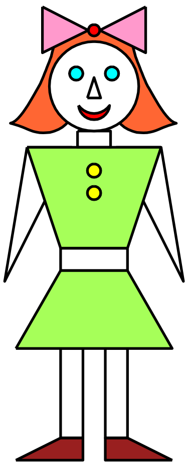
- 3 Punkte Beispiele -

1. Welche Figur kommt nicht in jedem Bild vor?



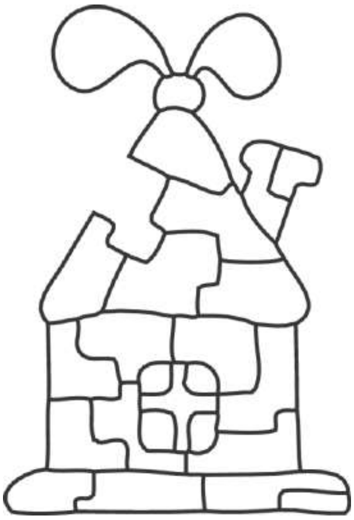
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

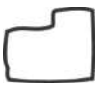
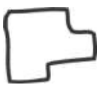
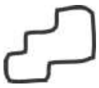
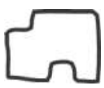
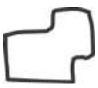
2. Wie viele Dreiecke kannst du im Bild sehen?



(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

3. Welcher Teil des Hauses fehlt?

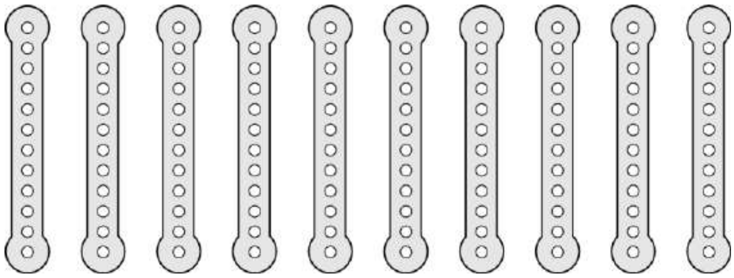


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

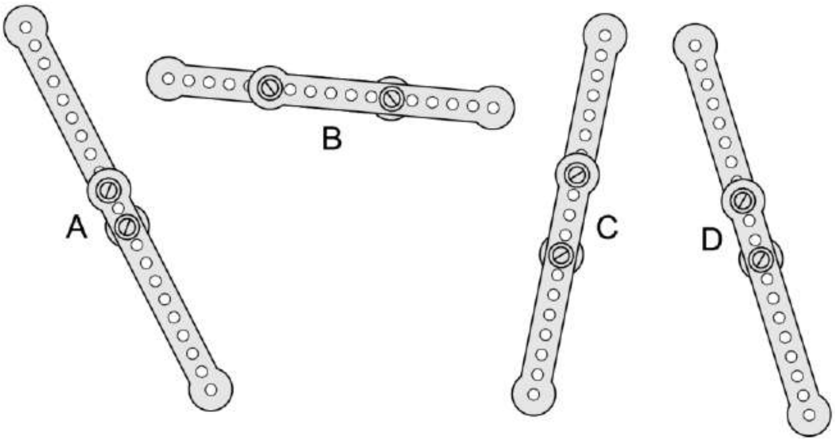
4. Wie viele Punkte haben alle Marienkäfer zusammen?

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

5. Florian hat 10 gleich lange Metallstreifen mit gleich vielen Löchern.



Er schraubt jeweils zwei dieser Metallstreifen zusammen. Somit hat er jetzt fünf lange Streifen (siehe Abbildung).



Welcher der langen Streifen ist der kürzeste?

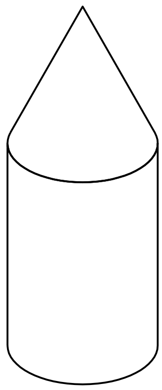
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

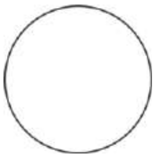
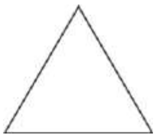
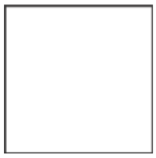
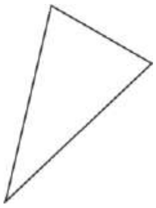
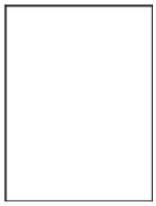
- 4 Punkte Beispiele -

6. Welches der unten abgebildeten Kängurukärtchen kann so gedreht werden, dass es danach genauso wie das rechts abgebildete Kärtchen aussieht?

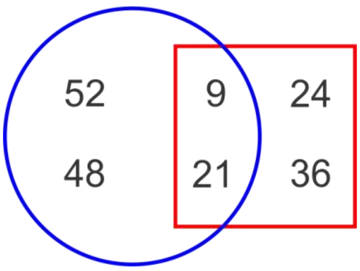
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Was sieht man, wenn man den aus zwei Bausteinen hergestellten Turm genau von oben betrachtet?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8. Wie viele Zahlen befinden sich außerhalb des Quadrates?

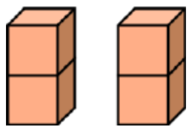


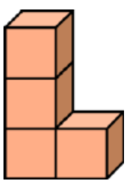
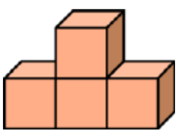
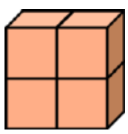
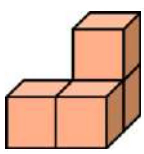
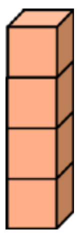
(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

9. Für die Hälfte ihres Heimweges von der Schule benötigt Jennifer eine halbe Stunde. Wie lange braucht sie für den ganzen Heimweg?

(A) 15 Minuten (B) 30 Minuten (C) 40 Minuten
(D) 1 Stunde (E) 2 Stunden

10. Michael hat zwei Bausteine. Jeder Baustein besteht aus zwei zusammengeklebten Würfeln. Welche Figur kann er damit nicht bauen?



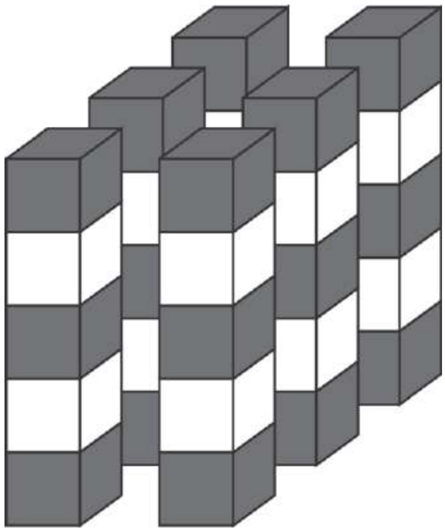
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 5 Punkte Beispiele -

11. Julia hat 9 Zuckerl und Katharina hat 17 Zuckerl. Wie viele Zuckerl muss Katharina an Julia abgeben, damit sie beide gleich viele Zuckerl haben?

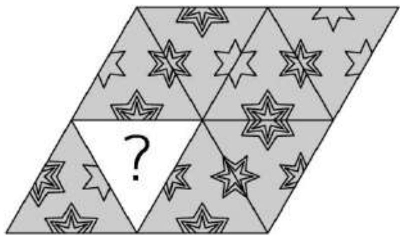
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. Jeder dieser 6 Bausteine besteht aus 5 kleinen Würfeln. Die kleinen Würfel sind entweder weiß oder grau. Würfel gleicher Farbe berühren sich nicht. Wie viele kleine weiße Würfel gibt es insgesamt?



(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 18 (E) 30

13. Welcher Teil fehlt?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. Entlang einer geraden Rennstrecke werden 11 Fahnen aufgestellt. Die erste Fahne steht beim Start, die letzte Fahne beim Ziel. Zwischen zwei Fahnen ist der Abstand immer 8 Meter. Wie lang ist die Rennstrecke?

(A) 24 Meter (B) 48 Meter (C) 72 Meter (D) 80 Meter (E) 88 Meter

15. Einige Seeräuber klettern hintereinander an einem Seil auf ein Schiff. Der Räuberhauptmann ist genau in der Mitte. Er klettert als achter auf das Schiff. Wie viele Seeräuber klettern auf das Schiff?

(A) 16 (B) 15 (C) 12 (D) 8 (E) 7

MATHEMATICS KANGAROO 2015
Austria - 23. 3. 2015

Level: Felix, Grades 1 – 2

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
15 Starting points 2015
Each correct answer to questions 1. – 5.: 3 Points
Each correct answer to questions 6. – 10.: 4 Points
Each correct answer to questions 11. – 15.: 5 Points
Each question left unanswered: 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for that question are deducted.

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

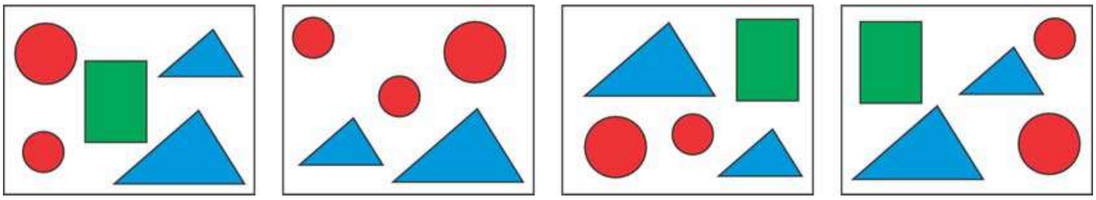
11	12	13	14	15

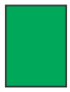
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2015
Group Felix (Grades 1 and 2)
Austria – 23. 3. 2015

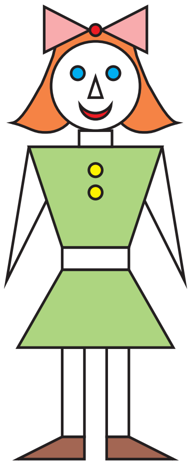
- 3 point questions -

1. Which shape cannot be seen in every picture?



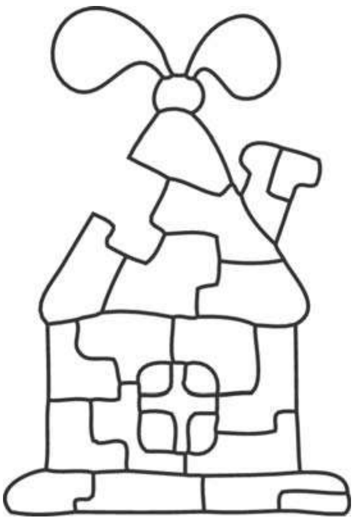
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

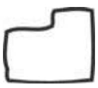
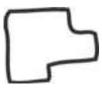
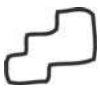
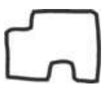
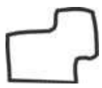
2. How many triangles can you find in the picture?



(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

3. Which part of the house is missing?

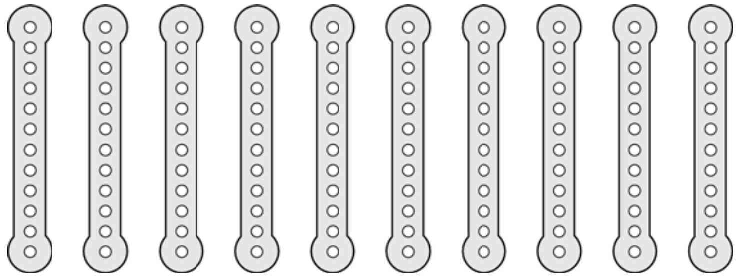


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

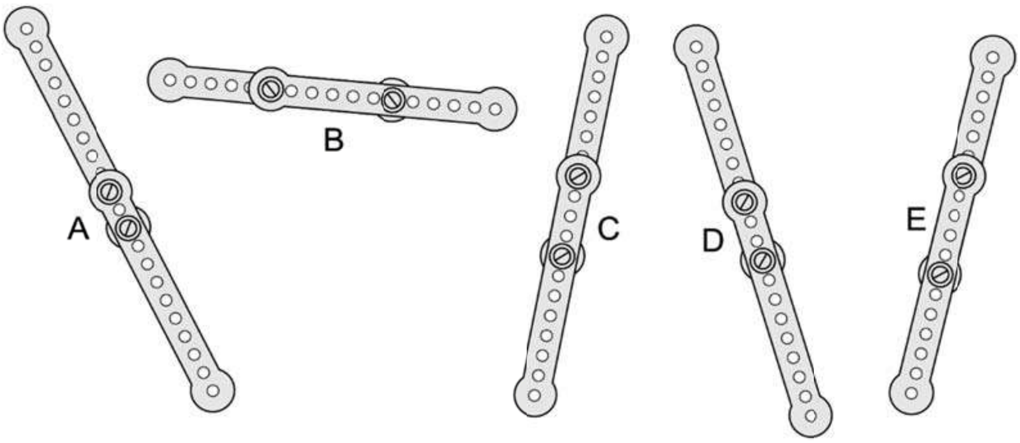
4. How many dots do all ladybirds have together?

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

5. Florian has 10 equally long metal strips with equally many holes.



He bolts the metal strips together in pairs. Now he has five long strips (see the diagram).



Which of the long strips is the shortest?

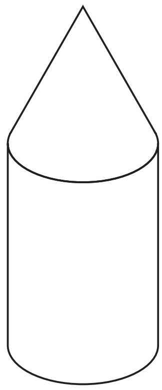
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

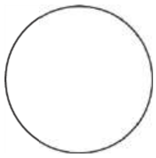
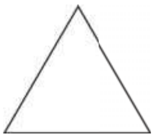
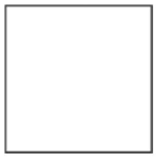
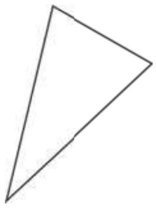
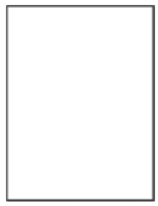
- 4 point questions -

6. Which of the kangaroo cards shown below can be turned around so that it then looks the same as the card shown on the right?

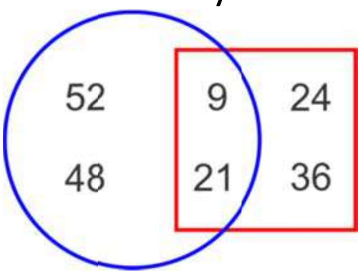
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. What do you see if you look at the tower, which is made up of two building blocks, exactly from above?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8. How many numbers are outside the square?

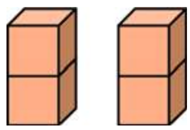


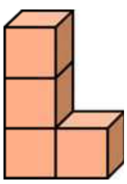
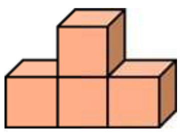
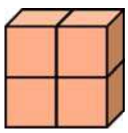
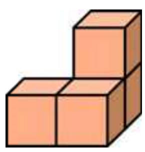
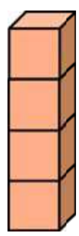
(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

9. It takes Jennifer half an hour to cover half of her journey home from school. How long does it take her to cover the whole journey home?

(A) 15 minutes (B) 30 minutes (C) 40 minutes
(D) 1 hour (E) 2 hours

10. Michael has two building blocks. Each building block is made up of two cubes glued together. Which figure can he not make using the blocks?



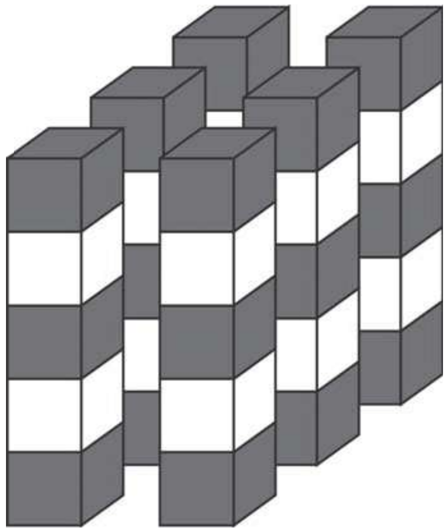
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 5 point questions -

11. Julia has 9 sweets and Katharina has 17 sweets. How many sweets does Katharina have to give to Julia so that they both have the same amount of sweets?

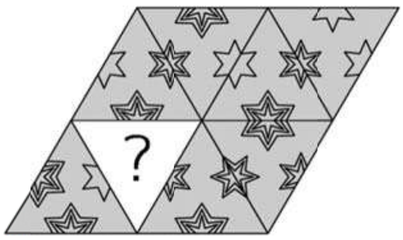
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

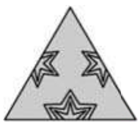
12. Every one of these six building blocks consists of 5 little cubes. The little cubes are either white or grey. Cubes of equal colour don't touch each other. How many little white cubes are there in total?



(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 18 (E) 30

13. Which piece is missing?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. 11 Flags are placed alongside a straight race course. The first flat is at the start, the last one at the finish. The distance between two flags is always 8 meters. How long is the race course?

(A) 24 meters (B) 48 meters (C) 72 meters (D) 80 meters (E) 88 meters

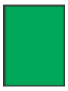
15. Some pirates are climbing onto a ship one after the other using a rope. Their leader is exactly in the middle. He is the eighth pirate to climb onto the ship. How many pirates board the ship?

(A) 16 (B) 15 (C) 12 (D) 8 (E) 7

Känguru der Mathematik 2015 – Lösungen
Gruppe Felix (ab 1. und 2. Schulstufe)
Österreich

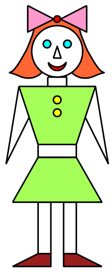
- 3 Punkte Beispiele -

1. Das grüne Rechteck kommt nicht im zweiten Bild vor.

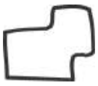
(D) 

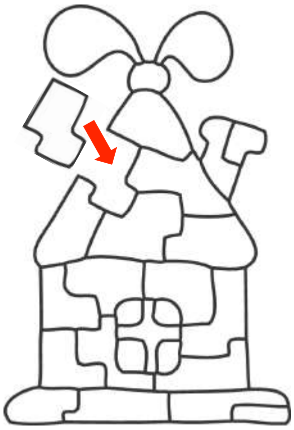
2. Im Bild sind 5 Dreiecke vorhanden: Haarspange (2), Nase (1), Arme (2)

(C) 5



3. Es fehlt folgender Teil:

(E) 

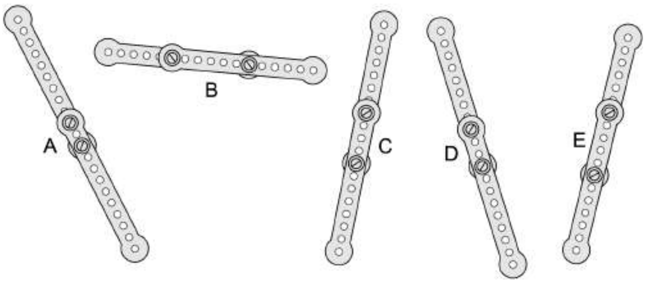


4. Alle Marienkäfer haben zusammen 2+3+3+5+6 = 19 Punkte.

(C) 19

5. Es ist jener lange Streifen am kürzesten, welcher zwischen den beiden Schrauben am meisten Löcher aufweist. Beim lange Streifen B sind zwischen den Schrauben 5 Löcher vorhanden. Bei allen anderen langen Streifen ist die relevante Anzahl an Löchern geringer.

(B) B

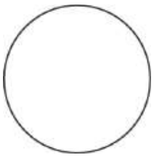


- 4 Punkte Beispiele -

6. Das Kängurukärtchen  muss lediglich einmal nach links gekippt werden (Drehung um 90° nach links), dass es so aussieht wie das rechts abgebildete Kärtchen. 

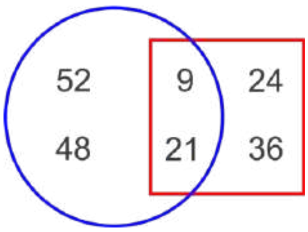
(E) 

7. Man sieht einen Kreis.

(A) 

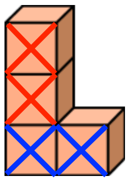
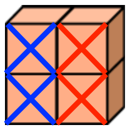
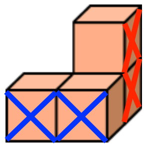
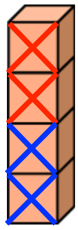
8. Die beiden Zahlen 48 und 52 befinden sich zwar innerhalb des blauen Kreises, aber außerhalb des roten Quadrats.

(E) 2

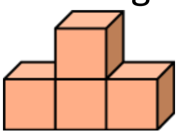


9. Der Heimweg von Jennifer kann in zwei gleich lange Hälften aufgeteilt werden. Sie muss also alle zwei Hälften bewältigen, damit sie zuhause ankommt. Wenn Jennifer für eine Hälfte 30 Minuten braucht, dann braucht sie für die zwei Hälften 60 Minuten (= 1 Stunde).
(D) 1 Stunde

10. Die nachstehenden Figuren kann Michael mit den beiden Bausteinen (1. Baustein: rote Markierung, 2. Baustein: blaue Markierung) bauen:

(A)  (C)  (D)  (E) 

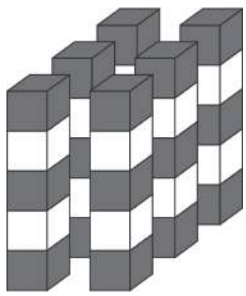
Nur eine Figur kann Michael nicht bauen:

(B) 

- 5 Punkte Beispiele -

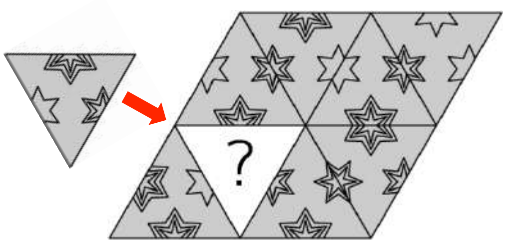
11. Wenn Katharina 4 Zuckerl an Julia abgibt, dann hat sowohl Julia als auch Katharina 13 Zuckerl (17-4 = 13 und 9+4 = 13).
(C) 4

12. Jeder der 6 Bausteine beinhaltet 2 kleine weiße Würfel. Das bedeutet, dass alle 6 Bausteine zusammen 12 (= 2 · 6) kleine weiße Würfel beinhalten.
(C) 12



13. Es fehlt folgender Teil:

(A) 



14. Von den 11 Fahnen steht die erste beim Start und die letzte beim Ziel. Somit bleiben 9 Fahnen übrig um die Rennstrecke in jeweils 8 Meter lange Abschnitte zu teilen. Nachdem sich mit 9 Fahnen 10 Abschnitte ergeben, ist die Rennbahn 80 (= 10 · 8) Meter lang.
(D) 80 Meter

15. Wenn der Räuberhauptmann als achter auf das Schiff klettert, dann sind zuvor 7 Seeräuber hinaufgeklettert. Nachdem der Räuberhauptmann genau in der Mitte ist, müssen auch nach ihm 7 Seeräuber hinaufklettern. Insgesamt – mit dem Räuberhauptmann – klettern also 15 (7+1+7 = 15) Seeräuber auf das Schiff.
(B) 15

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Ecolier, Schulstufe: 3 – 4

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
24 Basispunkte

jede richtige Antwort Beispiel 1. – 8.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. – 16.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. – 24.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte
jede falsche Antwort:	Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

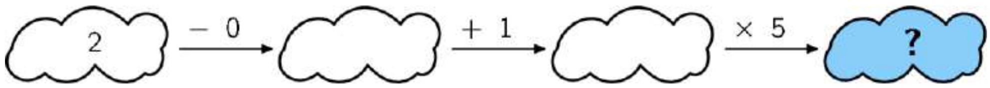
9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

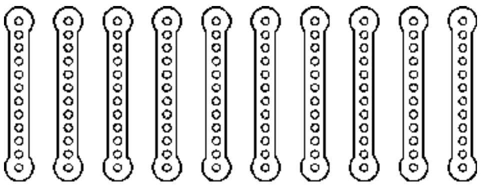
Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2015

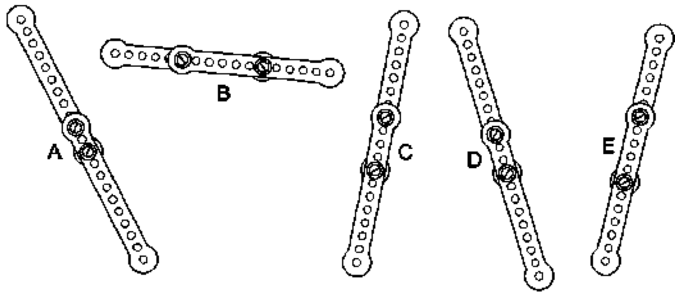
- 3 Punkte Beispiele -

1. 

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

2. Florian hat 10 gleiche Metallstreifen mit gleich vielen Löchern (linke Abbildung). Er schraubt jeweils zwei dieser Metallstreifen zusammen. So erhält er die fünf langen Streifen in der Abbildung rechts.

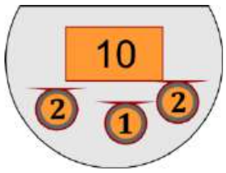


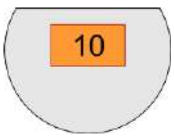


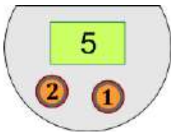
Welcher der langen Streifen ist der längste?

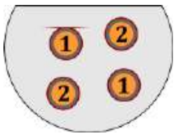
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

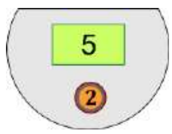
3. Im Känguruland verwendet man zum Bezahlen “Kangas”. Lucy hat einige Kangas in ihrer Geldtasche. Sie kauft einen Ball und bezahlt dafür 7 Kangas. Wie viele Kangas hat sie noch, nachdem sie den Ball bezahlt hat?



(A) 

(B) 

(C) 

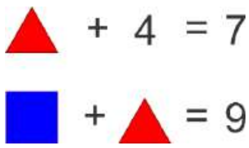
(D) 

(E) 

4. Multipliziert man die beiden Ziffern der Zahl 35, dann erhält man 15.
Wie groß ist die Summe der beiden Ziffern?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

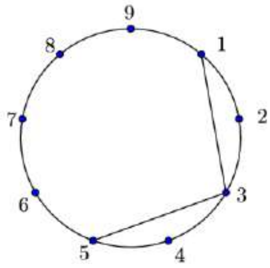
5. Welche Zahl versteckt sich hinter dem Quadrat?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

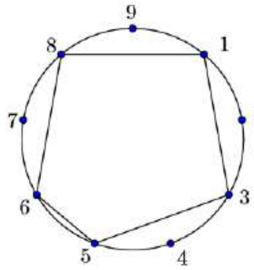


6. Auf der Oberseite meines Schirmes steht das Wort KANGAROO.
Welches der fünf Bilder zeigt ebenfalls meinen Schirm?

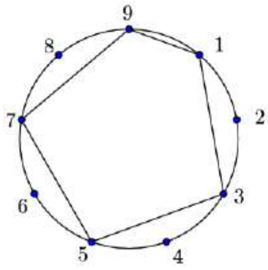
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Auf einem Kreis sind neun Punkte gezeichnet und mit 1 bis 9 nummeriert. Der Punkt 1 wird mit 3 verbunden, 3 mit 5. Zeichne so weiter und verbinde immer wieder zum übernächsten Punkt. Welche Figur erhältst du, wenn du weitermachst, bis du wieder genau zum Punkt 1 kommst?

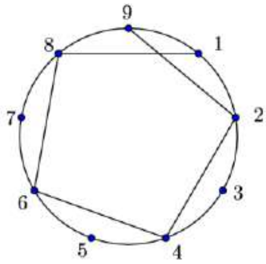




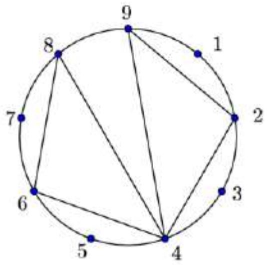
(A)



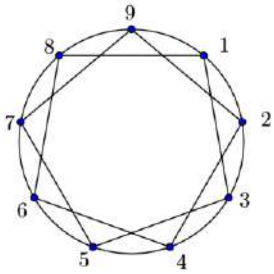
(B)



(C)

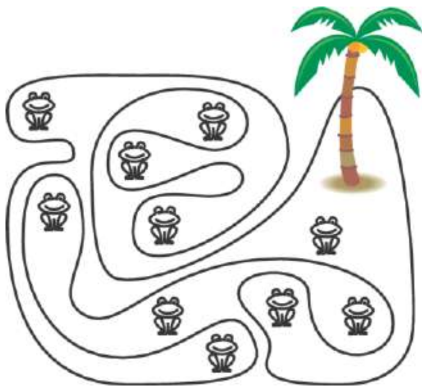


(D)



(E)

8. In der Abbildung siehst du eine sehr zerklüftete Insel.
Manche Frösche sitzen im Wasser.
Wie viele Frösche sitzen auf der Insel?



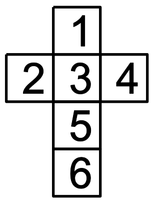
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

- 4 Punkte Beispiele -

9. Luis hat 7 Äpfel und 2 Bananen. Er gibt 2 Äpfel seinem Freund Jakob, der ihm dafür Bananen gibt. Danach hat Luis gleich viele Äpfel wie Bananen. Wie viele Bananen bekam Luis von Jakob?

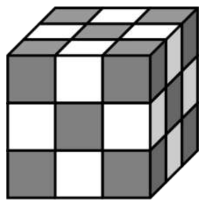
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

10. Julia faltet den rechts abgebildeten Bastelbogen zu einem Würfel. Welche Zahl steht auf der Fläche, die der Fläche mit der Zahl 3 gegenüber liegt?



(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Jack baut einen Würfel, der aus 27 kleinen Würfeln besteht. Die kleinen Würfel sind entweder grau oder weiß, wie in der Zeichnung. Zwei kleine Würfel mit der gleichen Farbe dürfen nicht nebeneinander liegen. Wie viele kleine weiße Würfel hat Jack verwendet?



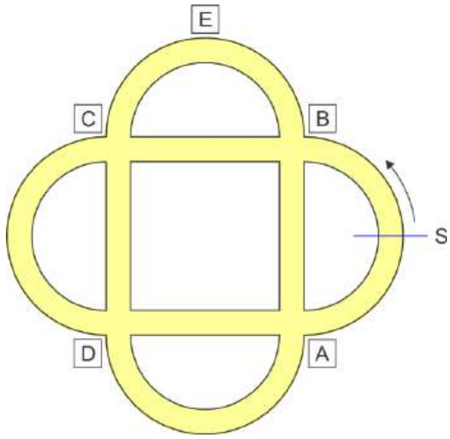
(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

12. Bei einem Laufwettbewerb starteten 10 Läufer. Im Ziel lagen hinter Thomas drei Läufer mehr als vor ihm. Welchen Rang erreichte Thomas?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 7

13. Josef hat ein Spielzeugauto, einen Teddybären, einen Ball und ein Schiff. Er möchte sie im Regal neu anordnen. Das Schiff muss neben dem Auto stehen und auch der Teddybär soll neben dem Auto stehen.
Auf wie viele Arten kann er dann sein Spielzeug anordnen?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

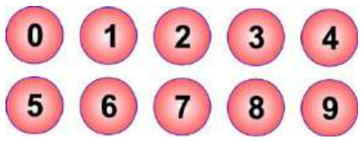


14. Peter fährt mit seinem Fahrrad auf den Fahrradwegen eines Parks. Er startet beim Punkt S und fährt in Richtung des Pfeiles. Bei der ersten Kreuzung biegt er nach rechts ab, bei der nächsten nach links, dann wieder nach rechts und wieder nach links. An welcher Kreuzung kommt er nicht vorbei?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

15. Zwei der fünf Marienkäfer im Bild sind immer dann mit einander befreundet, wenn der Unterschied ihrer Punkte genau 1 beträgt. Heute hat jeder Marienkäfer jedem Freund eine SMS geschrieben. Wie viele SMS wurden geschrieben?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

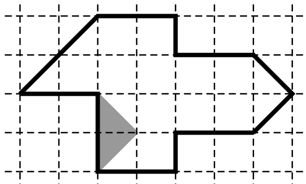


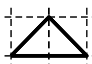
16. In einem Korb befinden sich 10 Bälle, die mit den Nummern 0 bis 9 beschriftet sind. John und Georg spielen ein Spiel. Jeder darf drei der Bälle aus dem Korb nehmen und die Zahlen auf seinen Bällen zusammenzählen. Was ist der größte Unterschied, den die Zahlen von John und Georg haben können?

(A) 1 (B) 12 (C) 18 (D) 19 (E) 21

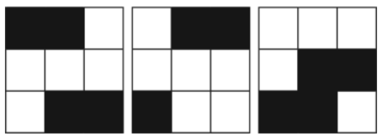
- 5 Punkte Beispiele -

17. Luca möchte die gezeichnete Figur 1 in gleich große kleine Dreiecke (wie in Figur 2) zerschneiden. Ein solches Dreieck ist bereits eingezeichnet. Wie viele solche Dreiecke erhält er?
(A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16


Figur 1

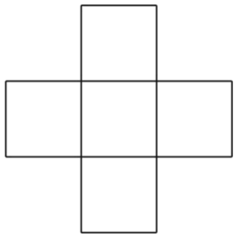

Figur 2

18. Auf jeder von drei gleich großen quadratischen Klarsichtfolien sind einige der neun kleinen Quadrate schwarz gefärbt. Schiebt man die drei Folien ohne sie vom Tisch zu nehmen genau übereinander, so entsteht ein neues Muster.
Wie viele schwarze Quadrate kann man in diesem neuen Muster höchstens sehen?



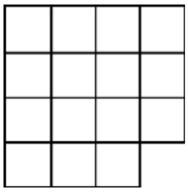
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

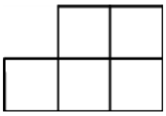
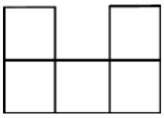
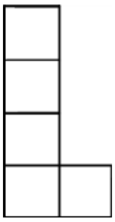
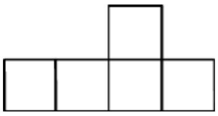
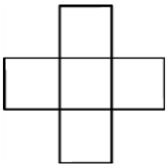
19. Die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 9 werden in die Quadrate der folgenden Figur geschrieben. Die Summe der drei Zahlen in der waagrechten Reihe soll gleich groß sein wie die Summe der drei Zahlen in der senkrechten Spalte. Welche Zahl steht in der Mitte?



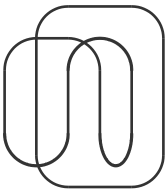
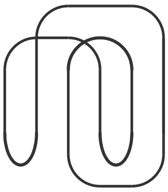
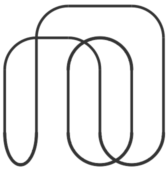
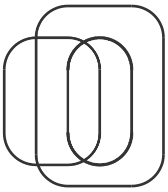
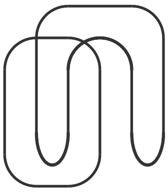
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 9

20. Die abgebildete Figur wird in drei gleiche Teile geteilt.
Wie sieht einer dieser Teile aus?

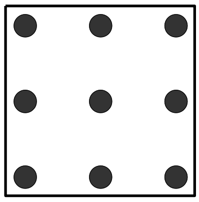


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

21. Welche Abbildung zeigt eine einzige große Schleife?

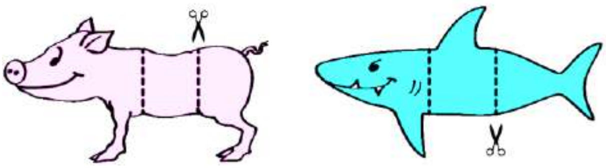
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

22. In diesem Quadrat befinden sich neun Punkte. Die Abstände der Punkte sind immer gleich groß.
Man kann Quadrate zeichnen, indem man 4 Punkte verbindet.
Wie viele verschiedene Größen können solche Quadrate haben?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

23. Thomas zeichnet ein Schwein und einen Hai. Er schneidet jedes Tier in drei Teile. Dann nimmt er einen der zwei Köpfe, einen der zwei Mittelteile und eines der beiden Hinterteile und legt damit wieder ein Tier.
Wie viele verschiedene Tiere kann er so bilden?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 8

24. Anna, Berta, Charlie, David und Elisa haben am Wochenende Kekse gebacken. Anna hat 24, Berta 25, Charlie 26, David 27 und Elisa 28 Kekse gebacken. Als das Wochenende vorbei war, hatte eines der Kinder 2-mal so viele, eines 3-mal, eines 4-mal, eines 5-mal und eines 6-mal so viele Kekse, wie am Samstag.
Wer hat am Samstag am meisten Kekse gebacken?

(A) Anna (B) Berta (C) Charlie (D) David (E) Elisa

MATHEMATICS KANGAROO 2015
Austria - 23. 3. 2015

Level: Ecolier, Grade: 3 – 4

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 Starting points

Each correct answer to questions 1. – 8.:	3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.:	4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.:	5 Points
Each question left unanswered	0 Points
Each incorrect answer	¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

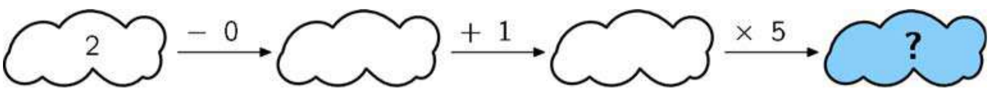
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2015
Group Ecolier (Grade 3 and 4)
Austria – 23. 3. 2015

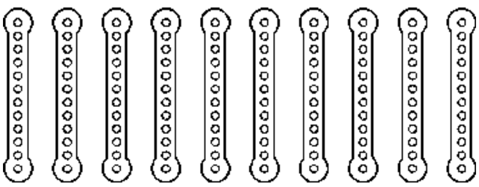
- 3 point questions -

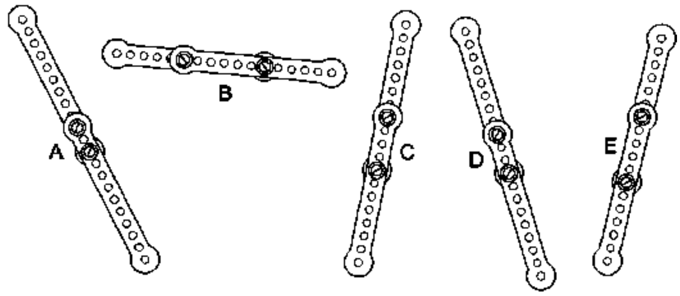
1.



(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

2. Florian has 10 identical metal strips, each with the same amount of holes (picture on the left). He bolts these strips in pairs. That way he gets the 5 long strips in the picture on the right.

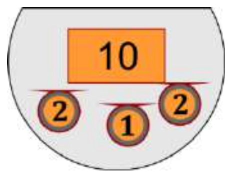


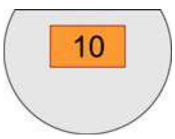


Which of the long strips is the longest?

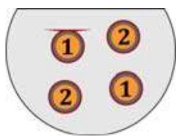
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

3. In kangaroo land you pay with “Kangas”. Lucy has a few Kangas in her purse. She buys a ball and pays 7 Kangas. How many Kangas does she have left over, after she has paid fort he ball?



(A) 

(B) 

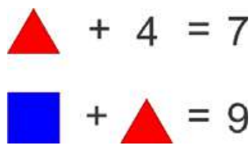
(C) 

(D) 

(E) 

4. If you multiply both digits of the number 35, you get 15. How big is the sum of both digits?
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

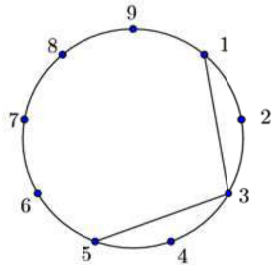
5. Which number is hidden behind the square?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

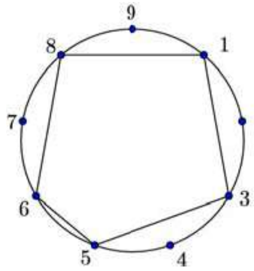


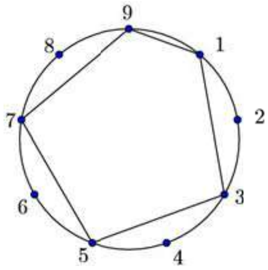
6. The word Kangaroo is written on the top of my umbrella. Which of the 5 pictures shows my umbrella

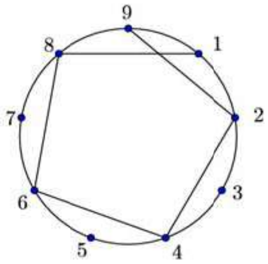
(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

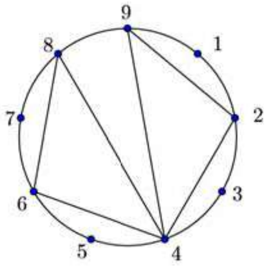
7. 9 points, numbered 1 to 9 are marked on a circle. Point 1 is joined to point 3, 3 to 5. Continue the drawing, always joining to the next but one point along. Which drawing do you get if you keep going until you get back to point 1?

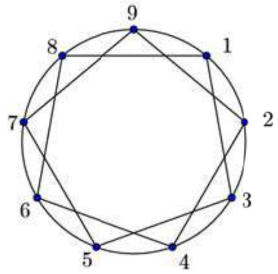


(A) 

(B) 

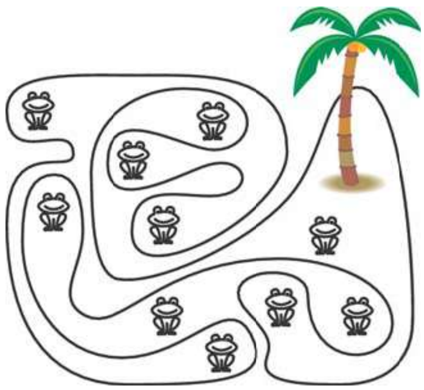
(C) 

(D) 

(E) 

8. In the diagram you can see a very ragged island. Some of the frogs are sitting in the water. How many are sitting on the island?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

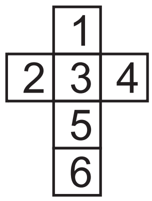


- 4 point questions -

9. Luis has got 7 apples and 2 bananas. He gives 2 apples to his friend Jacob, who gives him bananas in return. Afterwards Luis has got the same amounts of apples as bananas. How many bananas did Luis get from Jacob?

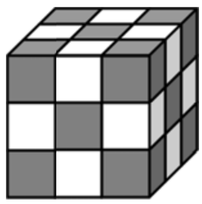
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

10. Julia folds the paper net pictured on the right, into a cube. Which number is on the face that is opposite to the face with the number 3?



(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Jack makes a cube from 27 small cubes. The small cubes are either grey or white as shown in the diagram. Two small cubes with the same colour are not allowed to be placed next to each other. How many small, white cubes has Jack used?



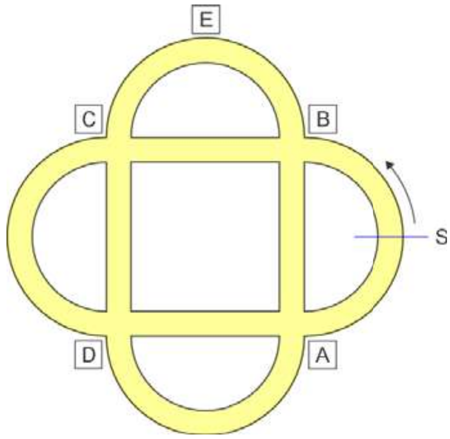
(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

12. 10 runners start in a running race. At the finish, there are 3 more runners behind Thomas than there are in front of him. In which position did Thomas finish?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 7

13. Joseph has got a toy car, a teddy bear, a ball and a ship. He wants to put them in a new order on the shelf. The ship must be next to the car, and the teddy bear should also be next to the car. In how many different orders can he put the toys on the shelf?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

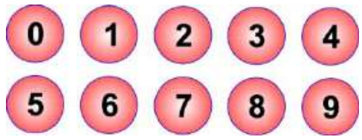


14. Peter rides his bike along a cycle path in a park. He starts at point S and rides in the direction of the arrow. At the first crossing he turns right, then at the next left, and then again to the right and then again to left. Which crossing does he not reach?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

15. Two of the 5 ladybirds in the picture are always friends with each other if the difference between their number of dots is exactly 1. Today every ladybird has sent an SMS to each of their friends. How many SMS messages were sent?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9



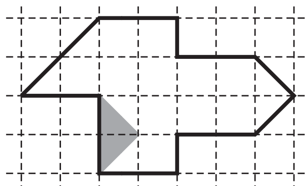
16. There are 10 balls, numbered 0 to 9 in a basket. John and George play a game. Each person is allowed to take three balls from the basket and calculate the total of the numbers on the balls. What is the biggest possible difference between the john and Georges totals?

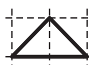
(A) 1 (B) 12 (C) 18 (D) 19 (E) 21

- 5 point questions -

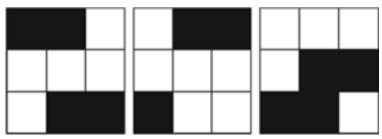
17. Luca wants to cut the shape in figure 1 into equally sized small triangles (like those in figure 2). One of these triangles is already drawn on figure 1. How many of these triangles will he get?

(A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16


Figur 1

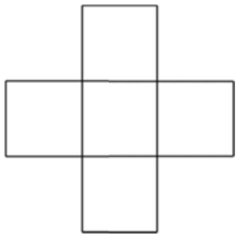

Figur 2

18. Some of the small squares on each of the square transparencies have been coloured black. If you slide the three transparencies on top of each other, without lifting them from the table, a new pattern can be seen. What is the maximum number of black squares which could be seen in the new pattern?



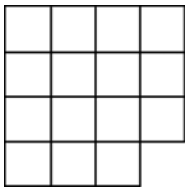
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

19. The numbers 1, 2, 3, 4 and 9 are written into the squares on the following figure. The sum of the three numbers in the horizontal row, should be the same as the sum of the three numbers in the vertical column. Which number is written in the middle?

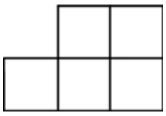
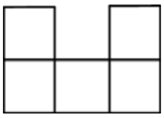
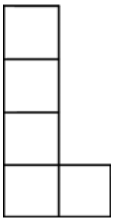
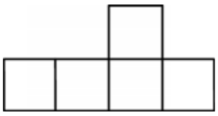
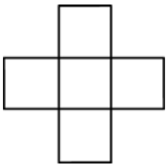


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 9

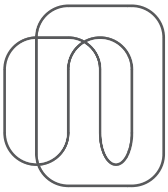
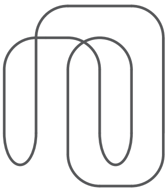
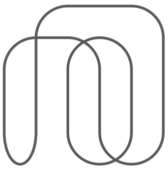
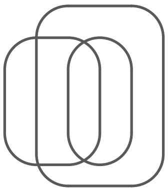
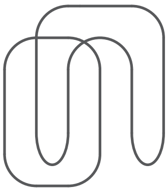
20. The shape in the picture is to be split into three identical pieces.



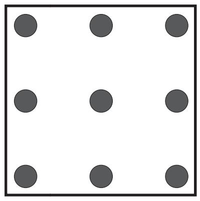
What does one of these pieces look like?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

21. Which picture shows a single large loop?

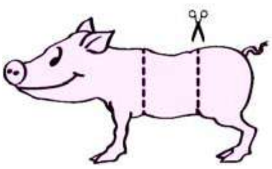
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

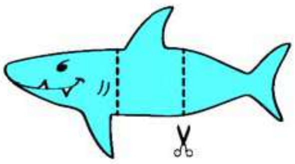
22. In this square there are 9 dots. The distance between the points is always the same. You can draw a square by joining 4 points. How many different sizes can such squares have?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

23. Thomas drew a pig and a shark. He cuts each animal into three pieces. Then he takes one of the two heads, one of the two middle sections and one of the two tails and lays them together to make another animal. How many different animals can he make in this way?





(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 8

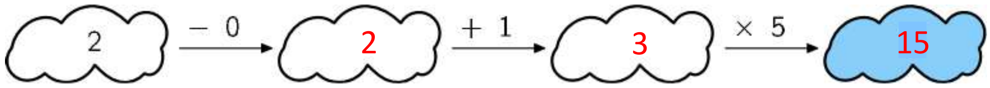
24. Anna, Berta, Charlie, David and Elisa baked biscuits at the weekend. Anna baked 24, Berta 25, Charlie 26, David 27 and Elisa 28 biscuits. By the end of the weekend one of the children had twice as many, one 3 times, one 4 times, one 5 times and one 6 times as many biscuits as on Saturday. Who baked the most biscuits on Saturday?

(A) Anna (B) Berta (C) Charlie (D) David (E) Elisa

Känguru der Mathematik 2015 – Lösungen
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich

- 3 Punkte Beispiele -

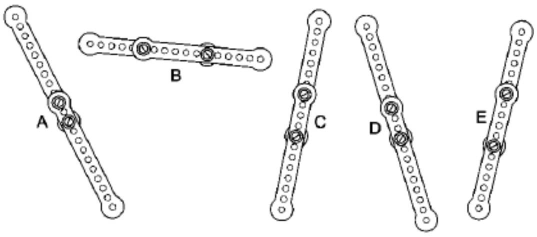
1.



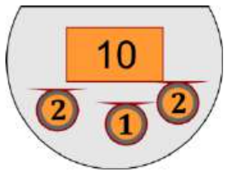
(E) 15

2. Es ist jener lange Streifen am längsten, welcher zwischen den beiden Schrauben am wenigsten Löcher aufweist. Beim langen Streifen A ist zwischen den Schrauben lediglich 1 Loch vorhanden. Bei allen anderen langen Streifen ist die relevante Anzahl an Löchern höher.

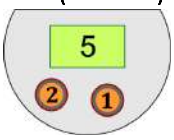
(A) A



3. Lucy hat in ihrer Geldtasche 15 (= 10+2+2+1) Kangas. Wenn sie davon 7 Kangas für das Kaufen des Balles benötigt, dann bleiben ihr noch 8 (= 15-7) Kangas in der Geldtasche übrig.



(B)



4. Die Zahl 35 besteht aus den beiden Ziffern 3 und 5. Die Summe der beiden Ziffern ist also 8 (= 3+5).

(E) 8

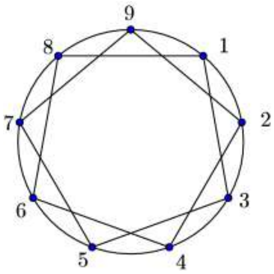
5. Hinter dem Dreieck versteckt sich die Zahl 3 (3+4 = 7). Hinter dem Quadrat versteckt sich somit die Zahl 6 (6+3 = 9).

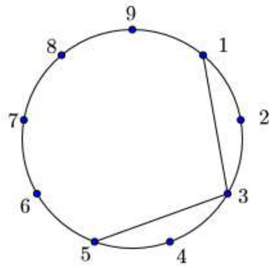
(E) 6

6. Bild (A) zeigt ebenfalls meinen Schirm: KANGAROO

(A)

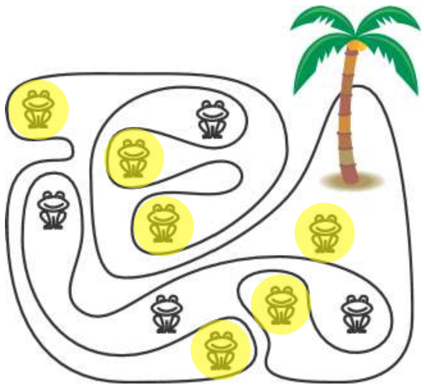
7. Folgende Punkte werden aufgrund der Vorgabe miteinander verbunden:
1 mit 3, 3 mit 5, 5 mit 7, 7 mit 9, 9 mit 2, 2 mit 4, 4 mit 6, 6 mit 8, 8 mit 1.
Es ergibt sich folgende Figur:





(E)

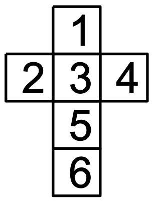
8. Diejenigen Frösche, welche auf der Insel sitzen, sind gelb markiert. Es sitzen also insgesamt 6 Frösche auf der Insel.
(B) 6



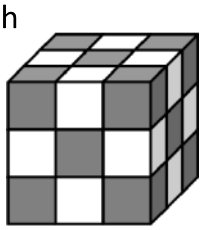
- 4 Punkte Beispiele -

9. Wenn Luis seinem Freund Jakob 2 Äpfel gibt, dann hat er danach 5 Äpfel und 2 Bananen. Damit er nun gleich viele Äpfel wie Bananen hat, muss er 3 (5 = 2+3) Bananen von Jakob bekommen.
(B) 3

10. Angenommen die Fläche mit der Zahl 3 bildet die Grundfläche. Dann sind die Flächen mit den Zahlen 1, 4, 5 und 2 die Seitenfläche. Die Deckfläche, welche der Grundfläche gegenüberliegt, hat dann die Zahl 6.
(E) 6



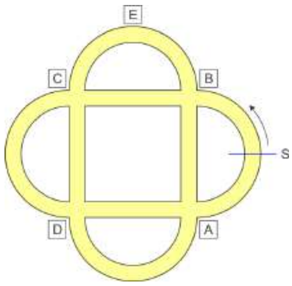
11. Schaut man von vorne auf den Würfel, dann sieht man lediglich die „vordere Schicht“, die 4 kleine weiße Würfel beinhaltet. Die „hintere Schicht“ ist ident aufgebaut, wodurch diese auch 4 kleine weiße Würfel beinhaltet. Die Schicht dazwischen, die „mittlere Schicht“, ist genau umgekehrt wie die vordere bzw. hintere Schicht aufgebaut; sie beinhaltet 5 kleine weiße Würfel (und 4 kleine graue Würfel). Jack hat insgesamt somit 13 (= 4+5+4) kleine weiße Würfel verwendet.
(C) 13



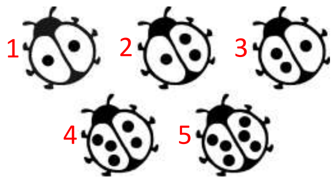
12. Thomas erreicht den Rang 4. Somit liegen 3 Läufer vor ihm (der Erst-, Zweit- und Drittplatzierte) und 6 Läufer (also um 3 Läufer mehr) hinter ihm.
(C) 4

13. Das Auto steht zwischen dem Schiff und dem Teddybär. Dies kann auf zweierlei Arten der Fall sein: Schiff, Auto, Teddybär oder Teddybär, Auto, Schiff. Für jeden der beiden Fälle kann nun der Ball am Anfang oder am Ende stehen. Folgende 4 Fälle sind also möglich:
Ball, Schiff, Auto, Teddybär oder Schiff, Auto, Teddybär, Ball oder Ball, Teddybär, Auto, Schiff oder Teddybär, Auto, Schiff, Ball.
(B) 4

14. Wenn Peter bei der ersten Kreuzung (B) nach rechts abbiegt, dann kommt er als nächstes zur Kreuzung C (E wird hierbei passiert). Wenn Peter bei der Kreuzung C nach links abbiegt, dann kommt er als nächstes zur Kreuzung B. Wenn Peter bei der Kreuzung B nach rechts abbiegt, dann kommt er als nächstes zur Kreuzung A. Wenn Peter bei der Kreuzung A nach links abbiegt, dann kommt er als nächstes zur Kreuzung B. Dementsprechend kommt Peter nicht an der Kreuzung D vorbei.
(D) D



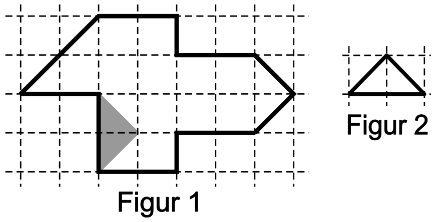
15. Es gibt insgesamt 3 Freundschaften: Marienkäfer 1 mit Marienkäfer 2, Marienkäfer 1 mit Marienkäfer 3, Marienkäfer 4 mit Marienkäfer 5. Wenn nun jeder Marienkäfer jedem Freund ein SMS scheibt, dann schreibt Marienkäfer 1 zwei SMS und die Marienkäfer 2, 3, 4 und 5 jeweils ein SMS, also werden insgesamt 6 (= 1 · 2 + 4 · 1) SMS geschrieben.
(C) 6



16. Der Unterschied ist umso größer, je größer die Zahlensumme des einen Spielers und je kleiner die Zahlensumme des anderen Spielers ist. Die größte Zahlensumme (= 24) wird erreicht, wenn ein Spieler die Bälle mit den Nummern 7, 8 und 9 aus dem Korb nimmt. Die kleinste Zahlensumme (= 3) wird erreicht, wenn ein Spieler die Bälle mit den Nummern 0, 1 und 2 aus dem Korb nimmt. Somit ist der größte Unterschied 21 (= 24-3).
(E) 21

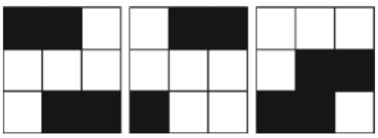
17. Ein kleines Dreieck hat eine Fläche von einem „Rasterquadrat". Die Figur 1 hat eine Fläche von 15 „Rasterquadraten". Somit kann Luca die Figur 1 in (maximal) 15 derartige kleine Dreiecke zerschneiden.

(D) 15



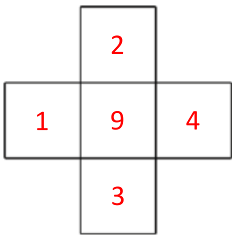
18. Es ist nicht möglich, dass in dem neuen Muster alle neun kleinen Quadrate schwarz gefärbt sind. Es bleibt mindestens ein kleines Quadrat weiß. Eine Möglichkeit, damit ein neues Muster entsteht, bei welchem acht kleine Quadrate schwarz gefärbt sind, wäre die folgende: Die rechte große Klarsichtfolie wird nach links gekippt (Drehung um 90° nach links) und über die mittlere große Klarsichtfolie geschoben. Die linke große Klarsichtfolie wird nach rechts gekippt (Drehung um 90° nach rechts) und über die mittlere große Klarsichtfolie geschoben. Dann liegen alle drei großen Klarsichtfolien übereinander und ergeben ein neues Muster, das aus acht kleinen schwarzen und einem kleinen weißen Quadrat (rechts unten) besteht.

(D) 8

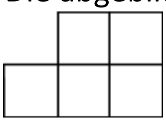


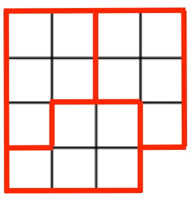
19. Die Zahl 9 muss in das Quadrat „in der Mitte" geschrieben werden. Würde die Zahl 9 in ein anderes Quadrat geschrieben werden, dann wäre entweder die Summe der drei Zahlen in der waagrechten Reihe oder die Summe der drei Zahlen in der senkrechten Spalte mindestens 12 (= 1+2+9). In diesem Fall kann die zweite resultierende Summe (Reihensumme oder Spaltensumme) aber maximal 9 (= 2+3+4) sein. In der Abbildung ist eine konkrete Lösungsvariante präsentiert.

(E) 9



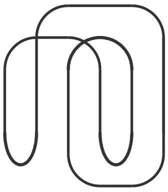
20. Die abgebildete Figur kann in folgender Art und Weise in drei gleiche Teile geteilt werden:

(A) 



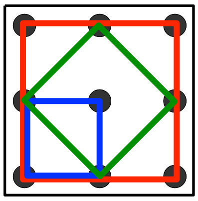
21. Startet man bei Abbildung (B) irgendwo auf der Linie (Kreuzungspunkte sind ausgenommen) und fährt diese mit einem Stift in die eine oder andere Richtung nach, dann kommt man erst dann wieder zum Startpunkt zurück, wenn die ganze „Figur“ durchlaufen wurde.

(B)



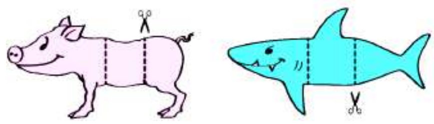
22. Die Quadrate können drei unterschiedliche Größen haben. Exemplarisch sind in der nachstehenden Abbildung drei Quadrate (blau, grün und rot) mit unterschiedlichen Größen eingezeichnet.

(D) 3



23. Thomas hat 2 Möglichkeiten einen Kopf auszuwählen. Für jede dieser 2 Möglichkeiten hat er 2 Möglichkeiten einen Mittelteil auszuwählen. Das heißt, Thomas hat insgesamt 4 (= 2 · 2) Möglichkeiten Kopf und Mittelteil in der gewünschten Reihenfolge anzuordnen. Für jede dieser 4 Möglichkeiten hat er 2 Möglichkeiten ein Hinterteil auszuwählen. Das heißt, Thomas hat insgesamt 8 (= 4 · 2) Möglichkeiten Tiere zu bilden.

(E) 8



24. Es ist also zu untersuchen, welche Anzahl an Keksen, die über das gesamte Wochenende von den jeweiligen Personen gebacken wurden, eine 2-fache, 3-fache, 4-fache, 5-fache oder 6-fache Anzahl von den am Samstag gebackenen Keksen sein kann. Genauer gesagt ist zu überprüfen, welche der Zahlen 24, 25, 26, 27 und 28 durch die Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 geteilt werden können. Unter den gegebenen Zahlen ist nur die Zahl 24 (gebackene Kekse von Anna) durch 6 teilbar. Somit hat Anna am Samstag 4 (= 24 : 6) Kekse gebacken. Unter den gegebenen Zahlen ist nur die Zahl 25 (gebackene Kekse von Berta) durch 5 teilbar. Somit hat Berta am Samstag 5 (= 25 : 5) Kekse gebacken. Unter den gegebenen Zahlen sind die Zahlen 24 und 28 (gebackene Kekse von Elisa) durch 4 teilbar. Nachdem wir aber bereits wissen, dass die 24 von Anna am gesamten Wochenende gebackenen Kekse die 6-fache Anzahl der von ihr am Samstag gebackene Kekse sein muss, ist nur die Zahl 28 zu betrachten. Somit hat Elias am Samstag 7 (= 28 : 4) Kekse gebacken. Unter den gegebenen Zahlen sind die Zahlen 24 und 27 (gebackene Kekse von David) durch 3 teilbar. Nachdem wir aber bereits wissen, dass die 24 von Anna am gesamten Wochenende gebackenen Kekse die 6-fache Anzahl der von ihr am Samstag gebackene Kekse sein muss, ist nur die Zahl 27 zu betrachten. Somit hat David am Samstag 9 (= 27 : 3) Kekse gebacken. Das heißt, dass die 26 von Charlie am gesamten Wochenende gebackenen Kekse die 2-fache Anzahl der von ihm am Samstag gebackene Kekse sein muss. Somit hat Charlie am Samstag 13 (= 26 : 2) Kekse gebacken, was die meisten am Samstag gebackenen Kekse sind.

(C) Charlie

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5 – 6

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
24 Basispunkte

jede richtige Antwort Beispiel 1. – 8.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. – 16.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. – 24.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte
jede falsche Antwort:	Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

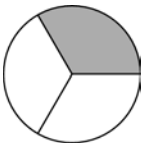
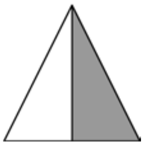
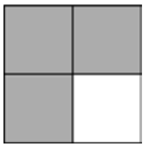
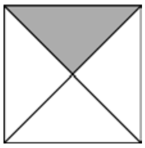
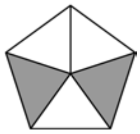
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2015

- 3 Punkte Beispiele -

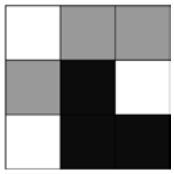
1. In welcher Figur ist genau die Hälfte grau gefärbt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Auf der Oberseite meines Schirmes steht das Wort KANGAROO.
Welches der folgenden Bilder zeigt nicht meinen Schirm?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. Sam bemalte die 9 kleinen Quadrate in der Figur weiß, grau und schwarz.
Wie viele kleine Quadrate muss er mindestens übermalen, damit keine zwei kleinen Quadrate mit gemeinsamer Seite gleiche Farbe haben?

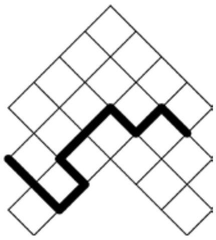


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

4. Herr Bauer hat 10 Enten. 5 dieser Enten legen jeden Tag ein Ei. Die anderen 5 legen jeden zweiten Tag ein Ei. Wie viele Eier haben die 10 Enten nach 10 Tagen gelegt?

(A) 75 (B) 60 (C) 50 (D) 25 (E) 10

5. In der Figur hat jedes Quadrat einen Flächeninhalt von 4 cm².
Welche Länge hat die dicke Linie?

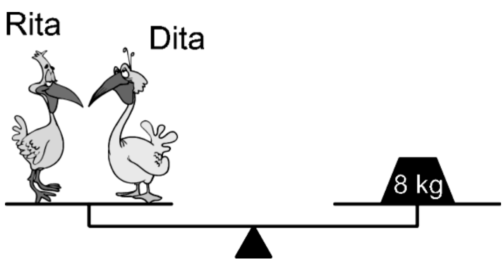


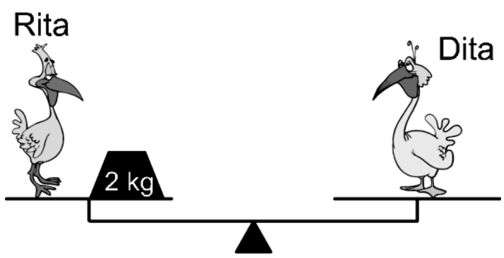
(A) 16 cm (B) 18 cm (C) 20 cm (D) 21 cm (E) 23 cm

6. Welcher der folgenden Brüche ist kleiner als 2?

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{21}{10}$ (D) $\frac{22}{11}$ (E) $\frac{23}{12}$

7.

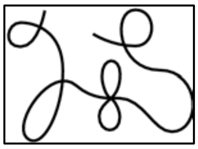




Wie viel wiegt Dita?

(A) 2 kg (B) 3 kg (C) 4 kg (D) 5 kg (E) 6 kg

8. Peter schaut dieses an der Wand hängende Bild mit einer Lupe genauer an:
Welchen Ausschnitt kann er nicht sehen?



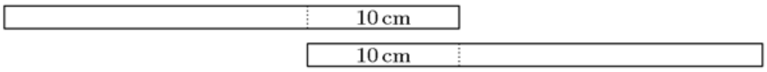
(A)    (B)    (C)    (D)    (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

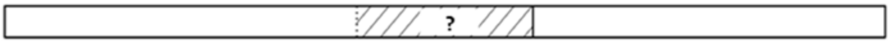
9. Jede Pflanze in Johns Garten hat entweder genau 5 Blätter oder genau 2 Blätter und eine Blüte. Insgesamt haben die Pflanzen 6 Blüten und 32 Blätter. Wie viele Pflanzen wachsen im Garten?

(A) 10   (B) 12   (C) 13   (D) 15   (E) 16

10. Andrea hat 4 gleich große Papierstreifen. Wenn sie zwei mit einer Überlappung von 10 cm zusammenklebt, erhält sie einen Streifen mit 50 cm Länge.

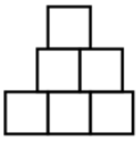


Mit den anderen beiden Papierstreifen möchte sie einen 56 cm langen Streifen herstellen.
Wie lang muss die Überlappung sein?



(A) 4 cm   (B) 6 cm   (C) 8 cm   (D) 10 cm   (E) 12 cm

11. Thomas hat aus 6 Quadraten mit der Seitenlänge 1 folgende Figur gelegt:
Welchen Umfang besitzt die Figur?

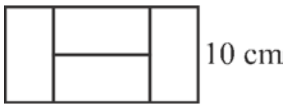


(A) 9   (B) 10   (C) 11   (D) 12   (E) 13

12. Maria schreibt jeden Tag das Datum auf und summiert danach die dabei auftretenden Ziffern.
Zum Beispiel heute, am 23. März, schreibt sie: 23. 03. und rechnet: $2 + 3 + 0 + 3 = 8$.
Welche größte Summe kann sie auf diese Weise während eines Jahres erreichen?

(A) 7   (B) 13   (C) 14   (D) 16   (E) 20

13. Ein Rechteck besteht aus 4 gleich großen kleinen Rechtecken.
Die kürzere Seite hat die Länge 10 cm. Wie lang ist die längere Seite?



(A) 40 cm   (B) 30 cm   (C) 20 cm   (D) 10 cm   (E) 5 cm

14. In der Feldstraße gibt es 9 nebeneinanderstehende Häuser. In jedem Haus lebt zumindest eine Person. Je zwei benachbarte Häuser haben in Summe maximal 6 Bewohner.
Wie viele Bewohner wohnen höchstens in der Feldstraße?

(A) 23   (B) 25   (C) 27   (D) 29   (E) 31

15. Lucy und ihre Mutter wurden im Jänner geboren. Heute, am 23. März 2015, addiert Lucy ihr Geburtsjahr, das ihrer Mutter, sowie ihr Alter und das ihrer Mutter. Welches Ergebnis erhält sie?

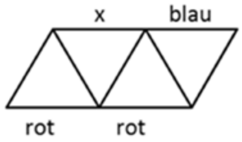
(A) 4028   (B) 4029   (C) 4030   (D) 4031   (E) 4032

16. Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 12 cm^2. Die Längen der Seiten sind natürliche Zahlen.
Welchen Umfang kann das Rechteck haben?

(A) 20 cm   (B) 26 cm   (C) 28 cm   (D) 32 cm   (E) 48 cm

- 5 Punkte Beispiele -

17. Jede der 9 Dreiecksseiten in der Abbildung wird entweder blau, grün oder rot gefärbt. Drei der Strecken sind bereits gefärbt.
Welche Farbe kann die Strecke x haben, wenn jedes Dreieck aus drei verschieden gefärbten Seiten bestehen muss?

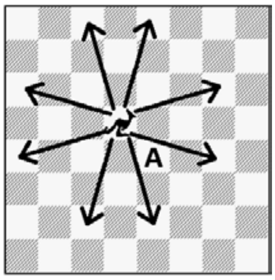


(A) nur blau (B) nur grün (C) nur rot
(D) Jede der drei Farben ist möglich. (E) Die beschriebene Färbung ist nicht möglich.

18. In einem Sack befinden sich 3 grüne Äpfel, 5 gelbe Äpfel, 7 grüne Birnen und 2 gelbe Birnen.
Sebastian nimmt ohne hinzusehen einen Apfel oder eine Birne aus dem Sack.
Wie viele Früchte muss er mindestens aus dem Sack nehmen um sicher zu gehen, zumindest einen Apfel und eine Birne mit der gleichen Farbe entnommen zu haben?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

19. Für das Schachspiel wird eine neue Figur, das Känguru, erfunden.
Bei jedem Sprung springt das Känguru entweder 3 Quadrate senkrecht und 1 waagrecht, oder 3 waagrecht und 1 senkrecht, wie in der Abbildung zu sehen ist.
Wie viele Sprünge muss das Känguru mindestens machen, um von der derzeitigen Position zur Position A zu gelangen?

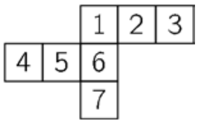


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. Sarah kaufte sich drei Bücher. Für das erste Buch bezahlte sie die Hälfte ihres Geldes und noch 1 Euro mehr. Für das zweite Buch bezahlte sie die Hälfte des übriggebliebenen Geldes und noch 2 Euro mehr. Für das dritte Buch bezahlte sie wieder die Hälfte des übriggebliebenen Geldes und 3 Euro mehr. Dann hatte sie ihr ganzes Geld ausgegeben. Wie viel Geld hatte sie zu Beginn?

(A) 45 € (B) 36 € (C) 34 € (D) 33 € (E) 30 €

21. Nina möchte aus einem Papiernetz einen Würfel basteln.
Versehentlich zeichnete sie 7 Quadrate anstatt 6 Quadrate.
Welches Quadrat kann sie vom Netz entfernen, damit die verbleibenden 6 Quadrate zusammenhängen und sie aus diesem veränderten Netz einen Würfel falten kann?

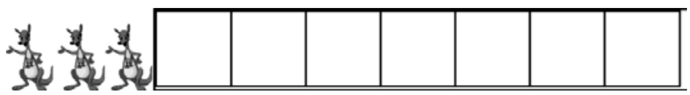


(A) nur 4 (B) nur 7 (C) nur 3 oder 4 (D) nur 3 oder 7 (E) nur 3, 4 oder 7

22. Ein Zug setzt sich aus 12 Waggons zusammen. Jeder Waggon hat gleich viele Abteile.
Mike sitzt im 18. Abteil hinter der Lokomotive, dieses ist im dritten Waggon.
Johanna sitzt im 50. Abteil hinter der Lokomotive, dieses ist im siebten Waggon.
Wie viele Abteile besitzt ein Waggon?

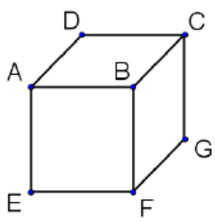
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

23. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Kängurus in drei verschiedene Quadrate so zu stellen, dass kein Känguru einen unmittelbaren Nachbarn hat?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

24. Maria schreibt auf jede Fläche des Würfels eine Zahl. Danach addiert sie für jeden Eckpunkt die Zahlen auf den Flächen, die in diesem Eckpunkt zusammenstoßen.
(Für den Eckpunkt B addiert sie also die Zahlen der Flächen BCDA, BAEF und BFGC.)
Auf diese Weise erhält sie für den Eckpunkt C die Summe 14, für den Eckpunkt D 16 und für den Eckpunkt E 24. Welchen Wert erhält sie für den Eckpunkt F?



(A) 15 (B) 19 (C) 22 (D) 24 (E) 26

MATHEMATICS KANGAROO 2015
Austria - 23. 3. 2015

Level: Benjamin, Grade: 5 – 6

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 Starting points

Each correct answer to questions 1. – 8.:	3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.:	4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.:	5 Points
Each question left unanswered	0 Points
Each incorrect answer	¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24).
Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

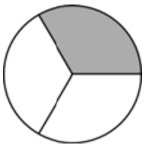
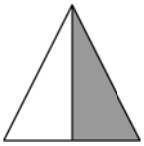
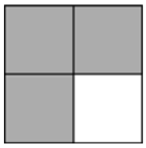
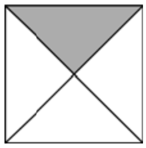
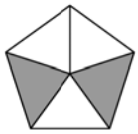
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2015
Group Benjamin (Grade 5 and 6)
Austria - 23. 3. 2015

- 3 point questions -

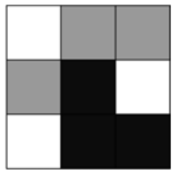
1. In which shape is exactly one half coloured grey?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. The word KANGAROO is written on the top side of my umbrella.
Which of the following pictures does not show my umbrella?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. Sam paints the 9 small squares in the shape either white, grey or black.
What is the minimum number he must paint over so that no two squares sharing a side have the same colour?

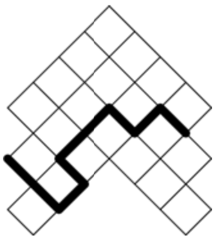


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

4. Mr Bauer has 10 ducks. 5 of these ducks lay an egg every day. The other 5 lay an egg every second day. How many eggs will the 10 ducks have laid after 10 days?

(A) 75 (B) 60 (C) 50 (D) 25 (E) 10

5. Each square in the shape has an area of 4 cm².
How long is the thick line?



(A) 16 cm (B) 18 cm (C) 20 cm (D) 21 cm (E) 23 cm

6. Which of the following fractions is smaller than 2?

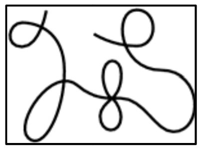
(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{21}{10}$ (D) $\frac{22}{11}$ (E) $\frac{23}{12}$

7.

How much does Dita weigh?

(A) 2 kg (B) 3 kg (C) 4 kg (D) 5 kg (E) 6 kg

8. Peter looks at the picture hanging on the wall in more detail through a magnifying glass. Which section can he not see?



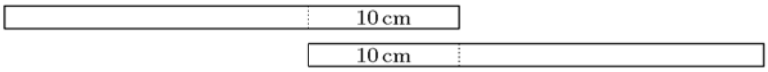
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 point questions -

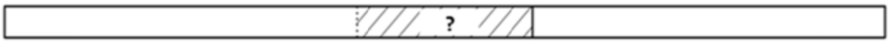
9. Each plant in Johns garden has exactly 5 leaves or exactly 2 leaves and a flower. In total the plants have 6 flowers and 32 leaves.
How many plants are growing in the garden?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 15 (E) 16

10. Andrea has 4 equally long strips of paper. When she glues two together with an overlap of 10cm, she gets a strip 50cm long.

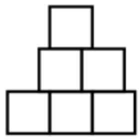


With the other two she wants to make a 56cm long strip. How long must the overlap be?



(A) 4 cm (B) 6 cm (C) 8 cm (D) 10 cm (E) 12 cm

11. Thomas has made the following shape with 6 squares of side length 1.
What is the perimeter of the shape?

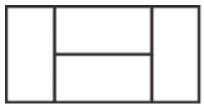


(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

12. Each day Maria writes down the date and then adds together the individual digits. For instance today on the 23rd March she writes 23. 03. and calculates $2 + 3 + 0 + 3 = 8$.
What is the largest total she make in this way in the course of a year?

(A) 7 (B) 13 (C) 14 (D) 16 (E) 20

13. A rectangle is formed from 4 equally sized smaller rectangles.
The shorter side is 10cm long. How long is the longer side?


10 cm

(A) 40 cm (B) 30 cm (C) 20 cm (D) 10 cm (E) 5 cm

14. In Field street there are 9 houses in a row. At least one person lives in each house. Each pair of neighbouring houses have at most 6 inhabitants. What is the maximum number of people living in Field street?

(A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 29 (E) 31

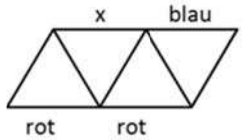
15. Lucy and her mother were both born in January. Today on 23rd March 2015 lucy adds together her year of birth, that of her mother, her age and that of her mother. Which answer does she get?

(A) 4028 (B) 4029 (C) 4030 (D) 4031 (E) 4032

16. A rectangle has area $12\ cm^2$. The lengths of the sides are natural numbers. Which perimeter could the rectangle have?
(A) 20 cm (B) 26 cm (C) 28 cm (D) 32 cm (E) 48 cm

- 5 point questions -

17. Each of the 9 sides of the triangles in the picture will be coloured blue, green or red. Three of the sides are already coloured. Which colour can side x have, if the sides of each triangle must be coloured in three different colours?

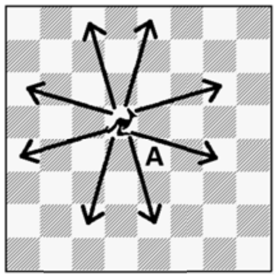


(A) only blue (B) only green (C) only red
(D) Each of the three colours is possible. (E) The colouring described is not possible

18. 3 green apples, 5 yellow apples, 7 green pears and 2 yellow pears are in a sack. Without looking, Sebastian takes either an apple or pear out of the sack. How many pieces of fruit must he take out of the sack to be sure of having at least one apple and one pear of the same colour?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

19. For the game of Chess a new piece, the Kangaroo, has been invented. With each jump the kangaroo jumps either 3 squares vertically and 1 Horizontally, or 3 horizontally and 1 vertically, as pictured. What is the smallest number of jumps the kangaroo must make to move from its current position to position A?

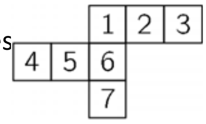


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. Sarah bought three books. For the first book she paid half of her money plus 1 Euro more. For the second book she paid again half of her left-over money plus 2 Euro's more. For the third book she paid again half of her left-over money plus 3 Euro's more. After which she had spent all of her money. How much money did she have to begin with?

(A) 45 € (B) 36 € (C) 34 € (D) 33 € (E) 30 €

21. Nina wants to make a cube from the paper net. You can see there are 7 squares Instead of 6. Which square(s) can she remove from the net, so that the other 6 squares remain connected and from the newly formed net a cube can be made?

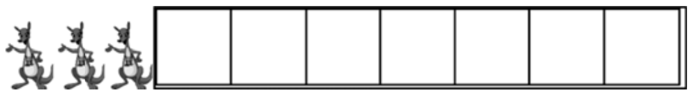


(A) only 4 (B) only 7 (C) only 3 or 4 (D) only 3 or 7 (E) only 3, 4 or 7

22. A train has 12 carriages. In each carriage there is the same number of compartments. Mike is sitting in the 18th compartment behind the engine, this is in the 3rd carriage. Joanna is sitting in the 50th compartment behind the engine, this is in the 7th carriage. How many compartments are in one carriage?

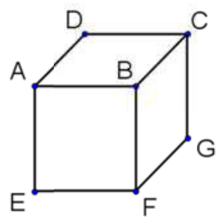
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

23. In how many ways can the three kangaroos be placed in three different squares so that no kangaroo has an immediate neighbour?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

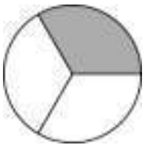
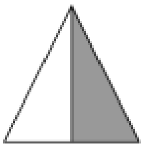
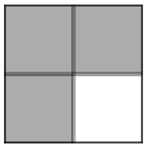
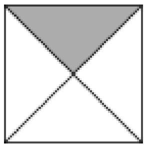
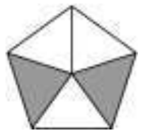
24. Maria writes a number on each face of the cube. Then, for each corner point of the cube, she adds the numbers on the faces which meet at that corner.
(For corner B she adds the numbers on faces BCDA, BAEF and BFGC.) In this way she gets a total of 14 for corner C, 16 for corner D, and 24 for corner E. Which total, does she get for corner F?



(A) 15 (B) 19 (C) 22 (D) 24 (E) 26

Lösungen Benjamin 2015, Känguru der Mathematik - Österreich

1. In welcher Figur ist genau die Hälfte grau gefärbt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

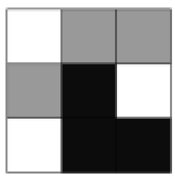
Lösung: In (A) ist 1/3 gefärbt, in (B) die Hälfte, in (C) ¾, in (D) ¼ und in (E) 2/5. Die richtige Antwort ist also **(B)**.

2. Auf der Oberseite meines Schirmes steht das Wort KANGAROO.
Welches der folgenden Bilder zeigt nicht meinen Schirm?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: Im Bild (C) erscheint der Buchstabe "R" spiegelverkehrt. Die richtige Antwort ist also **(C)**.

3. Sam bemalte die 9 kleinen Quadrate in der Figur weiß, grau und schwarz. Wie viele kleine Quadrate muss er mindestens übermalen, damit keine zwei kleinen Quadrate mit gemeinsamer Seite gleiche Farbe haben?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

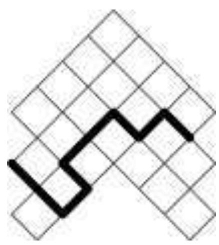
Lösung: Übermalt er das Quadrat unten in der Mitte grau und das Quadrat oben rechts Schwarz, haben keine zwei kleinen Quadrate mit gemeinsamer Seite die gleiche Farbe. Die richtige Antwort ist also **(A)**.

4. Herr Bauer hat 10 Enten. 5 dieser Enten legen jeden Tag ein Ei. Die anderen 5 legen jeden zweiten Tag ein Ei. Wie viele Eier haben die 10 Enten nach 10 Tagen gelegt?

(A) 75 (B) 60 (C) 50 (D) 25 (E) 10

Lösung: Die 5 Enten, die täglich legen, legen in den 10 Tagen 5 x 10 = 50 Eier. Die anderen 5 legen halb so viel, also zusammen 25. Wegen 50 + 25 = 75 ist die richtige Antwort also **(A)**.

5. In der Figur hat jedes Quadrat einen Flächeninhalt von 4 cm².
Welche Länge hat die dicke Linie?



(A) 16 cm (B) 18 cm (C) 20 cm (D) 21 cm (E) 23 cm

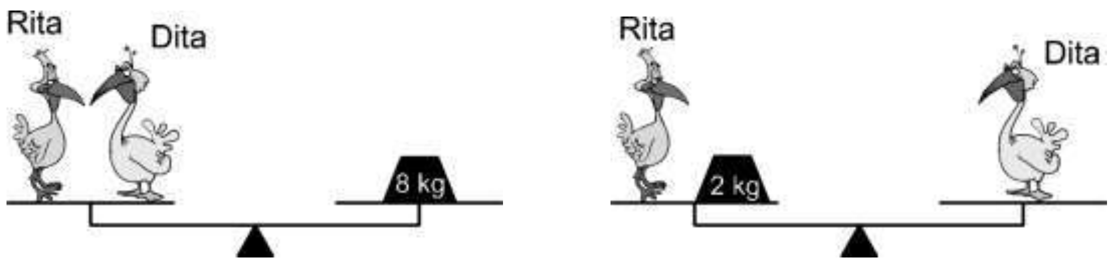
Lösung: Wenn die Fläche eines kleinen Quadrats 4 cm² beträgt, hat das kleine Quadrat die Seitenlänge 2 cm. Die dicke Linie besteht aus 9 Quadratseiten. Die Länge der dicken Linie ist also 9 x 2 cm = 18 cm, und die richtige Antwort ist **(B)**.

6. Welcher der folgenden Brüche ist kleiner als 2?

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{20}{9}$ (C) $\frac{21}{10}$ (D) $\frac{22}{11}$ (E) $\frac{23}{12}$

Lösung: Wenn man die Nanner der Brüche verdoppelt, erhält man 2 x 8 = 16, 2 x 9 = 18, 2 x 10 = 20, 2 x 11 = 22 und 2 x 12 = 24. Vergleicht man diese Zahlen mit den Zählern, sieht man 16 < 19, 18 < 20, 20 < 21, 22 = 22 und nur 24 > 23. Die richtige Antwort ist also **(E)**.

7.

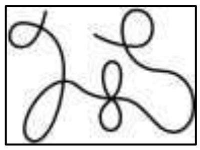


Wie viel wiegt Dita?

(A) 2 kg (B) 3 kg (C) 4 kg (D) 5 kg (E) 6 kg

Lösung: Dita wiegt 2 kg mehr als Rita, wie man rechts sieht. Da Rita und Dita zusammen 8 kg wiegen, wie man links sieht, würden zwei Ritas um 2 kg weniger als 8kg wiegen, also 6 kg. Rita wiegt also 3 kg, und Dita somit 5 kg. Die richtige Antwort ist also **(D)**.

8. Peter schaut ein an der Wand hängendes Bild mit einer Lupe genauer an. Welchen Ausschnitt kann er nicht sehen?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: Ausschnitt (A) sieht er bei der Kreuzung links oben. (B) sieht er rechts oben, (C) in der Mitte unten und (D) links unten. Bild (E) kann er nicht sehen. Die richtige Antwort ist also **(E)**.

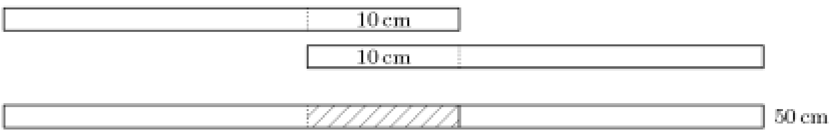
- 4 Punkte Beispiele -

9. Jede Pflanze in John´s Garten hat entweder genau 5 Blätter oder genau 2 Blätter und eine Blüte. Insgesamt haben die Pflanzen 6 Blüten und 32 Blätter. Wie viele Pflanzen wachsen im Garten?

(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 15 (E) 16

Lösung: 6 Pflanzen haben 6 Blüten und somit 12 Blätter. Es bleiben also noch 32 – 12 = 20 Blätter, und diese sind auf 20:5 = 4 Pflanzen. Zusammen gibt es also 6 + 4 = 10 Pflanzen. Die richtige Antwort ist also **(A)**.

10. Andrea hat 4 gleich große Papierstreifen. Wenn sie zwei mit einer Überlappung von 10 cm zusammenklebt, erhält sie einen Streifen mit 50 cm Länge.

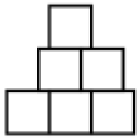


Mit den anderen beiden Papierstreifen möchte sie einen 56 cm langen Streifen herstellen. Wie lang muss die Überlappung sein?

(A) 4 cm (B) 6 cm (C) 8 cm (D) 10 cm (E) 12 cm

Lösung: Bei den ersten beiden Streifen verteilen sich die 50 – 10 = 40 cm, die nicht zur Überlappung gehören zu gleichen Teilen auf die beiden Streifen. Die Länge eines Streifens ist also 40:2 + 10 = 30 cm. Da 56 – 30 = 26 cm ist, müssen für eine Gesamtlänge von 56 cm vom zweiten Streifen genau 30 – 26 = 4 cm Überlappend verpickt werden. Die Antwort ist also **(A)**.

11. Thomas hat aus 6 Quadraten mit der Seitenlänge 1 folgende Figur gelegt.
Welchen Umfang besitzt die Figur?



(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

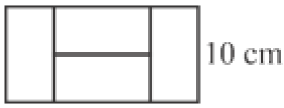
Lösung: Auf jede der drei Seiten der Figur ist die Gesamtlänge der freien Teilstücke immer dreimal so lang wie eine Qudratseite. Zusammen hat die Figur also den Umfang 3 x 4 = 12, und die Antwort ist **(D)**.

12. Maria schreibt jeden Tag das Datum auf und summiert danach die dabei auftretenden Ziffern.
Zum Beispiel heute, am 23. März, schreibt sie: 23. 03. und rechnet: 2 + 3 + 0 + 3 = 8.
Welche größte Summe kann sie auf diese Weise während eines Jahres erreichen?

(A) 7 (B) 13 (C) 14 (D) 16 (E) 20

Lösung: Die größte Monatszahl ergibt sich im September mit 09, wegen 0 + 9 = 9. (Dezember hat wegen 1 + 2 = 3 viel weniger.) Der Tag mit der hächsten Ziffernsumme ist der 29. wegen 2 + 9 = 11. Die größte Summe ist also am 29.09. mit 2 + 9 + 0 + 9 = 20, und die Antwort ist **(E)**.

13. Ein Rechteck besteht aus 4 gleich großen kleinen Rechtecken.
Die kürzere Seite hat die Länge 10 cm. Wie lang ist die längere Seite?



(A) 40 cm (B) 30 cm (C) 20 cm (D) 10 cm (E) 5 cm

Lösung: In der Mitte der Figur sieht man, dass die Längere Seite der stehenden Rechtecke gleich lang ist wie die zwei kurzen Seiten der liegenden Rechtecke. Die längere Seite ist also so land wie zwei kurze, und somit 10 + 10 = 20 cm. Die richtige Antwort ist also **(C)**.

14. Auf der Feldstraße gibt es 9 nebeneinanderstehende Häuser. In jedem Haus lebt zumindest eine Person. Je zwei benachbarte Häuser haben in Summe maximal 6 Bewohner.
Wie viele Bewohner wohnen höchstens in der Feldstraße?

(A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 29 (E) 31

Lösung: Wohnen in den ersten 8 Häusern in jeweils 2 Häusern je 6 Personen, so wohnen in diesen 8 Häusern zusammen 4 x 6 = 24 Personen. Im letzten Haus können höchstens 5 Personen wohnen, da bei 6 Personen niemand im Nachbarhaus wohnen würde. Das macht zusammen höchstens 24 + 5 = 29 Personen. Dies ist auch möglich mit der Verteilung 5-1-5-1-5-1-5-1-5. Die richtige Antwort ist also **(D)**.

15. Lucy und ihre Mutter wurden im Jänner geboren. Heute, am 23. März 2015, addiert Lucy ihr Geburtsjahr, das ihrer Mutter, sowie ihr Alter und das ihrer Mutter. Welches Ergebnis erhält sie?

(A) 4028 (B) 4029 (C) 4030 (D) 4031 (E) 4032

Lösung: Egal in welchem Jahr Lucy geboren wurde, ist die Summe von ihrem Geburtsjahr und ihrem Alter sicher 2015. (Ist sie z.B. 2005 geboren, so hatte sie in diesem Jahr ihren 10. Geburtstag, und es gilt 2005 + 10 = 2015.) Dies gilt auch für ihre Mutter. Lucy erhält also die Zahl 2015 + 2015 = 4030, und die richtige Antwort ist **(C)**.

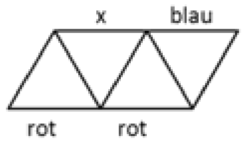
16. Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 12 cm². Die Längen der Seiten sind natürliche Zahlen. Welchen Umfang kann das Rechteck haben?

(A) 20 cm (B) 26 cm (C) 28 cm (D) 32 cm (E) 48 cm

Lösung: Mit der Fläche 12 cm² hat das Rechteck sicher die Maße 1x12, 2x6 oder 3x4. Im ersten Fall ist der Umfang 2(1 + 12) = 26, im zweiten 2(2 + 6) = 16 und im dritten 2(3 + 4) = 14. Die einzige unter den angebotenen Möglichkeiten ist somit 26 cm, also **(B)**.

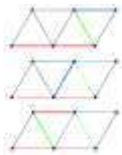
- 5 Punkte Beispiele -

17. Jede der 9 Dreiecksseiten in der Abbildung wird entweder blau, grün oder rot gefärbt. Drei der Strecken sind bereits gefärbt. Welche Farbe kann die Strecke mit dem *x* haben, wenn jedes Dreieck aus drei verschieden gefärbten Seiten bestehen muss?



(A) nur blau (B) nur grün (C) nur rot
(D) Jede der drei Farben ist möglich. (E) Die beschriebene Färbung ist nicht möglich.

Lösung: Die gemeinsame Seite der beiden rechten Dreiecke muss, wie im Bild zu sehen, grün sein, weil sie weder blau noch rot sein darf. Somit ist, wie im zweiten Bild zu sehen, die mittlere Seite blau, weil sie die dritte Seite eines Dreiecks mit einer grünen und einer roten Seite ist. Dann sieht man aber im unteren Bild, dass die gemeinsame Seite der beiden linken Dreiecke grün sein muss, und somit die obere gefragte Seite rot. Die richtige Antwort ist also **(C)**.

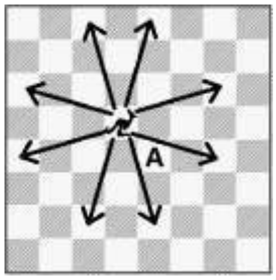


18. In einem Sack befinden sich 3 grüne Äpfel, 5 gelbe Äpfel, 7 grüne Birnen und 2 gelbe Birnen. Sebastian nimmt ohne hinzusehen einen Apfel oder eine Birne aus dem Sack. Wie viele Früchte muss er mindestens aus dem Sack nehmen um sicher zu gehen, zumindest einen Apfel und eine Birne mit der gleichen Farbe entnommen zu haben?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

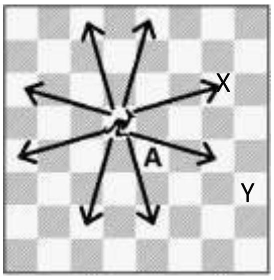
Lösung: Er könnte im schlechtesten Fall alle 5 gelben Äpfel und alle 7 grünen Birnen nehmen, ohne einen Apfel und eine Birne mit der gleichen Farbe zu haben. Mit dem nächsten Stück Obst hat er sicher einen Apfel und eine Birne mit der gleichen Farbe. Will er also sicher gehen, muss er 5 + 7 + 1 = 13 Früchte aus dem Sack nehmen. Die richtige Antwort ist also **(E)**.

19. Für das Schachspiel wird eine neue Figur, das Känguru, erfunden. Bei jedem Sprung springt das Känguru entweder 3 Quadrate senkrecht und 1 waagrecht, oder 3 waagrecht und 1 senkrecht, wie in der Abbildung zu sehen ist. Wie viele Sprünge muss das Känguru mindestens machen, um von der derzeitigen Position zur Position A zu gelangen?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Mit 2 Sprüngen ist es nicht möglich, da das Feld A von keinem der Felder mit einer Pfelspitze erreichbar ist. Mit 3 Sprüngen ist es aber möglich, zum Beispiel vom Ausgangspunkt P am Weg P – X – Y - A. Die richtige Antwort ist also **(B)**.

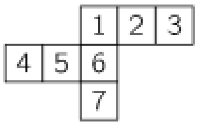


20. Sarah kaufte sich drei Bücher. Für das erste Buch bezahlte sie die Hälfte ihres Geldes und noch 1 Euro mehr. Für das zweite Buch bezahlte sie die Hälfte des übriggebliebenen Geldes und noch 2 Euro mehr. Für das dritte Buch bezahlte sie wieder die Hälfte des übriggebliebenen Geldes und 3 Euro mehr. Dann hatte sie ihr ganzes Geld ausgegeben. Wie viel Geld hatte sie zu Beginn?

(A) 45 € (B) 36 € (C) 34 € (D) 33 € (E) 30 €

Lösung: Für das dritte Buch bezahlte sie € 6. (Die zweite Hälfte ihres Geldes waren €3, also auch die erste Hälfte.) Daher war vor Bezahlung für das zweite Buch um € 2 mehr als € 6 genau die Hälfte ihres Geldes, also hatte sie 2(€ 2 + € 6) = € 16. Auf dieselbe Art waren vor Bezahlung des ersten Buches genau um € 1 mehr als € 16 die Hälfte ihres Geldes. Sie hatte also zu Beginn 2(€ 1 + € 16) = € 34, und die richtige Antwort ist **(C)**.

21. Nina möchte aus einem Papiernetz einen Würfel basteln. Versehentlich zeichnete sie 7 Quadrate anstatt 6 Quadrate. Welches Quadrat kann sie vom Netz entfernen, damit die verbleibenden 6 Quadrate zusammenhängen und sie aus diesem veränderten Netz einen Würfel falten kann?



(A) nur 4 (B) nur 7 (C) nur 3 oder 4 (D) nur 3 oder 7 (E) nur 3, 4 oder 7

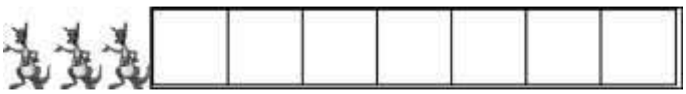
Lösung: Hält Nina die Seite 6 fest, faltet sie die Seiten 7, 5 und 1 senkrecht hinauf. 4 liegt dann oben. 2 faltet sie vor, und somit fällt 3 mit 7 zusammen. Sie kann wahlweise 3 oder 7 entfernen, und hat immer noch einen vollständigen Würfel. Die richtige Antwort ist also **(D)**.

22. Ein Zug setzt sich aus 12 Waggons zusammen. Jeder Waggon hat gleich viele Abteile. Mike sitzt im dritten Waggon und im 18. Abteil hinter der Lokomotive. Johanna sitzt im 7. Waggon und im 50. Abteil hinter der Lokomotive. Wie viele Abteile besitzt ein Waggon?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

Lösung: Wenn das 18. Abteil im dritten Waggon ist, hat jeder Waggon höchstens 8 Abteile. (Bei 9 Abteilen in jedem Waggon wäre das 18. Abteil im 2. Waggon.) Da das 50. Abteil im 7. Waggon ist sieht man auch, dass jeder Waggon mindestens 8 Abteile hat, da bei nur 7 Abteilen in jedem Waggon das 50. Abteil im 8. Waggon wäre. Da also jeder Waggon gleichzeitig mindestens als auch höchstens 8 Waggons hat, ist die richtige Antwort **(B)**.

23. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Kängurus in drei verschiedene Quadrate so zu stellen, dass kein Känguru einen unmittelbaren Nachbarn hat?



(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

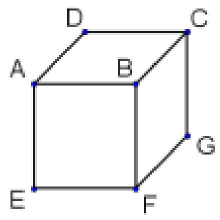
Lösung: Es gibt genau die abgebildeten 10 Möglichkeiten.

X		X		X		
X		X			X	

X		**X**				**X**
X			**X**		**X**	
X			**X**			**X**
X				**X**		**X**
	X		**X**		**X**	
	X		**X**			**X**
	X			**X**		**X**
		X		**X**		**X**

Die richtige Antwort ist also (D).

24. Maria schreibt auf jede Fläche des Würfels eine Zahl. Danach addiert sie für jeden Eckpunkt die Zahlen auf den Flächen, die in diesem Eckpunkt zusammenstoßen. (Für den Eckpunkt B addiert sie also die Zahlen der Flächen BCDA, BAEF und BFGC.) Auf diese Weise erhält sie für den Eckpunkt C die Summe 14, für den Eckpunkt D 16 und für den Eckpunkt E 24. Welchen Wert erhält sie für den Eckpunkt F?



(A) 15 (B) 19 (C) 22 (D) 24 (E) 26

Lösung: Wir bezeichnen die Zahl auf ABCD als p, auf ABEF als q, auf BCGF als r, auf CDHG als s, auf DAEH als t und auf EFGH als u. Wir wollen die Summe der Zahlen in F wissen, also den Wert von q+r+u. Wir kennen den Wert in C: p+r+s = 14, den Wert in D: p+s+t = 16 und den Wert in E: q+t+u = 24. Wegen (q+r+u) + (p+s+t) = (p+r+s) + (q+t+u) gilt also (q+r+u) + 16 = 14 + 24, und somit q+t+u = 22. Die richtige Antwort ist also **(C)**.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7 – 8

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.	
30 Basispunkte	
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte
jede falsche Antwort:	Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

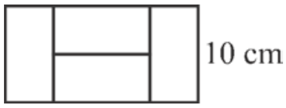
Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich - 23. 3. 2015

- 3 Punkte Beispiele -

1. Auf der Oberseite meines Schirmes steht das Wort KANGAROO.
Welches der folgenden Bilder zeigt meinen Schirm?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Ein Rechteck besteht aus 4 gleich großen kleinen Rechtecken. Die kürzere Seite hat die Länge 10 cm. Wie lang ist die längere Seite?

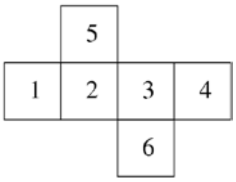


(A) 10 cm (B) 20 cm (C) 30 cm (D) 40 cm (E) 50 cm

3. Welche der folgenden Zahlen liegt dem Produkt $2{,}015 \times 510{,}2$ am nächsten?

(A) 0,1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

4. In der Figur ist ein Netz eines Würfels abgebildet, dessen Seitenflächen nummeriert sind. Sascha addiert jeweils die Zahlen, die auf zwei gegenüberliegenden Würfelflächen liegen. Welche drei Ergebnisse hat er erhalten?



(A) 4, 6, 11 (B) 4, 5, 12 (C) 5, 6, 10 (D) 5, 7, 9 (E) 5, 8, 8

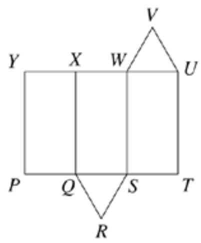
5. Welcher der folgenden Brüche ist keine ganze Zahl?

(A) $\frac{2011}{1}$ (B) $\frac{2012}{2}$ (C) $\frac{2013}{3}$ (D) $\frac{2014}{4}$ (E) $\frac{2015}{5}$

6. Die Fahrt von A-Dorf nach B-Stadt über C-Hausen dauert 130 Minuten. Die Fahrt von A-Dorf nach C-Hausen dauert 35 Minuten. Wie viele Minuten dauert die Fahrt von C-Hausen nach B-Stadt?

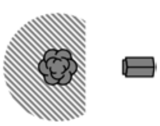
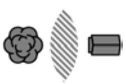
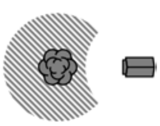
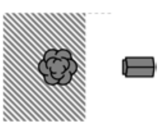
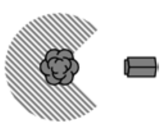
(A) 95 (B) 105 (C) 115 (D) 165 (E) 175

7. Die Figur stellt ein Netz eines dreiseitigen Prismas dar. Welche Seite der Figur bildet mit der Seite UV eine Kante des Prismas, wenn das Netz zusammengefaltet wird?

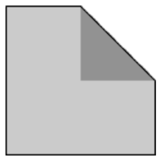


(A) WV (B) XW (C) XY (D) QR (E) RS

8. Kommt das Eichhörnchen Simon vom Baum auf den Boden, entfernt es sich nie weiter als 5 m vom Stamm seines Baumes. Außerdem bleibt es mindestens 5 m von der Hundehütte entfernt. Welches Bild stellt möglichst genau den Bereich dar, in dem sich Simon aufhalten könnte?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

9. Eine Ecke eines quadratischen Blattes Papier wird in die Mitte des Quadrates gefaltet. Dabei entsteht ein unregelmäßiges Fünfeck. Die Zahlenwerte der Flächeninhalte des Fünfecks und des Quadrates sind aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates?



(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) 32

10. Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen 6, 10 und 11. Ein gleichseitiges Dreieck hat denselben Umfang wie dieses Dreieck. Wie lang ist eine Seite des gleichseitigen Dreiecks?

(A) 18 (B) 11 (C) 10 (D) 9 (E) 6

- 4 Punkte Beispiele -

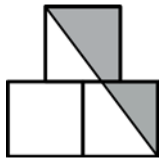
11. Ein Radfahrer legt in einer Sekunde 5 m zurück. Die Räder seines Fahrrades haben einen Umfang von je 125 cm. Wie viele komplette Umdrehungen macht jedes Rad in 5 Sekunden?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 20 (E) 25

12. Alle Burschen einer Klasse sind an unterschiedlichen Wochentagen und alle Mädchen in verschiedenen Monaten geboren. Wenn ein neues Mädchen oder ein neuer Bursche in die Klasse kommt, gilt dies sicher nicht mehr. Wie viele Jugendliche gibt es in dieser Klasse?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 24 (E) 25

13. Die abgebildete Figur besteht aus drei Quadraten, jedes mit Seitenlänge 1. Der Mittelpunkt des obersten Quadrates befindet sich genau über der gemeinsamen Seite der beiden anderen Quadrate. Wie groß ist der Flächeninhalt des grau gefärbten Gebietes?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) 1 (D) $1\frac{1}{4}$ (E) $1\frac{1}{2}$

14. Jeder Stern in der Gleichung $2 \ast 0 \ast 1 \ast 5 \ast 2 \ast 0 \ast 1 \ast 5 \ast 2 \ast 0 \ast 1 \ast 5 = 0$ soll entweder durch „$+$" oder durch „$-$" so ersetzt werden, dass die Gleichung richtig ist.
Welche ist die kleinste Anzahl von Sternen, die durch „$+$" ersetzt werden kann?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Während eines Gewittersturms fielen 15 Liter Regen pro Quadratmeter. Um wie viel stieg dabei der Wasserspiegel eines im Freien befindlichen Schwimmbeckens an?

(A) 150 cm (B) 0,15 cm (C) 15 cm (D) 1,5 cm
(E) Es hängt von der Größe des Schwimmbeckens ab.

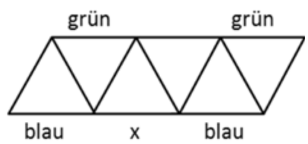
16. Ein Strauch hat 10 Zweige. Jeder Zweig hat entweder genau 5 Blätter oder genau 2 Blätter und eine Blüte. Welche der folgenden Zahlen könnte die Gesamtzahl aller Blätter des Strauches sein?

(A) 45 (B) 39 (C) 37 (D) 31 (E) Keine der Zahlen von (A) bis (D)

17. Die 10 Teilnehmer eines Tests erreichten im Mittel 6 Punkte. Genau 6 der Teilnehmer bestanden den Test. Im Mittel erreichten die Teilnehmer, die den Test bestanden, 8 Punkte.
Welchen Mittelwert erreichten die Teilnehmer, die den Test nicht bestanden?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. Jede Dreiecksseite in der Abbildung wird entweder blau, grün oder rot gefärbt. Vier der Strecken sind bereits gefärbt. Welche Farbe kann die Strecke x haben, wenn jedes Dreieck aus drei verschieden gefärbten Seiten bestehen muss?



(A) nur grün (B) nur rot (C) nur blau (D) entweder rot oder blau (E) Die Aufgabe ist unlösbar.

19. Eva addierte die Längen von drei Seiten eines Rechtecks und erhielt 44 cm. Ulli addierte auch die Längen von drei Seiten desselben Rechtecks und erhielt 40 cm. Wie groß ist der Umfang des Rechtecks?

(A) 42 cm (B) 56 cm (C) 64 cm (D) 84 cm (E) 112 cm

20. Die Lehrerin fragt fünf ihrer Schülerinnen, wie viele von ihnen am Vortag gelernt hätten. Azra sagt: „Keine." Berti sagt: „Nur eine." Christa sagt: „Genau zwei." Doris sagt: „Genau drei." Emina sagt: „Genau vier." Die Lehrerin weiß, dass Schülerinnen stets lügen, wenn sie nicht gelernt haben und stets die Wahrheit sagen, wenn sie gelernt haben. Wie viele dieser Schülerinnen haben am Vortag gelernt?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

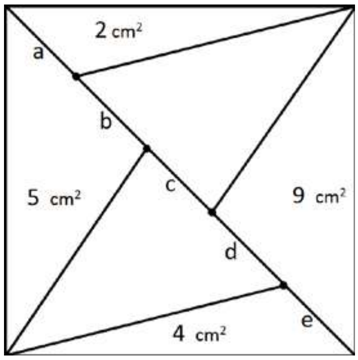
- 5 Punkte Beispiele -

21. In einer Gruppe von Kängurus wiegen die beiden Leichtesten 25 % des Gesamtgewichts der ganzen Gruppe. Die drei Schwersten wiegen 60 % des Gesamtgewichts. Wie viele Kängurus sind in der Gruppe?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 15 (E) 20

22. Fünf positive ganze Zahlen, die nicht alle verschieden sein müssen, werden auf fünf Karten geschrieben. Peter berechnet die Summe jedes einzelnen Kartenpaares. Er erhält nur drei verschiedene Ergebnisse, nämlich 57, 70 und 83. Wie lautet die größte Zahl, die auf einer der Karten steht?

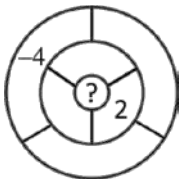
(A) 35 (B) 42 (C) 48 (D) 53 (E) 82



23. Ein Quadrat mit Flächeninhalt 30 wird durch die Diagonale in zwei Teile geteilt und dann in Dreiecke, wie in der Figur zu sehen. Einige Flächeninhalte dieser Dreiecke sind in der Figur angegeben. Welcher der Streckenabschnitte a, b, c, d, e der Diagonale ist am längsten?

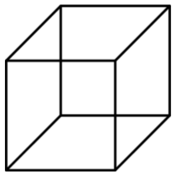
(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

24. Riki möchte in jeden der sieben Bereiche der dargestellten Figur eine Zahl schreiben. Zwei Bereiche gelten als benachbart, wenn sie einen Teil ihrer Grenzen gemeinsam haben. Die Zahl jedes Bereiches soll die Summe aller Zahlen ihrer benachbarten Bereiche sein. Riki hat bereits in zwei Bereiche Zahlen eingetragen. Welche Zahl muss sie in den Bereich mit dem Fragezeichen schreiben?



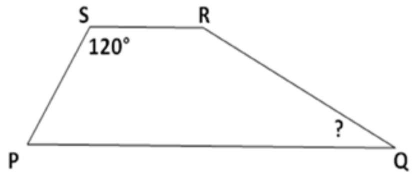
(A) 1 (B) -2 (C) 6 (D) -4 (E) 0

25. Florian hat sieben Drahtstücke mit den Längen 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm und 7 cm. Er verwendet einige dieser Stücke um ein Drahtmodell eines Würfels mit Kantenlänge 1 zu basteln. Überlappende Drahtstücke will er dabei keine haben. Was ist die kleinste Anzahl von Drahtstücken, die er dafür verwenden kann?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Im Trapez *PQRS* sind die Seiten *PQ* und *SR* parallel. Es gilt $\angle RSP = 120°$ und $\overline{RS} = \overline{SP} = \frac{1}{3}\overline{PQ}$. Wie groß ist der Winkel $\angle PQR$?



(A) 15° (B) 22,5° (C) 25° (D) 30° (E) 45°

27. Fünf Punkte liegen auf einer Geraden. Alex misst alle Abstände jedes möglichen Punktepaares. Er erhält in aufsteigender Ordnung 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 und 22. Welchen Wert hat k?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

28. Von Erichs siebenstelliger Telefonnummer habe ich 6 Ziffern in der richtigen Reihenfolge notiert. Ich weiß nicht, welche Ziffer ich vergessen habe und wo sie fehlt. Wie viele Telefonnummern muss ich höchstens ausprobieren, um sicher zu sein, die richtige Telefonnummer verwendet zu haben? (Beachte: Die vorderste Ziffer könnte auch 0 sein!)

(A) 55 (B) 60 (C) 64 (D) 70 (E) 80

29. Maria dividiert 2015 durch 1. Dann dividiert sie 2015 durch 2 und dann der Reihe nach durch 3, 4 usw. bis einschließlich 1000. Sie schreibt für jede Division den verbleibenden Rest auf. Wie lautet der größte Rest, den sie notiert hat?

(A) 15 (B) 215 (C) 671 (D) 1007 (E) ein anderer Wert

30. Jede positive ganze Zahl wird nach den folgenden drei Regeln gefärbt:

(i) Jede Zahl ist entweder rot oder grün.
(ii) Die Summe zweier verschiedener roter Zahlen ergibt eine rote Zahl.
(iii) Die Summe zweier verschiedener grüner Zahlen ist eine grüne Zahl.

Auf wie viele Arten kann man das machen?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) auf mehr als sechs Arten

MATHEMATICS KANGAROO 2015
Austria - 23. 3. 2015

Level: Kadett, Grades 7 – 8

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points

Each correct answer to questions 1. – 10.:	3 Punkte
Each correct answer to questions 11. – 20.:	4 Punkte
Each correct answer to questions 21. – 30.:	5 Punkte
Each question left unanswered	0 Punkte

Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Mathematical Kangaroo 2015
Group Kadett (Grades 7 and 8)
Austria - 23. 3. 2015

- 3 point questions -

1. The word KANGAROO is written on the top of my umbrella.
Which of the following pictures shows my umbrella?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

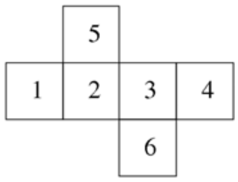
2. A rectangle is made of 4 equally sized, small rectangles. The smaller side has side length 10 cm. How long is the longer side?

(A) 10 cm (B) 20 cm (C) 30 cm (D) 40 cm (E) 50 cm

3. Which of the following numbers is closest to the product of $2{\cdot}015 \times 510{\cdot}2$?

(A) 0,1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 (E) 1000

4. The diagram shows the net of a cube whose faces are numbered. Sascha adds the numbers that are on opposite faces of the cube. Which three results does he get?



(A) 4, 6, 11 (B) 4, 5, 12 (C) 5, 6, 10 (D) 5, 7, 9 (E) 5, 8, 8

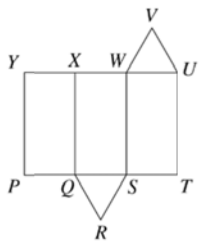
5. Which of the following fractions is not a whole number?

(A) $\frac{2011}{1}$ (B) $\frac{2012}{2}$ (C) $\frac{2013}{3}$ (D) $\frac{2014}{4}$ (E) $\frac{2015}{5}$

6. The drive from A-village to B-town via C-house takes 130 minutes. The drive from A-village to C-house takes 35 minutes. How many minutes does a drive from C-house to B-town take?

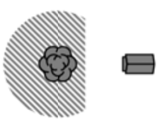
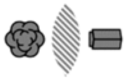
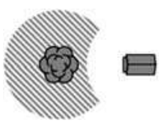
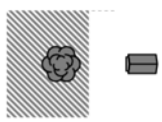
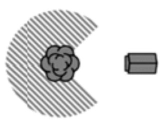
(A) 95 (B) 105 (C) 115 (D) 165 (E) 175

7. The diagram shows the net of a three-sided prism. Which line of the diagram forms an edge of the prism together with line UV when the net is folded up?

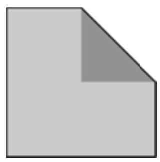


(A) WV (B) XW (C) XY (D) QR (E) RS

8. When simon the squirrel comes down from his tree onto the floor, he never moves further than 5 m away from the trunk of his tree. Furthermore, he stays at least 5 m away from the dog kennel. Which picture shows most accurately the area in which Simon can be found?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

9. One corner of a square piece of paper is folded into the middle of the square. That way an irregular pentagon is created. The numerical values of the areas of the Pentagon and the square are consecutive whole numbers.
What is the area of the square?



(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 (E) 32

10. The side lengths of a triangle are 6, 10 and 11. An equilateral triangle has the same perimeter as this triangle. How long is one side of the equilateral triangle?

(A) 18 (B) 11 (C) 10 (D) 9 (E) 6

- 4 point questions -

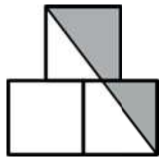
11. A cyclist covers a distance of 5 m in one second. The wheels of his bike each have a circumference of 125 cm. How many complete turns does each wheel do in 5 seconds?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 (D) 20 (E) 25

12. All the boys in a class are born on different days of the week and all the girls are born in different months. If one new girl or boy joins this class, this is definitely no longer true. How many teenagers are in this class?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 24 (E) 25

13. The diagram consists of three squares each one of side length 1. The midpoint of the topmost square is exactly above the common side of the two other squares. What is the area of the section coloured grey?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) 1 (D) $1\frac{1}{4}$ (E) $1\frac{1}{2}$

14. Each star in the equation $2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 = 0$ should be replaced by either "+" or "–" so that the equation is correct.
What is the smallest number of stars that can be replaced by "+"?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. During a thunder storm it rained 15 liters per square meter. By how much did the water level of an outdoor swimming pool increase?

(A) 150 cm (B) 0,15 cm (C) 15 cm (D) 1,5 cm
(E) It depends on the size of the swimming pool.

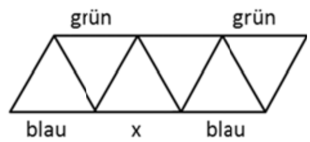
16. A bush has 10 twigs. Each twig has exactly 5 leaves or exactly 2 leaves and a flower. Which of the following numbers could be the total number of leaves on the bush?

(A) 45 (B) 39 (C) 37 (D) 31 (E) None of the numbers from (A) to (D)

17. The 10 participants of a test achieve on average 6 points. Exactly 6 of the participants passed the test. The average of the participants that passed the test was 8 points.
What is the average of the participants that did not pass the test?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. Each side of each triangle in the diagram is painted either blue, green or red. Four of the sides are already painted. Which colour can the line marked „x" have, if each triangle must have all sides in different colours?



(A) only green (B) only red (C) only blue (D) either red or blue (E) The question cannot be solved.

19. Eva added the lengths of three sides of a rectangle and obtained 44 cm. Ulli also added the lengths of three sides of the same rectangle and obtained 40 cm. What is the perimeter of the rectangle?

(A) 42 cm (B) 56 cm (C) 64 cm (D) 84 cm (E) 112 cm

20. The teacher asks five of her students, how many of them had studied the previous day. Azra says: "Nobody." Berti says: "Only one." Christa says: "Exactly two." Doris says: "Exactly three." Emina says: "Exactly four." The teacher knows that students always lie if they haven't studied and are always truthful when they have studied. How many of those students had studied the previous day?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

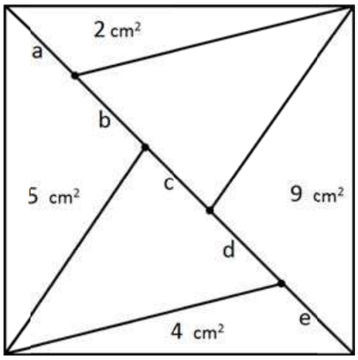
- 5 point questions -

21. In a group of kangaroos the two lightest ones weigh 25 % of the total weight of the whole group. The three heaviest ones weight 60 % of the total weight. How many kangaroos are in this group?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 15 (E) 20

22. Five positive whole numbers, which are not necessarily all different, are written on five cards. Peter calculates the sum of each pair of cards. He obtains only three different results, namely 57, 70 and 83. What is the biggest number that is written on one of the cards?

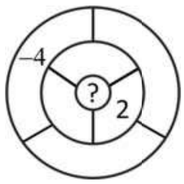
(A) 35 (B) 42 (C) 48 (D) 53 (E) 82



23. A square with area 30 is split into two by its diagonal and then Split into triangles as shown in the diagram. Some of the areas of the triangles are given in the diagram. Which of the line segments a, b, c, d, e of the diagonal is the longest?

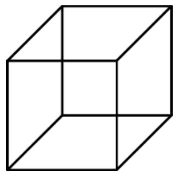
(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

24. Riki wants to write one number in each of the seven sections of the diagram pictured. Two zones are adjacent if they share a part of their outline. The number in each zone should be the sum of all numbers of its adjacent zones. Riki has already placed numbers in two zones. Which number does she need to write in the zone marked „?".



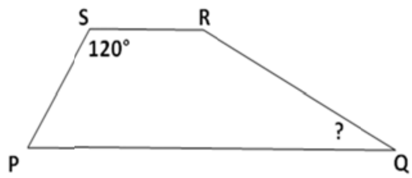
(A) 1 (B) -2 (C) 6 (D) -4 (E) 0

25. Florian has seven pieces of wire of lengths 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm and 7 cm. He uses some of those pieces to form a wire model of a cube with side length 1. He does not want any overlapping wire parts. What is the smallest number of wire pieces that he can use?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. In the trapezium *PQRS* the sides *PQ* and *SR* are parallel. Also $\angle RSP = 120°$ and $\overline{RS} = \overline{SP} = \frac{1}{3}\overline{PQ}$. What is the size of angle $\angle PQR$?



(A) 15° (B) 22·5° (C) 25° (D) 30° (E) 45°

27. On a straight line there are five points. Alex measures all the distances between every possible pair of points. He obtains in ascending order 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 and 22. What is the value of k?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

28. I have noted down six digits of Erich's seven-digit phone number in the correct order. I don't know which digit I have missed out and where I have missed it out. What is the maximum number of tries that I have to make to be sure that I have used the correct phone number? (Note: The first digit could also be 0!)

(A) 55 (B) 60 (C) 64 (D) 70 (E) 80

29. Maria divides 2015 by 1. Then she divides 2015 by 2 and then in order by 3, 4 etc. up to and including 1000. For each division she writes down the remainder. What is the biggest remainder she has noted down?

(A) 15 (B) 215 (C) 671 (D) 1007 (E) another value

30. Each positive whole number is coloured in according to the following three rules:

(i) Each number is either red or green.
(ii) The sum of two different red numbers results in a red number.
(iii) The sum of two different green numbers is a green number.

How many ways are there to do this?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) there are more than six ways

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7 – 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	B	E	A	D	A	C	C	C	D

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	C	B	D	E	C	A	B	B

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	C	D	C	D	D	E	C	C	D

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich - 23. 3. 2015

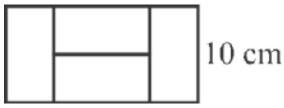
- 3 Punkte Beispiele -

1. Auf der Oberseite meines Schirmes steht das Wort KANGAROO.
Welches der folgenden Bilder zeigt meinen Schirm?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Schirm (E) ist der einzige Schirm, bei dem kein abgebildeter Buchstabe gespiegelt ist und die sichtbaren Buchstaben in der richtigen Reihenfolge stehen.

2. Ein Rechteck besteht aus 4 gleich großen kleinen Rechtecken. Die kürzere Seite hat die Länge 10 cm. Wie lang ist die längere Seite?



(A) 10 cm **(B)** 20 cm (C) 30 cm (D) 40 cm (E) 50 cm

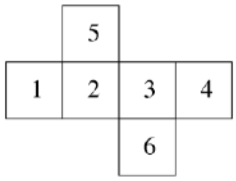
Die kürzere Seite der kleinen Rechtecke ist 5 cm, da zwei kürzere Seiten gleich lang sind, wie eine längere Seite der kleinen Rechtecke. Dadurch ergibt sich für die längere Seite des großen Rechtecks eine Länge von 5 cm +10 cm +5 cm = 20 cm.

3. Welche der folgenden Zahlen liegt dem Produkt $2{,}015 \cdot 510{,}2$ am nächsten?

(A) 0,1 (B) 1 (C) 10 (D) 100 **(E)** 1000

$2{,}015 \cdot 510{,}2 \approx 2 \cdot 500 = 1000$. Der genaue Wert ist $2{,}015 \cdot 510{,}2 = 1028{,}053$.

4. In der Figur ist ein Netz eines Würfels abgebildet, dessen Seitenflächen nummeriert sind. Sascha addiert jeweils die Zahlen, die auf zwei gegenüber-liegenden Würfelflächen liegen. Welche drei Ergebnisse hat er erhalten?



(A) 4, 6, 11 (B) 4, 5, 12 (C) 5, 6, 10 (D) 5, 7, 9 (E) 5, 8, 8

Folgende Zahlen liegen einander gegenüber: 1 und 3, 2 und 4, 5 und 6. Er erhält also die Summen 4, 6, und 11.

5. Welcher der folgenden Brüche ist keine ganze Zahl?

(A) $\frac{2011}{1}$ (B) $\frac{2012}{2}$ (C) $\frac{2013}{3}$ **(D)** $\frac{2014}{4}$ (E) $\frac{2015}{5}$

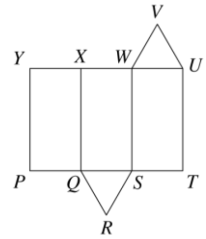
Mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln für die Divisionen durch 2, 3 und 5 sehen wird, dass (A), (B), (C) und (E) ganze Zahlen sind. Die Zahl 2014 ist nicht durch 4 teilbar, also ist $\frac{2014}{4}$ keine ganze Zahl.

6. Die Fahrt von A-Dorf nach B-Stadt über C-Hausen dauert 130 Minuten. Die Fahrt von A-Dorf nach C-Hausen dauert 35 Minuten. Wie viele Minuten dauert die Fahrt von C-Hausen nach B-Stadt?

(A) 95 (B) 105 (C) 115 (D) 165 (E) 175

Die Fahrt dauert 130 min – 35 min = 95 min.

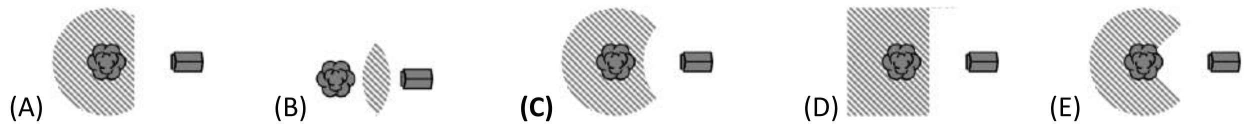
7. Die Figur stellt ein Netz eines dreiseitigen Prismas dar. Welche Seite der Figur bildet mit der Seite UV eine Kante des Prismas, wenn das Netz zusammengefaltet wird?



(A) WV (B) XW **(C)** XY (D) QR (E) RS

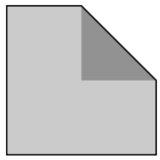
Beim Zusammenfalten des Prismas bilden die Punkte V und X eine Ecke und die Punkte U und Y eine Ecke. Die Seite UV bildet also mit der Seite XY eine Kante.

8. Kommt das Eichhörnchen Simon vom Baum auf den Boden, entfernt es sich nie weiter als 5 m vom Stamm seines Baumes. Außerdem bleibt es mindestens 5 m von der Hundehütte entfernt. Welches Bild stellt möglichst genau den Bereich dar, in dem sich Simon aufhalten könnte?



Wenn sich Simon vom Stamm seines Baumes nur 5 m entfernt, so ist der Bereich ein Kreis rund um den Baum. Ebenso deckt ein Kreis rund um die Hundehütte den Bereich ab, den Simon nicht betritt. Der Kreis rund um den Baum ohne die Überlappung mit dem Kreis rund um die Hundehütte ist der graue Bereich in Figur (C).

9. Eine Ecke eines quadratischen Blattes Papier wird in die Mitte des Quadrates gefaltet. Dabei entsteht ein unregelmäßiges Fünfeck. Die Zahlenwerte der Flächeninhalte des Fünfecks und des Quadrates sind aufeinanderfolgende ganze Zahlen.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates?



(A) 2 (B) 4 **(C)** 8 (D) 16 (E) 32

Die Fläche vom Quadrat und die Fläche des Fünfecks unterscheiden sich genau durch die Fläche des umgefalteten Dreiecks. Die Fläche des Dreiecks ist also 1. Das Quadrat besteht aus acht solcher Dreiecke. Der Flächeninhalt des Quadrates ist also 8.

10. Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen 6, 10 und 11. Ein gleichseitiges Dreieck hat denselben Umfang wie dieses Dreieck. Wie lang ist eine Seite des gleichseitigen Dreiecks?

(A) 18 (B) 11 (C) 10 **(D)** 9 (E) 6

Der Umfang des gegebenen Dreiecks beträgt $6 + 10 + 11 = 27$. Eine Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks ist also $\frac{27}{3} = 9$.

- 4 Punkte Beispiele -

11. Ein Radfahrer legt in einer Sekunde 5 m zurück. Die Räder seines Fahrrades haben einen Umfang von je 125 cm. Wie viele komplette Umdrehungen macht jedes Rad in 5 Sekunden?

(A) 4 (B) 5 (C) 10 **(D)** 20 (E) 25

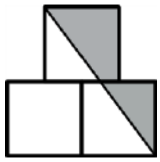
Da der Radfahrer in einer Sekunde 5 m zurücklegt, dreht sich das Rad $500: 125 = 4$ Mal pro Sekunde. In 5 Sekunden macht das Rad daher $5 \cdot 4 = 20$ Umdrehungen.

12. Alle Burschen einer Klasse sind an unterschiedlichen Wochentagen und alle Mädchen in verschiedenen Monaten geboren. Wenn ein neues Mädchen oder ein neuer Bursche in die Klasse kommt, gilt dies sicher nicht mehr. Wie viele Jugendliche gibt es in dieser Klasse?

(A) 18 **(B)** 19 (C) 20 (D) 24 (E) 25

Es gibt 12 Monate. Da alle Mädchen in verschiedenen Monaten geboren sind, gibt es höchstens 12 Mädchen in der Klasse. Wenn eine neue Schülerin in die Klasse kommt, wäre sie im gleichen Monat geboren, wie ein anderes Mädchen. Es gibt also kein Monat, in dem keines der Mädchen geboren wurde. Es gibt also genau 12 Mädchen in der Klasse. Mit gleichen Überlegungen gilt: Es gibt genau 7 Burschen in der Klasse. Die Schülerzahl beträgt 19.

13. Die abgebildete Figur besteht aus drei Quadraten, jedes mit Seitenlänge 1. Der Mittelpunkt des obersten Quadrates befindet sich genau über der gemeinsamen Seite der beiden anderen Quadrate. Wie groß ist der Flächeninhalt des grau gefärbten Gebietes?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{7}{8}$ **(C)** 1 (D) $1\frac{1}{4}$ (E) $1\frac{1}{2}$

Das graue Dreieck und das weiße Dreieck sind deckungsgleich, da das graue Dreieck durch Drehung um den gemeinsamen Eckpunkt in das weiße Dreieck übergeht. Somit ist die graue Fläche gleich groß wie die Fläche eines Quadrates, also 1.

14. Jeder Stern in der Gleichung $2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 * 2 * 0 * 1 * 5 = 0$ soll entweder durch „+" oder durch „–" so ersetzt werden, dass die Gleichung richtig ist.
Welche ist die kleinste Anzahl von Sternen, die durch „+" ersetzt werden kann?

(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

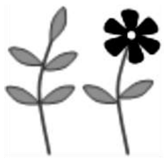
Schreiben wir vor zwei Fünfern ein „+" und statt allen anderen Sternen ein „–", so ist die Gleichung erfüllt. Das ist mit Sicherheit die geringste Anzahl an „+", da das Ergebnis mit nur einem „+" an einer beliebigen Stelle negativ ist.

15. Während eines Gewittersturms fielen 15 Liter Regen pro Quadratmeter. Um wie viel stieg dabei der Wasserspiegel eines im Freien befindlichen Schwimmbeckens an?

(A) 150 cm (B) 0,15 cm (C) 15 cm **(D)** 1,5 cm
(E) Es hängt von der Größe des Schwimmbeckens ab.

$15\, l/m^2 = 15\, dm^3/m^2 = 0{,}015\, m^3/m^2 = 0{,}015\, m = 1{,}5\, cm$

16. Ein Strauch hat 10 Zweige. Jeder Zweig hat entweder genau 5 Blätter oder genau 2 Blätter und eine Blüte. Welche der folgenden Zahlen könnte die Gesamtzahl aller Blätter des Strauches sein?



(A) 45 (B) 39 (C) 37 (D) 31 **(E)** Keine der Zahlen von (A) bis (D)

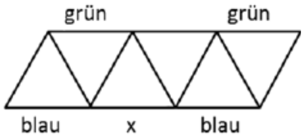
Die Anzahl der Zweige mit 5 Blättern bezeichnen wir mit x. Also gibt es $10 - x$ Zweige mit 2 Blättern und einer Blüte. Der Strauch hat insgesamt $5 \cdot x + 2 \cdot (10 - x) = 3x + 20$ Blätter. Mögliche Blätterzahlen sind also 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50. Keine der Zahlen (A) – (D) kommt in der Liste vor.

17. Die 10 Teilnehmer eines Tests erreichten im Mittel 6 Punkte. Genau 6 der Teilnehmer bestanden den Test. Im Mittel erreichten die Teilnehmer, die den Test bestanden, 8 Punkte.
Welchen Mittelwert erreichten die Teilnehmer, die den Test nicht bestanden?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

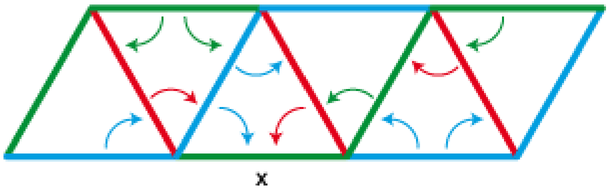
Zusammen erreichten die Teilnehmer $10 \cdot 6 = 60$ Punkte. Die Teilnehmer, die den Test bestanden haben erreichten zusammen $6 \cdot 8 = 48$ Punkte. Die übrigen 4 Teilnehmer erhielten zusammen $60 - 48 = 12$ Punkte, im Mittel also $12 : 4 = 3$ Punkte.

18. Jede Dreiecksseite in der Abbildung wird entweder blau, grün oder rot gefärbt. Vier der Strecken sind bereits gefärbt. Welche Farbe kann die Strecke x haben, wenn jedes Dreieck aus drei verschieden gefärbten Seiten bestehen muss?



(A) nur grün (B) nur rot (C) nur blau (D) entweder rot oder blau (E) Die Aufgabe ist unlösbar.

Ausgehend von den angegebenen Farben lassen sich die Farben aller nicht beschrifteten Seiten eindeutig bestimmen (siehe Bild).



19. Eva addierte die Längen von drei Seiten eines Rechtecks und erhielt 44 cm. Ulli addierte auch die Längen von drei Seiten desselben Rechtecks und erhielt 40 cm. Wie groß ist der Umfang des Rechtecks?

(A) 42 cm **(B)** 56 cm (C) 64 cm (D) 84 cm (E) 112 cm

Das Rechteck hat die Seitenlängen a und b mit $a > b$. Da Eva den größeren Wert erhielt, addierte $2a + b = 44\ cm$. Ulli addierte umgekehrt $a + 2b = 40\ cm$. Zusammen gerechnet ergibt das $3(a + b) = 84\ cm$. Der Umfang $2(a + b)$ ist also $84\ cm \cdot \frac{2}{3} = 56\ cm$.

20. Die Lehrerin fragt fünf ihrer Schülerinnen, wie viele von ihnen am Vortag gelernt hätten. Azra sagt: „Keine.“ Berti sagt: „Nur eine.“ Christa sagt: „Genau zwei.“ Doris sagt: „Genau drei.“ Emina sagt: „Genau vier.“ Die Lehrerin weiß, dass Schülerinnen stets lügen, wenn sie nicht gelernt haben und stets die Wahrheit sagen, wenn sie gelernt haben. Wie viele dieser Schülerinnen haben am Vortag gelernt?

(A) 0 **(B)** 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Es kann höchstens eine der Schülerinnen die Wahrheit sagen, da die Aussagen einander widersprechen. Daher können nur Azra oder Berti die Wahrheit sagen. Würde Azras Aussage stimmen, so hätte sie im Widerspruch zu ihrer Aussage gelernt. Hätte keine Schülerin gelernt, so wäre Azras Aussage wahr und sie müsste gelernt haben.
Somit stimmt genau eine Aussage, Bertis.

- 5 Punkte Beispiele -

21. In einer Gruppe von Kängurus wiegen die beiden Leichtesten 25 % des Gesamtgewichts der ganzen Gruppe. Die drei Schwersten wiegen 60 % des Gesamtgewichts. Wie viele Kängurus sind in der Gruppe?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 15 (E) 20

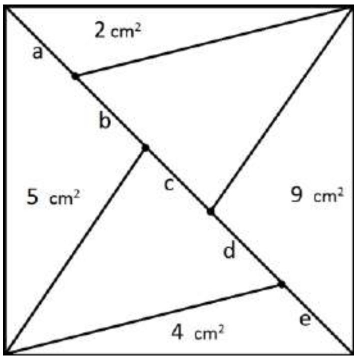
Das Restgewicht gehört zu Kängurus, die mittelschwer sind. Die beiden Leichtesten wiegen im Durchschnitt 12,5 %. Es fehlen 15 % des Gesamtgewichtes, die somit zu genau einem Känguru gehören. In der Gruppe sind $2 + 1 + 3 = 6$ Kängurus.

22. Fünf positive ganze Zahlen, die nicht alle verschieden sein müssen, werden auf fünf Karten geschrieben. Peter berechnet die Summe jedes einzelnen Kartenpaares. Er erhält nur drei verschiedene Ergebnisse, nämlich 57, 70 und 83. Wie lautet die größte Zahl, die auf einer der Karten steht?

(A) 35 (B) 42 **(C)** 48 (D) 53 (E) 82

Da nur drei unterschiedliche Summen möglich sind, stehen auch nur höchstens drei unterschiedliche Zahlen auf den fünf Karten. Da 57 als kleinste und 83 als größte Summe zweier Zahlen jeweils ungerade sind, können die kleinste und die größte Zahl nicht öfter vorkommen. Daher gibt es eine weitere Zahl, nämlich $\frac{70}{2} = 35$. Die Zahlen auf den Karten sind 22, 35, 35, 35, 48.

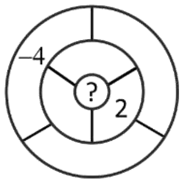
23. Ein Quadrat mit Flächeninhalt 30 wird durch die Diagonale in zwei Teile geteilt und dann in Dreiecke, wie in der Figur zu sehen. Einige Flächeninhalte dieser Dreiecke sind in der Figur angegeben. Welcher der Streckenabschnitte a, b, c, d, e der Diagonale ist am längsten?



(A) a (B) b (C) c **(D)** d (E) e

Zeichnet man in alle Dreiecke die Höhe auf die beschriftete Quadrat-diagonale ein, so erkennt man, dass diese Höhen jeweils gleich lang sind. Die Flächeninhalte der Dreiecke stehen im selben Verhältnis zueinander wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf der Diagonale.
Wir erhalten $a:(a+b)=2:5$ und daher $a:b=2:3$. Auf dieselbe Art erhalten wir $d:e=5:4$ und weiter $b:c=3:1$ und $c:d=1:5$. Also insgesamt $a:b:c:d:e=2:3:1:5:4$ und somit ist d am längsten.

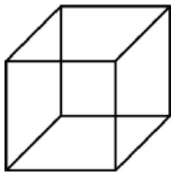
24. Riki möchte in jeden der sieben Bereiche der dargestellten Figur eine Zahl schreiben. Zwei Bereiche gelten als benachbart, wenn sie einen Teil ihrer Grenzen gemeinsam haben. Die Zahl jedes Bereiches soll die Summe aller Zahlen ihrer benachbarten Bereiche sein. Riki hat bereits in zwei Bereiche Zahlen eingetragen.
Welche Zahl muss sie in den Bereich mit dem Fragezeichen schreiben?



(A) 1 (B) −2 **(C)** 6 (D) −4 (E) 0

Wir schreiben in die beiden äußeren leeren Felder die Platzhalter a und b und in die beiden inneren leeren Felder die Platzhalter c und d. Dann gilt $-4=a+b+c+d$ und $2=a+b+c+d+?$. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhalten wir $?=6$.

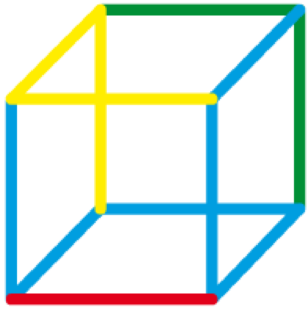
25. Florian hat sieben Drahtstücke mit den Längen 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm und 7 cm. Er verwendet einige dieser Stücke um ein Drahtmodell eines Würfels mit Kantenlänge 1 cm zu basteln. Überlappende Drahtstücke will er dabei keine haben. Was ist die kleinste Anzahl von Drahtstücken, die er dafür verwenden kann?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 4 (E) 5

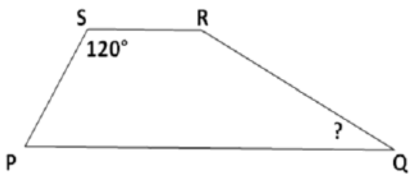
In jeder Ecke des Würfels stoßen drei Kanten zusammen. Im fertigen Drahtmodell gibt es in jeder Ecke also folgende zwei Möglichkeiten:

1. Es stoßen drei Enden von Drahtstücken zusammen.
2. Ein Drahtstück wird in der Ecke abgeknickt und bildet zwei Kanten, die dritte Kante ist das Ende eines Drahtstückes.

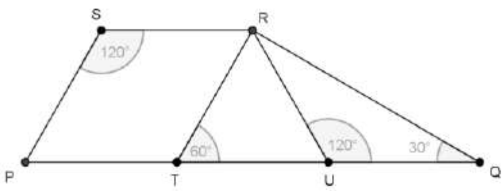


In jedem Fall ist in jeder der 8 Ecken des Würfels mindestens ein Ende eines Drahtstückes. Florian muss also zumindest $\frac{8}{2}=4$ Drahtstücke verwenden.
Wenn er für die 4 Drahtstücke die Längen 1 cm, 2 cm, 3 cm und 6 cm wählt, so kann er das Drahtmodell wie im Bild basteln.

26. Im Trapez $PQRS$ sind die Seiten PQ und SR parallel. Es gilt $\angle RSP=120°$ und $\overline{RS}=\overline{SP}=\frac{1}{3}\overline{PQ}$. Wie groß ist der Winkel $\angle PQR$?



(A) 15° (B) 22,5° (C) 25° **(D)** 30° (E) 45°

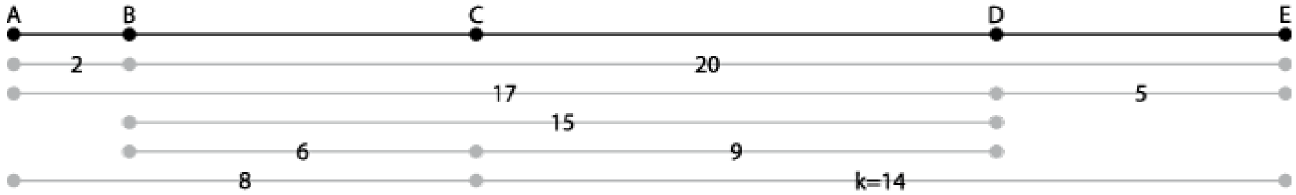


Wir zeichnen zwei Punkte T und U auf der Strecke zwischen P und Q so, dass $\overline{PT}=\overline{TU}=\overline{UQ}=\frac{1}{3}\overline{PQ}=\overline{RS}$ gilt. Dann ist das Viereck $PTRS$ eine gleichseitige Raute. Der Winkel $\angle RTU$ ist 60° und da $\overline{RT}=\overline{TU}$ ist das Dreieck RTU gleichseitig und somit $\overline{RU}=\overline{UQ}$. Also ist das Dreieck RUQ gleichschenklig mit einem Basiswinkel von $\frac{180°-120°}{2}=30°$.

27. Fünf Punkte liegen auf einer Geraden. Alex misst alle Abstände jedes möglichen Punktepaares. Er erhält in aufsteigender Ordnung 2, 5, 6, 8, 9, k, 15, 17, 20 und 22. Welchen Wert hat k?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 **(E)** 14

Wir benennen die fünf Punkte der Reihe nach mit A, B, C, D und E. Dann gilt $\overline{AE} = 22$. Wir können leicht erkennen, dass entweder $\overline{AD} = 20$ und $\overline{DE} = 2$ oder $\overline{BE} = 20$ und $\overline{AB} = 2$. Ebenso ist entweder $\overline{BE} = 17$ und $\overline{AB} = 5$ oder $\overline{AD} = 17$ und $\overline{DE} = 5$. In jedem Fall gilt also $\overline{BD} = 22 - 2 - 5 = 15$.
Nun wissen wir bereits wo die Abstände 2, 5, 15, 17, 20 und 22 auftreten und es bleiben noch 6, 8, 9 und k übrig. Da $k > 9$ und somit $15 < k + 6 < k + 8 < k + 9$ ist $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{BD} = 15 = 6 + 9$, also $\overline{BC} = 6$ und $\overline{CD} = 9$ oder umgekehrt. Wir erhalten somit für $\overline{AC}$ und $\overline{DE}$ die Längen $5 + 9 = 14$ und $6 + 2 = 8$ oder $5 + 6 = 11$ und $9 + 2 = 11$. Der zweite Fall ist aber nicht möglich, da 11 in der Liste der Abstände nicht vorkommt.
Der Wert für k ist also 14.



28. Von Erichs siebenstelliger Telefonnummer habe ich 6 Ziffern in der richtigen Reihenfolge notiert. Ich weiß nicht, welche Ziffer ich vergessen habe und wo sie fehlt. Wie viele Telefonnummern muss ich höchstens ausprobieren, um sicher zu sein, die richtige Telefonnummer verwendet zu haben?
(Beachte: Die vorderste Ziffer könnte auch 0 sein!)

(A) 55 (B) 60 **(C)** 64 (D) 70 (E) 80

Es gibt 7 Stellen an denen ich die Ziffer vergessen haben könnte (je zwischen zwei Ziffern sowie zu Beginn oder ganz am Schluss). An jeder Stelle könnte ich 10 verschiedene Ziffern vergessen haben, aber manche dieser Möglichkeiten liefern die gleiche Telefonnummer. Nämlich genau dann, wenn in der siebenstelligen Nummer zwei gleiche Ziffern aufeinanderfolgen. Es ist dabei egal ob ich die erste der identischen Ziffern oder die zweite vergessen hätte. Das heißt, ich muss zu Beginn 10 Ziffern probieren und an den restlichen 6 Stellen jeweils nur 9 Ziffern. Macht insgesamt $10 + 6 \cdot 9 = 64$ mögliche Telefonnummern.

29. Maria dividiert 2015 durch 1. Dann dividiert sie 2015 durch 2 und dann der Reihe nach durch 3, 4 usw. bis einschließlich 1000. Sie schreibt für jede Division den verbleibenden Rest auf. Wie lautet der größte Rest, den sie notiert hat?

(A) 15 (B) 215 **(C)** 671 (D) 1007 (E) ein anderer Wert

Die größte Zahl durch die Maria dividiert ist 1000. Der größte Rest ist daher geringer als 1000. Bei der Division von 2015 durch 672 notiert sie den Rest 671. Einen größeren Rest kann sie nur bei der Division durch eine größere Zahl als 672 erhalten, doch für jede Zahl x mit $672 < x \leq 1000$ gilt für den Rest r: $2015 = 2x + r$ und somit $r = 2015 - 2x < 2015 - 2 \cdot 672 = 671$ (der Rest ist also kleiner als 671 und dieses ist damit der größte Rest).

30. Jede positive ganze Zahl wird nach den folgenden drei Regeln gefärbt:
(i) Jede Zahl ist entweder rot oder grün.
(ii) Die Summe zweier verschiedener roter Zahlen ergibt eine rote Zahl.
(iii) Die Summe zweier verschiedener grüner Zahlen ist eine grüne Zahl.
Auf wie viele Arten kann man das machen?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 **(D)** 6 (E) auf mehr als sechs Arten

- Sind die Zahlen 1 und 2 gleich gefärbt, so haben auch alle weiteren Zahlen diese Farbe (dann sind alle Zahlen rot oder alle Zahlen grün gefärbt).
- Haben die beiden Zahlen 1 und 2 unterschiedliche Farben und 3 die selbe Farbe wie 1, dann haben ebenso alle weiteren Zahlen diese Farbe.

- Haben die beiden Zahlen 1 und 2 unterschiedliche Farben und 3 die selbe Farbe wie 2, dann haben auch die Zahlen 5, 7 und alle weiteren Zahlen diese Farbe. Die Zahl 4 kann nicht die selbe Farbe wie 1 haben, denn dann ergibt die Färbung von 5=3+2=4+1 zwei verschiedene Ergebnisse. Ebenso kann 6 nicht die selbe Farbe wie 1 haben.

Es gibt also folgende 6 Färbungen:

1	**2**	**3**	**4**	**…**
Rot	Rot	Rot	Rot	Rot
Grün	Grün	Grün	Grün	Grün
Rot	Grün	Rot	Rot	Rot
Grün	Rot	Grün	Grün	Grün
Rot	Grün	Grün	Grün	Grün
Grün	Rot	Rot	Rot	Rot

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9 – 10

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
30 Basispunkte

jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte

jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2015“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

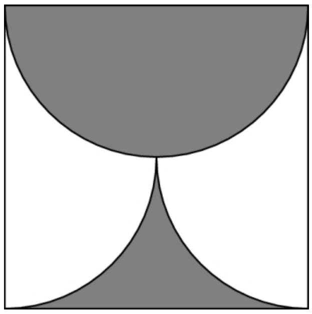
Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich - 23. 3. 2015

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welche der folgenden Zahlen liegt dem Produkt 20,15 x 51,02 am nächsten?
(A) 100 (B) 1000 (C) 10000 (D) 100000 (E) 1000000

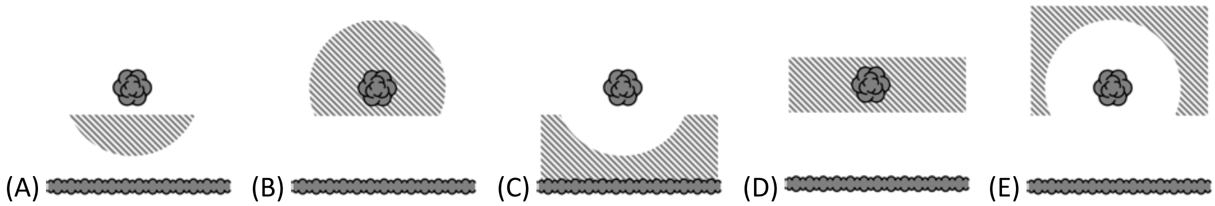
2. Nachdem die Mutter T-Shirts zum Trocknen an die Wäscheleine gehängt hat, hängt ihr Sohn zwischen zwei benachbarte T-Shirts jeweils einen einzelnen Socken. Jetzt hängen 29 Wäschestücke an der Leine. Wie viele davon sind T-Shirts?
(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 14 (E) 15

3. Die grauen Bereiche des Quadrats mit Seitenlänge a sind durch einen Halbkreis bzw. zwei Viertelkreise begrenzt. Wie groß ist ihre Gesamtfläche?
(A) $\frac{\pi a^2}{8}$ (B) $\frac{a^2}{2}$ (C) $\frac{\pi a^2}{2}$ (D) $\frac{a^2}{4}$ (E) $\frac{\pi a^2}{4}$



4. Anna, Beate und Cindy kaufen gemeinsam ein Sackerl mit 30 Keksen. Jede von ihnen bekommt 10 davon. Aber Anna hat 80 Cent bezahlt, Beate 50 Cent und Cindy 20 Cent. Um wie viele Kekse hätte Anna mehr bekommen, wenn sie die Kekse proportional zum bezahlten Preis aufgeteilt hätten?
(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

5. Mr. Hide möchte einen Schatz finden, den er schon vor Jahren in seinem Garten vergraben hat. Er kann sich nur erinnern, dass er den Schatz mindestens 5 m von der Hecke und höchstens 5 m vom alten Birnbaum vergraben hat. In welchem Bild ist der Bereich am besten dargestellt, in dem Mr. Hide nach dem Schatz suchen muss?



6. Wie lautet die Einerziffer von $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$?
(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

7. In einer Klasse gibt es 33 Jugendliche. Ihre Lieblingsfächer sind jeweils Informatik, Turnen oder beide. Drei von ihnen mögen beide Fächer gleich gern. Es gibt doppelt so viele Jugendliche, die nur Informatik lieben, wie solche, die nur Turnen lieben. Wie viele von ihnen lieben Informatik?
(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 23

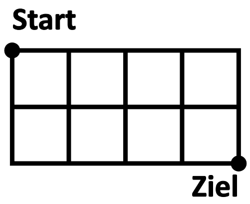
8. Welche der folgenden Zahlen ist weder eine Quadratzahl noch eine Kubikzahl?
(A) 6^{13} (B) 5^{12} (C) 4^{11} (D) 3^{10} (E) 2^9

9. Herr Waxi kauft 100 Kerzen. An jedem Tag brennt er eine Kerze ab. Aus den Stümpfen von sieben abgebrannten Kerzen kann er immer eine neue Kerze machen. Nach wie vielen Tagen muss er wieder neue Kerzen kaufen?
(A) 112 (B) 114 (C) 115 (D) 116 (E) 117

10. Ein Fünfeck heißt konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind. Die Anzahl der rechten Winkel in einem konvexen Fünfeck ist *n*. Welche der folgenden Listen ist eine vollständige Aufzählung der möglichen Werte von *n*?
(A) 1, 2, 3 (B) 0, 1, 2, 3, 4 (C) 0, 1, 2, 3 (D) 0, 1, 2 (E) 1, 2

- 4 Punkte Beispiele -

11. In der Abbildung sieht man meinen Entscheidungswürfel in drei verschiedenen Stellungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit diesem Würfel ein „YES" zu erhalten
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

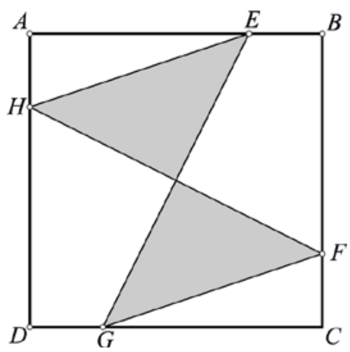


12. Die Seitenlänge jedes der kleinen Quadrate in der Figur ist 1. Wie lang ist der kürzeste Weg den man vom „Start" bis zum „Ziel" gehen kann, wenn man sich nur längs der Quadratseiten und Quadratdiagonalen bewegen darf?
(A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ (C) $2 + 2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

13. Jeder Bewohner eines fernen Planeten hat mindestens zwei Ohren. Drei Einwohner mit den Namen Imi, Dimi und Trimi treffen sich in einem schicken Krater. Imi sagt: „Ich kann 8 Ohren sehen." Dimi sagt darauf: „Ich kann 7 Ohren sehen." Schließlich sagt Trimi: „Komisch, ich kann nur 5 Ohren sehen." Keiner von ihnen kann die eigenen Ohren sehen. Wie viele Ohren hat Trimi?
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

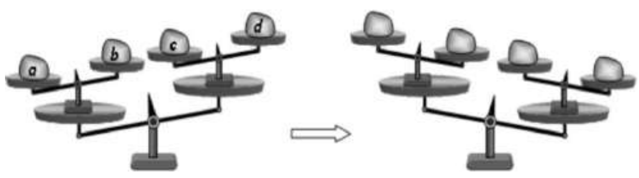
14. Ein quaderförmiger Behälter hat eine quadratische Basis mit Seitenlänge 10 cm. Er ist bis zu einer Höhe *h* mit Wasser gefüllt. Nun wird ein Metallwürfel mit Kantenlänge 2 cm hineingelegt. Dieser sinkt auf den Boden des Behälters. Das Wasser steht nun genau bis zur Oberkante des Metallwürfels. Bestimme *h*!
(A) 1,92 cm (B) 1,93 cm (C) 1,90 cm (D) 1,91 cm (E) 1,94 cm

15. Das Quadrat ABCD hat die Fläche 80. Die Punkte E, F, G und H liegen auf den Quadratseiten mit AE = BF = CG = DH.
Wie groß ist die Fläche des grauen Bereichs, wenn $\mathrm{AE} = 3 \cdot \mathrm{EB}$ gilt?
(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40



16. Multipliziert man das ganzzahlige Alter eines Vaters mit dem ganzzahligen Alter seines Sohnes, so erhält man 2015. Beide sind im 20. Jahrhundert geboren. Wie groß ist der Altersunterschied von Vater und Sohn?
(A) 26 (B) 29 (C) 31 (D) 34 (E) 36

17. Vier Objekte *a, b, c, d* wurden wie abgebildet auf eine doppelte Balkenwaage gelegt. Danach wurden zwei der Objekte vertauscht, was die abgebildete Änderung in der Stellung der Waage bewirkt hat. Welche beiden Objekte wurden vertauscht?



(A) a und b (B) b und d (C) b und c (D) a und d (E) a und c

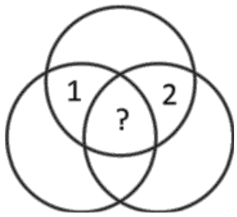
18. Es ist bekannt, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 85x + c = 0$ Primzahlen sind. Wie groß ist die Ziffernsumme von c?
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 21

19. Wie viele dreiziffrige positive ganze Zahlen gibt es, in denen sich direkt nebeneinander stehende Ziffern immer um 3 unterscheiden?
(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 20 (E) 27

20. Welcher Wert der Variablen n ist ein Gegenbeispiel zur Aussage „Ist n eine Primzahl, dann ist genau eine der zwei Zahlen n – 2 und n + 2 eine Primzahl."?
(A) 11 (B) 19 (C) 21 (D) 29 (E) 37

- 5 Punkte Beispiele -

21. In der Abbildung sehen wir sieben Bereiche, die von drei Kreisen begrenzt werden. In jeden Bereich wird eine Zahl geschrieben. Es ist bekannt, dass jede Zahl gleich der Summe aller Zahlen in den angrenzenden Bereichen ist. (Zwei Bereiche werden als angrenzend bezeichnet, wenn sie mehr als einen Randpunkt gemeinsam haben.) Welche Zahl befindet sich im inneren Bereich?

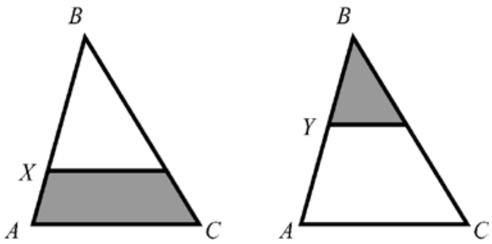


(A) 0 (B) -3 (C) 3 (D) -6 (E) 6

22. Wie viele zweiziffrige Zahlen kann man als Summe von genau sechs verschiedenen Zweierpotenzen schreiben? (Hinweis: Zweierpotenzen sind 2^0, 2^1, 2^2, …)
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

23. Petra hat drei verschiedene Wörterbücher und zwei verschiedene Romane im Bücherregal. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie die Bücher anordnen, wenn jedenfalls alle Wörterbücher zusammen stehen sollen, und ebenso auch die Romane?
(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 60 (E) 120

24. Im Dreieck *ABC* werden durch *X* und durch *Y* parallele Linien zur Basis *AC* eingezeichnet. Die Flächen der grauen Bereiche sind in beiden Fällen gleich groß. Das Verhältnis $BX: XA = 4: 1$ ist bekannt. Wie groß ist das Verhältnis $BY: YA$?
(A) $1: 1$ (B) $2: 1$ (C) $3: 1$ (D) $3: 2$ (E) $4: 3$



25. In einem rechtwinkeligen Dreieck teilt die Winkelsymmetrale eines spitzen Winkels die gegenüberliegende Seite in Strecken der Längen 1 bzw. 2. Wie lang ist diese Winkelsymmetrale?
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

26. Eine zweiziffrige Zahl mit den Ziffern x, y, kann in der Form $\overline{xy}$ geschrieben werden. Es seien a, b, c verschiedene Ziffern. Auf wie viele Arten kann man die Ziffern a, b, c auswählen, sodass $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ gilt?
(A) 84 (B) 96 (C) 125 (D) 201 (E) 502

27. Streicht man eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, n-1, n$, so ist der Durchschnitt der verbleibenden Zahlen 4,75. Welche Zahl wurde gestrichen?
(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) Die Zahl kann nicht eindeutig bestimmt werden.

28. Die Ameise Tanti beginnt ein Abenteuer an einem Eckpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge 1. Sie möchte jede Kante des Würfels mindestens einmal entlangwandern, und am Schluss an ihren Ausgangseckpunkt zurückkehren. Wie lang ist ihr Spaziergang mindestens?
(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 20

29. Zehn verschiedene Zahlen werden aufgeschrieben. Jede Zahl, die gleich dem Produkt der anderen neun Zahlen ist, darf danach unterstrichen werden. Wie viele Zahlen dürfen höchstens unterstrichen werden?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 9 (E) 10

30. Auf einer Geraden werden einige Punkte markiert. Danach werden alle möglichen Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte bestimmt. Ein markierter Punkt liegt im Inneren von genau 80 dieser Strecken, und ein weiterer liegt im Inneren von genau 90 davon. Wie viele Punkte wurden auf der Geraden markiert?
(A) 20 (B) 22 (C) 80 (D) 90 (E) Die Information genügt nicht, um dies zu bestimmen.

MATHEMATICS KANGAROO 2015
Austria - 23. 3. 2015

Level: Junior, Grades 9 – 10

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 Starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

S-VERSICHERUNG
VIENNA INSURANCE GROUP

pwc

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2015“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

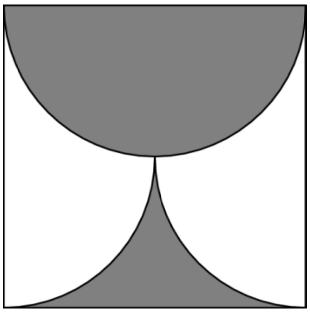
Mathematical Kangaroo 2015
Group Junior (Grades 9 and 10)
Austria - 23. 3. 2015

- 3 point questions -

1. Which of the following numbers is closest to the product of 20·15 x 51·02?
(A) 100 (B) 1000 (C) 10000 (D) 100000 (E) 1000000

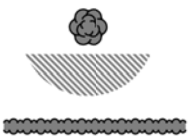
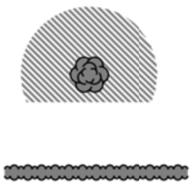
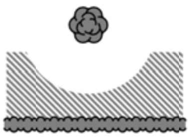
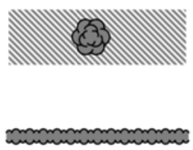
2. After mum had hung the t-shirts on the washing line for drying, her son hung a single sock between each two t-shirts. Now there are 29 pieces of clothing on the line. How many of them are t-shirts?
(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 14 (E) 15

3. The grey areas of the square with side length a are bounded by a semi-circle and two quarter-circles respectively. What is their total area?
(A) $\frac{\pi a^2}{8}$ (B) $\frac{a^2}{2}$ (C) $\frac{\pi a^2}{2}$ (D) $\frac{a^2}{4}$ (E) $\frac{\pi a^2}{4}$



4. Anna, Beate and Cindy buy a bag of 30 biscuits together. They get 10 biscuits each. But Anna has paid 80 cents, Beate 50 cents and Cindy 20 cents. How many more biscuits should Anna have got, if they had shared them in proportion with the amount they had each paid?
(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

5. Mr. Hide wants to find a treasure that he buried years before. He can only remember that he buried the treasure at least 5 m away from the hedge and no more than 5 m away from the old pear tree. Which picture shows best the area where Mr. Hide has to look for the treasure?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. What is the unit digit of $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$?
(A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

7. There are 33 teenagers in a class. Their favourite subjects are either computing, PE or both. Three of them like both subjects. There are twice as many teenagers who only like computing as teenagers who like PE only. How many of them like computing?
(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 23

8. Which of the following numbers is neither a square nor a cubic number?
(A) 6^{13} (B) 5^{12} (C) 4^{11} (D) 3^{10} (E) 2^9

9. Herr Waxi buys 100 candles. Each day he burns down one candle. From the left overs of seven burned down candles, he can always make a new candle. After how many days does he have to buy new candles?
(A) 112 (B) 114 (C) 115 (D) 116 (E) 117

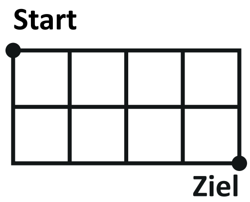
10. A pentagon is called convex if all its internal angles are less than 180°. The number of right angles in a convex pentagon is *n*. Which of the following lists is a complete listing of all possible values of *n*?
(A) 1, 2, 3 (B) 0, 1, 2, 3, 4 (C) 0, 1, 2, 3 (D) 0, 1, 2 (E) 1, 2

- 4 point questions-

11. In the diagram one can see my decision-die in three different positions. What is the probability I get a „YES“, when rolling this die once.

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

12. The side lengths of each of the small squares in the diagram are 1. How long is the shortest path from „Start“ to „Ziel“, if you are only allowed to move along the sides and the diagonals of the squares?

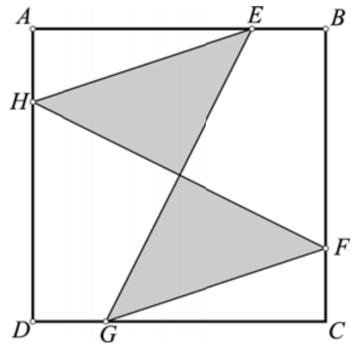


(A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ (C) $2 + 2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

13. Each inhabitant of a distant planet has at least two ears. Three inhabitants called Imi, Dimi and Trimi meet in a trendy crater. Imi says: „I can see 8 ears.“ Dimi then replies: „I can see 7 ears.“ Finally Trimi says: „Strange, I can only see 5 ears.” None of them can see their own ears. How many ears does Trimi have?
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

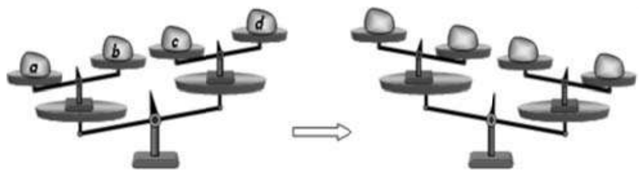
14. A cuboid shaped container has a square base with side length 10 cm. It is filled up to a height *h* with water. Now a metal cube with side length 2 cm is put inside. It sinks to the bottom of the container. The water now reaches to the top corner of the metal cube. Determine *h*!
(A) 1·92 cm (B) 1·93 cm (C) 1·90 cm (D) 1·91 cm (E) 1·94 cm

15. The square ABCD has area 80. The points E, F, G and H are on the sides of the square and AE = BF = CG = DH.
How big is the area of the grey part, if $\mathrm{AE} = 3 \times \mathrm{EB}$?
(A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40



16. If the whole number age of a father is multiplied by the whole number age of his son, one obtains 2015. Both are born in the 20th century. How big is the age gap between father and son?
(A) 26 (B) 29 (C) 31 (D) 34 (E) 36

17. Four objects *a, b, c, d* are placed on a double balance as shown. Then two of the objects are exchanged, which results in the change of position of the balance as shown. Which two objects were exchanged?



(A) a and b (B) b and d (C) b and c (D) a and d (E) a and c

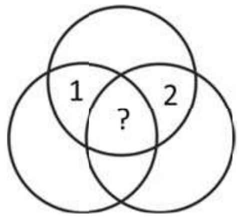
18. It is known that the solutions of the quadratic equation $x^2 - 85x + c = 0$ are prime numbers. What is the digit sum of *c*?
(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 21

19. How many three-digit positive whole numbers are there, where the digits when placed side by side always differ by 3?
(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 20 (E) 27

20. Which value of the variable n is a counterexample to the statement „If n is a prime number, then exactly one of the two numbers n – 2 and n + 2 is a prime number.“?
(A) 11 (B) 19 (C) 21 (D) 29 (E) 37

- 5 point questions -

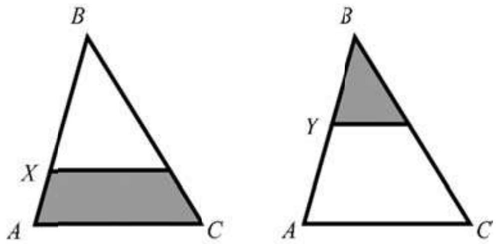
21. In the diagram we can see seven sections which are bordered by three circles. One number is written into each section. It is known that each number is equal to the sum of all the numbers in the adjacent zones. (Two zones are called adjacent if they have more than one corner point in common.) Which number is written into the inner area?
(A) 0 (B) -3 (C) 3 (D) -6 (E) 6



22. How many two-digit numbers can be written as sum of exactly six different powers of two? (Hint: Powers of two are 2^0, 2^1, 2^2, …)
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

23. Petra has three different dictionaries and two different novels on her bookshelf. In how many different ways can she arrange the books, if all the dictionaries should stay together and likewise the novels as well?
(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 60 (E) 120

24. Lines parallel to the base *AC* of triangle *ABC* are drawn through *X* and *Y*. In each case, the areas of the grey parts are equal in siz. The ratio $BX:XA = 4:1$ is known. What is the ratio $BY:YA$?
(A) $1:1$ (B) $2:1$ (C) $3:1$ (D) $3:2$ (E) $4:3$



25. In a right-angled triangle the angle bisector of an acute angle splits the opposite side into segments of length 1 and 2 respectively. How long is this angle bisector?
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

26. A two-digit number with the digits x, y, can be written in the form $\overline{xy}$. Let a, b, c be different digits. In how many way can the digits a, b, c be chosen, so that $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$?
(A) 84 (B) 96 (C) 125 (D) 201 (E) 502

27. If one of the numbers $1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$ is crossed out, the average of the remaining numbers is 4·75. Which number was crossed out?
(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) The number cannot be determined for certain.

28. The ant Tanti starts an adventure at a vertex of a cube with side length 1.
She wants to walk along each edge of the cube at least once and return to the starting point at the end. What is the minimum possible length of her walk?
(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 20

29. Ten different numbers are written down. Each number which is equal to the product of the other nine numbers can then be underlined. What is the maximum amount of numbers that can be underlined?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 9 (E) 10

30. Several points are marked on a straight line. Then all possible connecting lines between each two points are drawn. One such point lies within exactly 80 of those connecting lines, and another one lies within exactly 90 of those. How many points were marked on the straight line?
(A) 20 (B) 22 (C) 80 (D) 90 (E) Not enough information given to determine an answer.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9 – 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	E	B	E	B	C	E	A	D	C

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	C	C	A	B	D	D	B	D	E

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	C	B	D	C	A	B	D	B	B

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich - 23. 3. 2015

- 3 Punkte Beispiele -

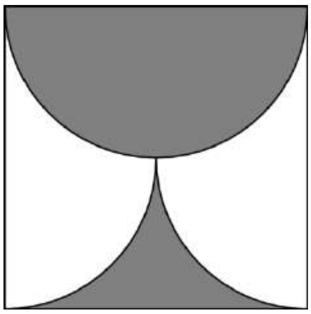
1. Welche der folgenden Zahlen liegt dem Produkt 20,15 x 51,02 am nächsten?
(A) 100 **(B)** 1000 (C) 10000 (D) 100000 (E) 1000000

$20{,}15 \cdot 51{,}02 \approx 20 \cdot 50 = 1000$. (Der genaue Wert ist $20{,}15 \cdot 51{,}02 = 1028{,}053$.)

2. Nachdem die Mutter T-Shirts zum Trocknen an die Wäscheleine gehängt hat, hängt ihr Sohn zwischen zwei benachbarte T-Shirts jeweils einen einzelnen Socken. Jetzt hängen 29 Wäschestücke an der Leine. Wie viele davon sind T-Shirts?
(A) 10 (B) 11 (C) 13 (D) 14 **(E)** 15

Nach jedem T-Shirt (außer dem letzten) hängt ein Socken. An der Wäscheleine hängt also ein T-Shirt mehr als Socken hängen. Es hängen also 15 T-Shirts und 14 Socken.

3. Die grauen Bereiche des Quadrats mit Seitenlänge a sind durch einen Halbkreis bzw. zwei Viertelkreise begrenzt. Wie groß ist ihre Gesamtfläche?
(A) $\frac{\pi a^2}{8}$ **(B)** $\frac{a^2}{2}$ (C) $\frac{\pi a^2}{2}$ (D) $\frac{a^2}{4}$ (E) $\frac{\pi a^2}{4}$

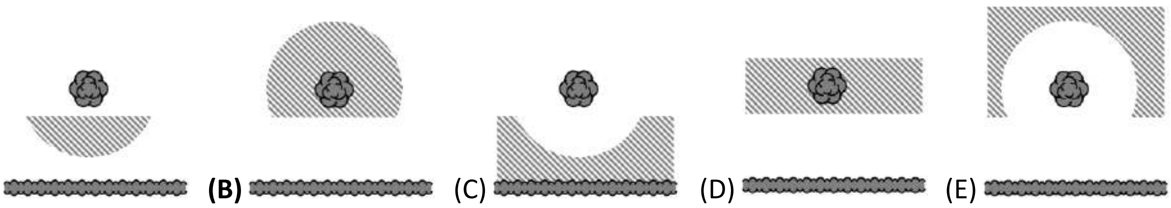


Wir teilen das Quadrat horizontal in zwei gleich große Rechtecke, sodass im oberen Rechteck der graue Halbkreis mit Radius $\frac{a}{2}$ ist. Das untere Rechteck besteht aus einem grauen Bereich und zwei deckungsgleichen weißen Bereichen. Diese weißen Bereiche sind jeweils ein Viertelkreis mit Radius $\frac{a}{2}$ und daher zusammen gleich groß wie der graue Halbkreis. Wir können die weißen Bereiche im unteren Rechteck also mit dem grauen Halbkreis genau bedecken und erhalten ein graues Rechteck mit der Fläche $a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$.

4. Anna, Beate und Cindy kaufen gemeinsam ein Sackerl mit 30 Keksen. Jede von ihnen bekommt 10 davon. Aber Anna hat 80 Cent bezahlt, Beate 50 Cent und Cindy 20 Cent. Um wie viele Kekse hätte Anna mehr bekommen, wenn sie die Kekse proportional zum bezahlten Preis aufgeteilt hätten?
(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 **(E)** 6

Wenn sie proportional geteilt hätten, so hätte Anna 16, Beate 10 und Cindy 4 Kekse erhalten. Anna hätte also um 6 Kekse mehr erhalten.

5. Mr. Hide möchte einen Schatz finden, den er schon vor Jahren in seinem Garten vergraben hat. Er kann sich nur erinnern, dass er den Schatz mindestens 5 m von der Hecke und höchstens 5 m vom alten Birnbaum vergraben hat. In welchem Bild ist der Bereich am besten dargestellt, in dem Mr. Hide nach dem Schatz suchen muss?



(A) **(B)** (C) (D) (E)

Wenn der Schatz vom Stamm des Baumes nur 5 m entfernt ist, so ist der mögliche Bereich ein Kreis rund um den Baum. Ein 5 m breiter Streifen entlang der Hecke kommt dabei nicht in Frage, da der Schatz mindestens 5 m von der Hecke entfernt ist. Der Kreis rund um den Baum ohne die Überlappung mit dem Streifen entlang der Hecke ist der graue Bereich in Figur (B).

6. Wie lautet die Einerziffer von $2015^2 + 2015^0 + 2015^1 + 2015^5$?

(A) 1 (B) 5 **(C)** 6 (D) 7 (E) 9

Da wir nur an der Einerziffer des Ergebnisses interessiert sind, müssen wir auch nur die Einerziffern aller vorkommenden Zahlen betrachten und es gilt:

- Die Einerziffer von $2015^0 = 1$ ist 1.
- Für alle ganzen Zahlen $n \neq 0$ ist die Einerziffer von 2015^n gleich der Einerziffer von 5^n und diese ist 5.

Die Einerziffer der gegebenen Rechnung ist also die Einerziffer von $5 + 1 + 5 + 5$, also 6.

7. In einer Klasse gibt es 33 Jugendliche. Ihre Lieblingsfächer sind jeweils Informatik, Turnen oder beide. Drei von ihnen mögen beide Fächer gleich gern. Es gibt doppelt so viele Jugendliche, die nur Informatik lieben, wie solche, die nur Turnen lieben. Wie viele von ihnen lieben Informatik?

(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 **(E)** 23

Da drei Jugendliche beide Fächer gleich gern mögen, gibt es 30, die nur eines der beiden als Lieblingsfach haben. Von diesen mag ein Drittel nur Turnen und die anderen zwei Drittel nur Informatik. Es haben also $\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$ Jugendliche nur Informatik als Lieblingsfach, dazu kommen noch jene drei, die beide Fächer gleich gern mögen. Insgesamt mögen also 23 Jugendliche Informatik.

8. Welche der folgenden Zahlen ist weder eine Quadratzahl noch eine Kubikzahl?

(A) 6^{13} (B) 5^{12} (C) 4^{11} (D) 3^{10} (E) 2^9

Es gilt $5^{12} = (5^4)^3$ ist eine Kubikzahl (und eine Quadratzahl in der Form $(5^6)^2$), $4^{11} = (2^2)^{11} = (2^{11})^2$ ist eine Quadratzahl, $3^{10} = (3^5)^2$ ist eine Quadratzahl und $2^9 = (2^3)^3$ ist eine Kubikzahl. 6^{13} ist weder eine Quadratzahl, noch eine Kubikzahl.

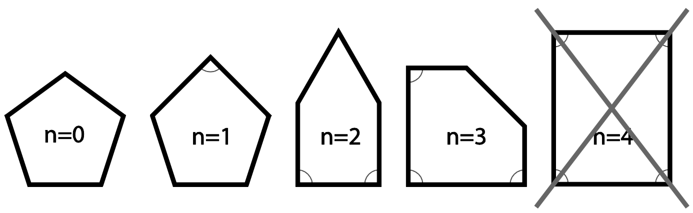
9. Herr Waxi kauft 100 Kerzen. An jedem Tag brennt er eine Kerze ab. Aus den Stümpfen von sieben abgebrannten Kerzen kann er immer eine neue Kerze machen. Nach wie vielen Tagen muss er wieder neue Kerzen kaufen?

(A) 112 (B) 114 (C) 115 **(D)** 116 (E) 117

Nach 98 Tagen hat er 98 Stümpfe und noch 2 ganze Kerzen. Aus den Stümpfen kann er $\frac{98}{7} = 14$ neue Kerzen machen. Nach weiteren 14 Tagen hat er 14 Stümpfe und noch immer 2 ganze Kerzen. Aus den Stümpfen kann er wieder $\frac{14}{7} = 2$ neue Kerzen machen. Nach 4 weiteren Tagen hat er 4 Stümpfe, aber keine Kerze mehr und kann auch keine neue mehr machen. Er muss also nach $98 + 14 + 4 = 116$ Tagen neue Kerzen kaufen.

10. Ein Fünfeck heißt konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind. Die Anzahl der rechten Winkel in einem konvexen Fünfeck ist *n*. Welche der folgenden Listen ist eine vollständige Aufzählung der möglichen Werte von *n*?

(A) 1, 2, 3 (B) 0, 1, 2, 3, 4 **(C)** 0, 1, 2, 3 (D) 0, 1, 2 (E) 1, 2

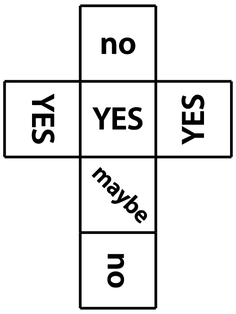


Ein regelmäßiges Fünfeck hat keinen rechten Winkel ($n = 0$). Setzt man auf die längere Basis eines Trapez (ohne rechte Winkel) mit der Hypotenuse ein rechtwinkeliges Dreieck auf, so erhält man ein Fünfeck mit einem rechten Winkel ($n = 1$). Wenn man auf ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck aufsetzt, so erhält man ein Fünfeck mit zwei rechten Winkeln ($n = 2$). Wenn man von einem Quadrat eine Ecke abschneidet, so erhält man ein Fünfeck mit drei rechten Winkeln ($n = 3$). Ein konvexes Polygon mit vier rechten Winkeln ist immer ein Rechteck und nie ein Fünfeck ($n \neq 4$).

- 4 Punkte Beispiele -

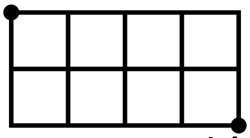
11. In der Abbildung sieht man meinen Entscheidungswürfel in drei verschiedenen Stellungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit diesem Würfel ein „YES“ zu erhalten

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$



Wir zeichnen ein Netz des Würfels und sehen, dass „YES“ auf drei Seiten des Würfels steht. Die Wahrscheinlichkeit, ein „YES“ zu würfeln liegt also bei $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

12. Die Seitenlänge jedes der kleinen Quadrate in der Figur ist 1. Wie lang ist der kürzeste Weg den man vom „Start“ bis zum „Ziel“ gehen kann, wenn man sich nur längs der Quadratseiten und Quadratdiagonalen bewegen darf?



(A) $2\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$ **(C)** $2 + 2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ (E) 6

Wir verwenden zwei Diagonalen um den Weg nach unten zu gehen (dabei gehen wir auch zwei Schritte nach rechts). Durch den Gang einer Diagonalen erspart man sich zwei Seitenlängen für den selben Wegabschnitt. Es fehlen noch zwei Schritte nach rechts, um zum Ziel zu gelangen. Der Weg hat eine Länge von $2 \cdot \sqrt{2} + 2$.

13. Jeder Bewohner eines fernen Planeten hat mindestens zwei Ohren. Drei Einwohner mit den Namen Imi, Dimi und Trimi treffen sich in einem schicken Krater. Imi sagt: „Ich kann 8 Ohren sehen.“ Dimi sagt darauf: „Ich kann 7 Ohren sehen.“ Schließlich sagt Trimi: „Komisch, ich kann nur 5 Ohren sehen.” Keiner von ihnen kann die eigenen Ohren sehen. Wie viele Ohren hat Trimi?

(A) 2 (B) 4 **(C)** 5 (D) 6 (E) 7

Zusammen sehen Imi, Dimi und Trimi jedes Ohr genau zweimal. Sie zählen 8+7+5=20 Ohren und da jedes Ohr doppelt gezählt wurde haben sie zusammen 10 Ohren. Trimi sieht nur 5, muss also selbst auch 5 Ohren haben.

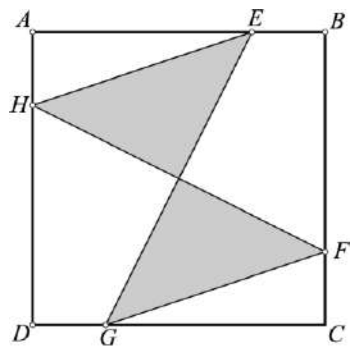
14. Ein quaderförmiger Behälter hat eine quadratische Basis mit Seitenlänge 10 cm. Er ist bis zu einer Höhe *h* mit Wasser gefüllt. Nun wird ein Metallwürfel mit Kantenlänge 2 cm hineingelegt. Dieser sinkt auf den Boden des Behälters. Das Wasser steht nun genau bis zur Oberkante des Metallwürfels. Bestimme *h*!

(A) 1,92 cm (B) 1,93 cm (C) 1,90 cm (D) 1,91 cm (E) 1,94 cm

Im Behälter befinden sich $100 \cdot h\ cm^3$ Wasser. Durch den Metallwürfel mit $8\ cm^3$ befinden sich $(100 \cdot h + 8)\ cm^3$ Wasser und Metall im Behälter, der bis zu einer Höhe von $2\ cm$ gefüllt ist. Wasser und Metallwürfel haben also zusammen $200\ cm^3$. Es gilt also $100 \cdot h + 8 = 200$ und somit $h = 1{,}92\ cm$.

15. Das Quadrat ABCD hat die Fläche 80. Die Punkte E, F, G und H liegen auf den Quadratseiten mit AE = BF = CG = DH.
Wie groß ist die Fläche des grauen Bereichs, wenn $\mathrm{AE} = 3 \cdot \mathrm{EB}$ gilt?

(A) 20 **(B)** 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

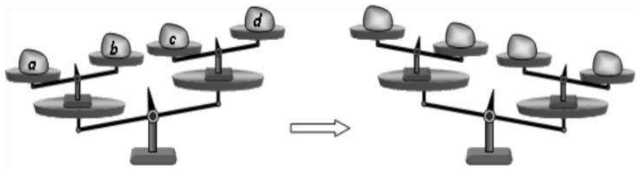


Es gilt $AB = BC = CD = DA = \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}$ und daher $AE = BF = CG = DH = 3 \cdot \sqrt{5}$ und $EB = FC = GD = HA = \sqrt{5}$. Das Quadrat $EFGH$ ist so groß wie das Quadrat $ABCD$ ohne die Dreiecke AEH, BFE, FCG und GDH und hat die Fläche $80 - 4 \cdot \frac{(3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5})}{2} = 80 - 30 = 50$. Der graue Bereich ist genau die Hälfte des Quadrates $EFGH$ und hat daher die Fläche $\frac{50}{2} = 25$.

16. Multipliziert man das ganzzahlige Alter eines Vaters mit dem ganzzahligen Alter seines Sohnes, so erhält man 2015. Beide sind im 20. Jahrhundert geboren. Wie groß ist der Altersunterschied von Vater und Sohn?
(A) 26 (B) 29 (C) 31 **(D)** 34 (E) 36

Es gilt $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Da der Sohn im 20. Jahrhundert geboren wurde kann er nicht 5 oder 13 Jahre sein. Er ist also 31 Jahre und der Vater $5 \cdot 13 = 65$ Jahre. Der Altersunterschied ist $65 - 31 = 34$ Jahre.

17. Vier Objekte *a, b, c, d* wurden wie abgebildet auf eine doppelte Balkenwaage gelegt. Danach wurden zwei der Objekte vertauscht, was die abgebildete Änderung in der Stellung der Waage bewirkt hat. Welche beiden Objekte wurden vertauscht?



(A) a und b (B) b und d (C) b und c **(D)** a und d (E) a und c

Durch das Vertauschen der zwei Objekte ändern sich alle drei Waagenstellungen. Es wurden also sicher nicht zwei Objekte einer kleinen Waage vertauscht. Die Antwort (A) scheidet daher aus. Es wurden auch nicht das jeweils schwerste der beiden kleinen Waagen bzw. das jeweils leichteste Objekt vertauscht. Daher scheiden die Antworten (B) und (E) aus. Wären b und c vertauscht worden, so wäre die linke Waage sicher schwerer als die rechte Waage. Bleibt also nur mehr Antwort (D). Wenn die vier Objekte *a, b, c, d* in dieser Reihenfolge die Massen 4, 3, 2 und 1 haben, so ergeben sie vor dem Vertauschen die erste Waagenstellung. Nach Vertauschen der Objekte *a* und *d* liegen sie in der Reihenfolge 1, 3, 2 und 4 auf der Waage und ergeben die zweite Waagenstellung.

18. Es ist bekannt, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 85x + c = 0$ Primzahlen sind. Wie groß ist die Ziffernsumme von c?
(A) 12 **(B)** 13 (C) 14 (D) 15 (E) 21

Da die Lösungen ganzzahlig sind können wir $x^2 - 85x + c = 0$ in der Form $(x - a)(x - b) = 0$ schreiben, wobei a und b die ganzzahligen Lösungen sind und $a + b = 85$, sowie $ab = c$ gilt. Primzahlen sind entweder ungerade oder 2. Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade, aber $a + b = 85$ ist ungerade. Wenn a und b also Primzahlen sind, so ist eine der beiden 2 und die andere $85 - 2 = 83$ (und 83 ist tatsächlich eine Primzahl). Dann ist also $c = 2 \cdot 83 = 166$ und die Ziffernsumme ist $1 + 6 + 6 = 13$.

19. Wie viele dreiziffrige positive ganze Zahlen gibt es, in denen sich direkt nebeneinander stehende Ziffern immer um 3 unterscheiden?
(A) 12 (B) 14 (C) 16 **(D)** 20 (E) 27

Wir schreiben alle möglichen Werte auf: 147, 141, 258, 252, 369, 363, 303, 474, 414, 585, 525, 696, 636, 630, 747, 741, 858, 852, 969, 963.

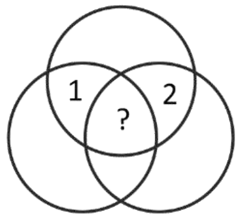
20. Welcher Wert der Variablen n ist ein Gegenbeispiel zur Aussage „Ist n eine Primzahl, dann ist genau eine der zwei Zahlen n – 2 und n + 2 eine Primzahl."?
(A) 11 (B) 19 (C) 21 (D) 29 **(E)** 37

37 ist eine Primzahl, aber $37 - 2 = 35 = 5 \cdot 7$ ist keine Primzahl und $37 + 2 = 39 = 3 \cdot 13$ ist auch keine Primzahl. 37 ist also ein Gegenbeispiel.

Die anderen Antworten sind keine Gegenbeispiele, denn 11 ist zwar eine Primzahl, $11 + 2 = 13$ aber auch. 19 ist ebenso eine Primzahl und $19 - 2 = 17$ auch. 21 ist überhaupt keine Primzahl und daher auch kein Gegenbeispiel. 29 ist eine Primzahl, $29 + 2 = 31$ auch.

- 5 Punkte Beispiele -

21. In der Abbildung sehen wir sieben Bereiche, die von drei Kreisen begrenzt werden. In jeden Bereich wird eine Zahl geschrieben. Es ist bekannt, dass jede Zahl gleich der Summe aller Zahlen in den angrenzenden Bereichen ist. (Zwei Bereiche werden als angrenzend bezeichnet, wenn sie mehr als einen Randpunkt gemeinsam haben.) Welche Zahl befindet sich im inneren Bereich?



(A) 0 (B) -3 (C) 3 (D) -6 (E) 6

Wir schreiben in die drei unteren leeren Felder von links nach rechts die Platzhalter a, b und c und es gilt daher

$$a = 1 + b$$
$$b = a + ? + c$$
$$c = 2 + b$$
$$? = 1 + 2 + b$$

Aus der ersten und dritten Gleichung berechnen wir $a + c = 1 + b + 2 + b = 3 + 2b$ und setzen das in die zweite Gleichung ein: $b = a + c + ? = 3 + 2b + ?$. Jetzt setzen wir noch die vierte Gleichung ein, erhalten $b = 3 + 2b + ? = 3 + 2b + 3 + b = 6 + 3b$ und lösen nach b auf was uns $b = -3$ liefert.
Zuletzt berechnen wir jetzt $? = 3 + b = 3 - 3 = 0$.

22. Wie viele zweiziffrige Zahlen kann man als Summe von genau sechs verschiedenen Zweierpotenzen schreiben? (Hinweis: Zweierpotenzen sind 2^0, 2^1, 2^2, …)

(A) 0 (B) 1 **(C)** 2 (D) 3 (E) 4

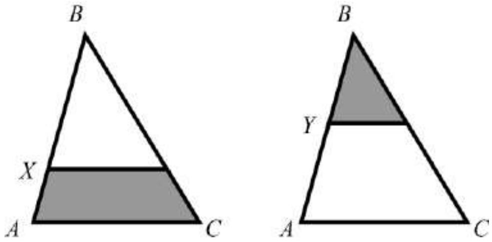
Die Zweierpotenz $2^7 = 128$ ist bereits dreiziffrig. Es können also nur die Zweierpotenzen 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 in der Summe vorkommen, wobei in jeder möglichen Summe genau eine dieser Zweierpotenzen nicht vorkommt. Die Summe aller sieben Zweierpotenzen ist $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7 - 1 = 127$. Mögliche Summen sind also $127 - 2^n$, wobei $0 \leq n \leq 6$ so zu wählen ist, dass $2^n > 27$ ist (nur dann ist die Summe zweiziffrig). Das gilt für $n = 6$ und $n = 5$. Es gibt also zwei mögliche Zahlen.

23. Petra hat drei verschiedene Wörterbücher und zwei verschiedene Romane im Bücherregal. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie die Bücher anordnen, wenn jedenfalls alle Wörterbücher zusammen stehen sollen, und ebenso auch die Romane?

(A) 12 **(B)** 24 (C) 30 (D) 60 (E) 120

Die Wörterbücher können alle links, oder alle rechts im Regal stehen. In beiden Fällen können die Wörterbücher auf $3! = 6$ und die Romane auf $2! = 2$ Arten angeordnet werden. Es gibt also $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten, die Bücher anzuordnen.

24. Im Dreieck *ABC* werden durch *X* und durch *Y* parallele Linien zur Basis *AC* eingezeichnet. Die Flächen der grauen Bereiche sind in beiden Fällen gleich groß. Das Verhältnis $BX : XA = 4 : 1$ ist bekannt. Wie groß ist das Verhältnis $BY : YA$?



(A) $1 : 1$ (B) $2 : 1$ (C) $3 : 1$ **(D)** $3 : 2$ (E) $4 : 3$

Die Höhe im Dreieck ABC bezeichnen wir mit h. Die parallele Linie zu AC durch X hat die Länge $\frac{4 \cdot AC}{5}$ und das graue Trapez hat die Höhe $\frac{h}{5}$ (jeweils Strahlensatz). Der graue Bereich hat die Fläche $\frac{AC+\frac{4}{5} \cdot AC}{2} \cdot \frac{h}{5} = \frac{9}{50} \cdot AC \cdot h$.
Wir bezeichnen mit a das Verhältnis $BY:BA$. Die parallele Linie zu AC durch Y hat die Länge $a \cdot AC$ und das graue Dreieck hat die Höhe $a \cdot h$ (jeweils Strahlensatz). Der graue Bereich hat also die Fläche $\frac{a \cdot AC \cdot a \cdot h}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot AC \cdot h = \frac{9}{50} \cdot AC \cdot h$. Und daher ist $BY:BA = a = 3:5$ und in weiterer Folge $BY:YA = 3:2$.

25. In einem rechtwinkeligen Dreieck teilt die Winkelsymmetrale eines spitzen Winkels die gegenüberliegende Seite in Strecken der Längen 1 bzw. 2. Wie lang ist diese Winkelsymmetrale?
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ **(C)** $\sqrt{4}$ (D) $\sqrt{5}$ (E) $\sqrt{6}$

Wir beschriften das Dreieck mit A, B und C so, dass BC die Länge 3 hat und der rechte Winkel in C liegt. Wir spiegeln das Dreieck an der Seite BC und erhalten ein neues Dreieck ABA'. Die ursprüngliche Seite BC ist nun eine Winkelsymmetrale und Schwerlinie des Dreiecks ABA' und wird daher von den anderen Schwerlinien in Strecken der Längen 1 und 2 geteilt. Da die gegebene Winkelsymmetrale das erfüllt, ist diese gleichzeitig auch Schwerlinie des Dreiecks ABA' und damit fallen der Inkreismittelpunkt und der Schwerpunkt des Dreiecks ABA' auf einander. Daher ist das Dreieck ABA' ein gleichseitiges Dreieck.
Die gegebene Winkelsymmetrale hat also ebenfalls die Länge 3 und wird durch die anderen Schwerlinien des Dreiecks ABA' in Strecken der Längen 1 und 2 geteilt. Da die Strecke BC nun eine Schwerlinie des Dreiecks ABA' ist, hat die Winkelsymmetrale des Dreiecks ABC die Länge $2 = \sqrt{4}$.

26. Eine zweiziffrige Zahl mit den Ziffern x, y, kann in der Form $\overline{xy}$ geschrieben werden. Es seien a, b, c verschiedene Ziffern. Auf wie viele Arten kann man die Ziffern a, b, c auswählen, sodass $\overline{ab} < \overline{bc} < \overline{ca}$ gilt?
(A) 84 (B) 96 (C) 125 (D) 201 (E) 502

Aus $\overline{ab} < \overline{bc}$ folgt $a \leq b$ und da a und b verschieden sind, gilt $a < b$. Analog gilt $b < c$.
Wenn wir nun $a < b < c$ beliebig wählen, so gilt die Bedingung immer. Wählen wir $1 \leq b \leq 9$, so haben wir für die Wahl von a noch $b - 1$ Möglichkeiten, dieses zu wählen und für c noch $9 - b$ Möglichkeiten. Insgesamt haben wir also $\sum_{b=1}^{9}(b-1)(9-b) = 0 + 7 + 12 + 15 + 16 + 15 + 12 + 7 + 0 = 84$ Möglichkeiten für $a < b < c$.

27. Streicht man eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, n-1, n$, so ist der Durchschnitt der verbleibenden Zahlen 4,75. Welche Zahl wurde gestrichen?
(A) 5 **(B)** 7 (C) 8 (D) 9 (E) Die Zahl kann nicht eindeutig bestimmt werden.

Wir bezeichnen die Summe der verbleibenden Zahlen mi S. Da $4{,}75 \cdot (n-1) = S$ eine ganze Zahl ist, muss $n - 1$ ein Vielfaches von 4 sein. Außerdem gilt:

$$\frac{(n-1)n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) \leq S \leq 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2} \quad |:(n-1)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n}{2} \leq 4{,}75 \leq \frac{n+2}{2} \quad | \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow \quad n \leq 9{,}5 \leq n+2$$

Und daher ist $n = 9$ ($n = 8$ ist nicht möglich, da $4|(n-1)$).
Wurde die Zahl j gestrichen, so gilt $45 = \frac{n(n+1)}{2} = S + j = 4{,}75 \cdot (n-1) + j = 4{,}75 \cdot 8 + j = 38 + j$, also $j = 7$.

28. Die Ameise Tanti beginnt ein Abenteuer an einem Eckpunkt eines Würfels mit der Kantenlänge 1. Sie möchte jede Kante des Würfels mindestens einmal entlangwandern, und am Schluss an ihren Ausgangseckpunkt zurückkehren. Wie lang ist ihr Spaziergang mindestens?
(A) 12 (B) 14 (C) 15 **(D)** 16 (E) 20

Wenn Tanti einen Eckpunkt des Würfels besucht, so verwendet sie zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Kanten, um zu dem Eckpunkt zu gelangen bzw. ihn wieder zu verlassen. Da in jedem Eckpunkt aber drei Kanten aneinanderstoßen muss sie auch jeden Eckpunkt mindestens zweimal besuchen. Der Würfel hat 8 Ecken, Tanti muss also $2 \cdot 8 = 16$ Ecken besuchen und geht dafür mindestens 16 Kanten entlang. Ihr Spaziergang ist also mindestens 16 lang.

29. Zehn verschiedene Zahlen werden aufgeschrieben. Jede Zahl, die gleich dem Produkt der anderen neun Zahlen ist, darf danach unterstrichen werden. Wie viele Zahlen dürfen höchstens unterstrichen werden?
(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 9 (E) 10

Wir bezeichnen die zehn Zahlen mit $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ und das Produkt der zehn Zahlen mit A. Wenn eine Zahl a_i unterstrichen werden darf, so ist sie das Produkt der anderen neun Zahlen. Es gilt dann also $a_i = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}}{a_i} = \frac{A}{a_i}$. Das ist gleichbedeutend zu $a_i^2 = A$ oder $a_i = \pm\sqrt{A}$. Es dürfen also höchstens zwei Zahlen unterstrichen werden, nämlich $\sqrt{A}$ und $-\sqrt{A}$.

30. Auf einer Geraden werden einige Punkte markiert. Danach werden alle möglichen Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte bestimmt. Ein markierter Punkt liegt im Inneren von genau 80 dieser Strecken, und ein weiterer liegt im Inneren von genau 90 davon. Wie viele Punkte wurden auf der Geraden markiert?
(A) 20 **(B)** 22 (C) 80 (D) 90 (E) Die Information genügt nicht, um dies zu bestimmen.

Wenn links von einem Punkt n Punkte liegen und rechts davon m, so liegt der Punkt auf $n \cdot m$ Verbindungsstrecken. Wenn ein Punkt umgekehrt auf c Verbindungsstrecken, so gibt es zwei ganze Zahlen a und b mit $c = ab$, sodass links des Punktes a Punkte und rechts davon b Punkte liegen.
Die Primfaktorzerlegung von 80 ist $2^4 \cdot 5$. Es können daher folgende Anzahlen an Punkten links bzw. rechts jenes Punktes liegen, der auf 80 Verbindungsstrecken liegt: $1|80, 2|40, 4|20, 8|10, 16|5$ und es gäbe in den einzelnen Fällen $1 + 1 + 80 = 82, 1 + 2 + 40 = 43, 1 + 4 + 20 = 25, 1 + 8 + 10 = 19, 1 + 16 + 5 = 22$ Punkte auf der Geraden.
Analog können folgende Anzahlen an Punkten links bzw. rechts jenes Punktes liegen, der auf 90 Verbindungsstrecken liegt: $1|90, 2|45, 3|30, 6|15, 9|10, 18|5$ und es gäbe in den einzelnen Fällen $92, 48, 34, 22, 20, 24$ Punkte auf der Geraden.
Die einzige Zahl, die in beiden Fällen vorkommt ist 22. Es gibt also 22 markierte Punkte auf der Geraden.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2015
23. 3. 2015

Kategorie: Student, ab 11. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
30 Basispunkte

jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte

jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2015“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Känguru der Mathematik 2015
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 23. 3. 2015

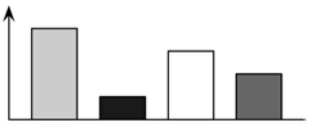
- 3 Punkte Beispiele -

1. Andrea ist irgendwann im Jahr 1997 geboren, und ihre Schwester Charlotte irgendwann im Jahr 2001. Was weiß man jedenfalls über den Altersunterschied der beiden Schwestern? Er beträgt
(A) weniger als 4 Jahre (B) mindestens 4 Jahre (C) genau 4 Jahre
(D) mehr als 4 Jahre (E) nicht weniger als 3 Jahre

2. $(a - b)^3 + (b - a)^3 =$
(A) 0 (B) $2\,(a - b)^3$ (C) $2a^3 - 2b^3$ (D) $2a^3 + 2b^3$ (E) $2a^3 + 6a^2b + 6ab^2 + 2b^3$

3. Wie viele reelle Lösungen hat die Gleichung $2^{2x} = 4^{x+1}$?
(A) 0 (B) unendlich viele (C) 2 (D) 1 (E) 3

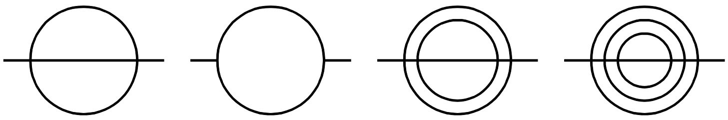
4. Diana zeichnet ein Säulendiagramm, in dem die Anzahl der vier Baumarten eingezeichnet sind, die sie auf einer Biologie-Exkursion gezählt hat. Heinz meint, ein Kreisdiagramm würde die Verhältnisse der verschiedenen Baumarten besser darstellen. Wie würde das Kreisdiagramm aussehen?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Man addiert alle ganzen Zahlen von 2001 bis 2031 und dividiert dann die Summe durch 31. Man erhält:
(A) 2012 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2496

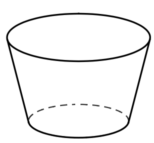
6. Wie viele der folgenden Figuren kann man mit einer durchgehenden Linie nachziehen (also ohne den Stift abzusetzen), ohne einen Abschnitt der Figur doppelt zu zeichnen?

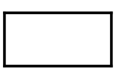
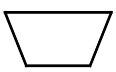
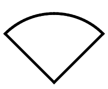
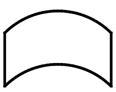
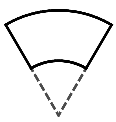


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

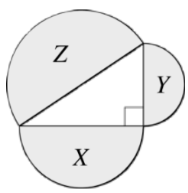
7. Ein Viereck heißt konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind. Die Anzahl der rechten Winkel in einem konvexen Viereck ist *n*. Welche der folgenden Listen ist eine vollständige Aufzählung der möglichen Werte von *n*?
(A) 0, 1, 2 (B) 0, 1, 2, 4 (C) 0, 1, 2, 3, 4 (D) 0, 1, 3 (E) 1, 2, 3

8. Ein Trinkglas hat die Form eines Kegelstumpfs. Das Glas soll außen (ohne oberen und unteren Kreis) mit Farbpapier umwickelt werden. Wie muss man das Papier schneiden, um das Glas vollständig ohne Überlappungen einzuwickeln?



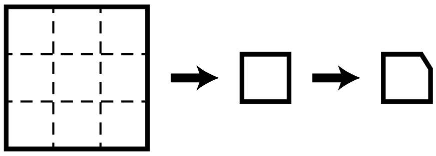
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

9. Drei Halbkreise haben die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks als Durchmesser. Ihre Flächen betragen wie abgebildet X cm², Y cm² und Z cm². Welche der folgenden Beziehungen ist sicher richtig?



(A) $X + Y < Z$ (B) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$ (C) $X + Y = Z$ (D) $X^2 + Y^2 = Z^2$ (E) $X^2 + Y^2 = Z$

10. Ein quadratisches Blatt Papier wird längs der strichlierten Linien in irgendeiner Reihenfolge und Richtung gefaltet. Vom resultierenden kleinen Quadrat wird eine Ecke abgeschnitten. Dann wird das Papier wieder entfaltet. Wie viele Löcher sind im Inneren des Blatts?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

- 4 Punkte Beispiele -

11. $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\cdot 2015)+(2015:2015)}=$

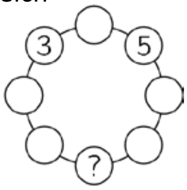
(A) $\sqrt{2015}$ (B) 2015 (C) 2016 (D) 2017 (E) 4030

12. Die x-Achse und die Graphen von $f(x)=2-x^2$ und $g(x)=x^2-1$ teilen die Koordinatenebene in

(A) 7 Regionen (B) 8 Regionen (C) 9 Regionen (D) 10 Regionen (E) 11 Regionen

13. Ella möchte in jeden Kreis der abgebildeten Figur eine Zahl schreiben, sodass jede Zahl gleich der Summe ihrer beiden Nachbarn ist. Welche Zahl muss Ella in den Kreis mit „?“ schreiben?

(A) -5 (B) -16 (C) -8 (D) -3 (E) Die Aufgabe hat keine Lösung.



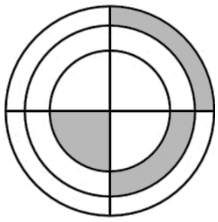
14. Von fünf positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, e wissen wir: Alle Zahlen sind verschieden, $b=c:e$, $d=a+b$ und $a=e-d$. Welche der Zahlen a, b, c, d, e ist am größten?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

15. Das geometrische Mittel von n Zahlen ist definiert als die n-te Wurzel aus dem Produkt aller n Zahlen, also $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$. Wir haben sechs Zahlen. Das geometrische Mittel von drei davon ist 3, das geometrische Mittel der drei anderen ist 12. Wie groß ist das geometrische Mittel dieser sechs Zahlen?

(A) 4 (B) 6 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{15}{6}$ (E) 36

16. In der Abbildung sehen wir drei konzentrische Kreise und zwei zueinander normal stehende gemeinsame Durchmesser. Die drei grauen Bereiche haben jeweils gleiche Fläche, der kleine Kreis hat den Radius 1. Wie groß ist das Produkt der drei Kreisradien?



(A) $\sqrt{6}$ (B) 3 (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 6

17. Die Bevölkerung Arnbergs stieg in den letzten 20 Jahren um 40%. In Berghausen stieg die Bevölkerung im selben Zeitraum um 60%. Insgesamt stieg die Bevölkerung der beiden Orte um 54%. Wie war das Verhältnis der Einwohnerzahlen vor 20 Jahren?

(A) 10:13 (B) 20:27 (C) 3:7 (D) 7:12 (E) 2:3

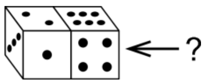
18. Bibi würfelt mit einem Würfel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tina würfelt gleichzeitig mit einem Würfel mit den Zahlen 2, 2, 2, 5, 5, 5. Tina gewinnt, wenn sie eine größere Zahl würfelt als Bibi. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tina gewinnt?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{7}{18}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{11}{18}$

19. In einem Rohr befinden sich 2015 Murmeln. Diese sind mit den Zahlen 1 bis 2015 durchnummeriert. Murmeln mit gleicher Ziffernsumme haben dieselbe Farbe und Murmeln mit verschiedener Ziffernsumme haben verschiedene Farben. Wie viele verschiedene Farben haben die Murmeln im Rohr?

(A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 2015

20. Auf einem Standardwürfel ist die Summe der Punktezahlen auf gegenüberliegenden Flächen immer 7. Zwei identische Standardwürfel sind in der Figur abgebildet. Wie viele Punkte können auf der nicht sichtbaren rechten Seitenfläche (mit „?“ gekennzeichnet) zu finden sein?



(A) nur 5 (B) nur 2 (C) entweder 2 oder 5 (D) entweder 1, 2, 3 oder 5 (E) entweder 2, 3 oder 5

- 5 Punkte Beispiele -

21. Die Aussagen (A) – (E) werden der Reihe nach auf ihre Wahrheit überprüft. Welche davon ist die erste wahre Aussage?

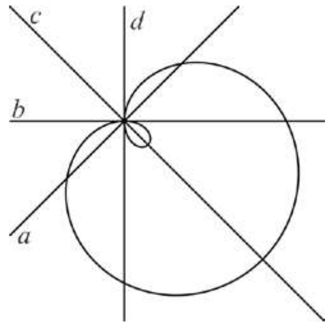
(A) (C) ist wahr. (B) (A) ist wahr. (C) (E) ist falsch.
(D) (B) ist falsch. (E) $1 + 1 = 2$

22. Die Kurve in der Abbildung wird durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

beschrieben. Welche der Geraden *a,b,c,d* ist dabei die y-Achse?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) keine davon



23. Die folgende Tabelle ist die Multiplikationstabelle der Zahlen von 1 bis 10. Wie groß ist die Summe aller 100 Produkte in der vollständigen Tabelle?

(A) 1000 (B) 2025 (C) 2500 (D) 3025 (E) 5500

•	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
3	3	6	9	...	30
...	...	...	...	...	...
10	10	20	30	...	100

24. Wie viele regelmäßige Vielecke gibt es, deren Winkel (in Grad) ganzzahlig sind?

(A) 17 (B) 18 (C) 22 (D) 25 (E) 60

25. Wie viele dreiziffrige positive ganze Zahlen kann man als Summe von genau neun verschiedenen Zweierpotenzen schreiben? (Hinweis: Zweierpotenzen sind 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …)

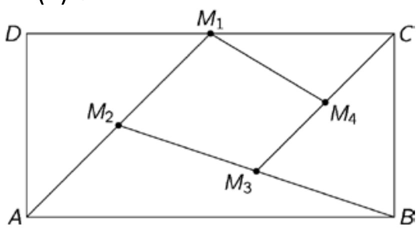
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Wie viele unterschiedliche Dreiecke ABC mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es, wenn $\angle ABC = 90°$ und $AB = 20$? (Hinweis: Zwei Dreiecke heißen unterschiedlich, wenn sie nicht kongruent sind.)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

27. Im abgebildeten Rechteck $ABCD$ ist M_1 der Mittelpunkt von DC, M_2 der Mittelpunkt von AM_1, M_3 der Mittelpunkt von BM_2 und M_4 der Mittelpunkt von CM_3. Bestimme das Verhältnis der Fläche des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ und der Fläche des Rechtecks $ABCD$.

(A) $\frac{7}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{7}{32}$ (D) $\frac{9}{32}$ (E) $\frac{1}{5}$



28. Auf einer Tafel befinden sich blaue und rote Rechtecke. Genau 7 der Rechtecke sind Quadrate. Es gibt um 3 rote Rechtecke mehr als blaue Quadrate. Es gibt auch um zwei rote Quadrate mehr als blaue Rechtecke. Wie viele blaue Rechtecke befinden sich auf der Tafel?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 10

29. Die 96 Mitglieder eines Zählvereins stehen in einem Kreis und zählen. Sie beginnen mit 1, 2, 3, usw., jeder sagt die nächste Zahl, der Reihe nach den Kreis herum. Sagt ein Vereinsmitglied eine gerade Zahl, tritt es aus dem Kreis. Die anderen setzen fort, wobei sie die zweite Runde mit der Zahl 97 beginnen. Auf diese Art machen sie weiter, bis nur mehr ein Vereinsmitglied übrig bleibt. Welche Zahl hat diese Person in der ersten Runde gesagt?

(A) 1 (B) 17 (C) 33 (D) 65 (E) 95

30. Im Wort KANGAROO ersetzen Bill und Bob unabhängig voneinander die Buchstaben durch Ziffern, sodass die resultierenden Zahlen Vielfache von 11 sind. Jeder der beiden ersetzt jeweils verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern und gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern ($K \neq 0$). Bill erhält die größte mögliche Zahl und Bob die kleinste solche. In beiden Fällen wird ein Buchstabe durch die gleiche Ziffer ersetzt. Um welche Ziffer handelt es sich dabei?

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

MATHEMATICS KANGAROO 2015
Austria - 23. 3. 2015

Level: Student, Grade 11 and above

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 Starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn Du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade; Infos unter: www.oemo.at

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2015“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Mathematical Kangaroo 2015
Group Student (Grade 11 and above)
Austria - 23. 3. 2015

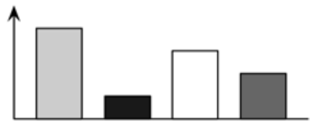
- 3 point questions -

1. Andrea was born sometime in the year 1997 and her sister Charlotte sometime in the year 2001. What is known for certain about the age difference of the two sisters? It is…
(A) less than 4 years (B) at least 4 years (C) exactly 4 years
(D) more than 4 years (E) not less than 3 years

2. $(a-b)^3+(b-a)^3=$
(A) 0 (B) $2(a-b)^3$ (C) $2a^3-2b^3$ (D) $2a^3+2b^3$ (E) $2a^3+6a^2b+6ab^2+2b^3$

3. How many real solutions has the equation $2^{2x}=4^{x+1}$?
(A) 0 (B) infinitely many (C) 2 (D) 1 (E) 3

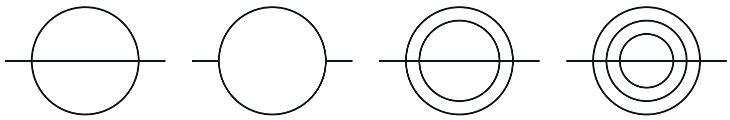
4. . Diana produces a bar chart which shows the number of four different types of trees which she has counted on a biology trip. Heinz believes that a pie chart would represent the ratio of the different types of trees in a better way. What would the pie chart look like?



(A) (B) (C) (D) (E)

5. If you add all the whole numbers from 2001 to 2031 and then divide the sum by 31, you get;
(A) 2012 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2496

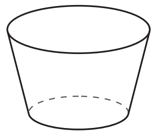
6. How many of the following shapes can be drawn using one continuous line (i.e. without lifting the pencil) and without going over a line twice?

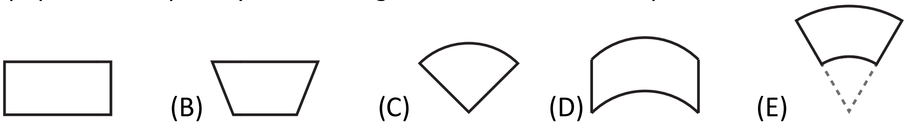


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. A quadrilateral is called convex if all its internal angles are less than 180°. The number of right angles in a convex quadrilateral is *n*. Which of the following lists is a complete listing of all possible values of *n*?
(A) 0, 1, 2 (B) 0, 1, 2, 4 (C) 0, 1, 2, 3, 4 (D) 0, 1, 3 (E) 1, 2, 3

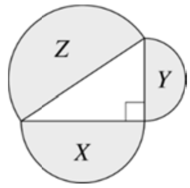
8. A drinking glass is made in the shape of a truncated cone. The outside of the glass (without the upper or lower circle) should be covered with coloured paper. How do you need to cut the paper to completely cover the glass without an overlap?





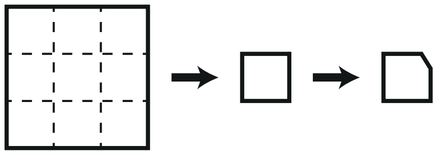
(A) (B) (C) (D) (E)

9. The diameters of three semi-circles form the sides of a right-angled triangle. Their areas are X cm², Y cm² and Z cm² as pictured. Which of the following expressions is definitely correct?



(A) $X+Y<Z$ (B) $\sqrt{X}+\sqrt{Y}=\sqrt{Z}$ (C) $X+Y=Z$ (D) $X^2+Y^2=Z^2$ (E) $X^2+Y^2=Z$

10. A square bit of paper is folded along the dashed lines in some order and direction. One of the corners of the resulting small square is cut off. The piece of paper is then unfolded. How many holes are on the inner area of the piece of paper?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

- 4 point questions -

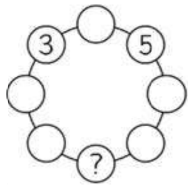
11. $\sqrt{(2015+2015)+(2015-2015)+(2015\times 2015)+(2015\div 2015)}=$

(A) $\sqrt{2015}$ (B) 2015 (C) 2016 (D) 2017 (E) 4030

12. The x-axis and the graphs of $f(x)=2-x^2$ and $g(x)=x^2-1$ split the co-ordinate plane into

(A) 7 regions (B) 8 regions (C) 9 regions (D) 10 regions (E) 11 regions

13 Ella wants to write a number into each circle in the diagram on the right, in such a way that each number is equal to the sum, of its two direct neighbours. Which number does Ella need to write into the circle marked with „?“.



(A) -5 (B) -16 (C) -8 (D) -3 (E) This question has no solution.

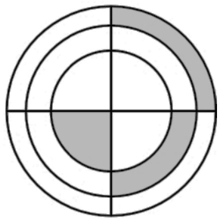
14. We know the following about five positive whole numbers a, b, c, d, e All the numbers are different, $b=c:e$, $d=a+b$ and $a=e-d$. Which of the numbers a, b, c, d, e is the largest?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) e

15. The geometric mean of n numbers is defined as the n^{th} root of the product of all n numbers, that is $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$. We have six numbers. The geometric mean of three of them is 3, the geometric mean of the other three is 12. How big is the geometric mean of all six numbers?

(A) 4 (B) 6 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{15}{6}$ (E) 36

16. . The diagram shows three concentric circles and two perpendicular, common diameters of the three circles. The three grey sections are of equal area, the small circle has radius 1. What is the product of the radii of the three circles?



(A) $\sqrt{6}$ (B) 3 (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 6

17. In the past 20 years the population of Arnberg has increased by 40%. In the same time span the population of Berghausen has increased by 60%. In total the population of the two villages has increased by 54%. What was the ratio of the populations 20 years ago?

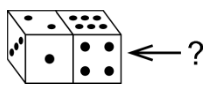
(A) 10:13 (B) 20:27 (C) 3:7 (D) 7:12 (E) 2:3

18. Bibi rolls a die which has the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6 on its faces. At the same time Tina rolls a die which has the numbers 2, 2, 2, 5, 5, 5 on its faces. Tina wins if she rolls a number higher than Bibi. What is the probability that Tina wins?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{7}{18}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{11}{18}$

19 There are 2015 marbles in a pipe. They are numbered 1 to 2015. Marbles whose digits add up to the same number, have the same colour and marbles whose digits have a different sum, have a different colour. How many different colours do the marbles in the pipe have?

(A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 2015

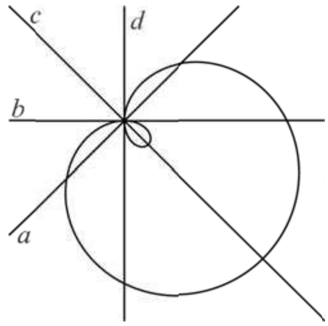


20. On a standard die the sum of the numbers on opposite faces is always 7. Two identical standard dice are shown in the figure. How many dots could there be on the non-visible right-hand face (marked with “?”)?

A) only 5 (B) only 2 (C) either 2 or 5 (D) either 1, 2, 3 or 5 (E) either 2, 3 or 5

- 5 point questions -

21. Die Aussagen (A) – (E) werden der Reihe nach auf ihre Wahrheit überprüft. Welche davon ist die erste wahre Aussage?
(A) (C) is true. (B) (A) is true. (C) (E) is false.
(D) (B) is false. (E)) $1 + 1 = 2$



22. The curve in the diagram is defined by the equation

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

Which of the lines *a,b,c,d* is the *y* – axis?
(A) a (B) b (C) c (D) d (E) none of them

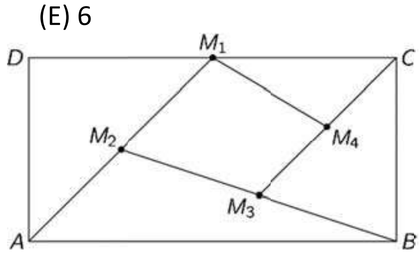
23. The following table is the multiplication table of the numbers 1 to 10. What is the sum of all 100 products in the complete table?
(A) 1000 (B) 2025 (C) 2500 (D) 3025 (E) 5500

•	1	2	3	...	10
1	1	2	3	...	10
2	2	4	6	...	20
3	3	6	9	...	30
...	...	...	...	...	...
10	10	20	30	...	100

24. . How many regular n-sided shapes are there, whose angles (in degrees) are whole numbers?
(A) 17 (B) 18 (C) 22 (D) 25 (E) 60

25. How many three-digit whole numbers can be written as the sum of exactly nine different powers of two? (Hint: Powers of two are 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …)
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26How many different triangles ABC whose side lengths are whole numbers are there, if $\angle ABC = 90°$ and $AB = 20$? (Hint: Two triangles are called different if they are not congruent.)
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6



27. In the rectangle $ABCD$ pictured, M_1 is the midpoint of DC, M_2 the midpoint of AM_1, M_3 the midpoint of BM_2 and M_4 the midpoint of CM_3. Determine the ratio of the area of the quadrilateral $M_1M_2M_3M_4$ to the area of the rectangle $ABCD$.
(A) $\frac{7}{16}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{7}{32}$ (D) $\frac{9}{32}$ (E) $\frac{1}{5}$

28. . On a board there are blue and red rectangles. Exactly 7 of the rectangles are squares. There are 3 more red rectangles than blue squares. There are also two more red squares than blue rectangles. How many blue rectangles are there on the board?
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 10

29. The 96 members of a counting club are standing in a circle counting. They start with 1, 2, 3, etc., each person in the circle saying the next number in turn. If a member of the club says an even number, he steps out of the circle. The remaining members continue, starting the second round with 97. They continue in this way until only one member of the club is left. Which number did this person say in round one?
(A) 1 (B) 17 (C) 33 (D) 65 (E) 95

30 Independently from each other Bill and Bob substitute the letters in the word KANGAROO with numbers, so that the resulting numbers are multiples of 11. They both substitute different letters with different digits and same letters with the same digits (K≠ 0). Bill obtains the biggest possible number and Bob the smallest possible. In both cases one letter is substituted with the same digit. Which digit is that?
(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Känguru 2015 – Student – Lösungen und Erklärungen

---

1. Andrea ist irgendwann zwischen 01.01.1997 und 31.12.1997 geboren, Charlotte irgendwann zwischen 01.01.2001 und 31.12.2001.

   Wenn ihre Alter (und somit ihre Geburtsdaten) möglichst nahe beisammen sein sollen, dann muss Andrea ganz spät im Jahr 1997 (also am 31.12.1997) und Charlotte ganz früh im Jahr 2001 (also am 01.01.2001) geboren sein. Näher beisammen ist nicht möglich, also liegen ihre Geburten um mindestens 3 Jahre und 1 Tag auseinander.

   Wenn ihre Alter umgekehrt ganz weit auseinander sein sollen, dann muss Andrea ganz früh im Jahr 1997 (also am 01.01.1997) und Charlotte ganz spät im Jahr 2001 (also am 31.12.2001) geboren sein. Weiter auseinander ist nicht möglich, also sind ihre Geburten um höchstens 5 Jahre minus 1 Tag voneinander entfernt.

   Jeder Altersunterschied dazwischen ist möglich (indem wir vom ganz kleinen Unterschied ausgehen, dann zuerst Charlottes Geburtstag im Jahr 2001 immer wieder um 1 Tag nach hinten verschieben bis wir den 31.12. erreicht haben, und danach Andreas Geburtstag im Jahr 1997 immer wieder um einen Tag vorverlegen bis wir beim 01.01. ankommen).

   Für die vier Aussagen ergibt das:

   (A) "weniger als 4 Jahre"

   $\longrightarrow$ Falsch, da auch mehr als 4 Jahre möglich sind, zB 5 Jahre minus 1 Tag.

   (B) "mindestens 4 Jahre"

   $\longrightarrow$ Falsch, da auch weniger als 4 Jahre möglich sind, zB 3 Jahre plus 1 Tag.

   (C) "genau 4 Jahre"

   $\longrightarrow$ Falsch, da auch andere Werte möglich sind, zB 3 Jahre plus 1 Tag.

   (D) "mehr als 4 Jahre"

   $\longrightarrow$ Falsch, da auch weniger als 4 Jahre möglich sind, zB 3 Jahre plus 1 Tag.

   (E) "nicht weniger als 3 Jahre"

   $\longrightarrow$ Richtig, da wir gezeigt haben, dass ihre Geburten sicher mindestens 3 Jahre und 1 Tag voneinander entfernt sind.

2. Entweder wir erkennen, dass $(-x)^3 = -(x^3)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Daher gilt (wenn man $x = a - b$ setzt) auch $(b-a)^3 = (-(a-b))^3 = -((a-b)^3)$ und somit sehen wir sofort, dass $(a-b)^3 + (b-a)^3 = (a-b)^3 - (a-b)^3 = 0$ gilt.

   Oder wir rechnen es einfach aus:

   $$(a-b)^3 + (b-a)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3 = 0$$

3. Die Rechenregeln für Potenzen besagen, dass $2^{2x} = \left(2^2\right)^x = 4^x$. Also suchen wir alle x, für die $4^x = 4^{x+1}$ gilt. Weiters wissen wir, dass $4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4^x \cdot 4 = 4 \cdot 4^x$, also suchen wir alle x mit $4^x = 4 \cdot 4^x$. Das kann offensichtlich nur funktionieren, wenn $4^x = 0$ gilt (da der Wert auf der rechten Seite das Vierfache von jenem auf der linken Seite ist und somit nur gleich sein kann, wenn beide Werte gleich 0 sind). Da aber 4^x bekanntlich nie 0 werden kann, gibt es keine Lösungen.

4. Die schwarze Säule ist am kleinsten, also muss auch das schwarze Tortenstück am kleinsten sein. Das schließt Diagramm (D) aus, weil dort dunkelgrau das kleinste Tortenstück ist.

   Die weiße Säule ist höher als die dunkelgraue. In (B) sind aber das weiße und das dunkelgraue Tortenstück genau gleich groß, also ist auch (B) falsch.

   Die hellgraue Säule ist höher als die weiße. In (C) sind aber das weiße und das dunkelgraue Tortenstück genau gleich groß, also ist auch (C) falsch.

   Die schwarze, weiße und dunkelgraue Säule sind zusammen höher als die hellgraue, also muss das hellgraue Tortenstück weniger als die Hälfte der Torte ausmachen. Das schließt (E) aus.

   In Torte (A) scheinen die Verhältnisse der Tortenstücke ungefähr den Säulenhöhen zu entsprechen mit schwarz < dunkelgrau < weiß < hellgrau. Also ist (A) die einzige von den 5 Torten, die als Lösung in Frage kommt.

5. Die angegebene Berechnung beschreibt das arithmetische Mittel der Zahlen von 2001 bis 2031. Die Zahl genau in der Mitte ist 2016, also ist dies die Lösung.

   Falls wir das arithmetische Mittel nicht erkennen, können wir es auch einfach ausrechnen (und machen uns dabei mit einigen Tricks das Leben leichter):

$$\begin{aligned}
2001 + 2002 + \cdots + 2031 &= 2000 + 1 + 2000 + 2 + \cdots + 2000 + 31 \\
&= 2000 + 2000 + \cdots + 2000 + 1 + 2 + \cdots + 31 \\
&= 31 \cdot 2000 + \frac{31 \cdot (31+1)}{2} \\
\frac{2001 + 2002 + \cdots + 2031}{31} &= \frac{31 \cdot 2000 + \frac{31\cdot(31+1)}{2}}{31} \\
&= \frac{31 \cdot 2000}{31} + \frac{\frac{31\cdot(31+1)}{2}}{31} \\
&= 2000 + \frac{31+1}{2} \\
&= 2016
\end{aligned}$$

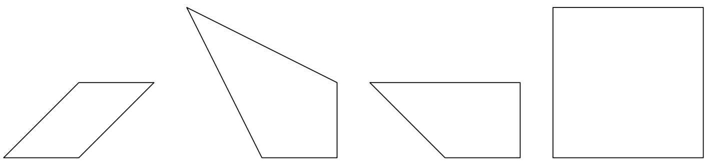
6. Wir wissen, dass eine Figur genau dann mit einer solchen durchgehenden Linie gezeichnet werden kann, wenn sie höchstens 2 Knoten hat, in denen eine ungerade Anzahl von Strichen zusammenstößt. (Grobe Beweisidee: Wenn ein Knoten eine gerade Anzahl von Strichen hat, kann ich ihn genau gleich oft betreten und wieder verlassen. Bei einer ungeraden Anzahl muss ich aber meine gesamte Runde entweder dort beginnen oder beenden. Da die gesamte Runde nur einen Anfang und nur ein Ende hat, kann ich also höchstens zwei Knoten mit ungerader Anzahl damit "ausgleichen".)

   In unseren Figuren ist jede Kreuzung zwischen einem Kreis und der eingezeichneten geraden Linie ein Knoten, und ebenso das linke und rechte Ende der geraden Linie (und es gibt keine weiteren Knoten).

   - In der ersten Figur haben wir 2 Knoten mit je 4 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es möglich.
   - In der zweiten Figur haben wir 2 Knoten mit je 3 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es nicht möglich (da wir mehr als 2 Knoten mit ungerader Anzahl haben).
   - In der dritten Figur haben wir 4 Knoten mit je 4 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es möglich.
   - In der dritten Figur haben wir 6 Knoten mit je 4 Strichen und 2 Knoten mit je 1 Strich, also ist es möglich.

   Insgesamt ist es also bei 3 der 4 Figuren möglich.

7. Für 0, 1, 2 und 4 rechte Winkel finden wir rasch Beispiele:



   0 1 2 4

   Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°. Wenn drei der Winkel rechte Winkel sind, ergibt sich für den vierten Winkel δ also $\delta = 360° - 3 \cdot 90° = 90°$. Also ist es nicht möglich ein Viereck mit genau 3 rechten Winkeln zu zeichnen, da der vierte automatisch ebenfalls ein rechter Winkel wäre.

8. Würde man einen ganzen Kegel umwickeln, hätte das dafür benötigte Papier die Form eines Kreissektors ("Tortenstück"). Davon entfernen wir nun einen Teil, um aus dem Kegel einen Kegelstumpf zu machen. Auch der entfernte Teil hat wieder die Form eines Kegels, also entfernen wir von dem ausgeschnittenen Papier wiederum ein Stück in Form eines Kreissektors, und zwar jenen Teil, der näher bei der Spitze des Tortenstückes ist. Nur (E) hat die so beschriebene Form.

9. Die Fläche eines Halbkreises beträgt $A = \frac{1}{2}r^2\pi$, wobei r der Radius des Halbkreises ist. Will man umgekehrt den Radius aus der Fläche berechnen, so formt man dies um zu $r = \sqrt{\frac{2A}{\pi}} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Bezeichne x, y und z die drei Seitenlängen des Dreiecks. Jede dieser Seitenlängen entspricht dem doppelten Radius (= Durchmesser) des Halbkreises darüber, also betragen die Seitenlängen gemäß der obigen Rechnung $x = \sqrt{X} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2$, $y = \sqrt{Y} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2$ und $z = \sqrt{Z} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2$.

Da das Dreieck rechtwinkelig ist, gilt gemäß des Satzes von Pythagoras, dass $x^2 + y^2 = z^2$. Nun setzen wir ein:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 = z^2 \\
\iff \quad & X \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 4 + Y \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 4 = Z \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 4 \qquad \Big| : \frac{2}{\pi} \cdot 4 \\
\iff \quad & X + Y = Z
\end{aligned}
$$

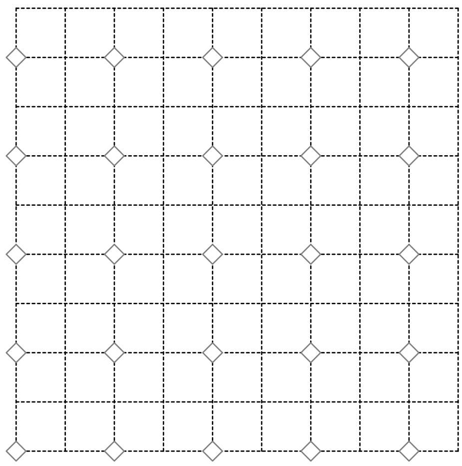
Es gilt also immer $X + Y = Z$.

(Hinweis: Je nach Wahl der Flächen können in manchen Situationen auch weitere der Lösungsmöglichkeiten zutreffen. $X + Y = Z$ ist aber die einzige, die für *jede* Kombination von Halbkreisflächen sicher gilt.)

10. Ganz egal, wie man faltet, liegt am Ende jede der strichlierten Linien genau auf der um 2 Felder entfernten Parallelen dazu (bzw. darunter). Diese beiden Linien sind also genau an den gleichen Stellen zerschnitten bzw. nicht zerschnitten. Das heißt: Wenn man von einem beliebigen Eckpunkt um 2 Felder in gerader Richtung fährt, so sind Start und Ziel entweder beide bei einem Loch oder beide an einer unzerschnittenen Stelle.

    Daraus folgt: Wenn wir das Lochmuster von einem Bereich von 2×2 Ecken kennen, so kennen wir das Muster des gesamten Blattes (da es um jeweils 2 Felder daneben bzw. darunter bzw. darüber immer wieder exakt kopiert wird).

    Im abgebildeten gefalteten Zustand sehen wir aber genau so einen Bereich von 2×2 Ecken und sehen, dass genau eine dieser Ecken ein Loch hat. Das gesamte Muster sieht daher etwa so aus:



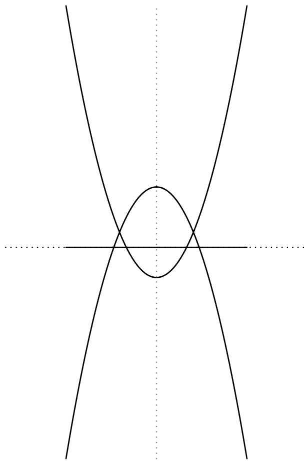
    Ganz egal, wie man dieses Muster auf das gegebene 3×3 Blatt anwendet, es liegt auf jeden Fall genau ein Loch im Inneren.

    (Hinweis: Konkret für das 3×3 Blatt geht es auch einfacher, indem man sagt, dass jedes kleine Quadrat dem gefalteten ähnlich ist, also genau 1 Loch hat. Insbesondere gilt das für das mittlere Quadrat, also ist von den 4 inneren Eckpunkten genau eines ein Loch. Die oben angegebene Methode funktioniert allerdings auch für beliebig große Papierblätter.)

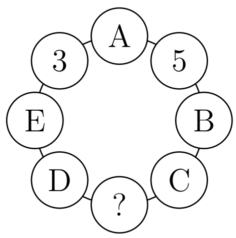
11.

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)} \\
= & \sqrt{(2 \cdot 2015) + (0) + (2015^2) + (1)} \\
= & \sqrt{2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1} \\
= & \sqrt{(2015 + 1)^2} \\
= & 2016
\end{aligned}
$$

12. Wir zeichnen den Graph und zählen 10 Regionen:



13. Wir bezeichnen die Felder wie in dieser Abbildung:



Nun wenden wir mehrere Male die Regel an, dass jede Zahl gleich der Summe ihrer Nachbarn sein muss:

- A als Mittelpunkt: $A = 3 + 5 = 8$
- 5 als Mittelpunkt: $5 = A + B = 8 + B$, also $B = 5 - 8 = -3$
- B als Mittelpunkt: $B = 5 + C = -3$, also $C = -3 - 5 = -8$
- C als Mittelpunkt: $C = B+?$, also $-8 = -3+?$, also $? = -8 + 3 = -5$
- 3 als Mittelpunkt: $3 = A + E = 8 + E$, also $E = 3 - 8 = -5$
- E als Mittelpunkt: $E = 3 + D = -5$, also $D = -5 - 3 = -8$
- D als Mittelpunkt: $D = E+?$, also $-8 = -5+?$, also $? = -8 + 5 = -3$

Von A ausgehend einmal im und einmal gegen den Uhrzeigersinn weiter eingesetzt erhalten wir also verschiedene Werte für ?. Deshalb gibt es keine gültige Lösung.

14. Wir machen folgende Beobachtungen:

- Aus $b = c : e$ folgt $b < c$, da c offensichtlich das e-Fache von b ist, und $e \geq 1$ gilt. $e = 1$ kann nicht gelten, da sonst $b = c$ gelten würde, was in der Angabe ausgeschlossen wurde. Also ist $e \geq 2$ und somit $c = b \cdot e$ mindestens das Doppelte von b. Somit ist b sicher nicht die größte Zahl.
- Weiters folgt aus $b = c : e$, dass $c > e$ gilt, da das Ergebnis von $c : e$ gleich b ist und somit ganzzahlig sein muss. (Es kann nicht $c = e$ gelten, da das in der Angabe verboten ist.) Somit ist auch e sicher nicht die größte Zahl.
- Aus $d = a + b$ folgt $d > a$ und $d > b$, da a und b beide positiv sind und d als die Summe davon daher immer größer als jeder einzelne Summand. Somit kann weder a noch b die größte Zahl sein.
- Aus $a = e - d$ folgt $a < e$, da von e etwas abgezogen werden muss, um auf a zu kommen. Somit ist a sicher nicht die größte Zahl (was wir ja auch bereits davor schon ausgeschlossen hatten).
- Weiters folgt aus $a = e - d$, dass $e > d$, weil die Differenz gleich a ist und daher positiv sein muss. Somit ist d sicher nicht die größte Zahl.

Insgesamt haben wir also alle Zahlen bis auf c als größte Zahl ausgeschlossen.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch ein Beispiel an, das den gegebenen Bedingungen entspricht:
$a = 1$, $b = 3$, $c = 15$, $d = 4$, $e = 5$

15. Wir bezeichnen die 6 Zahlen mit a, b, c, x, y, z, mit $GM(a, b, c) = 3$ und $GM(x, y, z) = 12$ (wobei GM für das geometrische Mittel steht).

    Nun wollen wir $GM(a, b, c, x, y, z)$ berechnen und verwenden dabei einige der Rechenregeln für Wurzelzeichen:

$$\begin{aligned} GM(a,b,c,x,y,z) &= \sqrt[6]{abcxyz} \\ &= \sqrt[2]{\sqrt[3]{abcxyz}} \\ &= \sqrt[2]{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{xyz}} \\ &= \sqrt[2]{GM(a,b,c)\cdot GM(x,y,z)} \\ &= \sqrt[2]{3\cdot 12} \\ &= \sqrt[2]{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

16. Seien r_1, r_2 und r_3 die Radien des kleinen, mittleren und großen Kreises, in dieser Reihenfolge. Laut Angabe gilt $r_1 = 1$.

    Der Flächeninhalt A_1 der inneren grauen Fläche ist ein Viertel eines Kreises und wird daher mit $A_1 = r_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ berechnet.

    Der Flächeninhalt A_2 der mittleren grauen Fläche ist gleich der Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_2 minus die Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_1. (Man nimmt also zuerst einen großen Viertelkreis und schneidet dann den kleineren Viertelkreis innen wieder weg.) Also gilt $A_2 = r_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} - r_1^2 \cdot \frac{\pi}{4}$. Nun soll aber $A_1 = A_2$ gelten, also

$$\begin{aligned} & A_1 = A_2 & & \\ \iff\quad & r_1^2\cdot\frac{\pi}{4} = r_2^2\cdot\frac{\pi}{4} - r_1^2\cdot\frac{\pi}{4} & & \Big|\cdot\frac{4}{\pi} \\ \iff\quad & r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 & & \Big| + r_1^2 \\ \iff\quad & 2r_1^2 = r_2^2 & & \Big| r_1 = 1 \\ \iff\quad & 2\cdot 1 = r_2^2 & & \Big|\sqrt{\ } \\ \implies\quad & r_2 = \sqrt{2} & & \end{aligned}$$

    Ganz ähnlich dazu ist der Flächeninhalt A_3 der äußeren grauen Fläche gleich der Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_3 minus die Fläche eines Viertelkreises mit Radius r_2. Also gilt $A_3 = r_3^2 \cdot \frac{\pi}{4} - r_2^2 \cdot \frac{\pi}{4}$. Nun soll aber auch $A_1 = A_3$ gelten, also

$$\begin{aligned} & A_2 = A_3 & & \\ \iff\quad & r_1^2\cdot\frac{\pi}{4} = r_3^2\cdot\frac{\pi}{4} - r_2^2\cdot\frac{\pi}{4} & & \Big|\cdot\frac{4}{\pi} \\ \iff\quad & r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 & & \Big| + r_2^2 \\ \iff\quad & r_1^2 + r_2^2 = r_3^2 & & \Big| r_1^2 = 1, r_2^2 = 2 \\ \iff\quad & 1 + 2 = r_3^2 & & \Big|\sqrt{\ } \\ \implies\quad & r_3 = \sqrt{3} & & \end{aligned}$$

    Für das Produkt gilt daher $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

17. Sei a die Einwohnerzahl von Arnberg vor 20 Jahren, und b jene von Berghausen vor 20 Jahren.

    Heute wohnen in den beiden Städten zusammen also $Z = a \cdot 1.4 + b \cdot 1.6$ Personen. Zusammen ist das laut

Angabe eine Steigerung um 54%, also gilt auch $Z = (a+b) \cdot 1.54$. Wir setzen das gleich und vereinfachen:

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot 1.54 &= a\cdot 1.4 + b\cdot 1.6 && \Big|\cdot 100 \\ \iff \quad 154a + 154b &= 140a + 160b && \Big| -140a - 154b \\ \iff \quad 14a &= 6b && \Big| : 14b \\ \iff \quad a : b &= 6 : 14 = 3 : 7 \end{aligned}$$

Das ursprüngliche Verhältnis von a zu b war also $3 : 7$.

18. Wir machen die folgende Tabelle aller möglichen Ergebnisse und markieren diejenigen Fälle mit einem **X**, in denen Tina gewinnt:

		Tina					
		2	2	2	5	5	5
Bibi	1	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
	2				**X**	**X**	**X**
	3				**X**	**X**	**X**
	4				**X**	**X**	**X**
	5						
	6						

Tina gewinnt also in 15 von 36 Fällen, also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

19. Die niedrigste mögliche Ziffernsumme ist 1 (da jede Zahl zwischen 1 und 2015 mindestens eine Ziffer hat, die nicht 0 ist, und beispielsweise 100 tatsächlich die Ziffernsumme 1 hat).

Die höchste mögliche Ziffernsumme ist 28 und wird bei 1999 erreicht. Eine höhere Ziffernsumme ist nicht möglich, da sonst die Tausenderziffer mindestens 2 sein müsste. Für alle Zahlen von 2000 bis 2015 ist aber die Hunderterziffer gleich 0, also ist die Ziffernsumme sicher niedriger.

Jede Ziffernsumme dazwischen kann erreicht werden, indem wir bei 1000 beginnen, dann die Einerstelle schrittweise erhöhen bis 9 (also $1001, 1002, 1003, \ldots, 1009$), dann dasselbe mit der Zehnerstelle machen (also $1019, 1029, 1039, \ldots, 1099$), und zuletzt mit der Hunderterstelle (also $1199, 1299, 1399, \ldots, 1999$). Die Ziffernsumme wird dabei jeweils um 1 größer, also können wir alle Ziffernsummen von 1 bis 28 so konstruieren.

Somit gibt es 28 verschiedene Farben.

20. 4 und 6 sind nicht möglich, da diese bereits auf den anderen sichtbaren Flächen sind. Da die Summe gegenüberliegender Seiten gleich 7 ist, liegen 3 und 1 gegenüber davon, also auch nicht auf der gefragten Fläche.

Wir brauchen also nur noch 2 und 5 als Möglichkeiten betrachten. Nehmen wir an, auf der abgebildeten Fläche wären 2 Punkte. Da die Würfel identisch sind, sehen wir beim gedanklichen Drehen, dass dann 1 hinten und 3 unten liegen müsste. Das widerspricht aber der Reihenfolge von 4 und 6 auf den sichtbaren Seiten.

Mit 5 Punkten auf der hinteren Fläche können wir den Würfel dagegen so drehen, dass 1 unten und 3 hinten liegt.

Somit ist 5 die einzige Lösung.

21.
- Nehmen wir an, (A) wäre wahr. Dann müsste gemäß der Aussage von (A) auch (C) wahr sein. Damit müsste gemäß der Aussage von (C) dann (E) falsch sein. (E) ist aber sicher richtig (wenn wir einmal annehmen, dass 1+1=2 gilt, was in Witzen ja eine oft heftig diskutierte Wahrheit ist). Wenn (A) wahr wäre, würde das also zu diesem Widerspruch führen, daher ist (A) sicher falsch.
- Nehmen wir an, (B) wäre wahr. Dann müsste gemäß der Aussage von (B) auch (A) wahr sein, was wir aber gerade widerlegt haben. Also ist auch (B) falsch.
- Nehmen wir an, (C) wäre wahr. Dann müsste (E) falsch sein, also erhalten wir denselben Widerspruch wie bereits bei (A).
- Aussage (D) ist wahr, da wir ja bereits gezeigt haben, dass (B) falsch ist. Somit ist (D) die erste richtige Antwort.

22. Da y in der Gleichung nur als Quadratzahl vorkommt, ist für jeden Punkt (x, y), der auf der Kurve liegt, auch $(x, -y)$ Teil der Kurve. Die Kurve ist also symmetrisch um die x-Achse. Von den vier eingezeichneten Achsen ist nur c eine Symmetrieachse der Figur. Da die Figur auch keine weiteren Symmetrieachsen hat, ist c daher die x-Achse. Da die y-Achse dazu normal steht, muss a die y-Achse sein.

23. Beim Ausmultiplizieren von $(1 + 2 + \cdots + 10) \cdot (1 + 2 + \cdots + 10)$ wird jede Zahl aus der linken Klammer ein Mal mit jeder Zahl aus der rechten Klammer multipliziert, also erhält man genau die Summe aller Produkte aus der Tabelle. Daher gilt (unter Verwendung von $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$) also:

$$\begin{aligned}\text{Summe aller Produkte} &= (1 + 2 + \cdots + 10) \cdot (1 + 2 + \cdots + 10) \\ &= \frac{10 \cdot (10+1)}{2} \cdot \frac{10 \cdot (10+1)}{2} \\ &= 55 \cdot 55 \\ &= 3025\end{aligned}$$

24. Wir stellen uns ein Auto vor, das entlang des regelmäßigen Vielecks ein Mal im Uhrzeigersinn im Kreis fährt. Es fährt also eine Seite lang geradeaus, dreht sich dann um einen gewissen Winkel (den sogenannten "Außenwinkel" des Vielecks) nach rechts, fährt wieder ein Stück, und so weiter. Am Ende hat es sich genau ein Mal ganz gedreht, also ist die Summe aller Außenwinkel immer gleich 360°.

    Der Innenwinkel beträgt 180° minus Außenwinkel, also sind die Innenwinkel genau dann ganzzahlig, wenn auch die Außenwinkel es sind.

    Außerdem sind in einem regelmäßigen n-Eck alle Außenwinkel gleich groß, also hat jeder Außenwinkel eine Größe von $\frac{360^\circ}{n}$.

    Es bleibt also nur noch zu untersuchen, für welche n der Wert $\frac{360}{n} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{n}$ ganzzahlig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn n ein Teiler von 360 ist.

    Kurzer Ausflug in die Theorie: Wenn die Primfaktorisierung einer Zahl gleich $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \cdots \cdot_k^{\alpha_k}$ ist (wobei die Primzahlen p_i alle verschieden sind), so ist die Anzahl der positiven Teiler (inklusive 1 und n) gleich $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot \cdots \cdot (\alpha_k + 1)$. (Begründung: Eine Zahl ist genau dann ein Teiler, wenn sie eine Teilmenge der Primfaktoren von n enthält, also kann sie den ersten Primfaktor zwischen 0 und α_1 Mal enthalten, den zweiten zwischen 0 und α_2 Mal, und so weiter.)

    Also hat $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ genau $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Teiler. Davon müssen wir allerdings noch die Teiler 1 und 2 ausschließen, da es keine 1-Ecke und 2-Ecke gibt.

    Also bleiben 22 Arten von regelmäßigen Vielecken mit ganzzahligen Winkeln übrig.

25.
    - Die kleinste Summe von 9 verschiedenen 2er-Potenzen ist
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 = 2^9 - 1 = 511$.
    - Die zweitkleinste mögliche Summe von 9 verschiedenen 2er-Potenzen erhält man, wenn man 2^8 durch 2^9 ersetzt, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^9 = 511 - 2^8 + 2^9 = 767$.
    - Die drittkleinste Summe erhält man, wenn man nun weiters 2^7 durch 2^8 ersetzt, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 + 2^9 = 767 - 2^7 + 2^8 = 895$.
    - Für die viertkleinste Summe ersetzt man weiters 2^6 durch 2^7, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 895 - 2^6 + 2^7 = 959$.
    - Für die fünftkleinste Summe ersetzt man weiters 2^5 durch 2^6, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 959 - 2^5 + 2^6 = 991$.
    - Für die sechstkleinste Summe ersetzt man weiters 2^4 durch 2^5, also
      $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 959 - 2^4 + 2^5 = 1007$.

    Jede weitere mögliche Summe ist sicher noch größer als 1007 und somit mindestens vierstellig. Daher gibt es 5 verschiedene dreistellige Zahlen, die als Summe von genau 9 verschiedenen 2er-Potenzen dargestellt werden können.

26. Sei x die Seitenlänge BC, und h die Seitenlänge der Hypotenuse AC. Da das Dreieck rechtwinkelig ist, gilt nach Pythagoras, dass $x^2 + 20^2 = h^2$. Wir suchen also all jene x, für die $20^2 = h^2 - x^2 = (h + x)(h - x)$ gilt, mit ganzen Zahlen h und x.

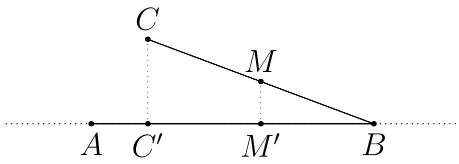
    Wir versuchen also, die Primfaktoren von $20^2 = 2^4 \cdot 5^2$ auf $(h + x)$ und $(h - x)$ aufzuteilen (sodass $(h + x)(h - x) = 20^2$ gilt), wobei $(h - x)$ sicher immer kleiner ist. Für $(h - x)$ kommen daher folgende Teiler von 20^2 in Frage, für die wir jeweils gleich auch h und x berechnen:

$\mathbf{h-x}$	$\mathbf{h+x}=\frac{20^2}{h-x}$	$\mathbf{h}=\frac{(h-x)+(h+x)}{2}$	$\mathbf{x}=h-(h-x)$	**Gültige Lösung**
1	400	200.5	199.5	NEIN (nicht ganzzahlig)
2	200	101	99	JA
4	100	52	48	JA
8	50	29	21	JA
16	25	20.5	4.5	NEIN (nicht ganzzahlig)
5	80	42.5	37.5	NEIN (nicht ganzzahlig)
10	40	25	15	JA
20	20	20	0	NEIN ($x=0$)

(Für alle weiteren Teiler von 20^2, die wir $h-x$ zuweisen könnten, wäre $h+x=\frac{20^2}{h-x}$ kleiner als $h-x$, also wäre x negativ. Daher brauchen wir diese Teiler nicht zu betrachten.)

Insgesamt haben wir also 4 Lösungen gefunden.

27. Wir betrachten zunächst eine Anwendung des Strahlensatzes, die wir nun ein paar Mal benötigen werden:



Sei AB eine Strecke und C ein Punkt, der nicht auf AB oder der Verlängerung davon liegt. Weiters sei M der Mittelpunkt von BC. Wir zeichnen die Höhenfußpunkte von C und M auf die Gerade AB (oder die Verlängerung davon) und erhalten C' und M'.

Die Schreibweise $d(X, YZ)$ bezeichne den Normalabstand eines Punktes X zur Strecke YZ (oder der Verlängerung davon). In unserem konkreten Fall gilt also $d(C, AB) = CC'$ und $d(M, AB) = MM'$.

Da CC' und MM' beide normal auf AB sind, sind sie parallel. Also gilt gemäß Strahlensatz, dass $BC : BM = BC' : BM' = CC' : MM'$. Da M der Mittelpunkt von BC ist, gilt $BC : BM = 2 : 1$, also folgt $d(C, AB) : d(M, AB) = CC' : MM' = BC : BM = 2 : 1$. Umgeformt erhalten wir also $d(M, AB) = \frac{1}{2}d(C, AB)$.

Nun wenden wir dies in der ursprünglichen Aufgabe einige Male an, um die Flächen der vier weggeschnittenen Dreiecke der Reihe nach zu berechnen. Die Schreibweise $[XYZ]$ bezeichne dabei die Fläche des Dreiecks XYZ.

- Die Breite und Höhe des Rechtecks bezeichnen wir mit $b = AB$ und $h = BC$. Also hat das Rechteck die Fläche $b \cdot h$.
- Für jedes der vier rechtwinkeligen Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB berechnet sich die Fläche als $\frac{b\cdot h}{2}$.
- Da M_1 der Mittelpunkt von CD ist, ist die Länge $M_1D = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}b$. Da die Fläche eines Dreiecks als "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" berechnet werden kann, erhalten wir $[M_1DA] = \frac{M_1D\cdot AD}{2} = \frac{\frac{1}{2}b\cdot h}{2} = \frac{1}{4}bh$.
- Als nächstes berechnen wir $[ABM_2]$. Gemäß unserer Vorüberlegung zum Strahlensatz mit Grundlinie AB und Punkt M_1 gilt $d(M_2, AB) = \frac{1}{2}d(M_1, AB) = \frac{1}{2}h$. Mit "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" berechnen wir also $[ABM_2] = \frac{AB\cdot d(M_2,AB)}{2} = \frac{b\cdot\frac{1}{2}h}{2} = \frac{1}{4}bh$.
- Nun berechnen wir $[BCM_3]$. Dafür benötigen wir die Höhe $d(M_3, BC)$. Da M_1 der Mittelpunkt von CD ist, gilt $d(M_1, AD) = \frac{1}{2}b$. Wegen der Vorüberlegung zum Strahlensatz mit Grundlinie DA und Punkt M_1 gilt $d(M_2, AD) = \frac{1}{2}d(M_1, AD) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b = \frac{1}{4}b$.
  Wenn wir statt dem Abstand von M_2 zu AD jenen zur gegenüberliegenden Seite BC betrachten, gilt $d(M_2, BC) = b - d(M_2, AD) = b - \frac{1}{4}b = \frac{3}{4}b$.
  Zuletzt wenden wir die Vorüberlegung auf die Grundlinie BC und den Punkt M_2 an und erhalten $d(M_3, BC) = \frac{1}{2}d(M_2, BC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}b = \frac{3}{8}b$.
  Wieder mit "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" berechnet sich die Fläche als $[BCM_3] = \frac{BC\cdot d(M_3,BC)}{2} = \frac{h\cdot\frac{3}{8}b}{2} = \frac{3}{16}bh$.
- Zuletzt benötigen wir die Fläche von CM_1M_4. Auch dazu berechnen wir zuerst die Höhe $d(M_4, CM_1)$. Wir haben bereits gezeigt, dass $d(M_2, AB) = \frac{1}{2}h$. Gemäß der Vorüberlegung mit Grundlinie AB und Punkt M_2 gilt $d(M_3, AB) = \frac{1}{2}d(M_2, AB) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}h = \frac{1}{4}h$.
  Betrachtet man den Abstand von M_2 zu CD statt AB, so erhält man $d(M_2, CD) = h - d(M_2, AB) = h - \frac{1}{4}h = \frac{3}{4}h$.

Schließlich gilt wegen der Vorüberlegung mit Grundlinie CD und Punkt M_3, dass $d(M_4, CD) = \frac{1}{2}d(M_3, CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8}h$.

Mit "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$" kann man die Dreiecksfläche nun berechnen: $[CM_1M_4] = \frac{CM_1 \cdot d(M_4,CD)}{2} = \frac{\frac{1}{2}b \cdot \frac{3}{8}h}{2} = \frac{3}{32}bh$.

- Für die Fläche $[M_1M_2M_3M_4]$ bleibt $[M_1M_2M_3M_4] = [ABCD] - [M_1DA] - [ABM_2] - [BCM_3] - [CM_1M_4] = bh - \frac{1}{4}bh - \frac{1}{4}bh - \frac{3}{16}bh - \frac{3}{32}bh = \frac{7}{32}bh$.
- Also gilt für das Verhältnis der Flächen, dass $[M_1M_2M_3M_4] : [ABCD] = \frac{7}{32}bh : bh = \frac{7}{32} : 1 = \frac{7}{32}$.

28. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} B &= \text{Anzahl blaue Quadrate} \\ b &= \text{Anzahl blaue Rechtecke, die keine Quadrate sind} \\ R &= \text{Anzahl rote Quadrate} \\ r &= \text{Anzahl rote Rechtecke, die keine Quadrate sind} \end{aligned}$$

Die Gesamtanzahl der blauen Rechtecke (sowohl Quadrate als auch "normale" Rechtecke) ist also $B + b$, die Gesamtanzahl der roten Rechtecke ist $R + r$.

Laut Angabe gelten folgende Bedingungen:

- $B + R = 7$ (Genau 7 der Rechtecke sind Quadrate.)
- $R + r = 3 + B$ (Es gibt um 3 rote Rechtecke mehr als blaue Quadrate.)
- $R = 2 + B + b$ (Es gibt auch um zwei rote Quadrate mehr als blaue Rechtecke.)

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $R = 7 - B$, also können wir die Variable R in den beiden anderen Gleichungen ersetzen und erhalten:

- $7 - B + r = 3 + B \iff 4 + r = 2B$
- $7 - B = 2 + B + b \iff 5 - b = 2B$

Da die rechten Seiten gleich sind, können wir auch die linken Seiten gleichsetzen und erhalten $4+r = 5-b$, oder umgeformt $r + b = 1$. Da r und b beides ganze Zahlen sein müssen, muss also eine davon gleich 1 und die andere gleich 0 sein.

Auch B muss eine ganze Zahl sein. Wenn wir daher beide obigen Gleichungen betrachten, sehen wir $B = \frac{4+r}{2} = \frac{5-b}{2}$ und können schließen, dass $r = 0$ und $b = 1$ ist, da die beiden Brüche sonst nicht ganzzahlig wären.

Also gilt $B = \frac{4+0}{2} = 2$, u gibt es insgesamt $B + b = 2 + 1 = 3$ blaue Rechtecke.

29. Wir betrachten die Runden der Reihe nach:

- Nach der ersten Runde sind alle mit einer ungeraden Nummer ausgeschieden, also bleiben noch 48 Zählende übrig, nämlich jene mit den Nummern $1, 3, 5, \ldots, 95$. Das nächste Vereinsmitglied zählt zu Beginn der darauffolgenden Runde mit 97 weiter. Da für uns nur wichtig ist, ob jemand eine gerade oder ungerade Zahl sagt, werden wir die konkreten Zahlen nicht mehr weiter mitrechnen sondern merken uns nur, dass die nächste Runde mit einer ungeraden Zahl begonnen wird.
- Deshalb bleibt bei der zweiten Runde 1 im Kreis, 3 scheidet aus, 5 bleibt im Kreis, und so weiter. Es bleiben also genau jene übrig, deren Zahl bei Division durch 4 den Rest 1 lässt. Da 48 gerade ist, bleiben von den 48 Personen nach der zweiten Runde genau die Hälfte übrig, und der letzte hat eine gerade Zahl gesagt.
- Die dritte Runde beginnt mit 24 verbleibenden Spielern und einer ungeraden Zahl. Übrig bleiben die Zahlen $1, 9, 17, \ldots$, also jene, die bei Division durch 8 den Rest 1 lassen. Wiederum ist 24 gerade, somit ist genau die Hälfte noch übrig, und die letzte Zahl war gerade.
- Die vierte Runde beginnt mit 12 verbleibenden Spielern und einer ungeraden Zahl. Übrig bleiben die Zahlen $1, 17, 33, \ldots$, also jene, die bei Division durch 16 den Rest 1 lassen. Da auch 12 gerade ist, bleibt genau die Hälfte übrig und die letzte Zahl war gerade.
- Auch die fünfte Runde verläuft wie die bisherigen: Es beginnt mit 6 Spielern und einer ungeraden Zahl, also bleiben $1, 33, 65$ übrig. Das sind genau jene Zahlen, die bei Division durch 32 den Rest 1 lassen und kleiner als 96 sind. Wieder hat der letzte eine gerade Zahl gesagt.

- Von den letzten drei Spielern sagt in der sechsten Runde zuerst 1 eine ungerade Zahl und bleibt, dann 33 eine gerade Zahl und geht, und 65 wieder eine ungerade Zahl und bleibt.
- In der siebenten und letzten Runde sagt nun 1 eine gerade Zahl und geht, und somit bleibt 65 alleine übrig.

30. Eine Teilungsregel für 11 besagt, dass eine Zahl genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme – also die erste Ziffer minus die zweite plus die dritte minus die vierte und so weiter – ebenfalls duch 11 teilbar ist.

    Im Wort *KANGAROO* heißt das also, dass wir Teilbarkeit durch 11 genau dann erreichen, wenn $K - A + N - G + A - R + O - O$ durch 11 teilbar ist. Da $A - A = 0$ und $O - O = 0$, können wir das noch vereinfachen zu $K + N - G - R$.

    Um eine möglichst große Zahl zu erhalten, muss man an die vordersten Stellen möglichst große Ziffern setzen. Wir beginnen also auf jeden Fall mit $K = 9$, $A = 8$ und $N = 7$. Die Summe $K + N - G - R = 9 + 7 - G - R = 16 - G - R$ muss durch 11 teilbar sein. Da G und R kleiner als 7 sein müssen (die großen Ziffernwerte sind ja schon vergeben), können wir 0 als Summe nicht mehr erreichen und zielen stattdessen auf $G + R = 5$ ab. Wiederum wollen wir möglichst weit vorne möglichst große Zahlen, also setzen wir $G = 5$ und $R = 0$. Somit bleibt nur noch O zu bestimmen, und dafür verwenden wir die größte noch verfügbare Ziffer 4. Die größtmögliche Zahl ist also 98758044.

    Für die kleinste mögliche Zahl setzen wir umgekehrt die kleinsten Ziffern an die vordersten Stellen, also $K = 1$ (da $K = 0$ verboten ist), $A = 0$ und $N = 2$. Wieder muss $K+N-G-R = 1+2-G-R = 3-G-R$ durch 11 teilbar sein. Da G und R beide mindestens 3 sind, können wir 0 als Summe nicht erreichen und streben stattdessen eine Summe von -11 an. (Eine Summe von -22 oder kleiner ist ebenfalls nicht möglich, da G und K jeweils höchstens 9 sein können.) Also soll gelten $G + R = 14$. Um die Zahl möglichst klein zu machen, sollte G so klein wie möglich sein, also umgekehrt R so groß wie möglich. Größer als 9 kann R aber nicht werden, also setzen wir $G = 5$ und $R = 9$. Es bleibt noch O zu bestimmen, und dafür verwenden wir wiederum die kleinste noch verfügbare Ziffer, also 3. Die kleinstmögliche Zahl ist daher 10250933.

    In beiden Fällen wurde $G = 5$ gesetzt.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Kategorie: Felix, Schulstufe: 1 – 2

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

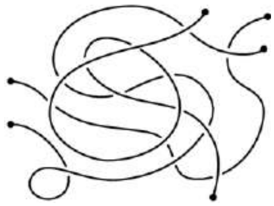
11	12	13	14	15

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 17. 03. 2016

– 3 Punkte Beispiele –

1. Wie viele Seile siehst du im Bild?

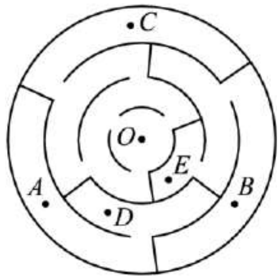


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

2. In einer Höhle wohnen ein Seestern, zwei Seepferdchen und drei Schildkröten. Sie werden von drei Seesternen, vier Schildkröten und fünf Seepferdchen besucht.
Wie viele Tiere sind jetzt insgesamt in der Höhle?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

3. Welchen Punkt im Labyrinth können wir erreichen, wenn wir vom Punkt *O* losgehen?



(A) *A* (B) *B* (C) *C* (D) *D* (E) *E*

4. Zehn Freunde kommen zur Geburtstagsparty von Robert. Sechs davon sind Mädchen.
Wie viele Buben sind insgesamt auf der Party?

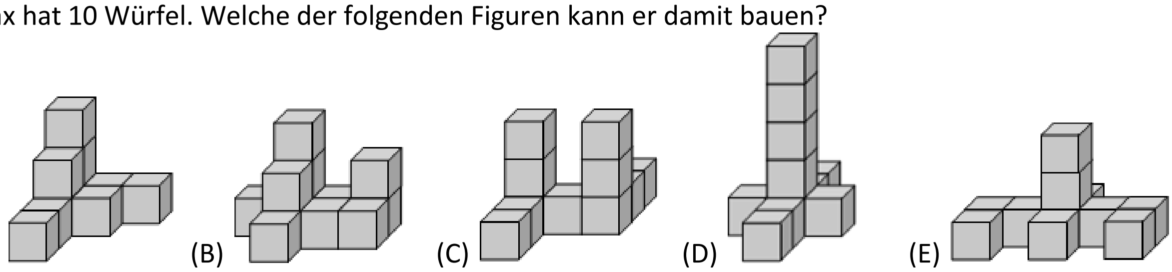
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

5. Johannes teilte Flugblätter an die Häuser mit den Hausnummern 15 bis 47 aus.
Wie viele Häuser bekamen das Flugblatt?

(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

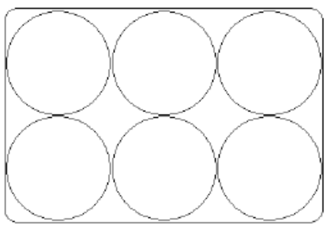
– 4 Punkte Beispiele –

6. Max hat 10 Würfel. Welche der folgenden Figuren kann er damit bauen?



(A) (B) (C) (D) (E)

7. Eine Henne legt weiße und braune Eier.
Lisa legt davon sechs Eier in die abgebildete Schachtel.
Die braunen Eier dürfen sich dabei nicht berühren.
Wie viele braune Eier kann Lisa höchstens in die Schachtel legen?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

8. Oma steht im Hof und ruft ihre Katze und alle ihre Hennen zu sich. Alle 20 Beine kommen zu ihr gerannt. Wie viele Hennen hat Oma?

(A) 11 (B) 9 (C) 8 (D) 6 (E) 4

9. Ein Haus hat 12 Räume. Jeder Raum hat zwei Fenster und ein Licht.
Nur wenn das Licht in einem Raum eingeschaltet ist, sind die beiden Fenster beleuchtet.
Gestern Abend waren 18 Fenster beleuchtet.
In wie vielen Räumen war das Licht ausgeschaltet?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 9

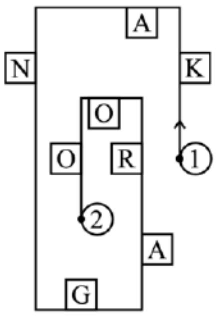
10. Zusammen sind Paul und Josef 12 Jahre alt. Wie alt werden beide zusammen in vier Jahren sein?

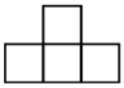
(A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 19 (E) 20

– 5 Punkte Beispiele –

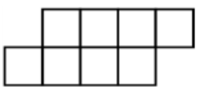
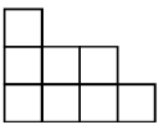
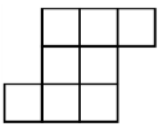
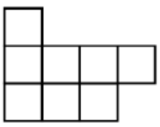
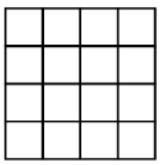
11. Gerda geht entlang der Straße und schreibt die Buchstaben auf, welche sich auf ihrer rechten Seite befinden.
Welches Wort entsteht, wenn Gerda vom Punkt 1 zum Punkt 2 geht.

(A) KNAO (B) KNGO (C) KNR (D) AGRO (E) KAO



12. Konrad hat einige Kartonstücke, die alle so aussehen: 

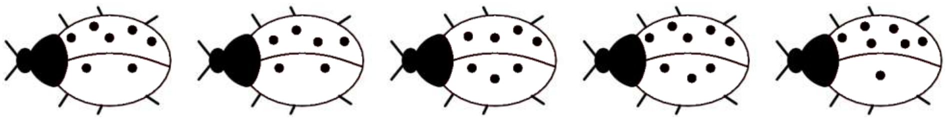
Welche der nachstehenden Figuren kann Konrad damit nicht zusammensetzen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. 

Fünf Spatzen sitzen auf einem Seil (siehe Bild). Manche von ihnen schauen nach links, manche schauen nach rechts. Jeder Spatz zwitschert so oft, wie er Spatzen vor sich sitzen sieht. Zum Beispiel zwitschert der dritte Spatz genau zwei Mal.
Wie oft zwitschern alle Spatzen zusammen?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

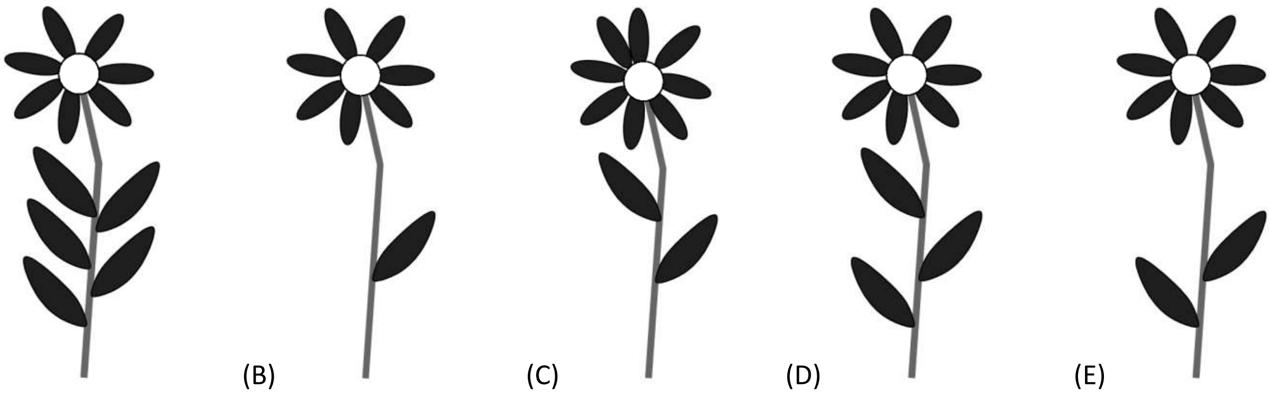
14. 

Im oben angeführten Bild sind fünf Marienkäfer zu sehen. Jeder von ihnen sitzt auf einer ganz bestimmten Blume. Ein Marienkäfer darf nur dann auf einer Blume sitzen, wenn folgendes erfüllt ist:

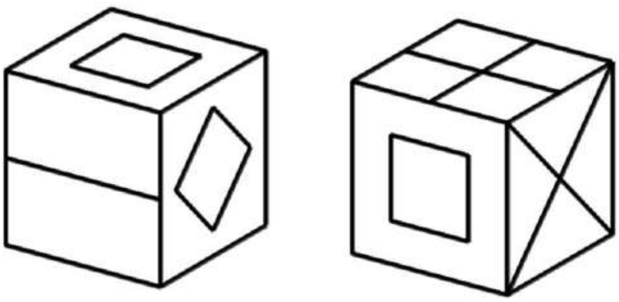
1) Der Unterschied der Anzahl der Punkte auf den Flügeln des Marienkäfers ist gleich der Anzahl der Blätter des Stängels.

2) Die Anzahl aller Punkte auf den Flügeln des Marienkäfers ist gleich der Anzahl der Blätter der Blüte.

Auf welcher der folgenden Blumen sitzt kein Marienkäfer?

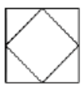


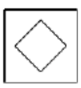
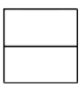
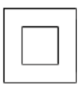
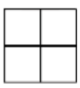
(A) (B) (C) (D) (E)

15. 

Im Bild oben sehen wir einen Würfel in zwei verschiedenen Positionen.

Die sechs Seiten des Würfels sehen so aus:

Welche Seite liegt auf der gegenüberliegenden Seite von  ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Level: Felix, Grade: 1 and 2

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
15 starting points
Each correct answer to questions 1. – 5.: 3 Points
Each correct answer to questions 6. – 10.: 4 Points
Each correct answer to questions 11. – 15.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 15). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

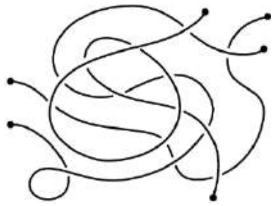
11	12	13	14	15

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2016
Level Felix (Grade 1 and 2)
Österreich – 17. 03. 2016

– 3 Points Questions –

1. How many ropes can you see in this picture?

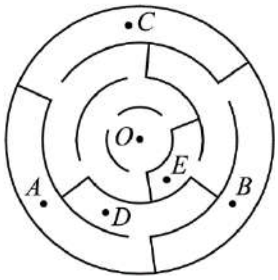


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

2. In a cave there live a starfish, two seahorses and three turtles. They are visited by three starfish, four turtles and five seahorses.
How many animals are there now in the cave altogether?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18

3. Which point in the labyrinth can we get to, starting at point *O*?



(A) *A* (B) *B* (C) *C* (D) *D* (E) *E*

4. Ten friends go to Robert's birthday party. Six of which are girls.
How many boys in total are at the party?

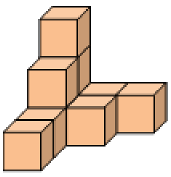
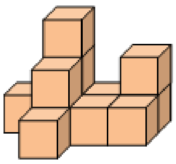
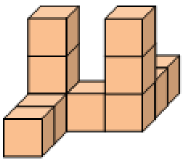
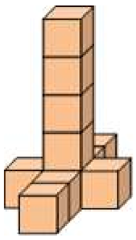
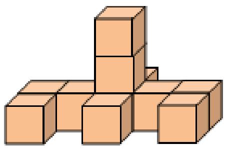
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

5. Johannes hands out flyers to the houses with the numbers 15 to 47.
How many houses get a flyer?

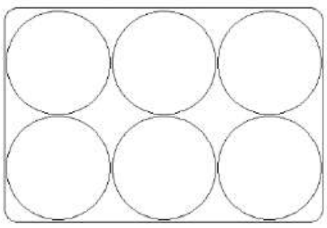
(A) 31 (B) 32 (C) 33 (D) 34 (E) 35

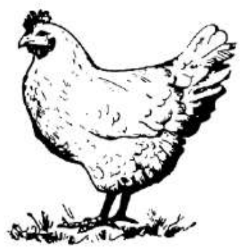
– 4 Points Questions –

6. Max has 10 dice. Which one of the following solids can he build with them?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. A hen lays white and brown eggs.
Lisa takes six of them and puts them in a box as shown.
The brown eggs are not allowed to touch each other.
What is the maximum number of brown eggs Lisa can place in the box?





(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

8. Grandma stands in the courtyard calling her cat and all her chickens. After a little while 20 legs are running towards her.
How many chickens does Grandma have?

(A) 11 (B) 9 (C) 8 (D) 6 (E) 4

9. A house has 12 rooms. Each room has two windows and one light.
Only when the light is on in a room, both windows are illuminated.
Yesterday evening 18 windows were illuminated.
In how many of the rooms was the light off?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 9

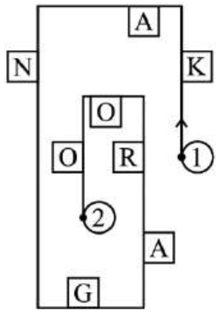
10. Together Paul and Josef are 12 years old. How old will they both be together in four years time?

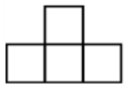
(A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 19 (E) 20

– 5 Points Questions –

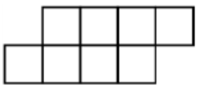
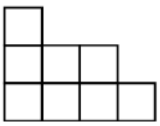
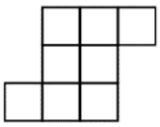
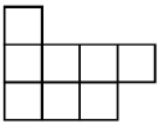
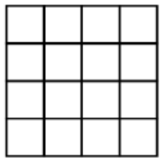
11. Gerda walks along the road and writes down the letters she can see on her right hand side.
Which word is formed while Gerda walks from point 1 to point 2?

(A) KNAO (B) KNGO (C) KNR (D) AGRO (E) KAO



12. Konrad has some pieces of cardboard which all look like this: 

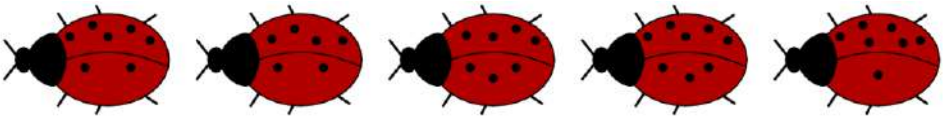
Which of the shapes below can he not make out of these pieces?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13.

Five sparrows are sitting on a rope (see picture). Some of them are looking to the left, some of them are looking to the right. Every sparrow whistles as many times as the number of sparrows he can see sitting in front of him. For example, the third sparrow whistles exactly twice.
How often do all sparrows whistle altogether?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 12

14. 

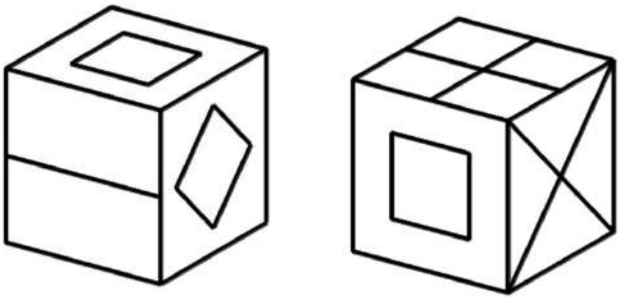
In the picture above five ladybirds can be seen. Each one is sitting on a certain flower.
A ladybird is only allowed to sit on a flower if the following conditions are met:

1) The difference between the number of points on each wing is equal to the number of leaves on the stem.

2) The number of points on the wings of the ladybird is equal to the number of petals on the flower.

Which of the following flowers is without a ladybird?

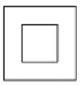
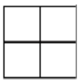
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

15. 

In the picture above we see a cube in two different positions.

The six sides of the cube look like this:

Which side is opposite to  ?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

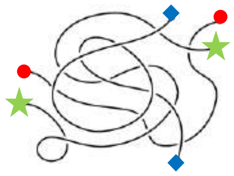
Känguru der Mathematik 2016
Lösungen zur Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2016

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	E	C	B	C	A	C	C	B	E	A	D	D	E	C

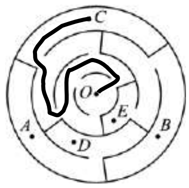
– 3 Punkte Beispiele –

1. Es sind 3 Seile.
(B) 3



2. 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 18
(E) 18

3. Wir können den Punkt *C* erreichen, wenn wir vom Punkt *O* losgehen.
(C) *C*

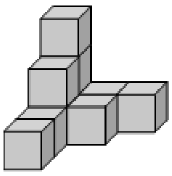


4. Zehn Freunde und Robert – das sind insgesamt 11 Personen. 11 – 6 = 5
(B) 5

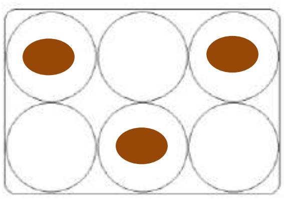
5. Die Häuser 15, 16, …, 46, 47 bekommen Flugblätter. Daher bekommen 14 Häuser kein Flugblatt. 47 – 14 = 33
(C) 33

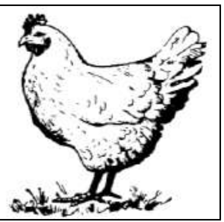
– 4 Punkte Beispiele –

6. Max hat 10 Würfel. Er kann damit Figur A bauen. Die 2 Würfel im Eck in der ersten Reihe sind nicht zu sehen!

(A) 

7. Lisa kann höchstens 3 braune Eier in die Schachtel legen.
(C) 3





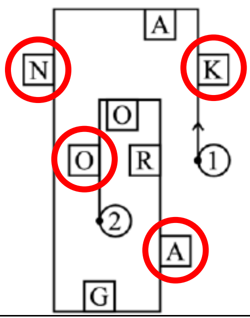
8. Die Katze hat 4 Beine. Alle 20 Beine kommen zur Oma, also gehören 20 – 4 = 16 Beine den Hühnern.
Jedes Huhn hat 2 Beine. 16 : 2 = <u>8</u>
(C) 8

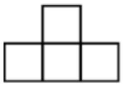
9. Ein Haus hat 12 Räume. Jeder Raum hat 2 Fenster und ein Licht.
Gestern Abend waren 18 Fenster beleuchtet. 18 : 2 = 9 Also waren 9 Räume beleuchtet.
12 – 9 = <u>3</u> In 3 Räumen war das Licht ausgeschaltet.
(B) 3

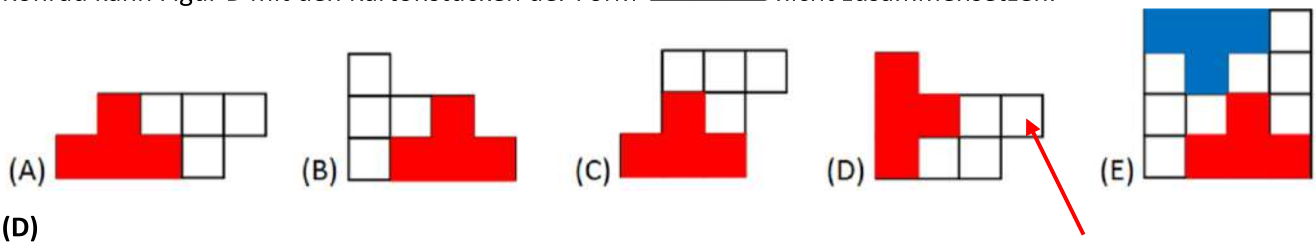
10. 12 + 4 · 2 = 12 + 8 = <u>20</u>
(E) 20

5 Punkte Beispiele

11. Die Buchstaben, welche sich auf ihrer rechten Seite befinden, sind mit einem roten Kreis gekennzeichnet.
Es entsteht das Wort KNAO.
(A) KNAO

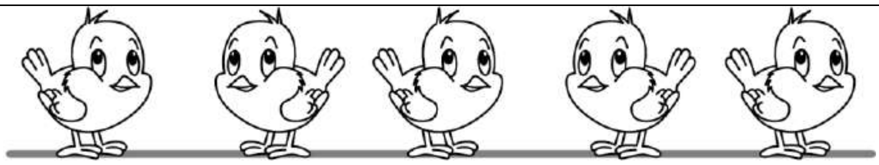


12. Konrad kann Figur D mit den Kartonstücken der Form  nicht zusammensetzen.



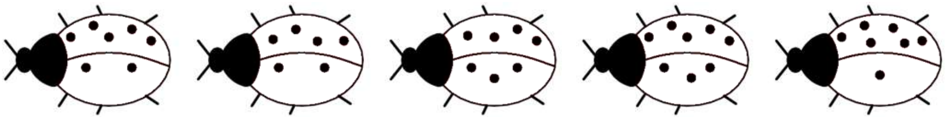
(D)

13.

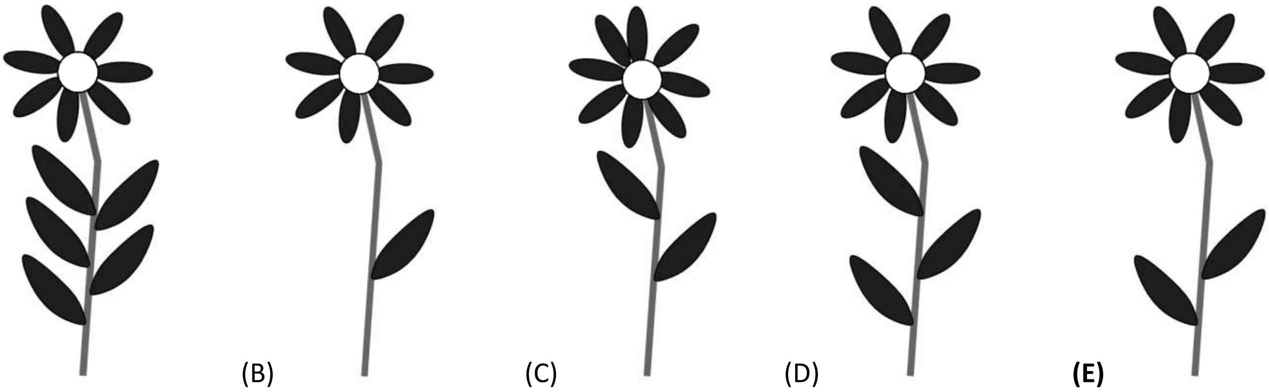


4 1 2 3 0 …….. So oft zwitschert jeder Spatz.
4 + 1 + 2 + 3 + 0 = <u>10</u> Alle Spatzen zusammen zwitschern 10 mal.
(D) 10

14.



$5 - 2 = 3$	$4 - 2 = 2$	$4 - 3 = 1$	$5 - 3 = 2$	$6 - 1 = 5$	**Differenz der Punktezahl**
$5 + 2 = 7$	$4 + 2 = 6$	$4 + 3 = 7$	$5 + 3 = 8$	$6 + 1 = 7$	**Summe der Punktezahl**



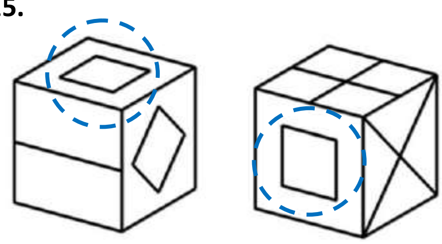
(A)	(B)	(C)	(D)	**(E)**
5	**1**	**2**	**3**	**2**
7	**7**	**8**	**7**	**7**

Anzahl der Blätter des Stängels (obere Zeile)

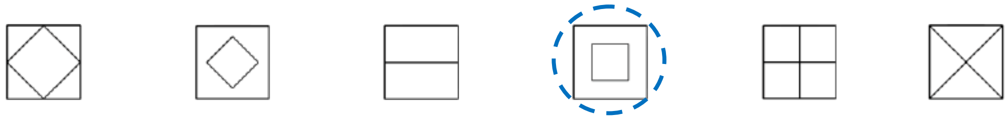
Anzahl der Blätter der Blüte (untere Zeile)

(E) Auf Blume E sitzt kein Marienkäfer.

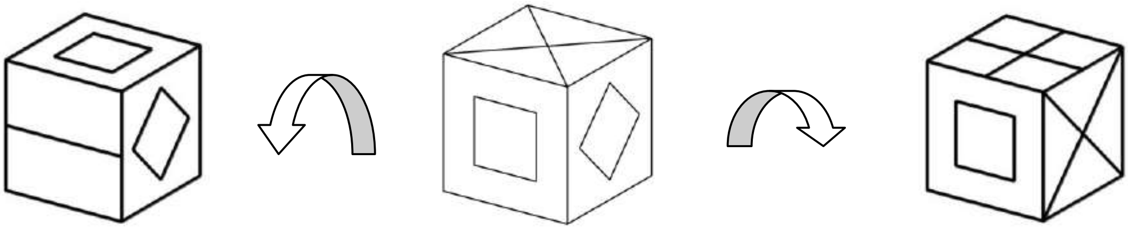
15.

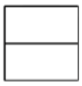


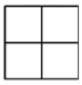
Die sechs Seiten des Würfels sehen so aus:

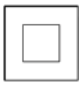


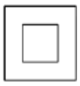
Die blau eingekreiste Seite ist zwei Mal zu sehen. Anhand dieser Seite erkennt man, dass der Würfel zuerst nach vorne und dann nach rechts gekippt wurde:



Durch die erste Drehung weiß man, dass die Seiten  und  einander gegenüberliegen.

Durch die zweite Drehung weiß man, dass die Seiten  und  einander gegenüberliegen.

Daher muss die Seite  die gegenüberliegende Seite von  sein.

(C) 

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 3. 2016

Kategorie: Ecolier, Schulstufe: 3 – 4

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. – 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. – 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

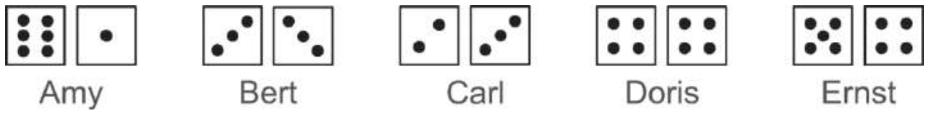
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Punkte Beispiele -

1. Amy, Bert, Carl, Doris und Ernst werfen jeweils zwei Würfel. Wer hat insgesamt die größte Augenzahl gewürfelt?

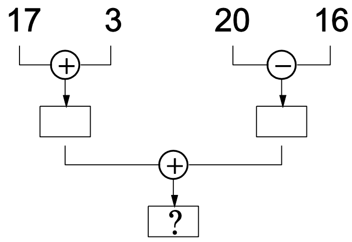


(A) Amy (B) Bert (C) Carl (D) Doris (E) Ernst

2. Ein Känguru ist 7 Wochen und 2 Tage alt. In wie vielen Tagen ist es 8 Wochen alt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3.



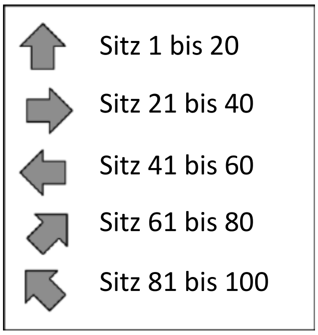
Welches Endergebnis erhältst du?

(A) 24 (B) 28 (C) 36 (D) 56 (E) 80

4. Clown Pipo sieht so aus:  Er betrachtet sich im Spiegel. Welches Bild sieht er?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Georg geht mit seinem Vater in den Zirkus. Sie haben die Plätze 71 und 72. Welchem Pfeil müssen sie folgen, um zu ihren Sitzplätzen zu kommen?



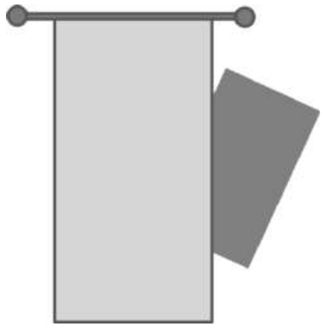
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Anna hat ihre Äpfel auf sich und 5 Freundinnen gerecht aufgeteilt. Jedes Mädchen hat einen halben Apfel bekommen. Wie viele Äpfel hat Anna ursprünglich gehabt?

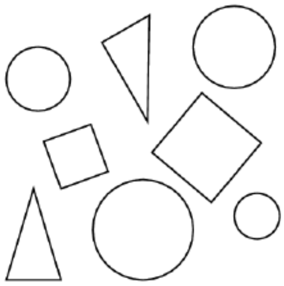
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Ein Teil eines Rechtecks wird von einem Vorhang verdeckt. Der verdeckte Teil ist ein

(A) Dreieck (B) Quadrat (C) Sechseck (D) Kreis (E) Rechteck



8. Welcher der folgenden Sätze passt zum Bild?



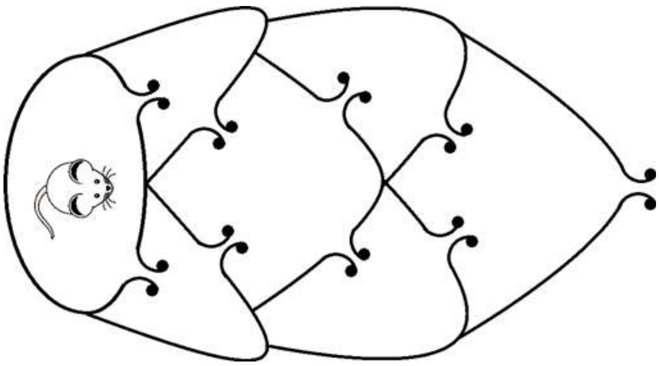
(A) Man sieht gleich viele Kreise wie Quadrate.
(B) Man sieht weniger Kreise als Dreiecke.
(C) Man sieht zweimal so viele Kreise wie Dreiecke.
(D) Man sieht mehr Quadrate als Dreiecke.
(E) Man sieht um zwei Dreiecke mehr als Kreise.

- 4 Punkte Beispiele -

9. Wenn du die Ziffern der Jahreszahl 2016 zusammenzählst (2+0+1+6), erhältst du als Ergebnis 9. Wie lautet die nächste Jahreszahl nach 2016, für die die Summe der Ziffern wieder 9 ergibt?

(A) 2007 (B) 2025 (C) 2034 (D) 2108 (E) 2134

10. Eine Maus möchte aus dem Labyrinth entkommen. Auf ihrem Weg hinaus darf sie höchstens einmal durch jede Öffnung schlüpfen. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann die Maus ins Freie gelangen?

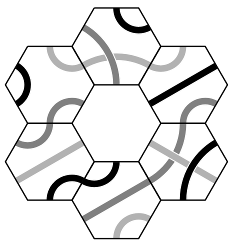


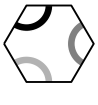
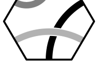
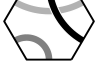
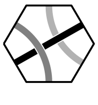
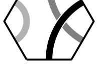
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

11. Peter möchte Pauls Passwort erraten. Er weiß über das Passwort folgendes: Die letzten drei Stellen sind Ziffern. Es kommen höchstens drei Großbuchstaben im Passwort vor. Welches der folgenden Passwörter könnte das von Paul sein?

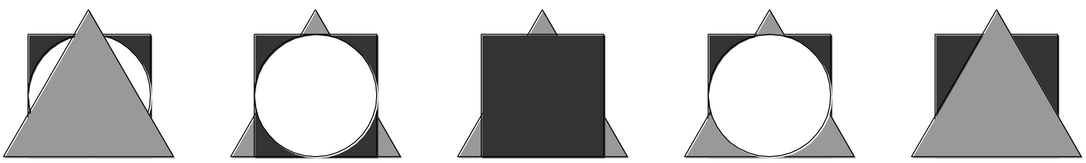
(A) PAUL123 (B) P0a1u2L3 (C) 1234LLuuaapp4321 (D) Paulin3 (E) 123PAUL

12. In die Mitte der großen Figur soll einer der folgenden Teile eingefügt werden. Dabei dürfen nur hellgraue Linien mit hellgrauen Linien, dunkelgraue Linien mit dunkelgrauen Linien und schwarze Linien mit schwarzen Linien zusammenstoßen. Welcher Teil passt?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Fünf Kinder haben jeweils ein schwarzes Quadrat, ein graues Dreieck und einen weißen Kreis aus Papier. Die Kinder legen die Figuren so übereinander, wie es in den Bildern zu sehen ist. In wie vielen Bildern wurde das Dreieck nach dem Quadrat hingelegt?

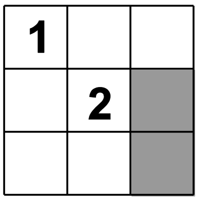


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. Konrad trocknet Pilze. Aus 4 kg frischen Pilzen bekommt er 1 kg getrocknete Pilze. Wie viel Kilogramm Pilze muss er pflücken, damit er 4 kg getrocknete Pilze erhält?

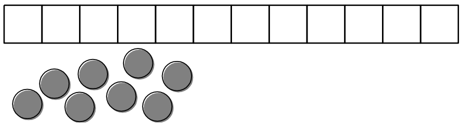
(A) 12 kg (B) 16 kg (C) 20 kg (D) 25 kg (E) 50 kg

15. Chantal hat in zwei der neun Felder Zahlen geschrieben (siehe Zeichnung). Sie möchte, dass in jeder Zeile und jeder Spalte die Zahlen 1, 2, 3 genau einmal vorkommen. Wie groß ist die Summe der beiden Zahlen, die in die grauen Felder gehören?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

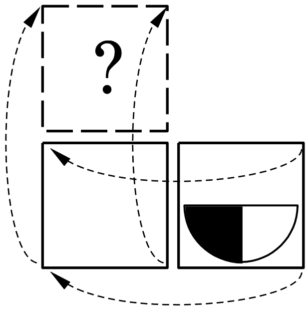
16. Hannes hat ein Spielbrett mit 11 Feldern. Er legt auf acht nebeneinander liegende Felder je eine Münze. Dabei kann er mit dem Auflegen der ersten Münze auf verschiedenen Feldern beginnen. Es gibt ein paar Felder, die sicher besetzt sind, egal bei welchem Feld Hannes beginnt. Wie viele Felder sind das?

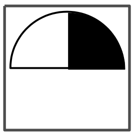
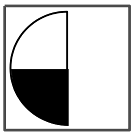
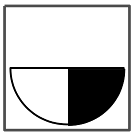
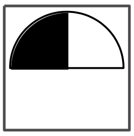
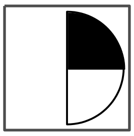


(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

- 5 Punkte Beispiele -

17. Eine Karte ist auf der Vorderseite mit einer Figur bedruckt und auf der Rückseite weiß**.** Die Karte wird zuerst nach links und dann nach oben geklappt (siehe Bild).
Welches Bild erhältst du?

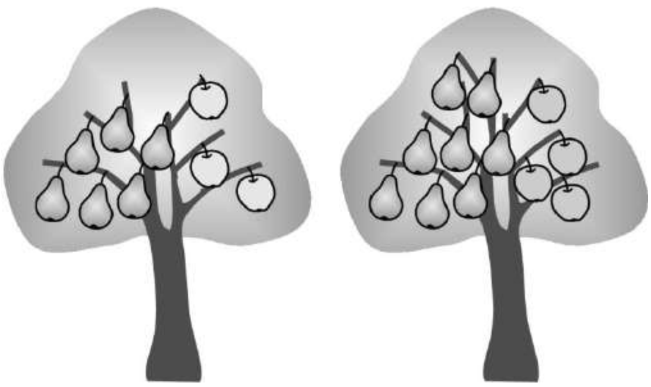


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

18. Tick, Trick und Track sind Drillinge. Ihr Bruder Franz ist genau um 3 Jahre älter. Alle vier Kinder haben heute Geburtstag. Wie alt können alle vier Brüder zusammen sein?

(A) 25 (B) 27 (C) 29 (D) 30 (E) 60

19. In einem Zaubergarten wachsen Zauberbäume. Auf einem Baum sind entweder 6 Birnen und 3 Äpfel oder 8 Birnen und 4 Äpfel. Insgesamt gibt es 25 Äpfel auf den Zauberbäumen. Wie viele Birnen hängen insgesamt auf allen Zauberbäumen?

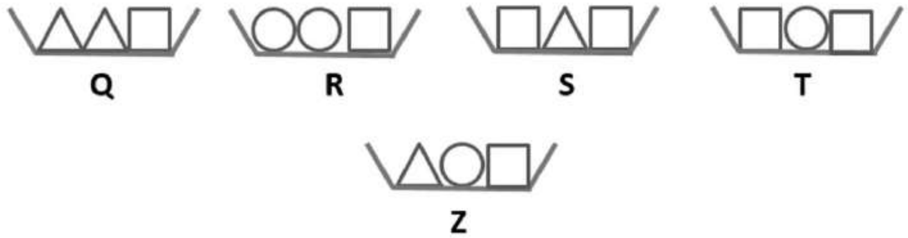


(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 56

20. Lisas Hunde haben um 18 Beine mehr als Nasen. Wie viele Hunde hat Lisa?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

21. Karin möchte fünf Schüsseln so auf einem Tisch aufstellen, dass sie nach ihrem Gewicht geordnet sind. Sie hat die Schüsseln Q, R, S und T bereits geordnet hingestellt, wobei Q am leichtesten und T am schwersten ist. Wo muss sie Schüssel Z hinstellen?

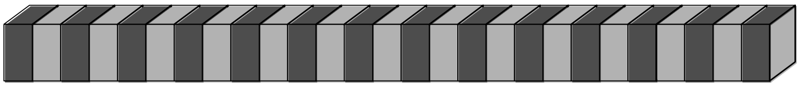


(A) links von Schüssel Q (B) zwischen die Schüsseln Q und R
(C) zwischen die Schüsseln R und S (D) zwischen die Schüsseln S und T
(E) rechts von Schüssel T

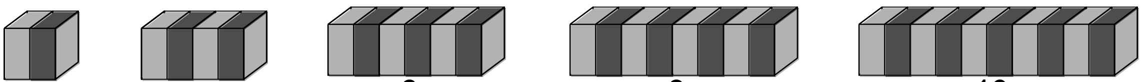
22. Eva schreibt sieben Zahlen auf ein Blatt, eine davon ist 201. Sie addiert diese sieben Zahlen und erhält 2016. Nun ersetzt sie 201 durch die Zahl 102 und addiert wieder die sieben Zahlen. Welches Ergebnis erhält sie jetzt?

(A) 1815 (B) 1914 (C) 1917 (D) 2115 (E) 2118

23. Leo hat mit 27 Bausteinen einen Stab zusammengebaut.

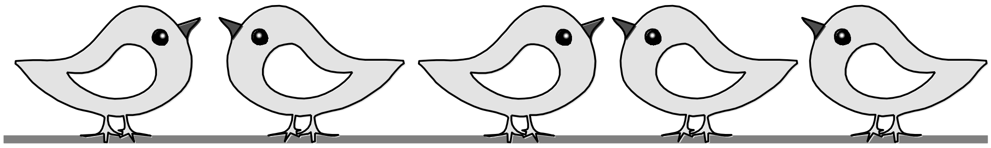


Er teilt den Stab so in zwei Teile, dass der eine Teil doppelt so lang wie der andere ist. Das wiederholt er nun immer wieder: Er nimmt einen der beiden Teile und zerlegt ihn so, dass ein Teil doppelt so lang wie der andere ist. Welches der folgenden Teilstücke kann auf diese Weise nie entstehen?



(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

24. Fünf Spatzen auf einem Seil blicken in die eine oder andere Richtung (siehe Bild). Jeder Spatz pfeift so oft, wie er Spatzen vor sich sitzen sieht. Azra pfeift also vier Mal. Dann dreht sich ein Spatz in die entgegengesetzte Richtung und wieder pfeifen alle Spatzen nach derselben Vorschrift. Beim zweiten Mal pfeifen die Spatzen insgesamt öfter als beim ersten Mal. Welcher Spatz hat sich umgedreht?



Azra *Bernhard* *Christa* *David* *Elsa*

(A) Azra (B) Bernhard (C) Christa (D) David (E) Elsa

KÄNGURU DER MATHEMATIK
2016
17. 3. 2016

Level: Ecolier, Grade: 3 and 4

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
Each correct answer to questions 1. – 8.: 3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.: 4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

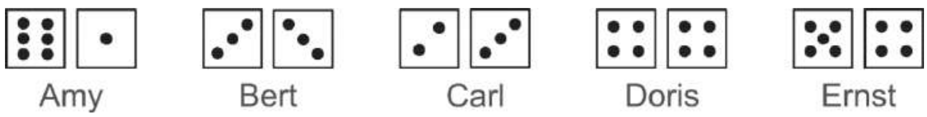
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2016
Level Ecolier (Grade 3 and 4)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Points Questions -

1. Amy, Bert, Carl, Doris and Ernst each throw two dice. Who has got the biggest total altogether?

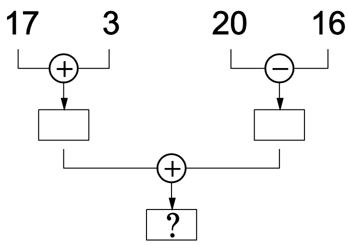


(A) Amy (B) Bert (C) Carl (D) Doris (E) Ernst

2. A kangaroo is 7 weeks and 2 days old. In how many days is it 8 weeks old?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3.

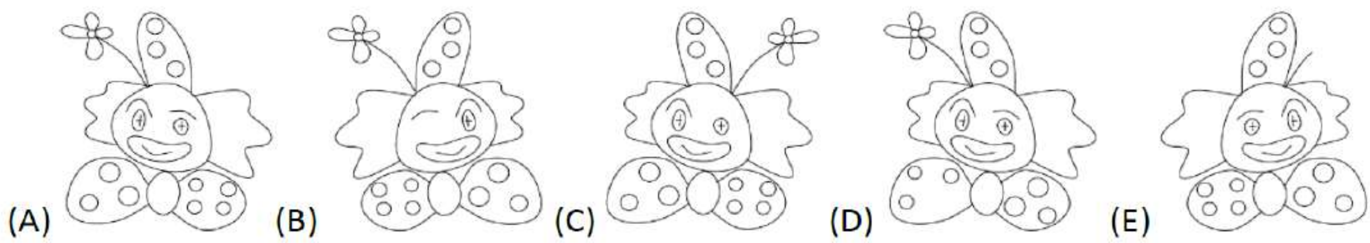


What is the final result?

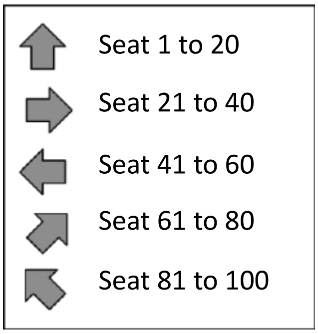
(A) 24 (B) 28 (C) 36 (D) 56 (E) 80

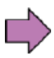
4. Clown Pipo looks like this:

He looks at himself in the mirror. Which picture does he see?



5. Georg goes to the circus with his father. They have the seat numbers 71 and 72. Which arrow do they have to follow to get to their seats?

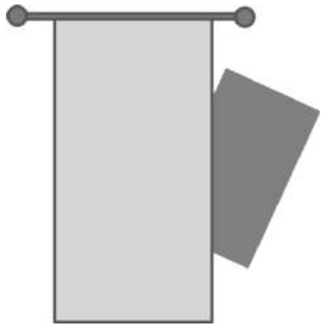


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Anna has shared her apples fairly between herself and her five girlfriends. Each girl has received half an apple. How many apples did Anna have to start with?

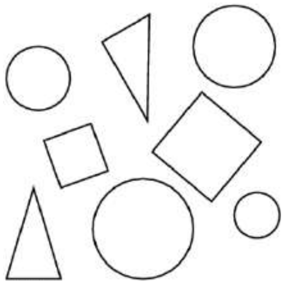
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Part of a rectangle is hidden by a curtain. The hidden part is a



(A) triangle (B) square (C) hexagon (D) circle (E) rectangle

8. Which of the following sentences fits to the picture?



(A) There are equally many circles as squares.

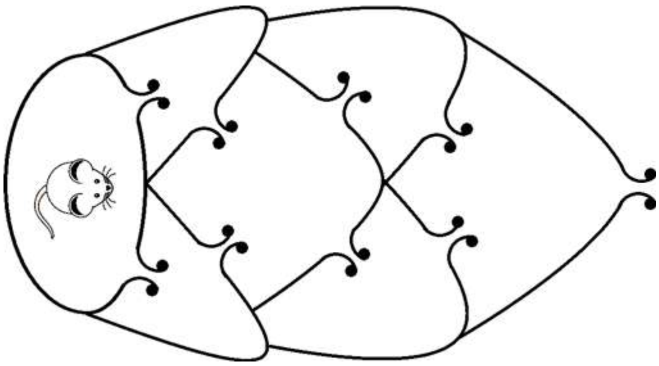
(B) There are fewer circles than triangles.
(C) There are twice as many circles as triangles.
(D) There are more squares than triangles.
(E) There are two more triangles than circles.

- 4 Points Questions -

9. If you add up the digits of the year 2016 (2+0+1+6), the result is 9. What is the next year after 2016, for which the sum of the digits is 9 again?

(A) 2007 (B) 2025 (C) 2034 (D) 2108 (E) 2134

10. A mouse wants to escape a labyrinth. On her way out she is only allowed to go through each opening once at most. How many different ways can the mouse choose to go to get outside?

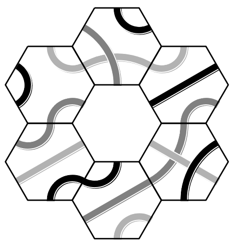


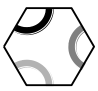
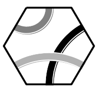
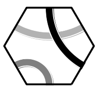
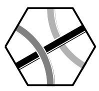
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

11. Peter wants to guess Paul’s password. He already knows the following: The three last characters are digits. There are at most three capital letters in the password. Which of the following passwords could be Paul’s?

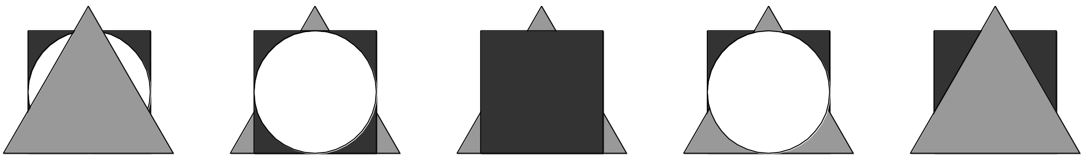
(A) PAUL123 (B) P0a1u2L3 (C) 1234LLuuaapp4321 (D) Paulin3 (E) 123PAUL

12. In the middle of the big diagram one piece is missing and should be replaced. You are only allowed to do this by connecting light-grey lines with light-grey lines, dark-grey lines with dark-grey lines and black lines with black lines. Which piece fits?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Five children each have a black square, a grey triangle and a white circle made up of paper. The children place the three shapes on top of each other as seen in the pictures. In how many pictures was the triangles placed after the square?

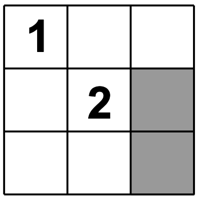


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

14. Konrad dries mushrooms. From 4 kg of fresh mushrooms he gets 1 kg of dried mushrooms. How many kilograms of mushrooms does he have to pick in order to receive 4 kg of dried mushrooms?

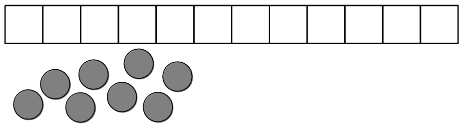
(A) 12 kg (B) 16 kg (C) 20 kg (D) 25 kg (E) 50 kg

15. Chantal has placed numbers in two of the nine cells (see diagram).
She wants to place the numbers 1, 2, 3 in every row and every column exactly once.
How big is the sum of the two numbers in the grey cells?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

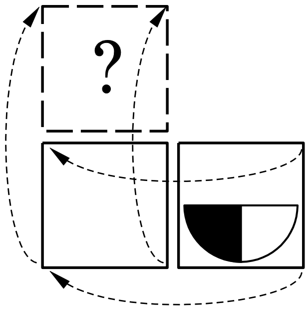
16. Hannes has a game board with 11 spaces. He places one coin each on eight spaces that lie next to each other. He can choose on which space to place his first coin. No matter where Hannes starts some spaces will definitely be filled. How many spaces will definitely be filled?

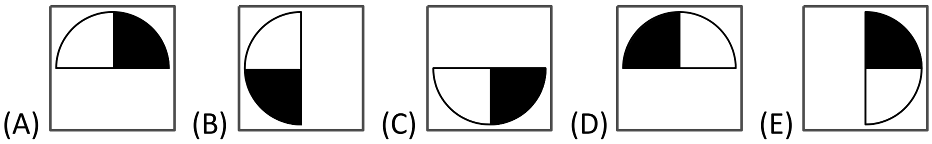


(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

- 5 Points Questions -

17. A card has a diagram printed on one side and the other side is plain white.
The card is first flipped over to the left and then upwards (see diagram).
Which picture do you get this way?





18. Tick, Trick and Track are triplets. Their brother Franz is exactly 3 years older. All four children are having their birthdays today. How old can the four brothers be altogether?

(A) 25 (B) 27 (C) 29 (D) 30 (E) 60

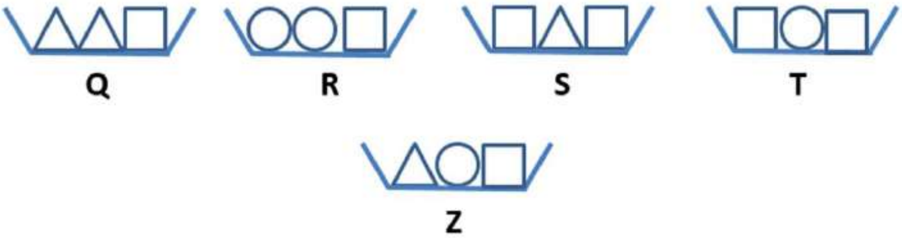
19. In a magic garden there are magic trees. On each tree there are either 6 pears and 3 apples or 8 pears and 4 apples. In total there are 25 apples on the magic trees. How many pears in total are hanging on the magic trees altogether?

(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 56

20. Lisa's dogs have 18 more legs than noses. How many dogs does Lisa have?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

21. Karin wants to place five bowls on a table so that they are ordered according to their weight. She has already placed the bowls Q, R, S and T in order, where Q is lightest and T is heaviest. Where does she have to place bowl Z?

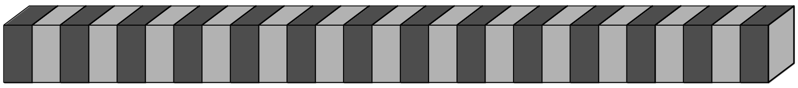


(A) to the left of bowl Q
(B) between bowls Q and R
(C) between bowls R and S
(D) between bowls S and T
(E) to the right of bowl T

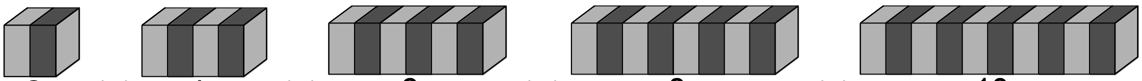
22. Eva writes seven numbers on a piece of paper, one of which is 201. She adds up these seven numbers and gets 2016. Now she substitutes the 201 by the number 102 and again adds up the seven numbers. Which result does she get now?

(A) 1815 (B) 1914 (C) 1917 (D) 2115 (E) 2118

23. Leo has built a stick made up of 27 building blocks.

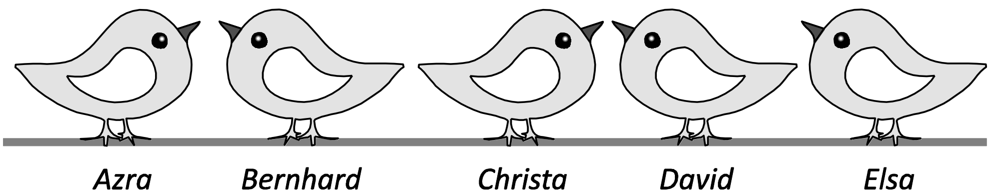


He splits the stick into two pieces in a way so that one part is twice as long as the other. He keeps repeating this again and again. He takes one of the two pieces and splits it up so that one piece is twice as long as the other. Which of the following pieces can never result in this way?



(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

24. Five sparrows on a rope look in one or the other direction (see diagram). Every sparrow whistles as many times as the number of sparrows he can see in front of him. Azra therefore whistles four times. Then one sparrow turns in the opposite direction and again all sparrows whistle according to the same rule. The second time the sparrows whistle more often in total than the first time. Which sparrow has turned around?

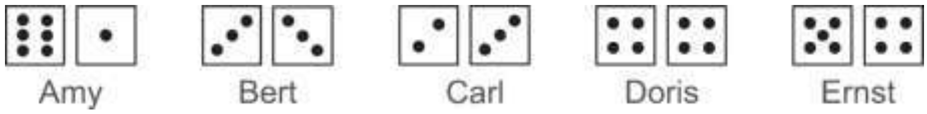


(A) Azra (B) Bernhard (C) Christa (D) David (E) Elsa

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Punkte Beispiele -

1. Amy, Bert, Carl, Doris und Ernst werfen jeweils zwei Würfel. Wer hat insgesamt die größte Augenzahl gewürfelt?



(A) Amy (B) Bert (C) Carl (D) Doris (E) Ernst

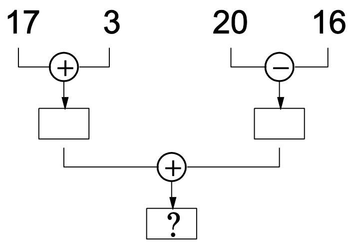
Lösung: E
Wir addieren jeweils die Augenzahlen und erhalten 7, 6, 5, 8 und 9!

2. Ein Känguru ist 7 Wochen und 2 Tage alt. In wie vielen Tagen ist es 8 Wochen alt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: E
5 Tage fehlen noch von der 8. Woche!

3.



Welches Endergebnis erhältst du?

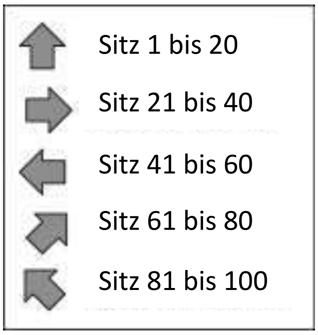
(A) 24 (B) 28 (C) 36 (D) 56 (E) 80

Lösung: A
17 + 3 = 20 und 20 – 16 = 4. 20 + 4 = 24

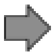
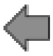
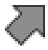
4. Clown Pipo sieht so aus:  Er betrachtet sich im Spiegel. Welches Bild sieht er?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: A
Da der Clown nach rechts schaut, muss sein Spiegelbild nach links schauen. Das ist nur bei (A), (C) und (D) der Fall. Bei (C) fehlt allerdings eine Augenbraue und bei (D) ein Punkt in der Masche!



5. Georg geht mit seinem Vater in den Zirkus. Sie haben die Plätze 71 und 72. Welchem Pfeil müssen sie folgen, um zu ihren Sitzplätzen zu kommen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: D
Die Plätze 71 und 72 sind im Bereich „Sitz 61 bis 80“, daher müssen sie diesem Pfeil folgen.

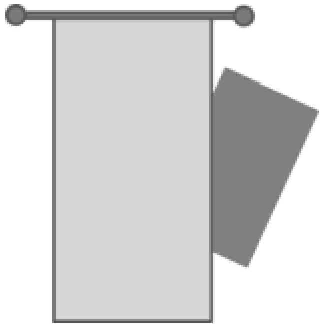
6. Anna hat ihre Äpfel auf sich und 5 Freundinnen gerecht aufgeteilt. Jedes Mädchen hat einen halben Apfel bekommen. Wie viele Äpfel hat Anna ursprünglich gehabt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: B
6 Mädchen haben je einen halben Apfel bekommen; 6 mal ein halber Apfel ergibt 3 Äpfel.

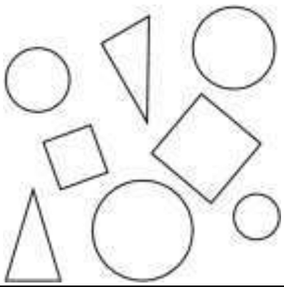
7. Ein Teil eines Rechtecks wird von einem Vorhang verdeckt. Der verdeckte Teil ist ein

(A) Dreieck (B) Quadrat (C) Sechseck (D) Kreis (E) Rechteck



Lösung: A
Wenn man den verdeckten Teil des Rechtecks dazu zeichnet, sieht man, dass das ein Dreieck ist.

8. Welcher der folgenden Sätze passt zum Bild?



(A) Man sieht gleich viele Kreise wie Quadrate.
(B) Man sieht weniger Kreise als Dreiecke.
(C) Man sieht zweimal so viele Kreise wie Dreiecke.
(D) Man sieht mehr Quadrate als Dreiecke.
(E) Man sieht um zwei Dreiecke mehr als Kreise.

Lösung: C
Abzählen ergibt 4 Kreise, 2 Dreiecke, 2 Quadrate. $4 = 2\cdot 2$, also hat man zweimal so viele Kreise wie Dreiecke.

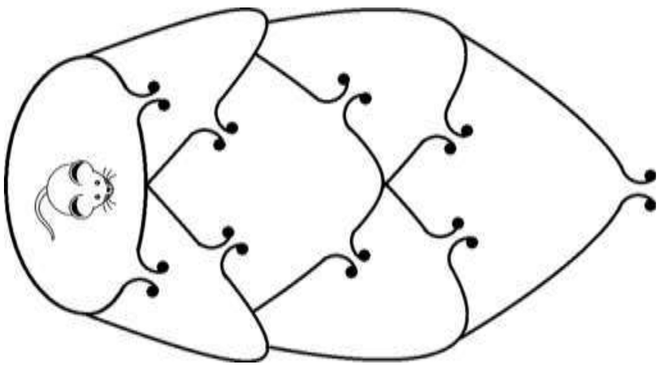
- 4 Punkte Beispiele -

9. Wenn du die Ziffern der Jahreszahl 2016 zusammenzählst (2+0+1+6), erhältst du als Ergebnis 9. Wie lautet die nächste Jahreszahl nach 2016, für die die Summe der Ziffern wieder 9 ergibt?

(A) 2007 (B) 2025 (C) 2034 (D) 2108 (E) 2134

Lösung: B
(D) und (E) scheiden aus, da ihre Ziffernsumme nicht 9 ist. (A), (B), (C) haben zwar die Ziffernsumme 9, aber 2007 ist schon vorbei und 2034 kommt erst nach 2025!

10. Eine Maus möchte aus dem Labyrinth entkommen. Auf ihrem Weg hinaus darf sie höchstens einmal durch jede Öffnung schlüpfen. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann die Maus ins Freie gelangen?



(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

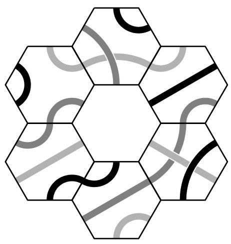
Lösung: B
Alle Wege durchprobieren!

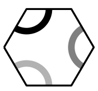
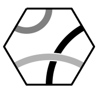
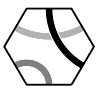
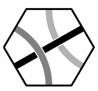
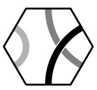
11. Peter möchte Pauls Passwort erraten. Er weiß über das Passwort folgendes: Die letzten drei Stellen sind Ziffern. Es kommen höchstens drei Großbuchstaben im Passwort vor. Welches der folgenden Passwörter könnte das von Paul sein?

(A) PAUL123 (B) P0a1u2L3 (C) 1234LLuuaapp4321 (D) Paulin3 (E) 123PAUL

Lösung: C
Da die letzten drei Stellen Ziffern sind, kommen nur (A) und (C) in Frage. Da höchstens drei Großbuchstaben im Passwort vorkommen, kann die Lösung nicht (A) sein, da (A) vier Großbuchstaben enthält.

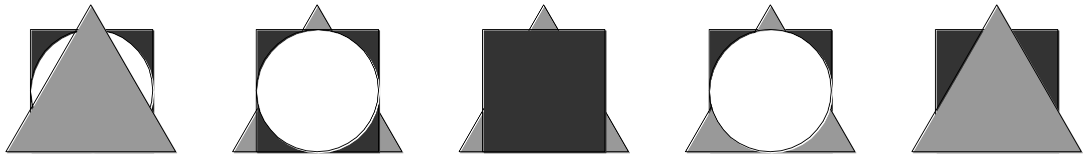
12. In die Mitte der großen Figur soll einer der folgenden Teile eingefügt werden. Dabei dürfen nur hellgraue Linien mit hellgrauen Linien, dunkelgraue Linien mit dunkelgrauen Linien und schwarze Linien mit schwarzen Linien zusammenstoßen. Welcher Teil passt?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: B
Bei genauem Hinschauen bzw. Probieren sieht man, dass nur Teil (B) passt.

13. Fünf Kinder haben jeweils ein schwarzes Quadrat, ein graues Dreieck und einen weißen Kreis aus Papier. Die Kinder legen die Figuren so übereinander, wie es in den Bildern zu sehen ist. In wie vielen Bildern wurde das Dreieck nach dem Quadrat hingelegt?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: D
Bei genauem Hinsehen erkennt man, dass im ersten, vierten und fünften Bild das Dreieck nach dem Quadrat gelegt wurde: Im ersten und fünften Bild wurde das Dreieck überhaupt als letzte Figur gelegt. Beim vierten Bild wurde zuerst das Quadrat, dann das Dreieck und zuletzt der Kreis gelegt.

14. Konrad trocknet Pilze. Aus 4 kg frischen Pilzen bekommt er 1 kg getrocknete Pilze. Wie viel Kilogramm Pilze muss er pflücken, damit er 4 kg getrocknete Pilze erhält?

(A) 12 kg (B) 16 kg (C) 20 kg (D) 25 kg (E) 50 kg

Lösung: B
4 kg getrocknete Pilze sind vier Mal so viel wie 1 kg getrocknete Pilze. Um diese zu erhalten, braucht er daher auch vier Mal so viel frische Pilze, also 4·4 = 16 kg!

15. Chantal hat in zwei der neun Felder Zahlen geschrieben (siehe Zeichnung). Sie möchte, dass in jeder Zeile und jeder Spalte die Zahlen 1, 2, 3 genau einmal vorkommen. Wie groß ist die Summe der beiden Zahlen, die in die grauen Felder gehören?

1		
	2	

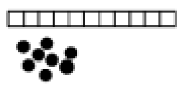
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: C
Das ausgefüllte Feld sieht so aus:

1	3	2
3	2	1
2	1	3

Die Summe der Zahlen in den grauen Feldern ist 4.

16. Hannes hat ein Spielbrett mit 11 Feldern. Er legt auf acht nebeneinander liegende Felder je eine Münze. Dabei kann er mit dem Auflegen der ersten Münze auf verschiedenen Feldern beginnen. Es gibt ein paar Felder, die sicher besetzt sind, egal bei welchem Feld Hannes beginnt. Wie viele Felder sind das?



(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

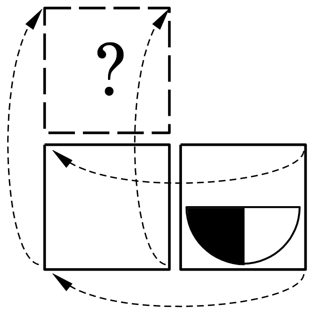
Lösung: D

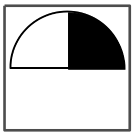
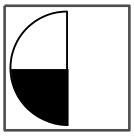
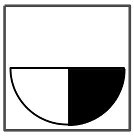
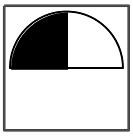
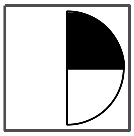
1) Man zeichnet sich das Spielbrett mehrmals auf und legt die Münzen: Man beginnt mit dem Legen der Münzen z.B. beim 1. Feld links, als nächstes beim 2. Feld von links, usw. So erhält man 4 Möglichkeiten, die Münzen zu legen. Ebenso erhält man 4 Möglichkeiten, wenn man mit dem Auflegen rechts beginnt. Insgesamt erhält man dadurch 8 Spielbretter mit Münzen. Vergleicht man nun alle acht Spielbretter, sieht man, dass die fünf Felder in der Mitte immer besetzt sind.

2) Rechnung: 11-8=3 freie Felder; bei 2 Seiten kann man beginnen, daher 3·2=6 und 11-6=5.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Eine Karte ist auf der Vorderseite mit einer Figur bedruckt und auf der Rückseite weiß**.** Die Karte wird zuerst nach links und dann nach oben geklappt (siehe Bild).
Welches Bild erhältst du?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: A

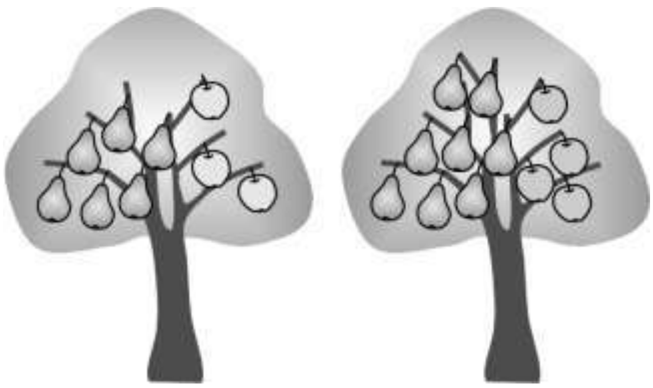
Die Lösung erhält man am besten durch Probieren: Eine Karte nehmen und zwei Mal umklappen wie abgebildet!

18. Tick, Trick und Track sind Drillinge. Ihr Bruder Franz ist genau um 3 Jahre älter. Alle vier Kinder haben heute Geburtstag. Wie alt können alle vier Brüder zusammen sein?

(A) 25 (B) 27 (C) 29 (D) 30 (E) 60

Lösung: B

Wenn man von der angegebenen Lösungszahl 3 subtrahiert, muss das Ergebnis durch 4 teilbar sein.
Das ist nur bei (B) der Fall.
($4x + 3 = 27$)



19. In einem Zaubergarten wachsen Zauberbäume.
Auf einem Baum sind entweder 6 Birnen und 3 Äpfel oder 8 Birnen und 4 Äpfel. Insgesamt gibt es 25 Äpfel auf den Zauberbäumen. Wie viele Birnen hängen insgesamt auf allen Zauberbäumen?

(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 56

Lösung: D

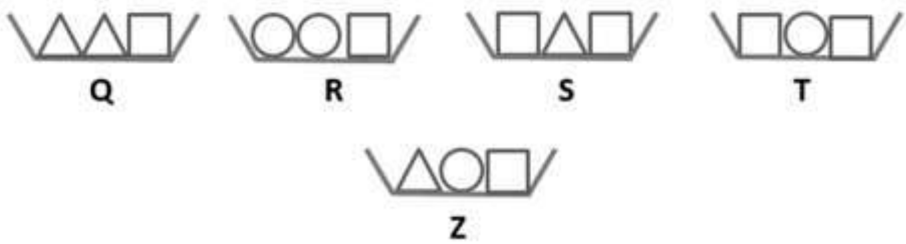
Es gibt auf jedem Baum doppelt so viele Birnen wie Äpfel, also muss es auch insgesamt doppelt so viele Birnen wie Äpfel geben.

20. Lisas Hunde haben um 18 Beine mehr als Nasen. Wie viele Hunde hat Lisa?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

Lösung: C
Die Anzahl der Hunde ist gleich der Anzahl der Nasen; die Anzahl der Beine ist vier Mal die Anzahl der Nasen; die Differenz der Anzahl der Beine und Anzahl der Nasen muss 18 sein ($4x - x = 18$). Das ist nur bei (C) der Fall.

21. Karin möchte fünf Schüsseln so auf einem Tisch aufstellen, dass sie nach ihrem Gewicht geordnet sind. Sie hat die Schüsseln Q, R, S und T bereits geordnet hingestellt, wobei Q am leichtesten und T am schwersten ist. Wo muss sie Schüssel Z hinstellen?



(A) links von Schüssel Q
(B) zwischen die Schüsseln Q und R
(C) zwischen die Schüsseln R und S
(D) zwischen die Schüsseln S und T
(E) rechts von Schüssel T

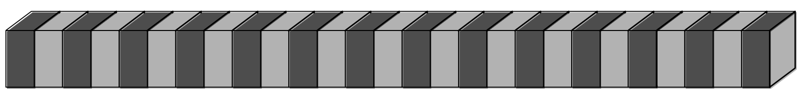
Lösung: B
Durch Vergleichen der Schüsseln Q und R bzw. S und T sieht man, dass der Körper mit dem dreieckigen Querschnitt leichter als die Kugel ist. Daher sind zwei „Dreiecke" von Schüssel Q leichter als ein „Dreieck" und eine Kugel von Schüssel Z und diese wiederum leichter als zwei Kugeln von Schüssel R.

22. Eva schreibt sieben Zahlen auf ein Blatt, eine davon ist 201. Sie addiert diese sieben Zahlen und erhält 2016. Nun ersetzt sie 201 durch die Zahl 102 und addiert wieder die sieben Zahlen. Welches Ergebnis erhält sie jetzt?

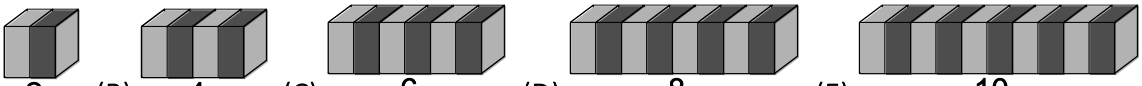
(A) 1815 (B) 1914 (C) 1917 (D) 2115 (E) 2118

Lösung: C
$201 - 102 = 99$ und $2016 - 99 = 1917$ oder $2016 - 201 = 1815$ und $1815 + 102 = 1917$

23. Leo hat mit 27 Bausteinen einen Stab zusammengebaut.



Er teilt den Stab so in zwei Teile, dass der eine Teil doppelt so lang wie der andere ist. Das wiederholt er nun immer wieder: Er nimmt einen der beiden Teile und zerlegt ihn so, dass ein Teil doppelt so lang wie der andere ist. Welches der folgenden Teilstücke kann auf diese Weise nie entstehen?

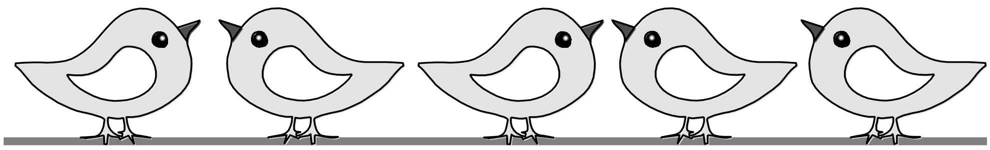


(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

Lösung: E

Die erste Teilung ergibt zwei Stäbe mit 9 bzw. 18 Bausteinen. Die zweite Teilung ergibt Stäbe mit 3 und 6 bzw. 6 und 12 Bausteinen. Die dritte Teilung ergibt Stäbe mit 1 und 2, 2 und 4, bzw. 4 und 8 Bausteinen. Nun haben bereits alle Stäbe weniger als 10 Bausteine; das Stück mit 10 Bausteinen hat man bei den Teilungen nie bekommen.

24. Fünf Spatzen auf einem Seil blicken in die eine oder andere Richtung (siehe Bild). Jeder Spatz pfeift so oft, wie er Spatzen vor sich sitzen sieht. Azra pfeift also vier Mal. Dann dreht sich ein Spatz in die entgegengesetzte Richtung und wieder pfeifen alle Spatzen nach derselben Vorschrift. Beim zweiten Mal pfeifen die Spatzen insgesamt öfter als beim ersten Mal. Welcher Spatz hat sich umgedreht?



Azra *Bernhard* *Christa* *David* *Elsa*

(A) Azra (B) Bernhard (C) Christa (D) David (E) Elsa

Lösung: B

Damit die Summe der Pfiffe größer wird, muss ein Spatz nach dem Richtungswechsel mehr Spatzen sehen als vorher; nur Bernhard sieht mehr Spatzen wenn er in die entgegengesetzte Richtung schaut!

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5 - 6

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 17. 03. 2016

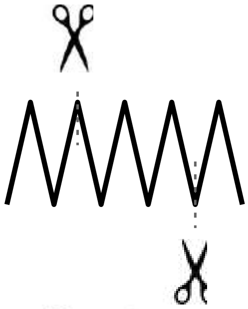
- 3 Punkte Beispiele -

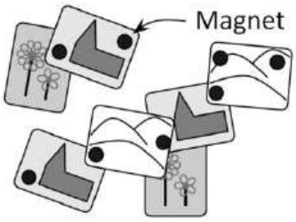
1. Welches der folgenden Verkehrsschilder hat die meisten Symmetrieachsen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Mike schneidet eine Pizza in vier gleich große Teile. Danach schneidet er jeden Teil in drei gleich große Teile. In wie viele gleich große Stücke hat Mike die Pizza geteilt?
(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 8 (E) 12

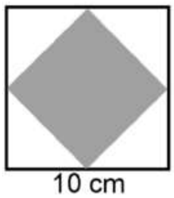
3. Ein 10 cm langes Drahtstück wird so geknickt, dass jedes Teilstück gleich lang ist (siehe Abbildung). Der Draht wird an den beiden markierten Stellen durchgeschnitten. Wie lang sind die drei entstehenden Teile?
(A) 2 cm, 3 cm, 5 cm (B) 2 cm, 2 cm, 6 cm (C) 1 cm, 4 cm, 5 cm
(D) 1 cm, 3 cm, 6 cm (E) 3 cm, 3 cm, 4 cm





4. Lisa hat auf ihrer Kühlschranktür 7 Postkarten mit 8 starken Magneten (schwarze Punkte) befestigt.
Wie viele der Magnete kann sie höchstens entfernen, ohne dass eine Postkarte auf den Boden fällt?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

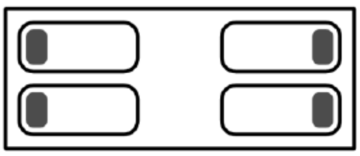
5. Kathi zeichnet ein Quadrat mit der Seitenlänge 10 cm. Danach verbindet sie die Mittelpunkte der Seiten zu einem kleineren Quadrat.
Welchen Flächeninhalt hat das kleine Quadrat?
(A) 10 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 25 cm^2 (D) 40 cm^2 (E) 50 cm^2



6. Maria möchte, dass rechts von jedem Teller ein Messer liegt und links eine Gabel. Um die richtige Ordnung herzustellen, vertauscht Maria immer eine Gabel mit einem Messer.
Wie viele solche Tauschaktionen sind mindestens notwendig?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

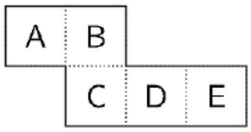
7. Ein Hundertfüßler besitzt 25 Paar Schuhe. Er benötigt für jeden seiner 100 Füße einen Schuh.
Wie viele weitere einzelne Schuhe muss der Hundertfüßler noch kaufen?
(A) 15 (B) 20 (C) 35 (D) 50 (E) 75

8. Vier Mädchen schlafen in einem Zimmer mit den Köpfen auf ihren grauen Pölstern. Bea und Pia schlafen auf der linken Seite des Zimmers mit den Gesichtern zueinander, Mary und Karen auf der rechten Seite mit den Rücken zueinander.
Wie viele Mädchen schlafen mit ihrem rechten Ohr auf dem Polster?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4



- 4 Punkte Beispiele -

9. Das gegebene Netz wird entlang der punktierten Linien zu einer offenen Schachtel gefaltet. Die Schachtel wird so auf den Tisch gestellt, dass sie oben offen ist.
Mit welcher Fläche liegt sie auf dem Tisch auf?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

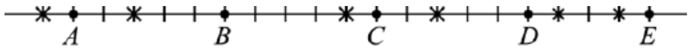
10. Robert hat zwei gleich große Quadrate aus Papier. Er klebt sie zusammen.
Welche der folgenden Figuren kann er nicht herstellen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Mona, Asma und Nadja arbeiten im selben Kindergarten. An jedem Tag von Montag bis Freitag arbeiten genau zwei von ihnen. Mona arbeitet drei Mal, Asma arbeitet vier Mal pro Woche.
Wie oft arbeitet Nadja pro Woche?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

12. Fünf Eichhörnchen A, B, C, D und E sitzen auf den markierten Punkten. Sie sammeln 6 Nüsse ein, die durch Kreuze gekennzeichnet sind. Die Eichhörnchen beginnen zur gleichen Zeit gleich schnell zur nächstgelegenen Nuss zu laufen um sie aufzuheben. Sobald ein Eichhörnchen die erste Nuss aufgesammelt hat läuft es sofort weiter um eine weitere Nuss zu bekommen.



Welches Eichhörnchen kann sich eine zweite Nuss holen?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

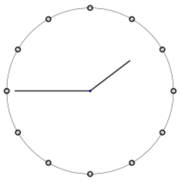
13. In einer Klasse befinden sich 30 Mädchen und Buben. Sie sitzen an Zweiertischen. Jeder Bub teilt den Tisch mit einem Mädchen. Genau die Hälfte der Mädchen teilt den Tisch mit einem Buben.
Wie viele Buben gibt es in der Klasse?

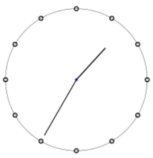
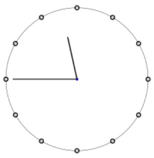
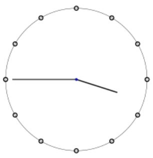
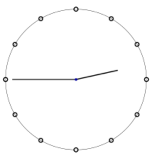
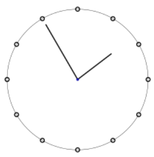
(A) 25 (B) 20 (C) 15 (D) 10 (E) 5

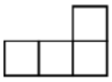
14. Hansi schreibt die Zahl 2581953764 auf einen Papierstreifen. Er schneidet den Streifen zweimal zwischen zwei Ziffern durch und erhält drei Zahlen, die er addiert.
Wie groß ist die kleinste Summe, die er so erhalten kann?

(A) 2675 (B) 2975 (C) 2978 (D) 4217 (E) 4298

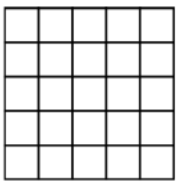
15. Bart sitzt beim Friseur. Im Spiegel sieht er eine Uhr wie in der Zeichnung rechts:
Wie sah das Spiegelbild der Uhr 10 Minuten früher aus?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

16. Wie viele solche  Teile können maximal aus einem 5 x 5 Quadrat ausgeschnitten werden?

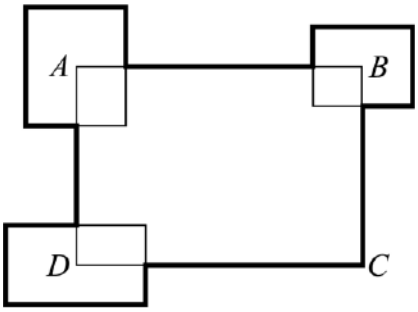
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



- 5 Punkte Beispiele -

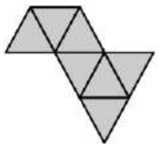
17. Tim, Tom und Jim sind Drillinge. Ihr Bruder Carl ist genau um 3 Jahre jünger. Alle vier haben heute Geburtstag. Wie alt können alle vier Brüder zusammen sein?
(A) 53 (B) 54 (C) 56 (D) 59 (E) 60

18. Richard schreibt alle Zahlen auf, die folgende Eigenschaften haben:
Die erste Ziffer ist 1. Jede der folgenden Ziffern ist zumindest genau so groß wie die vorige.
Die Summe der Ziffern beträgt 5.
Wie viele solche Zahlen kann Richard aufschreiben?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

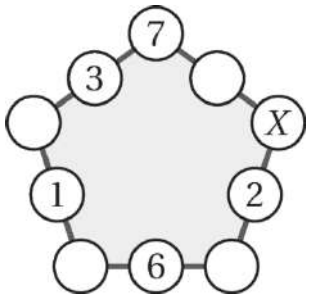


19. Der Umfang des Rechtecks ABCD beträgt 30 cm. Drei weitere Rechtecke werden so hinzugefügt, dass ihre Mittelpunkte in den Ecken A, B und D liegen und ihre Seiten parallel zu Seiten des Rechtecks ABCD sind (siehe Bild). Die Summe der Umfänge dieser drei Rechtecke beträgt 20 cm. Welche Länge besitzt die Umrandung der Figur (dicke schwarze Linie)?
(A) 50 cm (B) 45 cm (C) 40 cm (D) 35 cm (E) Das kann nicht berechnet werden.

20. Luigi hat für sein kleines Restaurant einige quadratische Tische und einige Stühle. Stellt er die Tische einzeln mit je 4 Stühlen, dann fehlen ihm 6 Stühle. Schiebt er je zwei Tische zu einem größeren Tisch mit 6 Stühlen zusammen, so bleiben ihm 4 Stühle übrig.
Wie viele Tische hat Luigi?
(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16



21. Clara baut aus gleichen kleinen Dreiecken ein großes Dreieck.
Sie hat schon einige Dreiecke zusammengelegt (siehe Abbildung).
Wie viele kleine Dreiecke muss sie mindestens dazulegen?
(A) 5 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 19



22. Kirsten hat in 5 der 10 Kreise Zahlen eingetragen. Sie will in die restlichen Kreise weitere Zahlen so eintragen, dass die Summen der drei Zahlen entlang jeder Seite des Fünfecks gleich groß sind.
Welche Zahl muss sie in den Kreis mit dem X schreiben?
(A) 7 (B) 8 (C) 11 (D) 13 (E) 15

23. Die Symbole ○, □, und ◇ stellen 3 verschiedene Ziffern dar.
Werden die Ziffern der Zahl ○□○ addiert, entsteht die zweistellige Zahl □◇.
Werden die Ziffern der zweistelligen Zahl □◇ addiert, erhält man die einstellige Zahl □.
Welche Ziffer wird durch ○ dargestellt?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

24. Aus sechs verschiedenen Ziffern werden zwei dreistellige Zahlen gebildet. Die erste Ziffer der zweiten Zahl ist doppelt so groß wie die letzte Ziffer der ersten Zahl. (Beachte: 0 ist auch eine Ziffer, kann aber nicht an erster Stelle einer Zahl stehen!)
Wie groß ist die kleinstmögliche Summe der beiden Zahlen?
(A) 301 (B) 535 (C) 537 (D) 546 (E) 552

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Level: Benjamin, Grade: 5 and 6

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
Each correct answer to questions 1. – 8.: 3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.: 4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Level Benjamin (Grade 5 and 6)
Österreich – 17. 03. 2016

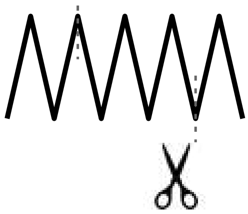
- 3 Points Questions -

1. Which of the following road signs has the most axes of symmetry?


(A) (B) (C) (D) (E)

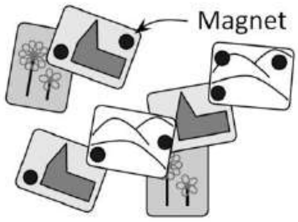
2. Mike cuts a pizza into four equally big pieces. Then he cuts each piece into three equally big pieces. Into how many equally big pieces did Mike cut the pizza?
(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 8 (E) 12

3. A 10 cm long piece if wire is folded so that every part is equally long (see diagram). The wire is then cut through in the two positions marked. How long are the three pieces created in this way?



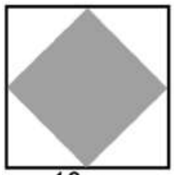
(A) 2 cm, 3 cm, 5 cm (B) 2 cm, 2 cm, 6 cm (C) 1 cm, 4 cm, 5 cm
(D) 1 cm, 3 cm, 6 cm (E) 3 cm, 3 cm, 4 cm

4. Lisa has mounted 7 postcards on her fridge door using 8 strong magnets (black dots). What is the maximum amount of magnets she can remove without any postcards falling on the floor?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

5. Kathi draws a square with side length 10 cm. Then she joins the midpoints of each side to form a smaller square.
What is the area of the smaller square?



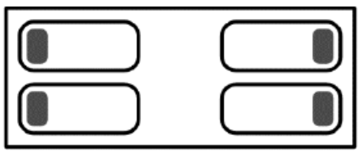
(A) 10 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 25 cm^2 (D) 40 cm^2 (E) 50 cm^2

6. Maria wants there to be a knife to the right of every plate and a fork to the left of it. In order to get the right order she always swaps one fork with one knife.
What is the minimum number of swaps necessary?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

7. A centipede owns 25 pairs of shoes. He needs one shoe for every one of his 100 feet.
How many more single shoes does the centipede still need to buy?
(A) 15 (B) 20 (C) 35 (D) 50 (E) 75

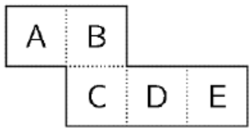
8. Four girls are sleeping in a room with their heads on the grey pillows.
Bea and Pia are sleeping on the left hand side of the room with their faces towards each other; Mary and Karen are on the right hand side with their backs towards each other.
How many girls sleep with their right ear on the pillow?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

- 4 Points Questions -

9. The given net is folded along the dotted lines to form an open box. The box is placed on the table so that the opening is on the top.
Which side is facing the table?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

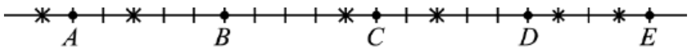
10. Robert has two equally big squares made of paper. He glues them together.
Which of the following shapes can he not make?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Mona, Asma and Nadja work in the same nursery. On each day from Monday to Friday exactly two of them are working. Mona works three times and Asma works four times per week.
How many times does Nadja work per week?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

12. Five squirrels A, B, C, D and E are sitting on the points marked. The crosses indicate 6 nuts that they are collecting. The squirrels start to run at the same time with the same speed to the nearest nut in order to pick it up. As soon as a squirrel has picked up the first nut it immediately continues to run in order to get another nut.

Which squirrel gets a second nut?

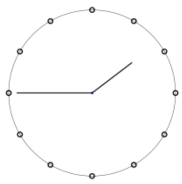


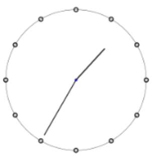
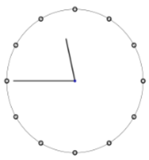
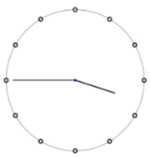
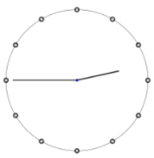
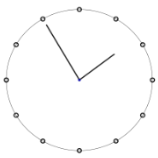
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

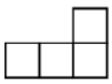
13. There are 30 girls and boys in a class. Always two students share a desk. Every boy shares a desk with a girl. Exactly half the girls share a desk with a boy.
How many boys are in the class?
(A) 25 (B) 20 (C) 15 (D) 10 (E) 5

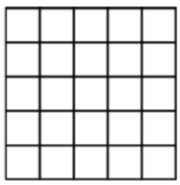
14. Hansi writes the number 2581953764 on a strip of paper. Twice he cuts through the strip of paper between two digits and obtains three numbers which he adds.
How big is the smallest sum he can obtain in this way?
(A) 2675 (B) 2975 (C) 2978 (D) 4217 (E) 4298

15. Bart sits at the hairdressers. In the mirror he sees a clock as shown in the diagram:
What was the mirror image of the clock 10 minutes earlier?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

16. What is the maximum number of such pieces  that can be cut from a 5 x 5 square?



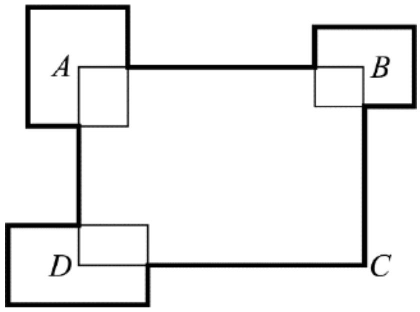
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

- 5 Points Questions -

17. Tim, Tom and Jim are triplets. Their brother Carl is exactly 3 years younger. All four are having their birthdays today.
How old can the four brothers be altogether?
(A) 53 (B) 54 (C) 56 (D) 59 (E) 60

18. Richard writes down all numbers that have the following properties:
The first digit is 1. Each of the following digits is at least as big as the previous one.
The sum of the digits is 5.
How many such numbers can Richard write down?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

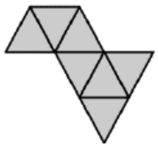
19. The perimeter of the rectangle ABCD is 30 cm. Three more rectangles are added so that their centres are in the corners A, B and D and their sides are parallel to the rectangle (see diagram). The sum of the perimeters of these three rectangles is 20 cm.
What is the length of the boarder of the shape (thick black line)?



(A) 50 cm (B) 45 cm (C) 40 cm (D) 35 cm (E) This cannot be calculated.

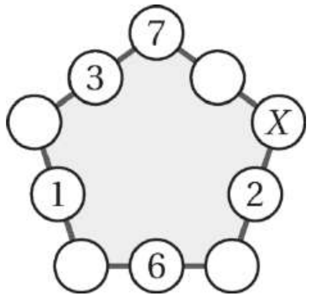
20. Luigi owns a few square tables and some chairs for his little restaurant. If he sets out his tables individually with 4 chairs each, then he is 6 chairs short. If he always puts two tables together to create a bigger table with 6 chairs, then he has 4 chairs left over.
How many tables does Luigi have?
(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

21. Clara forms one big triangle made up of identical little triangles.
She has already put some triangles together (see diagram).
What is the minimum number of little triangles she has to add?



(A) 5 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 19

22. Kirsten has written numbers into 5 of the 10 circles. She wants to write numbers into the remaining circles so that the sum of the three numbers along every side of the pentagon is always the same.
Which number does she have to write into the circle marked *X*?



(A) 7 (B) 8 (C) 11 (D) 13 (E) 15

23. The symbols ○, □ and ◇ represent three different digits.
If the digits of the number ○□○ are added, you receive the two-digit number □◇.
If the digits of the two-digit number □◇ are added, you receive the single-digit number □.
Which digit is represented by ○?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

24. Two three-digit numbers are made up of six different digits. The first digit of the second number is twice as big as the last digit of the first number. (Note: 0 is also a digit but cannot be the first digit of a number!)
How big is the smallest possible sum of the two numbers?
(A) 301 (B) 535 (C) 537 (D) 546 (E) 552

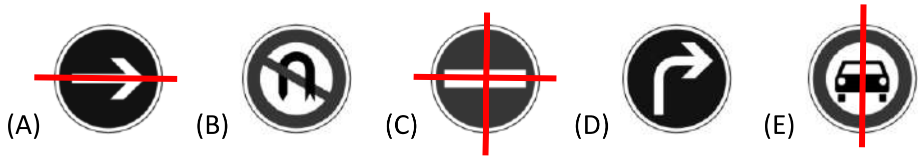
Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2016

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
C	E	A	C	E	B	D	C	B	A	C	C	D	B	E	D	A	B	C	B	B	D	E	C

– 3 Punkte Beispiele –

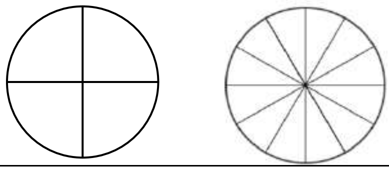
1.



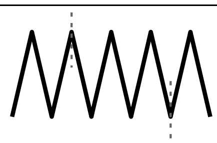
(C)

2. Mike hat die Pizza in 12 gleich große Stücke geteilt: $4 \cdot 3 = \underline{\underline{12}}$

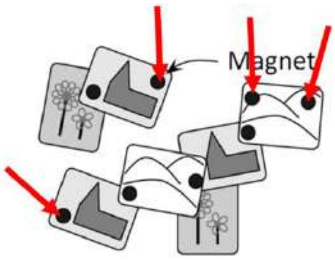
(E) 12



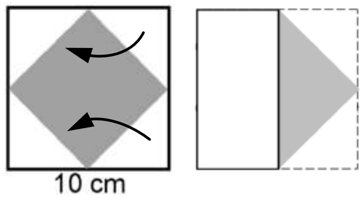
3. Der 10 cm lange Draht wird 9-mal geknickt. Es entstehen 10 Teile.
Daher muss jeder Teil 1 cm lange sein. (10 : 10 = 1 cm)
Somit entstehen Drahtstücke der Längen 3 cm, 5 cm und 2 cm.
(A) 2 cm, 3 cm, 5 cm



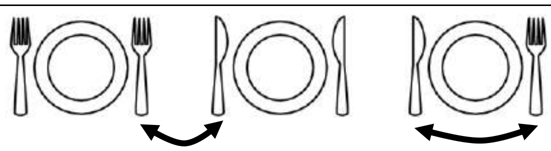
4. Lisa kann höchstens 4 der Magnete entfernen,
ohne dass eine Postkarte auf den Boden fällt.
(C) 4



5. Das große Quadrat hat den Flächeninhalt 100 cm² (= $10 \cdot 10$).
Die vier weißen Ecken zusammen füllen die halbe Fläche des großen Quadrates aus.
Daher hat das graue Quadrat den Flächeninhalt 50 cm² (= 100 : 2)
(E) 50 cm²

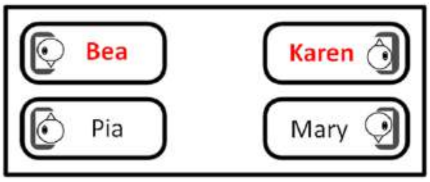


6. Maria vertauscht immer eine Gabel mit einem Messer gleichzeitig.
Es sind mindestens zwei Tauschaktionen notwendig.
(B) 2



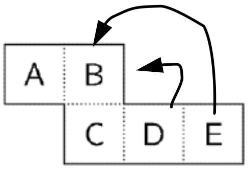
7. 25 · 2 = 50   100 – 50 = 50
Er muss noch 50 weitere einzelne Schuhe kaufen.
(D) 50

8. Zwei Mädchen schlafen mit ihrem rechten Ohr auf dem Polster.
Die Mädchen mit den dick geschriebenen Namen schlafen auf dem rechten Ohr. (s. Abbildung)
(C) 2



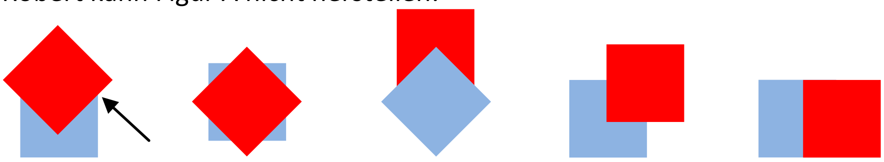
4 Punkte Beispiele

9. Die Schachtel liegt mit der Fläche B auf dem Tisch auf?



(B) B

10. Robert kann Figur A nicht herstellen:



(A) 

11. An jedem Tag arbeiten **genau zwei** Kindergartenpädagoginnen. Nadja arbeitet drei Mal pro Woche.

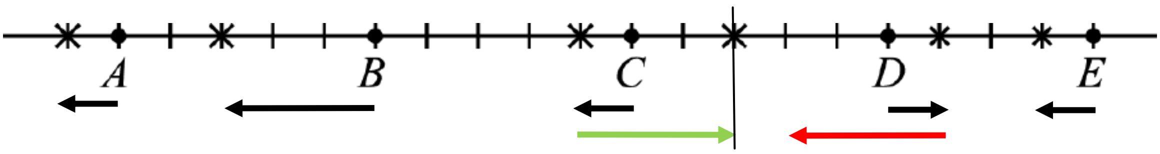
Es sind 5 Tage und jeweils 2 Personen, also sind insgesamt 10 Anwesenheitstage.
Davon arbeiten Mona und Asma 3 und 4 Mal.   5 · 2 = 10   10 – 3 – 4 = 3

oder:

Mona 3 x					
Asma 4 x					
Nadja					

(C) 3

12.



Eichhörnchen C kann sich eine zweite Nuss holen.
(C) C

13. Neben jedem Bub sitzt ein Mädchen. Neben **genau der Hälfte der Mädchen** sitzt ein Bub.
Daher muss es doppelt so viele Mädchen als Buben geben. (1 Teil Buben, 2 Teile Mädchen: 1 + 2 = 3)
30 : 3 = 10
(D) 10

14. Hansi will die kleinste Summe, daher muss er möglichst „kurze“ Zahlen erzeugen.
Seine Zahl besteht aus 10 Ziffern. Er muss zwei 3-stellige und eine 4-stellige Zahl erzeugen.
1 Ist die niedrigste Ziffer, sie muss an der Tausenderstelle stehen.

258 1953 764

258
1953
764
2975

(B) 2975

15. Im Spiegel sieht er eine Uhr wie auf dem ersten Bild. Diese zeigt in normaler Ansicht die Zeit wie in Bild zwei.
10 Minuten früher sah die Uhr so aus wie im dritten Bild.

(E) 

16. Das Quadrat hat 5 · 5 = 25 Teile. Man passt einen Teil mit 4 Stücken ein.
Das führt zu folgender Überlegung: 25 : 4 = 6 1R
Wir versuchen also 6 Teile einzupassen. Das gelingt!

(D) 6

5 Punkte Beispiele

17. Tim = x Tim, Tom und Jim sind zusammen 3x Bruder Carl ist genau um 3 Jahre jünger: x – 3.
zusammen sind sie als so alt: 3x + x – 3 = 4x – 3 = ?
4x = ? + 3
Wir suchen also eine Zahl, die sich ohne Rest durch 4 teilen lässt, wenn wir 3 dazuzählen:
(A) 53 + 3 = 56 ja (B) 54 + 3 = 57 nein (C) 56 + 3 = 59 nein
(D) 59 + 3 = 62 nein (E) 60 + 3 = 63 nein

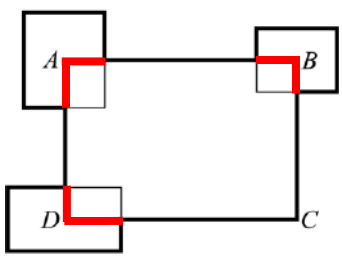
(A) 53

18. **11111**
1112 **122**
113
14 Richard kann 5 solche Zahlen aufschreiben.

(B) 5

19. 20 : 4 = 5
Nur ¾ der Umfänge der drei kleinen Rechtecke sind Teil der großen Figur.
¼ der Umfänge dieser drei Rechtecke entsprechen den „**Ecken**“ des großen Rechtecks.
Insgesamt kommen also nur $^2/_4$ der Umfänge dieser drei Rechtecke: 2 · 5 = 10.

Der Umfang des Rechtecks ABCD beträgt 30 cm. 30 + 10 = 40.



(C) 40 cm

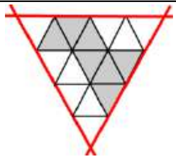
20. $4x - 6 = 3x + 4$ **<u>x = 10</u>** Luigi hat 10 Tische.

oder:

	8	10	12	14	16
Tische einzeln, je 4 Stühle	$4 \cdot 8 - 6 = 38$	$4 \cdot 10 - 6 = 34$	$4 \cdot 12 - 6 = 42$	$4 \cdot 14 - 6 = 50$	$4 \cdot 16 - 6 = 58$
zwei Tische, je 6 Stühle: 6 : 2 = 3	$3 \cdot 8 + 4 = 28$	$3 \cdot 10 + 4 = 34$	$3 \cdot 12 + 4 = 40$	$3 \cdot 14 + 4 = 46$	$3 \cdot 16 + 4 = 52$

(B) 10

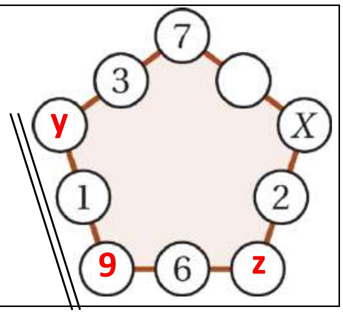
21. Die roten Linien zeigen die Außenkanten des gesuchten großen Dreiecks.
Es müssen also noch 4 + 5 = 9 Dreiecke hinzugefügt werden.



(B) 9

22. Zuerst setzen wir in einen leeren Kreis die Unbekannte y.
Wir wissen, dass die Summe der Zahlen entlang dieser Seite y + 7 + 3 = y + 10 ist.
Daher folgt für die nächste (<u>linke Seite</u>): y + **10** = y + **1 + ?** ? = 9

Für die untere Kante gilt also: z + 9 + 6 = z + 15
Für die rechte Kante gilt somit: z + 2 + x
Da die Ziffernsumme jeder Seite gleich sein muss, muss 15 = 2 + x gelten.
x ist also 13.



(D) 13

23. ○ + □ + ○ = □◇
□ + ◇ = □ man sieht, dass ◇ = 0 ist.

Es gilt also: ○ + □ + ○ = □0

2 · ○ = □0 **–** □

Stellt man die Zahl □0 mittels der Summe der Zehner- und Einerstelle dar 10 · □ + 1 · 0 = 10 · □, folgt

2 · ○ = 10 · □ **–** □

2 · ○ = 9 · □

Man sieht: 2 · ○ muss durch 9 teilbar sein! Das gilt nur für 2 · 9 = 18

(E) 9

24. Um die kleinstmögliche Summe der beiden Zahlen zu erhalten, müssen wir die Ziffern möglichst niedrig wählen: 0, 1, 2, 3, 4, 5
0 darf nicht an der Hunderterstelle stehen, da die Zahl sonst zweistellig wäre.
Die Hunderter- und die Zehnerstellen müssen möglichst niedrig gewählt werden! Die erste Ziffer der zweiten Zahl ist doppelt so groß wie die letzte Ziffer der ersten Zahl. Daher wählen wir hierfür die 4.
(Würden wir die 2 wählen, fiele die 1 für die Hunderterstelle der ersten Zahl weg: <u>3</u> 0 1 + 2 4 5 = 546)
Es gilt also: . . 2 und 4 . .
Nun setzen wir noch die restlichen Ziffern ein:
1 . 2 und 4 . .
1 0 2 und 4 3 5
102 + 435 = <u>537</u>

(C) 537

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7 – 8

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

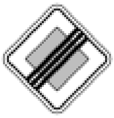
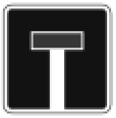
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

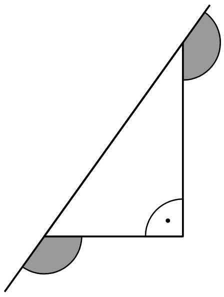
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 17. 03. 2016

– 3 Punkte Beispiele –

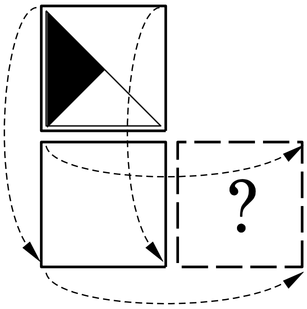
1. Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 3,17 und 20,16?
(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

2. Welches der Verkehrsschilder hat die meisten Symmetrieachsen?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

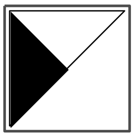
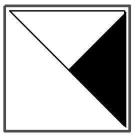
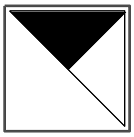
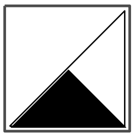
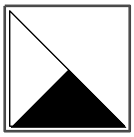


3. Wie lautet die Summe der beiden markierten Winkel?
(A) 150° (B) 180° (C) 270° (D) 320° (E) 360°

4. Jim sollte 26 zu einer bestimmten Zahl addieren. Stattdessen subtrahierte er 26 und erhielt -14.
Welches Ergebnis hätte er erhalten, wenn er 26 addiert hätte?
(A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 38 (E) 42

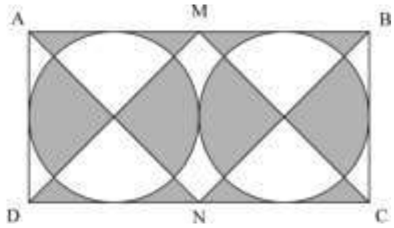


5. Eine Karte ist auf einer Seite mit einer Figur bedruckt und auf der Rückseite weiß.
Die Karte wird zuerst nach unten und dann nach rechts geklappt (siehe Bild).
Welches Bild erhält man?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

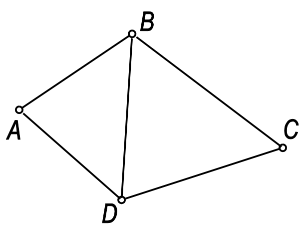
6. Von Annas Schule fahren 45 Lehrer, das sind 60 % aller Lehrer, mit dem Rad zur Schule. Nur 12 % der Lehrer fahren mit dem Auto zur Schule. Wie viele Lehrer von Annas Schule fahren mit dem Auto zur Schule?
(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 10 (E) 12

7. Renate legt 555 kleine Haufen zu je 9 Steinen auf einen einzigen großen Haufen. Danach teilt sie diesen in Gruppen zu je 5 Steinen auf. Wie viele solche Gruppen erhält Renate?
(A) 999 (B) 900 (C) 555 (D) 111 (E) 45



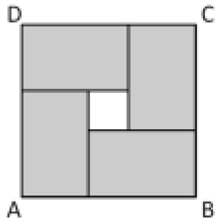
8. Im Rechteck ABCD ist die Seite AD 10 cm lang. M und N sind die Mittelpunkte der Seiten AB und CD. Wie groß ist die graue Fläche?
(A) 50 cm^2 (B) 80 cm^2 (C) 100 cm^2 (D) 120 cm^2 (E) 150 cm^2

9. Alex hat ein 1 m langes und ein 2 m langes Seil. Er zerschneidet beide Seile so, dass alle Stücke gleich lang sind. Welche der folgenden Stückzahlen kann er dadurch nicht erhalten?
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 15



10. Bei einem Radrennen mit Start in D und Ziel in B wird jede der in der Zeichnung dargestellten Verbindungsstraßen (zwischen den Städten A, B, C und D) genau einmal befahren. Wie viele mögliche Routen gibt es für das Rennen?
(A) 10 (B) 8 (C) 6 (D) 4 (E) 2

– 4 Punkte Beispiele –



11. Innerhalb des Quadrats ABCD liegen vier identische Rechtecke (siehe Bild).
Der Umfang jedes Rechtecks beträgt 16 cm. Welchen Umfang hat dieses Quadrat?
(A) 16 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 32 cm

12. Petra hat 49 blaue und eine rote Perle. Wie viele der blauen Perlen muss Petra entfernen, damit 90 % der Perlen blau sind?
(A) 4 (B) 10 (C) 29 (D) 39 (E) 40

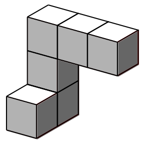
13. Welche der folgenden Bruchzahlen liegt am nächsten zu $\frac{1}{2}$?
(A) $\frac{25}{79}$ (B) $\frac{27}{59}$ (C) $\frac{29}{57}$ (D) $\frac{52}{79}$ (E) $\frac{57}{92}$

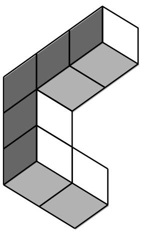
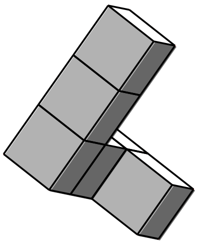
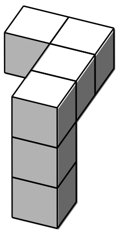
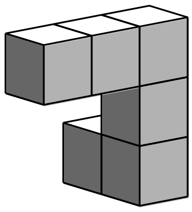
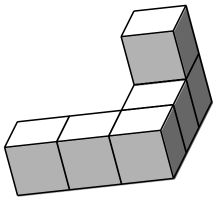
14. Igor schreibt alle Ergebnisse der Viertel- und Halbfinalspiele und des Finales eines Tennis-Wettbewerbs auf. Die Ergebnisse sind in beliebiger Reihenfolge angeführt.

Bert besiegte Anton, Carl besiegte Damien, Glen besiegte Henry, Glen besiegte Carl,
Carl besiegte Bert, Edon besiegte Fred, Glen besiegte Edon.

Wer bestritt das Finale?
(A) Glen und Henry (B) Glen und Carl (C) Carl und Bert (D) Glen und Edon (E) Carl und Damien

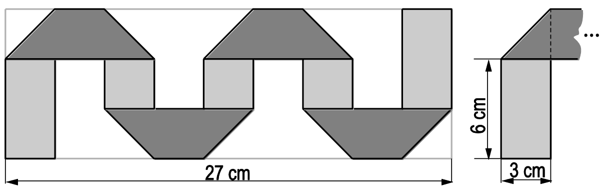
15. Anne hat einige Würfel zusammengeklebt und erhält den rechts zu sehenden Körper. Sie dreht ihn, um ihn von verschiedenen Seiten zu betrachten. Welche Ansicht kann sie nicht erhalten?




(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

16. Tim, Tom und Jim sind Drillinge. Ihre Zwillingsbrüder John und James sind 3 Jahre jünger. Alle fünf feiern heute ihren Geburtstag. Welche der folgenden Zahlen könnte die Summe der Alter der fünf Brüder ergeben?
(A) 92 (B) 89 (C) 76 (D) 53 (E) 36

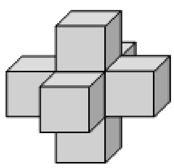
17. Ein 3 cm breiter Papierstreifen ist auf einer Seite dunkel, auf der anderen hell. Der gefaltete Papierstreifen liegt exakt innerhalb eines Rechtecks mit der Länge 27 cm und der Breite 9 cm (siehe Zeichnung). Wie lang ist der Papierstreifen?



(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 54 cm (D) 57 cm (E) 81 cm

18. Die beiden Kängurus Jump und Hop springen gleichzeitig von der gleichen Startlinie in die gleiche Richtung. Pro Sekunde springt jeder der beiden genau einmal. Jump springt immer 6 m weit. Hop springt zuerst 1 m, dann 2 m, dann 3 m etc. Nach wie vielen Sprüngen wird Jump von Hop eingeholt?
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

19. Sieben identische Spielwürfel (mit jeweils 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten auf den Flächen) werden zum rechts skizzierten Körper zusammengeklebt. Auf zusammengeklebten Flächen sind jeweils gleich viele Punkte. Wie viele Punkte kann man auf der Oberfläche des Körpers sehen?

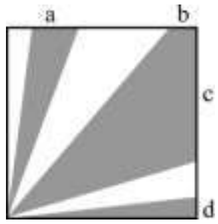


(A) 24 (B) 90 (C) 95 (D) 105 (E) 126

20. In einer Klasse befinden sich insgesamt 20 Mädchen und Buben. Sie sitzen an Zweiertischen so, dass ein Drittel der Buben mit einem Mädchen den Tisch teilt, und die Hälfte der Mädchen mit einem Buben den Tisch teilt. Wie viele Buben gibt es in der Klasse?
(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

– 5 Punkte Beispiele –

21. In einem Quadrat mit dem Flächeninhalt 36 befinden sich, wie in der Abbildung zu sehen, graue Flächen. Die Summe der Flächeninhalte aller grauen Flächen beträgt 27.
Wie lang sind die Strecken a, b, c und d zusammen?



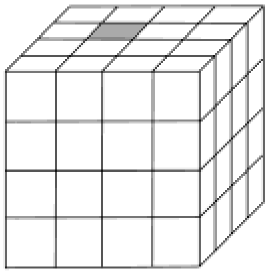
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

22. Theos Uhr geht 10 Minuten nach, er aber glaubt, dass sie 5 Minuten vorgeht.
Leos Uhr geht 5 Minuten vor, er aber glaubt, dass sie 10 Minuten nachgeht.
Beide sehen gleichzeitig auf ihre eigene Uhr. Theo glaubt es ist 12:00 Uhr. Welche Uhrzeit vermutet Leo?
(A) 11:30 (B) 11:45 (C) 12:00 (D) 12:30 (E) 12:45

23. Zwölf Mädchen trafen sich in einer Konditorei. Im Durchschnitt aßen sie 1,5 Muffins. Keine von ihnen aß mehr als zwei Muffins und zwei aßen nichts. Wie viele Mädchen aßen zwei Muffins?
(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

24. Rotkäppchen bringt drei Großmüttern Waffeln. Zu Beginn ist ihr Korb vollgefüllt. Kurz bevor sie jeweils die Häuser der Großmütter erreicht, frisst der böse Wolf jeweils die Hälfte der im Korb befindlichen Waffeln. Als sie das Haus der dritten Großmutter verlässt, ist ihr Korb leer. Jede Großmutter bekommt gleich viele Waffeln.
Durch welche der folgenden Zahlen kann die ursprüngliche Anzahl der Waffeln sicher geteilt werden?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

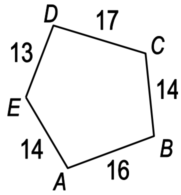
25. Ein großer Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln. Genau einer dieser Würfel ist grau (siehe Zeichnung). Zwei Würfel sind Nachbarn, wenn sie eine gemeinsame Fläche besitzen.
Am ersten Tag färbt der graue Würfel alle seine Nachbarwürfel grau.
Am nächsten Tag färben alle grauen Würfel wieder ihre Nachbarwürfel grau.
Wie viele der 64 kleinen Würfel sind am Ende des zweiten Tages grau?



(A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 16 (E) 17

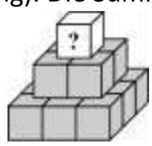
26. Auf der Tafel stehen natürliche Zahlen, von denen keine zwei gleich sind. Das Produkt der beiden kleinsten beträgt 16, das Produkt der beiden größten 225. Wie lautet die Summe aller Zahlen, die auf der Tafel stehen?
(A) 38 (B) 42 (C) 44 (D) 58 (E) 243

27. In der folgenden Zeichnung ist ein Fünfeck mit den zugehörigen Seitenlängen gegeben. Fünf Kreise mit den Mittelpunkten A, B, C, D und E werden gezeichnet. Auf jeder Seite des Fünfecks berühren sich die beiden Kreise um die Endpunkte dieser Seite.
Welcher Punkt ist der Mittelpunkt des größten Kreises?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

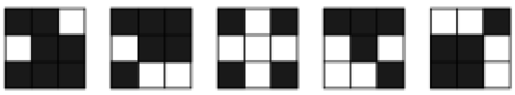
28. Susi schreibt auf jeden der 14 Würfel der Pyramide eine andere positive ganze Zahl (siehe Zeichnung). Die Summe der Zahlen, die sie auf die neun am Boden liegenden Würfeln schreibt, beträgt 50. Die Zahl auf jedem anderen Würfel ist gleich der Summe der Zahlen auf jenen vier Würfeln, die darunter liegen. Wie lautet die größte Zahl, die man auf den obersten Würfel schreiben kann?



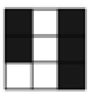
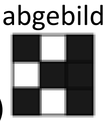
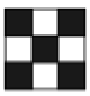
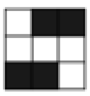
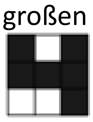
(A) 112 (B) 110 (C) 50 (D) 120 (E) 118

29. In jedem der fünf Waggons eines Zuges sitzt mindestens ein Passagier. Zwei Passagiere heißen *benachbart*, wenn sie entweder im gleichen Waggon oder in zwei aufeinanderfolgenden Waggons sitzen. Jeder Passagier hat entweder genau 5 oder genau 10 Nachbarn. Wie viele Passagiere befinden sich im Zug?
(A) 13 (B) 15 (C) 17 (D) 20 (E) Diese Situation ist nicht möglich.

30. Ein Würfel mit der Kantenlänge 3 besteht aus 15 schwarzen und 12 weißen Einheitswürfeln. In der folgenden Abbildung kann man fünf der sechs Seitenflächen des großen Würfels sehen.



Welche der unten abgebildeten Flächen ist die 6. Seitenfläche des großen Würfels?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Level: Kadett, Grade: 7 and 8

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

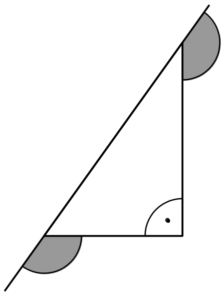
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Level Kadett (Grade 7 and 8)
Österreich – 17. 03. 2016

– 3 Points Questions –

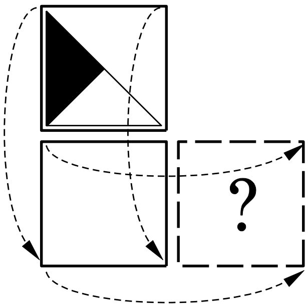
1. How many natural numbers are there between 3.17 and 20.16?
(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

2. Which of the road signs has the most axes of symmetry?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

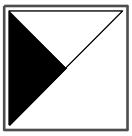
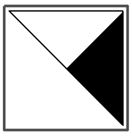
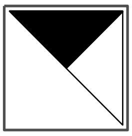
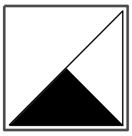
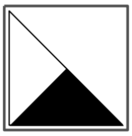


3. What is the sum of the two marked angles?
(A) 150° (B) 180° (C) 270° (D) 320° (E) 360°

4. Jim should have added 26 to a certain number. Instead he subtracted 26 and obtained –14. What is the result he would have obtained had he added 26?
(A) 28 (B) 32 (C) 36 (D) 38 (E) 42

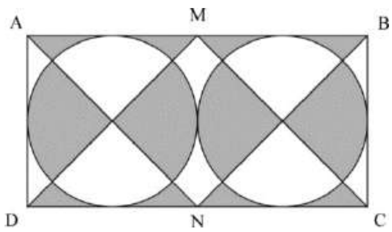


5. A card has a diagram printed on one side and the other side is plain white. The card is first flipped over downwards and then to the right (see diagram).
Which picture is obtained?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

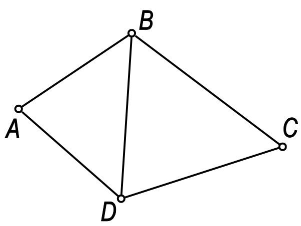
6. 45 teachers at Anna's school, that's 60% of all teachers, come to school by bike. Only 12% of the teachers come to school by car. How many teachers from Anna's school come to school by car?
(A) 4 (B) 6 (C) 9 (D) 10 (E) 12

7. Renate puts 555 little piles of 9 stones each together on one big pile. Then she splits this big pile into little groups of 5 stones each. How many such groups does Renate obtain?
(A) 999 (B) 900 (C) 555 (D) 111 (E) 45



8. In the rectangle ABCD the side AD is 10 cm long. M and N are the midpoints of the sides AB and CD respectively. How big is the grey area?
(A) 50 cm^2 (B) 80 cm^2 (C) 100 cm^2 (D) 120 cm^2 (E) 150 cm^2

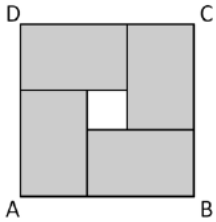
9. Alex has a 1 m long and a 2 m long rope. He cuts up both ropes so that all pieces are of equal length. Which of the following number of pieces can he not obtain in this way?
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 15



10. During a cycle race starting at D and finishing at B every connecting road (between the towns A, B, C and D) that is shown in the diagram will be ridden along exactly once. How many possible routes are there for the race?
(A) 10 (B) 8 (C) 6 (D) 4 (E) 2

– 4 Points Questions –

11. Within the square ABCD there are four identical rectangles (see diagram).
The perimeter of each rectangle is 16 cm. What is the perimeter of this square?
(A) 16 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 32 cm



12. Petra has 49 blue and one red pearl. How many of the blue pearls does Petra have to take away so that 90 % of the pearls are blue?
(A) 4 (B) 10 (C) 29 (D) 39 (E) 40

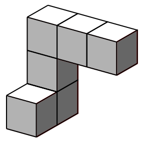
13. Which of the following fractions is closest to $\frac{1}{2}$?
(A) $\frac{25}{79}$ (B) $\frac{27}{59}$ (C) $\frac{29}{57}$ (D) $\frac{52}{79}$ (E) $\frac{57}{92}$

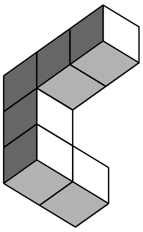
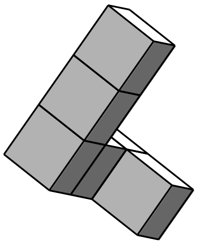
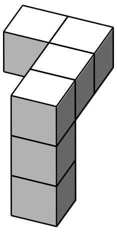
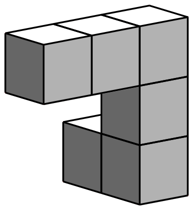
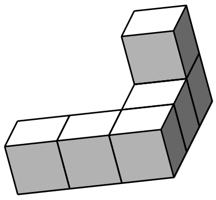
14. Igor writes down all results of the quarter finals, the semi finals and the final of a tennis tournament.
The results are listed in random order.

Bert beats Anton, Carl beats Damien, Glen beats Henry, Glen beats Carl,
Carl beats Bert, Edon beats Fred, Glen beats Edon.

Who is playing the final?
(A) Glen and Henry (B) Glen and Carl (C) Carl and Bert (D) Glen and Edon (E) Carl and Damien

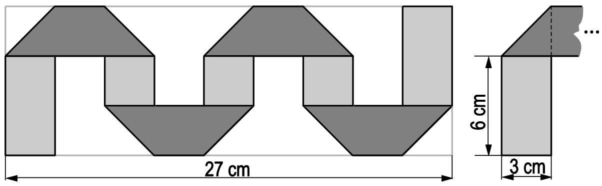
15. Anne has glued together some cubes and has obtained the solid shown on the right. She turns it around to check it out from different sides. Which view can she not obtain?



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

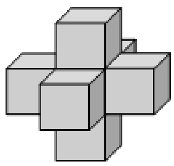
16. Tim, Tom and Jim are triplets. Their twin brothers John and James are 3 years younger. All five are having their birthdays today. Which of the following numbers could be the sum of the ages of the five brothers?
(A) 92 (B) 89 (C) 76 (D) 53 (E) 36

17. A 3 cm wide strip of paper is dark on one side and light on the other. The folded strip of paper lies exactly within a rectangle with length 27 cm and width 9 cm (see diagram). How long is the strip of paper?
(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 54 cm (D) 57 cm (E) 81 cm



18. The two kangaroos Jump and Hop both jump at the same time from the same starting line in the same direction. Both of them jump exactly once per second. Jump always jumps 6 m . Hop first jumps 1 m, then 2 m, then 3 m etc. After how many jumps does Hop catch up with Jump?
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

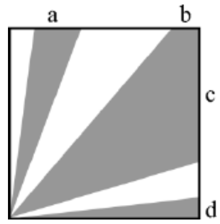
19. Seven identical dice (each with 1, 2, 3, 4, 5 and 6 points on their faces) are glued together to form the solid shown. Faces that are glued together each have the same number of points. How many points can be seen on the surface of the solid?
(A) 24 (B) 90 (C) 95 (D) 105 (E) 126



20. There are 20 girls and boys in total in a class. Always two students share a desk so that one third of the boys share a table with a girl and half the girls share a desk with a boy.
How many boys are in this class?
(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

5 Points Questions

21. In a square with area 36 there are grey parts as shown in the diagram. The sum of the areas of all grey parts is 27.
How long are the distances a, b, c and d together?
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

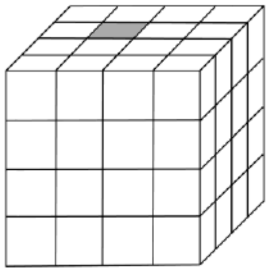


22. Theos watch runs 10 minutes slow but he thinks it runs 5 minutes fast.
Leos watch runs 5 minutes fast but he thinks it runs 10 minutes slow.
Both check their own watch at the same time. Theo thinks it is 12:00 o’clock. What time does Leo think it is?
(A) 11:30 (B) 11:45 (C) 12:00 (D) 12:30 (E) 12:45

23. Twelve girls met up in a pastry shop. On average they ate 1.5 muffins. None of them ate more than two muffins and two ate nothing. How many girls ate two muffins?
(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

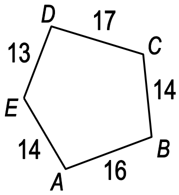
24. Little Red Riding Hood is taking waffles to three grandmothers. Initially her basket is completely full. Just before she reaches the houses of each grandmother, the wolf each time eats half of the waffles that are in the basket. When she leaves the house of the third grandmother, the basket is empty. Each grandmother gets the same amound of waffles.
The original amount of waffles can definitely be divided by which of the following numbers?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

25. A big cube is made up of 64 small cubes. Exactly one of these cubes is grey (see diagram).
Two cubes are neighbours if they share a common face.
On day one the grey cube colours all its neighbouring cubes grey.
On day two all grey cubes again colour all their neighbouring cubes grey.
How many of the 64 little cubes are grey at the end of the second day?
(A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 16 (E) 17

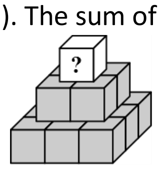


26. Natural numbers are written on a board, of which no two are the same. The product of the two smallest numbers is 16, the product of the two biggest is 225. What is the sum of all numbers written on the board?
(A) 38 (B) 42 (C) 44 (D) 58 (E) 243

27. The diagram shows a pentagon and indicates the length of each side. Five circles are drawn with centres A, B, C, D and E. On each side of the pentagon the two circles that are drawn around the ends of that side touch each other.
Which point is the centre of the biggest circle?
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E



28. Susi writes a different positive whole number on each of the 14 cubes of the pyramid (see diagram). The sum of the numbers, which she writes on the nine cubes that lie on the bottom, is 50. The number on every remaining cube is equal to the sum of the numbers of the four cubes that are directly underneath. What is the biggest number that can be written on the topmost cube?
(A) 112 (B) 110 (C) 50 (D) 120 (E) 118



29. In every one of the five carriages of a train there is at least one passenger. Two passengers are said to be *neighbouring* if they are either in the same carriage or in two successive carriages. Each passenger has either got exactly 5 or exactly 10 neighbours. How many passengers are on the train?
(A) 13 (B) 15 (C) 17 (D) 20 (E) This situation is not possible.

30. A cube of side length 3 consists of 15 black and 12 white unit cubes. In the diagram five of the six faces of the big cube can be seen.

Which of the regions shown below is the 6th face of the big cube?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 17. 03. 2016

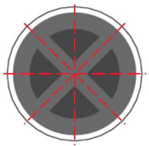
– 3 Punkte Beispiele –

1. Wie viele natürliche Zahlen liegen zwischen 3,17 und 20,16?
(A) 15 (B) 16 **(C) 17** (D) 18 (E) 19

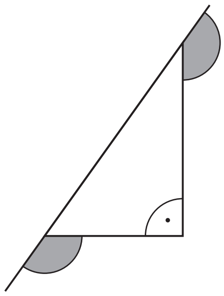
Die kleinste natürliche Zahl ist 4, die größte 20. Daher Lösung **(C)**: 17

2. Welches der Verkehrsschilder hat die meisten Symmetrieachsen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 



Schild (A) hat vier Symmetrieachsen. Daher Lösung **(A)**



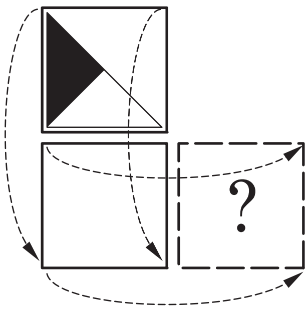
3. Wie lautet die Summe der beiden markierten Winkel?
(A) 150° (B) 180° **(C) 270°** (D) 320° (E) 360°

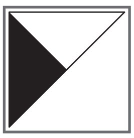
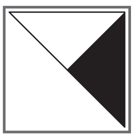
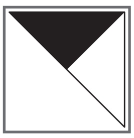
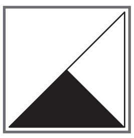
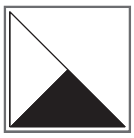
Die Summe der beiden spitzen Winkel beträgt 90°. Die Summe der markierten Winkel ist daher $180° + 180° - 90° = 270°$. Daher Lösung **(C)**.

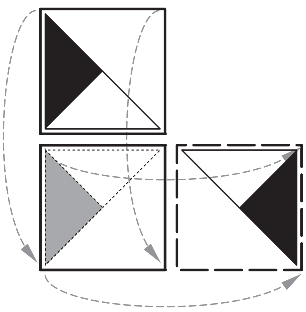
4. Jim sollte 26 zu einer bestimmten Zahl addieren. Stattdessen subtrahierte er 26 und erhielt -14. Welches Ergebnis hätte er erhalten, wenn er 26 addiert hätte?
(A) 28 (B) 32 (C) 36 **(D) 38** (E) 42

Die Zahl, von welcher Jim 26 subtrahiert, muss 12 sein. Daher Lösung **(D)**.

5. Eine Karte ist auf einer Seite mit einer Figur bedruckt und auf der Rückseite weiß. Die Karte wird zuerst nach unten und dann nach rechts geklappt (siehe Bild). Welches Bild erhält man?



(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Die Grafik erklärt den Vorgang:  Daher Lösung **(B)**.

6. Von Annas Schule fahren 45 Lehrer, das sind 60 % aller Lehrer, mit dem Rad zur Schule. Nur 12 % der Lehrer fahren mit dem Auto zur Schule. Wie viele Lehrer von Annas Schule fahren mit dem Auto zur Schule?

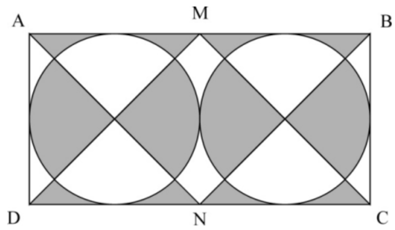
(A) 4 (B) 6 **(C) 9** (D) 10 (E) 12

Lösung 1: 12% ist ein Fünftel von 60%. Die gesuchte Lehrerzahl ist daher $45 : 5 = 9$. Daher Lösung **(C)**.
Lösung 2: 20% sind 15 Lehrer und deshalb 100% 75 Lehrer. Daher 1% 0,75 Lehrer und 12 % $0{,}75 \cdot 12 = 9$.

7. Renate legt 555 kleine Haufen zu je 9 Steinen auf einen einzigen großen Haufen. Danach teilt sie diesen in Gruppen zu je 5 Steinen auf. Wie viele solche Gruppen erhält Renate?

(A) 999 (B) 900 (C) 555 (D) 111 (E) 45

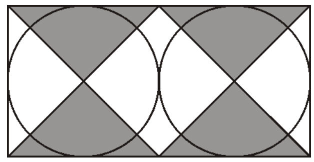
Es gibt insgesamt $555 \cdot 9 = 5 \cdot 111 \cdot 9 = 5 \cdot 999$ Steine. Daher Lösung **(A)**.



8. Im Rechteck ABCD ist die Seite AD 10 cm lang. M und N sind die Mittelpunkte der Seiten AB und CD. Wie groß ist die graue Fläche?

(A) 50 cm^2 (B) 80 cm^2 **(C) 100 cm^2** (D) 120 cm^2 (E) 150 cm^2

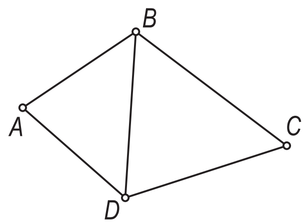
Offensichtlich setzt sich das Rechteck ABCD aus zwei Quadraten mit Seitenlängen 10 cm zusammen. Durch Verdrehen der Viertelkreissektoren erhält man eine neue Figur mit 4 grauen Viertelquadraten der Seitenlänge 10 cm, also insgesamt ein ganzes Quadrat. Daher Lösung **(C)**.



9. Alex hat ein 1 m langes und ein 2 m langes Seil. Er zerschneidet beide Seile so, dass alle Stücke gleich lang sind. Welche der folgenden Stückzahlen kann er dadurch nicht erhalten?

(A) 6 **(B) 8** (C) 9 (D) 12 (E) 15

Zerschneidet man das 1 m lange Seilstück in beliebig viele gleich lange Stücke, so erhält man insgesamt, wenn man auch das 2 m Seil in Stücke derselben Länge zerschneidet, dreimal so viele Stücke, wie man durch Zerschneiden des 1 m Seiles erhalten hat. 8 ist aber nicht durch 3 teilbar und kann daher nicht die Gesamtzahl der Stücke sein. Daher Antwort **(B)**.

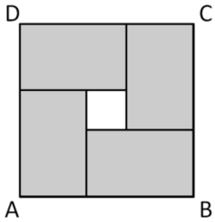


10. Bei einem Radrennen mit Start in D und Ziel in B wird jede der in der Zeichnung dargestellten Verbindungsstraßen (zwischen den Städten A, B, C und D) genau einmal befahren. Wie viele mögliche Routen gibt es für das Rennen?

(A) 10 (B) 8 **(C) 6** (D) 4 (E) 2

Die möglichen Routen: DBADCB, DBCDAB, DCBDAB, DABDCB, DCBADB, DABCDB.
Daher Lösung **(C)**.

4 Punkte Beispiele



11. Innerhalb des Quadrats ABCD liegen vier identische Rechtecke (siehe Bild). Der Umfang jedes Rechtecks beträgt 16 cm. Welchen Umfang hat dieses Quadrat?
(A) 16 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm **(E) 32 cm**

Sei x die Länge und y die Breite eines dieser Rechtecke. Dann gilt: $2x + 2y = 16$ bzw. $x + y = 8$. Man sieht in der Zeichnung, dass sich die Seitenlänge des Quadrates aus $x + y$ zusammensetzt. Daher $4 \cdot 8 = 32$ cm der Umfang dieses Quadrates. Lösung **(E)**.

12. Petra hat 49 blaue und eine rote Perle. Wie viele der blauen Perlen muss Petra entfernen, damit 90 % der Perlen blau sind?
(A) 4 (B) 10 (C) 29 (D) 39 **(E) 40**

1 rote Perle muss dann 10% entsprechen und deshalb 9 blaue Perlen 90%. $49 - 40 = 9$. Lösung **(E)**

13. Welche der folgenden Bruchzahlen liegt am nächsten zu $\frac{1}{2}$?
(A) $\frac{25}{79}$ (B) $\frac{27}{59}$ **(C) $\frac{29}{57}$** (D) $\frac{52}{79}$ (E) $\frac{57}{92}$

In (C) ist der Zähler ungefähr halb so groß wie der Nenner ($2 \cdot 29 = 58$). Die Abweichung von $\frac{1}{2}$ beträgt $\frac{1}{114}$ In allen anderen Fällen ist die Abweichung deutlich größer. Lösung **(C)**

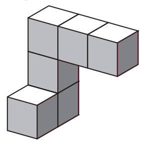
14. Igor schreibt alle Ergebnisse der Viertel- und Halbfinalspiele und des Finales eines Tennis-Wettbewerbs auf. Die Ergebnisse sind in beliebiger Reihenfolge angeführt.

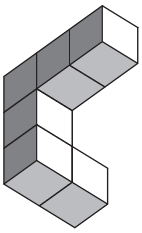
Bert besiegte Anton, Carl besiegte Damien, Glen besiegte Henry, Glen besiegte Carl,
Carl besiegte Bert, Edon besiegte Fred, Glen besiegte Edon.

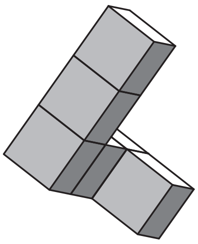
Wer bestritt das Finale?
(A) Glen und Henry **(B) Glen und Carl** (C) Carl und Bert (D) Glen und Edon (E) Carl und Damien

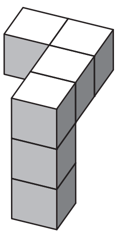
Zwei Spieler haben dreimal gespielt und haben somit das Finale bestreiten. Das sind Glen und Carl. Lösung **(B)**

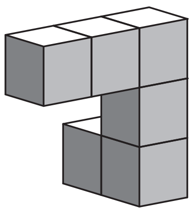
15. Anne hat einige Würfel zusammengeklebt und erhält den rechts zu sehenden Körper. Sie dreht ihn, um ihn von verschiedenen Seiten zu betrachten. Welche Ansicht kann sie nicht erhalten?

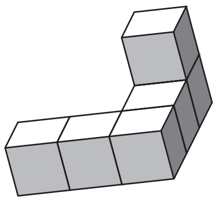



(A)


(B)


(C)


(D)


(E)

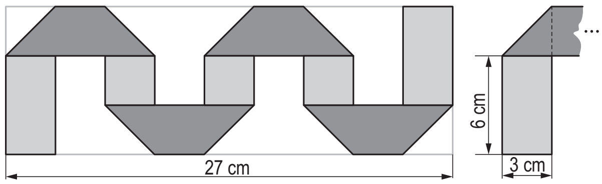
Lösung **(A)**.

16. Tim, Tom und Jim sind Drillinge. Ihre Zwillingsbrüder John und James sind 3 Jahre jünger. Alle fünf feiern heute ihren Geburtstag. Welche der folgenden Zahlen könnte die Summe der Alter der fünf Brüder ergeben?
(A) 92 **(B) 89** (C) 76 (D) 53 (E) 36

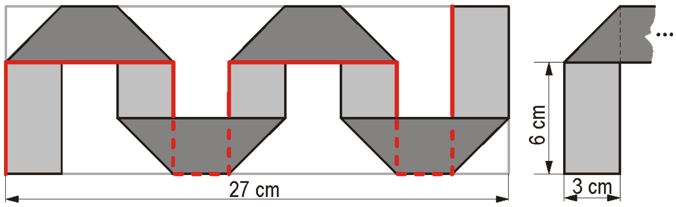
Wenn die Drillinge x Jahre alt sind, dann sind die Zwillinge $(x - 3)$ Jahre alt.
Damit beträgt die Summe $A = 3x + (x - 3)\cdot 2$
Durch Umformen erhält man $A = 5x - 6$. Das bedeutet, dass $A + 6 = 5x$ und somit durch 5 teilbar sein muss. Dies ist aber nur bei Antwort (B) der Fall: $89 + 6 = 95$. Daher Lösung **(B)**.

17. Ein 3 cm breiter Papierstreifen ist auf einer Seite dunkel, auf der anderen hell. Der gefaltete Papierstreifen liegt exakt innerhalb eines Rechtecks mit der Länge 27 cm und der Breite 9 cm (siehe Zeichnung). Wie lang ist der Papierstreifen?

(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 54 cm **(D) 57 cm** (E) 81 cm



Betrachten wir den Verlauf eines der beiden Papierstreifenränder. Man sieht, dass es dann $27-3=24$ cm waagrecht verlaufende Kantenstrecken und $4\cdot 6+9=33$ cm senkrecht verlaufende Kantenstrecken gibt. Macht zusammen 57 cm. Lösung **(D)**



18. Die beiden Kängurus Jump und Hop springen gleichzeitig von der gleichen Startlinie in die gleiche Richtung. Pro Sekunde springt jeder der beiden genau einmal. Jump springt immer 6 m weit. Hop springt zuerst 1 m, dann 2 m, dann 3 m etc. Nach wie vielen Sprüngen wird Jump von Hop eingeholt?

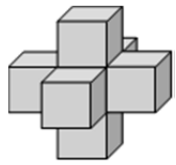
(A) 10 **(B) 11** (C) 12 (D) 13 (E) 14

Lösung 1: Durch Ausprobieren. Nach 11 Sprüngen haben beide 66 m zurückgelegt.

Lösung 2: Im 1. Sprung springt Jump um 5 m weiter, im zweiten 4 m weiter usw. und im 6. Sprung springen beide gleich weit. Im 7. Sprung verliert Jump einen Meter auf Hop, im 8. 2 m usw. bis schließlich im 11. Sprung der ganze Vorsprung vom Anfang verloren gegangen ist. Lösung **(B)**

19. Sieben identische Spielwürfel (mit jeweils 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten auf den Flächen) werden zum rechts skizzierten Körper zusammengeklebt. Auf zusammengeklebten Flächen sind jeweils gleich viele Punkte. Wie viele Punkte kann man auf der Oberfläche des Körpers sehen?

(A) 24 (B) 90 (C) 95 **(D) 105** (E) 126



Auf jedem Würfel liegen 21 Punkte. Damit sieht man einerseits die 21 Punkte des innenliegenden Würfels nicht und aufgrund der Voraussetzung auch weitere 21 Punkte der angeklebten Würfelflächen nicht. Daher: $7\cdot 21-2\cdot 21=5\cdot 21=105$. Lösung **(D)**

20. In einer Klasse befinden sich 20 Mädchen und Buben. Sie sitzen an Zweiertischen so, dass ein Drittel der Buben mit einem Mädchen den Tisch teilt, und die Hälfte der Mädchen mit einem Buben den Tisch teilt. Wie viele Buben gibt es in der Klasse?

(A) 9 **(B) 12** (C) 15 (D) 16 (E) 18

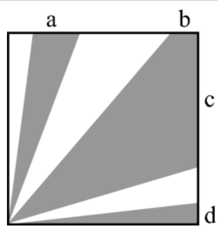
Lösung 1: b sei die Anzahl der Buben und m die Anzahl der Mädchen. Laut Angabe muss gelten $\frac{b}{3}=\frac{m}{2}$ Die gesuchte Lösungszahl muss also gerade und durch 3 teilbar sein. Dies erfüllen die Lösungszahlen 12 und 18. Durch Probieren ergibt sich 12. ($12:3=4$, d.h. 4 ist die Anzahl der Hälfte der Mädchen $\Rightarrow m=8$. $12+8=20$) Lösung **(B)**

Lösung 2: Lösen des Gleichungssystems I: $m+b=20$, II: $\frac{b}{3}=\frac{m}{2}$

– 5 Punkte Beispiele –

21. In einem Quadrat mit dem Flächeninhalt 36 befinden sich, wie in der Abbildung zu sehen, graue Flächen. Die Summe der Flächeninhalte aller grauen Flächen beträgt 27. Wie lang sind die Strecken a, b, c und d zusammen?

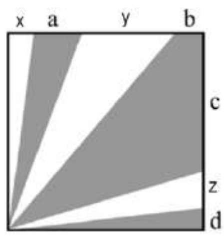
(A) 4 (B) 6 (C) 8 **(D) 9** (E) 10



Die Seitenlänge des Quadrates beträgt 6. Seien x, y, z die Grundlinien der weißen Dreiecke. Die Fläche eines solchen Dreiecks ist dann z.B. $A_x=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 6$ usw. Die Summe der Flächen dieser Dreiecke beträgt 9. Damit gilt: $A_{weiß}=9$. Es gilt $\frac{1}{2}(x+y+z)\cdot 6=9 \Leftrightarrow (x+y+z)=3$.

Aus der Zeichnung sieht man: $a+b+c+d=2\cdot 6-(x+y+z) \Leftrightarrow a+b+c+d=12-3=9$

Lösung: **(D)**



22. Theos Uhr geht 10 Minuten nach, er aber glaubt, dass sie 5 Minuten vorgeht.
Leos Uhr geht 5 Minuten vor, er aber glaubt, dass sie 10 Minuten nachgeht.
Beide sehen gleichzeitig auf ihre eigene Uhr. Theo glaubt es ist 12:00 Uhr. Welche Uhrzeit vermutet Leo?
(A) 11:30 (B) 11:45 (C) 12:00 **(D) 12:30** (E) 12:45

Auf Theos Uhr ist es 12:05, und da sie 10 Minuten nachgeht ist es in Wirklichkeit 12:15. Leos Uhr zeigt zu dem Zeitpunkt 12:20 (sie geht 5 Minuten vor) und daher denkt Leo es ist 12:30, weil er glaubt, dass die Uhr 10 Minuten hinten ist. Lösung: **(D)**

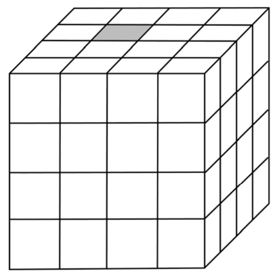
23. Zwölf Mädchen trafen sich in einer Konditorei. Im Durchschnitt aßen sie 1,5 Muffins. Keine von ihnen aß mehr als zwei Muffins und zwei aßen nichts. Wie viele Mädchen aßen zwei Muffins?
(A) 2 (B) 5 (C) 6 (D) 7 **(E) 8**

Insgesamt wurden 18 Muffins von 10 Mädchen gegessen. Die drei rechnerischen Muffins von den beiden Mädchen, die nichts aßen, verteilen sich je zur Hälfte auf 6 Mädchen, die nun je 2 Muffins gegessen haben müssen. Nun muss man aber bedenken, dass nur ganze Muffins bestellbar sind. Damit ist es nun natürlich nicht möglich, dass die verbleibenden 4 Mädchen je 1,5 Muffins bestellt haben können. Die Aufteilung kann nur 2, 2, 1, 1 gewesen sein, d.h. zwei weitere Mädchen haben ebenfalls 2 Muffins gegessen. Damit gab es insgesamt 8 Mädchen mit je 2 Muffins. Daher ist die Lösung **(E)**.

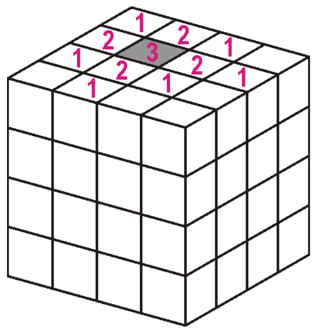
24. Rotkäppchen bringt drei Großmüttern Waffeln. Zu Beginn ist ihr Korb vollgefüllt. Kurz bevor sie jeweils die Häuser der Großmütter erreicht, frisst der böse Wolf jeweils die Hälfte der im Korb befindlichen Waffeln. Als sie das Haus der dritten Großmutter verlässt, ist ihr Korb leer. Jede Großmutter bekommt gleich viele Waffeln.
Durch welche der folgenden Zahlen kann die ursprüngliche Anzahl der Waffeln sicher geteilt werden?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D) 7** (E) 9

Das Problem löst man am besten von hinten. Die dritte Großmutter bekommt W Waffeln. Da der Wolf zuvor die Hälfte der Waffeln also W Waffeln gefressen haben muss, waren zuvor $2 \cdot W$ Waffeln im Korb. Die zweite Großmutter bekam ebenfalls W Waffeln. Damit befanden sich zu diesem Zeitpunkt noch $2 \cdot W + W = 3 \cdot W$ Waffeln in Korb. Kurz zuvor hat der Wolf die Hälfte d.h. $3 \cdot W$ Waffeln gefressen. Als Rotkäppchen auch der ersten Großmutter W Waffeln schenkte, waren in diesem Augenblick $6 \cdot W + W$ Waffeln im Korb. Zuvor hatte der Wolf aber die Hälfte nämlich $7 \cdot W$ Waffeln gefressen. Zu Beginn waren also $7 \cdot W + 7 \cdot W = 14 \cdot W$ Waffeln im Korb. Die einzige Zahl der Lösungen, die 14 teilt ist 7. Daher Lösung **(D)**.

25. Ein großer Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln. Genau einer dieser Würfel ist grau (siehe Zeichnung). Zwei Würfel sind Nachbarn, wenn sie eine gemeinsame Fläche besitzen.
Am ersten Tag färbt der graue Würfel alle seine Nachbarwürfel grau.
Am nächsten Tag färben alle grauen Würfel wieder ihre Nachbarwürfel grau.
Wie viele der 64 kleinen Würfel sind am Ende des zweiten Tages grau?
(A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 16 **(E) 17**



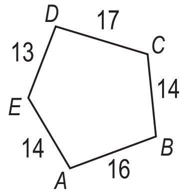
Die Zahlen auf dem Würfel geben an, wie viele grau gefärbte Würfel übereinanderliegen müssen.
Die Summe ist 17. Daher Lösung **(E)**.



26. Auf der Tafel stehen natürliche Zahlen, von denen keine zwei gleich sind. Das Produkt der beiden kleinsten beträgt 16, das Produkt der beiden größten 225. Wie lautet die Summe aller Zahlen, die auf der Tafel stehen?
(A) 38 (B) 42 **(C) 44** (D) 58 (E) 243

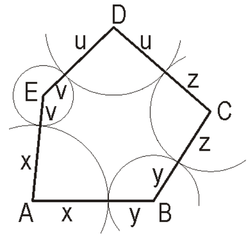
16 ist das Produkt von (1, 16) oder (2, 8). 225 ist das Produkt von (1, 225), (3, 75), (5, 45) oder (9, 25).
(1, 16) kommt nicht in Frage, da 16 das Produkt der beiden kleinsten Zahlen sein muss. Daher $16 = 2 \cdot 8$.
Damit bleibt aber auch nur mehr $9 \cdot 25 = 225$ als Produkt der beiden größten Zahlen über. Weitere Zahlen können nicht auf der Tafel stehen. Die Zahlen lauten: 2, 8, 9, 25. Die Summe beträgt 44. Lösung **(C)**

27. In der folgenden Zeichnung ist ein Fünfeck mit den zugehörigen Seitenlängen gegeben. Fünf Kreise mit den Mittelpunkten A, B, C, D und E werden gezeichnet. Auf jeder Seite des Fünfecks berühren sich die beiden Kreise um die Endpunkte dieser Seite.
Welcher Punkt ist der Mittelpunkt des größten Kreises?



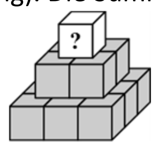
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Zeichnet man die Kreise mit den Radien x, y, z, u, v ein, so zerfällt der Streckenzug ABCDEA in 10 Teilstücke, wobei jeweils zwei Teilstücke gleich lang sind.



Es gilt $2x + 2y + 2z + 2u + 2v = 74$ und daher I: $x + y + z + u + v = 37$.
Andererseits ergeben sich auch die Summen $x + y = 16$, $y + z = 14$, $z + u = 17$, $u + v = 13$ und $x + v = 14$.
Nun kann man z.B. in Gleichung I $x + y$ durch 16 und $z + u$ durch 17 ersetzen. Damit ergibt sich die neue Gleichung $16 + 17 + v = 37$. Daraus errechnet man $v = 4$.
Sofort erhält man aus $x + v = 14$ den Wert $x = 10$ und analog aus $u + v = 13$ den Wert $u = 9$.
Analog erhält man auch die Werte $y = 6$ und $z = 8$.
$x = 10$ ist also der größte Kreisradius. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist A. Lösung **(A)**.

28. Susi schreibt auf jeden der 14 Würfel der Pyramide eine andere positive ganze Zahl (siehe Zeichnung). Die Summe der Zahlen, die sie auf die neun am Boden liegenden Würfeln schreibt, beträgt 50. Die Zahl auf jedem anderen Würfel ist gleich der Summe der Zahlen auf jenen vier Würfeln, die darunter liegen. Wie lautet die größte Zahl, die man auf den obersten Würfel schreiben kann?



(A) 112 (B) 110 (C) 50 (D) 120 **(E) 118**

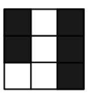
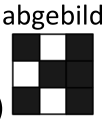
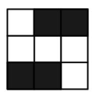
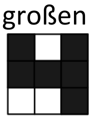
Die in der Mitte liegende Zahl kommt 4-mal ins Spiel und muss daher möglichst groß sein. Wenn die anderen 8 Würfel die Zahlen 1 bis 8 tragen (Summe 36), dann kann in der Mitte 14 stehen. Weiteres nimmt man die Zahlen 5, 6, 7, 8 nicht als Eckzahlen an. Diese Zahlen kommen dann zweimal ins Spiel. Somit ergibt sich als Summe:
$4 \cdot 14 + 2 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) + 1 + 2 + 3 + 4 = 56 + 52 + 10 = 118$. Lösung **(E)**

29. In jedem der fünf Waggons eines Zuges sitzt mindestens ein Passagier. Zwei Passagiere heißen *benachbart*, wenn sie entweder im gleichen Waggon oder in zwei aufeinanderfolgenden Waggons sitzen. Jeder Passagier hat entweder genau 5 oder genau 10 Nachbarn. Wie viele Passagiere befinden sich im Zug?
(A) 13 (B) 15 **(C) 17** (D) 20 (E) Diese Situation ist nicht möglich.

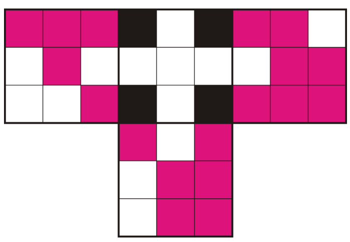
Eine mögliche Belegung des Zuges: Waggon $W_1 = 1P$. $W_2 = 5P$. Damit hat der Passagier aus W_1 5 Nachbarn in W_2.
In W_3 sitzen 5P. Damit hat jeder Passagier aus W_2 einen Passagier aus W_1, 4 Passagiere aus W_2 und 5 Passagiere aus W_3, d.h. 10 Passagiere als Nachbarn.
In W_4 sitzt ein Passagier. Damit haben die Passagiere aus W_3 fünf Nachbarn in W_2, vier in W_3 und einen in W_4, macht zusammen 10 Nachbarn.
In W_5 sitzen 5 Passagiere. Damit hat der Passagier aus W_4 jeweils 5 Nachbarn in W_3 und W_5 also 10 Nachbarn.
Die Passagiere in W_5 haben vier Nachbarn im eigenen Waggon und einen in W_4 also 5 Nachbarn.
$1 + 5 + 5 + 1 + 5 = 17$. Lösung **(C)**

30. Ein Würfel mit der Kantenlänge 3 besteht aus 15 schwarzen und 12 weißen Einheitswürfeln. In der folgenden Abbildung kann man fünf der sechs Seitenflächen des großen Würfels sehen.

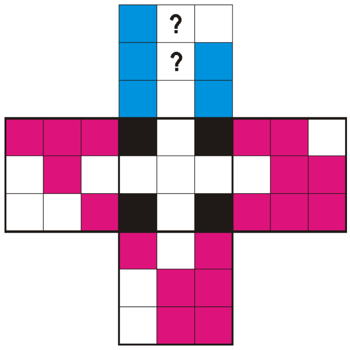
Welche der unten abgebildeten Flächen ist die 6. Seitenfläche des großen Würfels?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Das Netz lässt sich wie folgt bilden.
An die dritte gegebene Seitenfläche lassen sich sofort die Seitenflächen 1, 2 und 4 hängen, wie in der folgenden Abbildung zu sehen. Seitenfläche 5 liegt gegenüber von Seitenfläche 3.



Aus dem bis jetzt konstruierten Netz muss die gesuchte Seitenfläche wie in der folgenden Abbildung aussehen. Fraglich sind das Feld in der Mitte und das darüber liegende Feld.



Wir haben derzeit $3 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 11$ am Rand liegende gefärbte Würfel und 4 in der Mitte liegende gefärbte Würfel (Seitenfläche 5 nicht vergessen), also insgesamt 15 gefärbte Würfel. Das ist die geforderte Gesamtzahl an gefärbten Würfeln. Damit sind alle anderen noch nicht bestimmten Würfel weiß.

In der von uns konstruierten Seitenfläche sind keine weiteren Quadrate mehr zu färben. Sie entspricht Antwort A. Lösung **(A)**

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9 – 10

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2016“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden.
Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Punkte Beispiele -

1. Das arithmetische Mittel von vier Zahlen ist 9. Wie lautet die vierte Zahl, wenn drei der Zahlen 5, 9 und 12 sind?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 36

2. Welche der folgenden Zahlen ist der Zahl $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 20{,}16}{999}$ am nächsten?

(A) 0,01 (B) 0,1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

3. Ruth nimmt am Känguru-Wettbewerb teil, der aus 30 Fragen besteht. Sie hat dabei um 50% mehr richtige als falsche Antworten. Jede Frage wird von ihr beantwortet, und jede ihrer Antworten ist entweder richtig oder falsch. Wie viele ihrer Antworten sind richtig?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 20

4. In einem kartesischen Koordinatensystem sind fünf Punkte gegeben: P(-1|3), Q(0|-4), R(-2|-1), S(1|1), T(3|-2). Vier dieser fünf Punkte sind die Eckpunkte eines Quadrats. Welcher Punkt gehört nicht dazu?

(A) P (B) Q (C) R (D) S (E) T

5. Wenn man die positive ganze Zahl *x* durch 6 dividiert, bleibt der Rest 3. Welcher Rest bleibt, wenn man 3·*x* durch 6 dividiert?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

6. 2016 Stunden sind wie viele Wochen?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 16

7. Lukas erfindet seine eigene Schreibweise für negative Zahlen. Wenn er rückwärts zählt, schreibt er:
... 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, ... Wie lautet das Ergebnis der Rechnung 000 + 0000 in seiner Schreibweise?

(A) 1 (B) 00000 (C) 000000 (D) 0000000 (E) 00000000

8. Ich habe einige ungewöhnliche Würfel. Auf ihren Seiten stehen wie üblich die Ziffern 1 bis 6, allerdings sind die ungeraden Zahlen negativ (also -1, -3, -5 anstelle von 1, 3, 5). Ich würfle gleichzeitig mit zwei derartigen Würfeln. Welche der folgenden Summen kann ich danach sicher nicht ablesen?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8

9. Schritt für Schritt soll aus dem Wort VELO das Wort LOVE entstehen. In jedem Schritt dürfen zwei benachbarte Buchstaben vertauscht werden. Wie viele Schritte sind mindestens erforderlich?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

10. Sven schreibt fünf verschiedene einziffrige positive ganze Zahlen auf die Tafel. Er stellt fest, dass keine Summe von zwei dieser Zahlen gleich 10 ist. Welche der folgenden Zahlen hat Sven sicher auf die Tafel geschrieben?

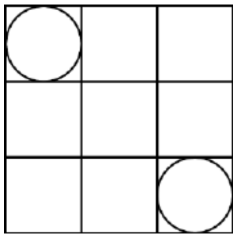
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Punkte Beispiele -

11. Für reelle Zahlen *a, b, c, d* gelte $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$. Welche der Zahlen *a, b, c, d* ist am größten?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) Das kann aus dieser Information nicht eindeutig bestimmt werden.

12. Ein 3×3 Feld besteht aus 9 Einheitsquadraten. In zwei dieser Quadrate sind (wie in der Abbildung zu sehen) Kreise berührend eingeschrieben.
Wie groß ist der kürzeste Abstand dieser Kreise?

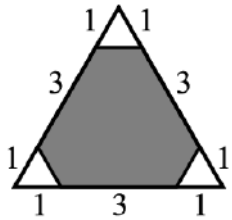


(A) $2\sqrt{2}-1$ (B) $\sqrt{2}+1$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2 (E) 3

13. Ein Tennisturnier wird im KO-System ausgetragen. Es finden sieben Partien statt (4 Viertelfinali, 2 Halbfinali und ein Finale). Man kennt sechs der sieben Spielergebnisse (aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge):
Bella schlägt Ann, Celine schlägt Donna, Gina schlägt Holly,
Gina schlägt Celine, Celine schlägt Bella, Emma schlägt Farah.
Welches Ergebnis fehlt?

(A) Gina schlägt Bella (B) Celine schlägt Ann (C) Emma schlägt Celine
(D) Bella schlägt Holly (E) Gina schlägt Emma

14. Wie viel Prozent des Dreiecksfläche ist in der nebenstehenden Figur grau gefärbt?



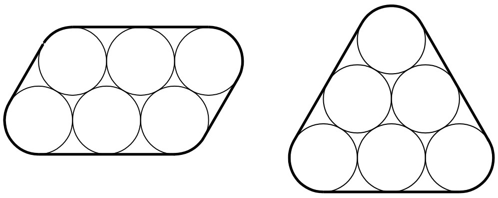
(A) 80% (B) 85% (C) 88% (D) 90% (E) Man kann es nicht berechnen.

15. Jilly macht ein multiplikatives Zauberquadrat mit den Zahlen 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 und 100. Die Produkte der Zahlen in jeder Zeile, Spalte und Diagonale sollen gleich sein.
In der Abbildung sieht man, wie sie begonnen hat.
Welche Zahl kommt in das Feld mit dem Fragezeichen?

20	**1**	
		?

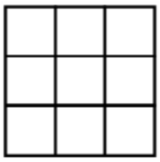
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10 (E) 25

16. Jack möchte sechs Rohre mit einem Durchmesser von je 2 cm mit einen Gummiring zusammenhalten. Er entscheidet sich zwischen den beiden abgebildeten Varianten.
Wie hängen die Längen der Gummiringe zusammen?



(A) Im linken Bild ist der Ring um π cm kürzer.
(B) Im linken Bild ist der Ring um 4 cm kürzer. (C) Im rechten Bild ist der Ring um π cm kürzer.
(D) Im rechten Bild ist der Ring um 4 cm kürzer. (E) Beide Ringe sind gleich lang.

17. Peter möchte die Felder eines 3×3 Quadrats so färben, dass jede Zeile, jede Spalte und beide Diagonalen jeweils drei Felder mit drei verschiedenen Farben haben.
Was ist die kleinste Anzahl von Farben, mit denen Peter dies erreichen kann?

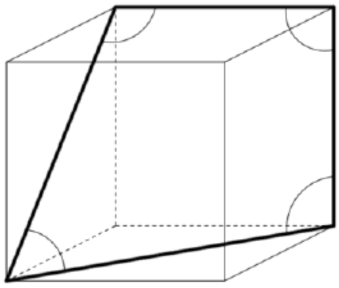


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

18. Acht Karten mit den Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 stecken jeweils in einem unmarkierten Kuvert. Eva wählt zufällig einige dieser acht Kuverts. Ali nimmt den Rest. Beide addieren ihre Zahlen. Es stellt sich heraus, dass Evas Summe um 31 größer ist als Alis Summe. Wie viele Kuverts hat Eva gewählt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

19. Im Bild sehen wir einen Würfel und vier markierte Winkel.
Wie groß ist die Summe dieser Winkel?



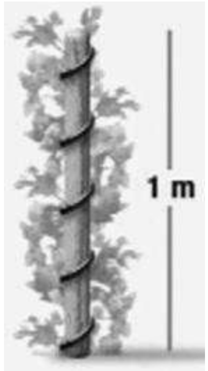
(A) 315° (B) 330° (C) 345° (D) 360° (E) 375°

20. In einem Gehege befinden sich 2016 Kängurus. Jedes von ihnen ist entweder rot oder grau, und es gibt mindestens ein rotes und mindestens ein graues Känguru darunter.
Für jedes Känguru K berechnen wir den Bruch, der sich ergibt, wenn man die Anzahl der Kängurus der anderen Farbe durch die Anzahl der Kängurus mit derselben Farbe (inklusive K selbst) dividiert.
Bestimme die Summe dieser 2016 Brüche.

(A) 2016 (B) 1344 (C) 1008 (D) 672 (E) Mehr Information ist notwendig.

- 5 Punkte Beispiele -

21. Eine Kletterpflanze windet sich wie abgebildet genau 5 Mal um eine Säule mit 15 cm Umfang und erreicht dabei eine Höhe von 1 m. Beim Wachsen der Pflanze wächst auch die Höhe der Pflanze mit konstanter Geschwindigkeit. Wie lang ist die Kletterpflanze?

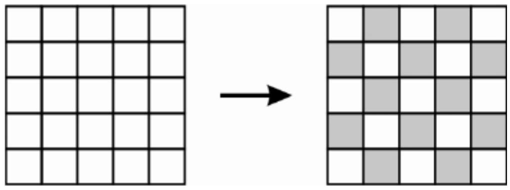


(A) 0,75 m (B) 1,0 m (C) 1,25 m (D) 1,5 m (E) 1,75 m

22. Wie groß ist der größtmögliche Rest, den man erhalten kann, wenn man eine zweiziffrige Zahl durch ihre Ziffernsumme dividiert?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

23. Wir betrachten ein 5×5 Quadrat, das in 25 Felder aufgeteilt ist. Zu Beginn sind alle Felder weiß. In jedem Zug ist es erlaubt, die Farben von zwei horizontal oder vertikal benachbarten Feldern zu ändern (d.h. weiße Felder werden schwarz und schwarze werden weiß).
Was ist die kleinste Anzahl von Zügen, mit denen man die in der Figur abgebildete Schachbrettfärbung erreichen kann?



(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

24. Ein Motorboot fährt in der Mitte eines Stromes. Stromabwärts braucht es von X nach Y vier Stunden. Um wieder von Y nach X zurückzufahren, benötigt es sechs Stunden. Auf dem Strom schwimmen auch Baumstämme.
Wie viele Stunden dauert es, bis ein Baumstamm in der Strommitte von X nach Y treibt?

(A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 20 (E) 24

25. In der Känguru-Republik hat jeder Monat 40 Tage, die von 1 bis 40 durchnummeriert sind. Jeder Tag mit einer durch 6 teilbaren Zahl ist ein Feiertag, und ebenso jeder Tag mit einer Primzahl.
Wie oft kommt es im Monat vor, dass genau ein Arbeitstag zwischen zwei Feiertagen liegt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Zwei Höhen eines Dreiecks haben die Längen 10 cm und 11 cm.
Welche der folgenden Längen kann die dritte Höhe nicht haben?

(A) 5 cm (B) 6 cm (C) 7 cm (D) 10 cm (E) 100 cm

27. Jakob notiert vier aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen. Er berechnet alle möglichen Summen von je drei dieser Zahlen und stellt fest, dass keine dieser Summen eine Primzahl ist.
Was ist die kleinste Zahl, die Jakob notiert haben kann?

(A) 12 (B) 10 (C) 7 (D) 6 (E) 3

28. Vier Sportlerinnen und Sportler sitzen zum Abendessen an einem runden Tisch. Sie betreiben vier verschiedene Sportarten: Eislauf, Schifahren, Hockey und Rodeln. Die Person, die Schi fährt, sitzt links neben Sandra. Die Person, die Eis läuft, sitzt gegenüber von Benjamin. Eva und Philipp sitzen neben einander. Eine Frau sitzt links neben der Person, die Hockey spielt. Welchen Sport betreibt Eva?

(A) Eislauf (B) Schifahren (C) Hockey (D) Rodeln
(E) Man kann es mit dieser Information nicht herausfinden.

29. Ein Datum kann man in der Form TT.MM.JJJJ schreiben. So ist z.B. das heutige Datum der 17.03.2016. Wir bezeichnen ein Datum als „überraschend", wenn alle 8 Ziffern in dieser Schreibweise verschieden sind.
In welchem Monat findet das nächste überraschende Datum statt?

(A) März (B) Juni (C) Juli (D) August (E) Dezember

30. An einer Konferenz nehmen genau 2016 Personen teil. Diese werden als P1 bis P2016 im System geführt. Jede Person von P1 bis P2015 hat genau so vielen anderen die Hand gegeben, wie die eigene Systemnummer angibt.
Wie vielen Personen hat P2016 die Hand gegeben?

(A) 1 (B) 504 (C) 672 (D) 1008 (E) 2015

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Level: Junior, Grade 9 and 10

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2016" an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Level Junior (Grade 9 and 10)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Points Questions -

1. The arithmetic mean of four numbers is 9. What is the fourth number if the three other numbers are 5, 9 and 12?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 36

2. Which of the following numbers is closest to the number $\frac{17\times 0.3\times 20.16}{999}$?

(A) 0.01 (B) 0.1 (C) 1 (D) 10 (E) 100

3. Ruth takes part in the kangaroo competition where 30 questions have to be answered. She answers every question and each answer is either right or wrong. She has 50% more right than wrong answers. How many of her answers are right?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 20

4. Five points are given in a Cartesian coordinate system: P(-1, 3), Q(0, -4), R(-2, -1), S(1, 1), T(3, -2). Four of these five points are vertices of a square. Which point does not belong there?

(A) P (B) Q (C) R (D) S (E) T

5. If a positive whole number x is divided by 6, the remainder is 3. What is the remainder if $3\times x$ is divided by 6?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

6. 2016 hours are how many weeks?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 16

7. Lukas invents his own notation for negative numbers. When counting backwards he writes:
... 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, ... What is the result of the calculation 000 + 0000 in his notation?

(A) 1 (B) 00000 (C) 000000 (D) 0000000 (E) 00000000

8. I have some unusual dice. On their faces are the digits 1 to 6 as usual, however the odd numbers are negative (so -1, -3, -5 instead of 1, 3, 5). I throw two such dice at the same time. Which of the following sums can I definitely not achieve with one such throw?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 (E) 8

9. Step by step the word VELO is changed into the word LOVE. In every step two adjacent letters are allowed to be swapped around. What is the minimum amount of steps needed?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

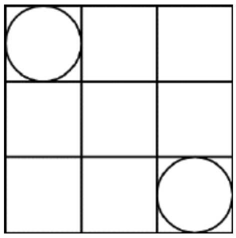
10. Sven writes five different single-digit positive whole numbers on a board. He realises that no sum of two of these numbers is equal to 10. Which of the following numbers has Sven definitely written on the board?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Points Questions -

11. For the real numbers a, b, c, d the following holds true: $a+5=b^2-1=c^2+3=d-4$. Which of the numbers *a, b, c, d* is biggest?
(A) a (B) b (C) c (D) d (E) It cannot be uniquely determined using this information.

12. A 3×3 field is made up of 9 unit squares. In two of these squares, circles are inscribed as shown in the diagram.
How big is the shortest distance between these circles?

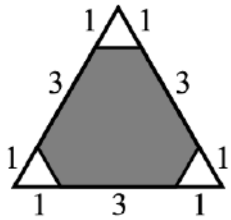


(A) $\mathbf{2\sqrt{2}-1}$ (B) $\sqrt{2}+1$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2 (E) 3

13. A knock-out tennis tournament is taking place. There are seven matches (4 quarter finals, 2 semi finals and one final). The results for six of the seven matches are known (but not necessarily in this order):
Bella beats Ann, Celine beats Donna, Gina beats Holly,
Gina beats Celine, Celine beats Bella, Emma beats Farah.
Which result is missing?

(A) Gina beats Bella (B) Celine beats Ann (C) Emma beats Celine
(D) Bella beats Holly (E) Gina beats Emma

14. What percentage of the area of the triangle is coloured in grey in the adjacent diagram?



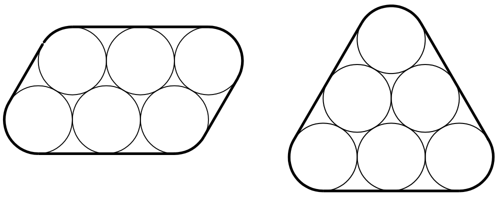
(A) 80% (B) 85% (C) 88% (D) 90% (E) It cannot be calculated.

15. Jilly makes up a multiplication magic square using the numbers 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 and 100. The products of the numbers in each row, column and diagonal should be equal.
In the diagram it can be seen how she has started.
Which number goes into the cell with the question mark?

20	**1**	
		?

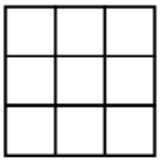
(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 10 (E) 25

16. Jack wants to keep six tubes each of diameter 2 cm together using a rubber band. He chooses between the two possible variations shown.
How are the lengths of the rubber bands related to each other?



(A) In the left picture the band is π cm shorter.
(B) In the left picture the band is 4 cm shorter. (C) In the right picture the band is π cm shorter.
(D) In the right picture the band is 4 cm shorter. (E) Both bands are equally long.

17. Peter wants to colour in the cells of a 3×3 square so that every row, every column and both diagonals each have three cells with three different colours.
What is the smallest number of colours with which Peter can achieve this?

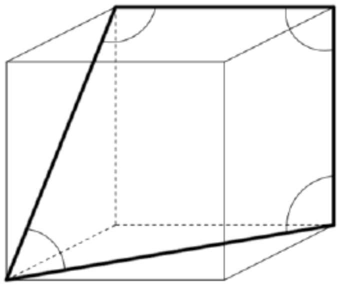


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

18. Eight cards with the numbers 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 are each in an unmarked envelope. Eva randomly chooses some of these eight envelopes. Ali takes the remaining ones. Both add their numbers together. They find out that Eva's sum is 31 bigger than Ali's sum. How many envelopes has Eva chosen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

19. In the diagram we see a cube and four marked angles.
How big is the sum of those angles?



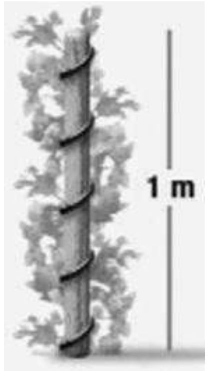
(A) 315° (B) 330° (C) 345° (D) 360° (E) 375°

20. In an enclosure there are 2016 kangaroos. Each of them is either red or grey, and there is at least one red and at least one grey kangaroo amongst them.
For each kangaroo K we calculate the fraction obtained, if you take the number of kangaroos of the other colour divided by the kangaroos of the own colour (including K itself).
Determine the sum of these 2016 fractions.

(A) 2016 (B) 1344 (C) 1008 (D) 672 (E) More information is necessary.

5 Points Questions

21. A creeping plant twists exactly 5 times around a post with circumference 15 cm (as shown in the diagram) and thus reaches a height of 1 m. While the plant grows the height of the plant also grows with constant speed. How long is the creeping plant?

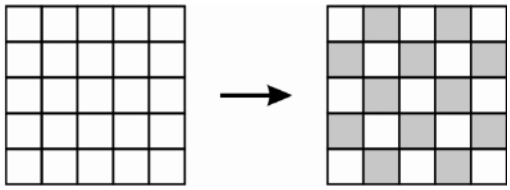


(A) 0.75 m (B) 1.0 m (C) 1.25 m (D) 1.5 m (E) 1.75 m

22. What is the biggest remainder one can obtain by dividing a two-digit number by the sum of its digits?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

23. We consider a 5×5 square that is split up into 25 fields. Initially all fields are white. In each move it is allowed to change the colour of two fields that are horizontally or vertically adjacent (i.e. white fields turn black and black ones turn white). What is the smallest number of moves needed to obtain the chessboard colouring shown in the diagram?



(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

24. A motorboat drives in the middle of a stream. Downstream it needs four hours to get from X to Y. In order to drive back from Y to X it needs six hours. Tree trunks are also floating on the stream.
How many hours does it take for a tree trunk to float in the middle of the stream from X to Y?

(A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 20 (E) 24

25. In the Kangaroo Republic, every month has 40 days, which are numbered through from 1 to 40. Every day with a number that is divisible by 6 is a public holiday, and likewise every day with a prime number.
How often per month does it occur that there is exactly one working day between two public holidays?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Two heights of a triangle have lengths 10 cm and 11 cm.
Which of the following lengths cannot be the length of the third height?

(A) 5 cm (B) 6 cm (C) 7 cm (D) 10 cm (E) 100 cm

27. Jakob writes down four consecutive positive whole numbers. He calculates all possible sums of three of those numbers und realises that none of those sums is a prime number.
What is the smallest number that Jakob could have written down?

(A) 12 (B) 10 (C) 7 (D) 6 (E) 3

28. Four sportswomen and sportsmen are sitting around a round table for dinner. They do four different sports: ice skating, skiing, hockey and sledging. The person who skies sits to the left of Sandra. The person who ice skates sits opposite Benjamin. Eva and Philipp sit next to each other. A woman sits next to the person who plays hockey.
Which sport does Eva do?

(A) Ice skating (B) Skiing (C) Hockey (D) Sledging
(E) It cannot be determined with this information.

29. A date can be written in the form DD.MM.YYYY; e.g. today's date is 17.03.2016. We call a date "surprising" if all 8 digits used in this notation are different.
In which month does the next surprising date occur?

(A) March (B) June (C) July (D) August (E) December

30. Exactly 2016 people are taking part in a conference. They are registered as P1 to P2016 in the system. Each person from P1 to P2015 has shaken exactly the amount of other hands that his/her own system number indicates.
How many people did P2016 shake hands with?

(A) 1 (B) 504 (C) 672 (D) 1008 (E) 2015

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Punkte Beispiele -

1. Das arithmetische Mittel von vier Zahlen ist 9. Wie lautet die vierte Zahl, wenn drei der Zahlen 5, 9 und 12 sind?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 **(D) 10** (E) 36

Die Summe der vier Zahlen ist $9 \cdot 4 = 36$, da $5 + 9 + 12 = 26$ ist, muss die fehlende Zahl **(D) 10** sein.

2. Welche der folgenden Zahlen ist der Zahl $\frac{17 \cdot 0{,}3 \cdot 20{,}16}{999}$ am nächsten?

(A) 0,01 **(B) 0,1** (C) 1 (D) 10 (E) 100

Da die Größenordnung des Ergebnisses relevant ist, führt zum Beispiel folgende Überlegung (abseits der genauen Berechnung) zum Ziel. Multiplikation mit $0{,}3$ entspricht in etwa der Division durch 3. Dividiert man 17 durch 3 ergibt das ungefähr 6. Weiters gilt $6 \cdot\ 20 = 120$. Dividiert man das durch 1000, erhält man $0{,}12$, wodurch die Antwort **(B) 0,1** lauten muss. Das exakte Ergebnis des Terms ist übrigens $0{,}109189$.

3. Ruth nimmt am Känguru-Wettbewerb teil, der aus 30 Fragen besteht. Sie hat dabei um 50% mehr richtige als falsche Antworten. Jede Frage wird von ihr beantwortet, und jede ihrer Antworten ist entweder richtig oder falsch. Wie viele ihrer Antworten sind richtig?

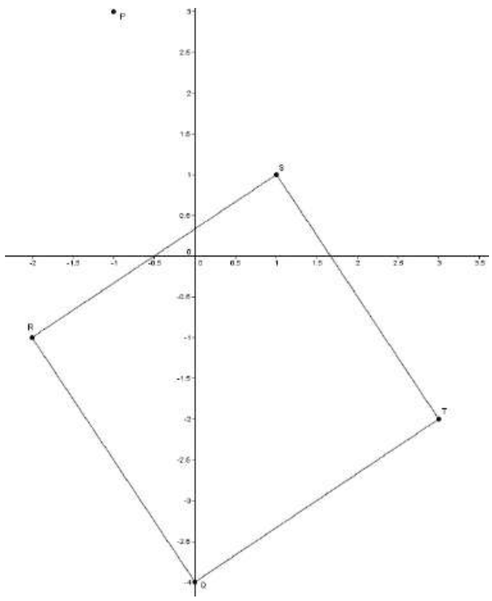
(A) 10 (B) 12 (C) 15 **(D) 18** (E) 20

Sei F die Anzahl der falsch beantworteten Fragen. Dann ist die Anzahl R der richtig beantworteten Fragen $R = F + 0{,}5 \cdot F$, da ja 50% mehr Fragen richtig beantwortet wurden. Die Anzahl aller beantworteten Fragen ergibt 30, also $R + F = F + 1{,}5 \cdot F = 30$, bzw. $F = 12$. Die Anzahl richtig beantworteter Fragen ist somit $1{,}5 \cdot 12 = 18$, Antwort **(D)**.

4. In einem kartesischen Koordinatensystem sind fünf Punkte gegeben: P(-1|3), Q(0|-4), R(-2|-1), S(1|1), T(3|-2). Vier dieser fünf Punkte sind die Eckpunkte eines Quadrats. Welcher Punkt gehört nicht dazu?

(A) P (B) Q (C) R (D) S (E) T

Wie man im Bild sieht, ist Antwort **(A) P** kein Teil des Quadrats (der oberste Punkt).



5. Wenn man die positive ganze Zahl *x* durch 6 dividiert, bleibt der Rest 3. Welcher Rest bleibt, wenn man 3·*x* durch 6 dividiert?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

x ist laut Angabe in der Form $6 \cdot y + 3$ darstellbar. Somit gilt
$3 \cdot x = 3 \cdot (6y + 3) = 18y + 9 = 6 \cdot (3y + 2) + 3.$
und 3 ist aufgrund der letzten Darstellung der Rest bei Division durch 6. Die richtige Antwort ist **(B) 3**.

6. 2016 Stunden sind wie viele Wochen?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 **(D) 12** (E) 16

$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Eine Woche hat 7 Tage zu je 24 Stunden, also $7 \cdot 2^3 \cdot 3$ Stunden. Somit ist die richtige Antwort **(D)**, $2^2 \cdot 3 = 12$ Wochen, da das Produkt der beiden Zahlen 2016 ergibt.

7. Lukas erfindet seine eigene Schreibweise für negative Zahlen. Wenn er rückwärts zählt, schreibt er:
... 3, 2, 1, 0, 00, 000, 0000, ... Wie lautet das Ergebnis der Rechnung 000 + 0000 in seiner Schreibweise?

(A) 1 (B) 00000 **(C) 000000** (D) 0000000 (E) 00000000

Laut dieser Schreibweise entspricht 000 der Zahl -2 und 0000 der Zahl -3. Das Ergebnis der Rechnung ist -5, was der Schreibweise 000000, also Lösung **(C)** bedeutet.

8. Ich habe einige ungewöhnliche Würfel. Auf ihren Seiten stehen wie üblich die Ziffern 1 bis 6, allerdings sind die ungeraden Zahlen negativ (also -1, -3, -5 anstelle von 1, 3, 5). Ich würfle gleichzeitig mit zwei derartigen Würfeln. Welche der folgenden Summen kann ich danach sicher nicht ablesen?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 **(D) 7** (E) 8

$3 = 6 - 3, 4 = 2 + 2, 5 = 6 - 1$ und $8 = 6 + 2$. Somit ist die einzige Summe, die ich nicht ablesen kann **(D) 7**.

9. Schritt für Schritt soll aus dem Wort VELO das Wort LOVE entstehen. In jedem Schritt dürfen zwei benachbarte Buchstaben vertauscht werden. Wie viele Schritte sind mindestens erforderlich?

(A) 3 **(B) 4** (C) 5 (D) 6 (E) 7

Um möglichst wenige Schritte zu benötigen, dürfen die Buchstaben VE und LO, die bereits in der richtigen Reihenfolge stehen, nicht vertauscht werden. L und O müssen jeweils 2 Positionen nach links, somit ist dies mit 3 Vertauschungen nicht möglich. Eine Folge von Vertauschungen, die minimal ist, ist folgende:
VELO -> VLEO -> LVEO -> LVOE -> LOVE
womit Antwort **(B) 4** Schritte optimal sind.

10. Sven schreibt fünf verschiedene einziffrige positive ganze Zahlen auf die Tafel. Er stellt fest, dass keine Summe von zwei dieser Zahlen gleich 10 ist. Welche der folgenden Zahlen hat Sven sicher auf die Tafel geschrieben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 **(E) 5**

Für jede der Zahlen 1-4 gibt es eine entsprechende Zahl von 6-9, die zusammen addiert 10 ergeben. Von jedem dieser 4 Pärchen kann Sven somit höchstens eine Zahl auf die Tafel geschrieben haben. Die fünfte Zahl muss somit **(E) 5** sein.

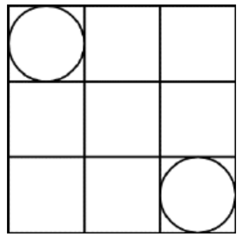
- 4 Punkte Beispiele -

11. Für reelle Zahlen *a, b, c, d* gelte $a + 5 = b^2 - 1 = c^2 + 3 = d - 4$. Welche der Zahlen *a, b, c, d* ist am größten?

(A) a (B) b (C) c **(D) d** (E) Das kann aus dieser Information nicht eindeutig bestimmt werden.

Es gilt $a + 5 = d - 4$, womit $d = a + 9$ ist. Analog gilt $d = b^2 + 3$ und $d = c$^2 + 7. Im Allgemeinen folgt aus Gleichungen der Form $y = x$^2 + k nicht unbedingt, dass y größer als x ist, da im Intervall (0,1) das Quadrat einer Zahl kleiner ist als die Zahl selbst (z.B. $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$). Da jedoch die konstante Zahl, die zum Quadrat hinzugefügt wird (3 bzw. 7) groß genug ist, um zu gewährleisten, dass d größer als b und c ist, ist **(D) d** richtig.

12. Ein 3×3 Feld besteht aus 9 Einheitsquadraten. In zwei dieser Quadrate sind (wie in der Abbildung zu sehen) Kreise berührend eingeschrieben.
Wie groß ist der kürzeste Abstand dieser Kreise?



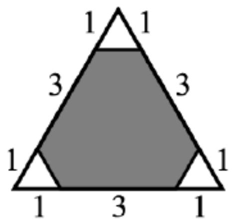
(A) $2\sqrt{2} - 1$ (B) $\sqrt{2} + 1$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) 2 (E) 3

Die kürzeste Verbindung der beiden Kreise ist natürlich von Mittelpunkt zu Mittelpunkt. Diese Entfernung entspricht genau 2 Diagonalen der Einheitsquadrate, also $2 \cdot \sqrt{2}$. Davon muss man jeweils den Radius der beiden Kreise abziehen, da man ja den Abstand berechnen will. Der Radius ist 0,5. Somit ist der Abstand **(A) $2 \cdot \sqrt{2} - 1$**.

13. Ein Tennisturnier wird im KO-System ausgetragen. Es finden sieben Partien statt (4 Viertelfinali, 2 Halbfinali und ein Finale). Man kennt sechs der sieben Spielergebnisse (aber nicht unbedingt in dieser Reihenfolge):
Bella schlägt Ann, Celine schlägt Donna, Gina schlägt Holly,
Gina schlägt Celine, Celine schlägt Bella, Emma schlägt Farah.
Welches Ergebnis fehlt?

(A) Gina schlägt Bella (B) Celine schlägt Ann (C) Emma schlägt Celine
(D) Bella schlägt Holly **(E) Gina schlägt Emma**

Der Name Celine kommt 3 mal vor, womit sie bis ins Finale vorgestoßen war. Sie hat demnach das Finale gegen Gina verloren. Der Name Gina kommt nur 2 mal vor, womit ein Match von ihr fehlt. Emma gewinnt einmal und kommt danach nicht mehr vor, womit das Halbfinale Gina schlägt Emma, **Antwort (E)** in dieser Liste fehlt.



14. Wie viel Prozent der Dreiecksfläche ist in der nebenstehenden Figur grau gefärbt?

(A) 80% (B) 85% **(C) 88%** (D) 90% (E) Man kann es nicht berechnen.

Das große Dreieck kann in lauter 1 mal 1 Dreiecke zerteilt werden. In der untersten Ebene sind das 9 Stück, darüber 7, dann 5 dann 3 und schließlich das oberste, das ja weiß gefärbt ist. Insgesamt sind das 25 Quadrate, davon sind 3 weiß und 22 grau. Jedes einzelne ist 4% der Gesamtfläche, womit Antwort **(C) 88%** der Fläche grau sind.

15. Jilly macht ein multiplikatives Zauberquadrat mit den Zahlen 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 und 100. Die Produkte der Zahlen in jeder Zeile, Spalte und Diagonale sollen gleich sein.
In der Abbildung sieht man, wie sie begonnen hat.
Welche Zahl kommt in das Feld mit dem Fragezeichen?

20	1	
		?

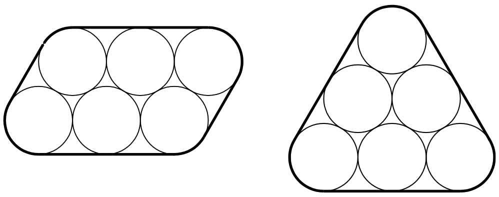
(A) 2 **(B) 4** (C) 5 (D) 10 (E) 25

Durch geschicktes Probieren erhält man folgendes Zauberquadrat:

20	1	50
25	10	4
2	100	5

Somit ist Antwort **(B) 4** richtig.
Folgende Ideen können beim Finden dieser Lösung helfen:
→ Die intuitive Vermutung (aufgrund der selben Häufigkeit der Primfaktoren 2 und 5), dass das Ergebnis eine Potenz von 10 ist, bewahrheitet sich tatsächlich.
→ In die Spalte der Zahl 1 sollte man auf alle Fälle versuchen, die Zahl 100 zu platzieren, und zwar nicht in der Mitte des Quadrates, da sonst das Produkt sehr groß wäre.
→ $20 \cdot 50 = 100 \cdot 10$, und $100 = 25 \cdot 4$ und $20 = 4 \cdot 5$, womit die restlichen Felder eindeutig bestimmt werden.

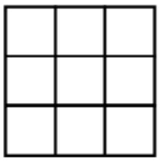
16. Jack möchte sechs Rohre mit einem Durchmesser von je 2 cm mit einen Gummiring zusammenhalten. Er entscheidet sich zwischen den beiden abgebildeten Varianten.
Wie hängen die Längen der Gummiringe zusammen?



(A) Im linken Bild ist der Ring um π cm kürzer.
(B) Im linken Bild ist der Ring um 4 cm kürzer.
(C) Im rechten Bild ist der Ring um π cm kürzer.
(D) Im rechten Bild ist der Ring um 4 cm kürzer.
(E) Beide Ringe sind gleich lang.

Die Gummiringe sind jeweils das Sechsfache des Durchmessers und einmal den Umfang eines Kreises lang. Somit ist Antwort **(E)** richtig.

17. Peter möchte die Felder eines 3×3 Quadrats so färben, dass jede Zeile, jede Spalte und beide Diagonalen jeweils drei Felder mit drei verschiedenen Farben haben.
Was ist die kleinste Anzahl von Farben, mit denen Peter dies erreichen kann?



(A) 3 (B) 4 **(C) 5** (D) 6 (E) 7

Für die erste Zeile benötigt man 3 Farben. Sollte man in der zweiten Zeile nur eine neue Farbe verwenden (in der Mitte des Quadrates braucht man auf alle Fälle eine neue Farbe), so muss man in der letzten Zeile auf alle Fälle zwei weitere Farben verwenden. Das wäre allerdings nicht optimal. Verwendet man in der 2.Zeile 2 neue Farben, so benötigt man in der letzten Zeile keine weitere neue Farbe, somit ist Antwort **(C) 5** Farben richtig. Im folgenden Beispiel steht jeder Buchstabe für eine (verschiedene) Farbe:

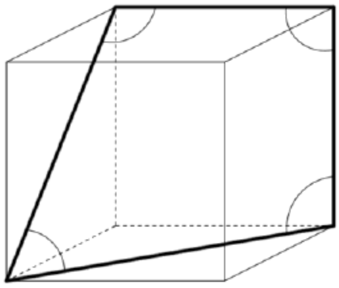
A	B	C
D	E	B
E	A	D

18. Acht Karten mit den Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 stecken jeweils in einem unmarkierten Kuvert. Eva wählt zufällig einige dieser acht Kuverts. Ali nimmt den Rest. Beide addieren ihre Zahlen. Es stellt sich heraus, dass Evas Summe um 31 größer ist als Alis Summe. Wie viele Kuverts hat Eva gewählt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D) 5** (E) 6

Die Summe der ersten paar Zahlen ist immer um eins kleiner als die nächste Zahl dieser Reihe. Da Evas Summe größer ist, hat sie auf alle Fälle die Zahl 128 gewählt. Damit wäre ihre Summe um 1 größer als Alis Summe. Hat sie zusätzlich noch Kuverts mit der Summe 15, dann hat sie um genau 31 mehr als Ali. Somit hat Eva $128 + 8 + 4 + 2 + 1 = 143$, Ali hat $16 + 32 + 64 = 112$, und Antwort **(D) 5** ist die Anzahl an Kuverts, die Eva genommen hat.

19. Im Bild sehen wir einen Würfel und vier markierte Winkel.
Wie groß ist die Summe dieser Winkel?



(A) 315° **(B) 330°** (C) 345° (D) 360° (E) 375°

Bis auf den Winkel unten links sind alle Winkel zwischen Kante und Diagonale bzw. zwei Kanten des Würfels und somit 90°. Der Winkel links unten ist 60° groß, was man am einfachsten folgendermaßen sieht: verbindet man die hintere Diagonale des Würfels, so ergibt sich ein Dreieck bestehend aus 3 Diagonalen, womit das Dreieck gleichseitig ist und somit jeder Winkel 60° groß ist. Insgesamt erhält man $90° + 90° + 90° + 60° = 330°$, Antwort **(B).**

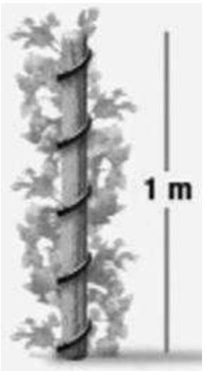
20. In einem Gehege befinden sich 2016 Kängurus. Jedes von ihnen ist entweder rot oder grau, und es gibt mindestens ein rotes und mindestens ein graues Känguru darunter.
Für jedes Känguru K berechnen wir den Bruch, der sich ergibt, wenn man die Anzahl der Kängurus der anderen Farbe durch die Anzahl der Kängurus mit derselben Farbe (inklusive K selbst) dividiert.
Bestimme die Summe dieser 2016 Brüche.

(A) 2016 (B) 1344 (C) 1008 (D) 672 (E) Mehr Information ist notwendig.

Sei die Anzahl der roten Kängurus K und somit die Anzahl der grauen Kängurus $2016 - K$.
Für jedes rote Känguru erhält man denselben Bruch $\frac{2016-K}{K}$, für jedes graue Känguru den Bruch $\frac{K}{2016-K}$. Den ersten Bruch summiert man K mal, den zweiten Bruch
$2016 - K$ mal, wodurch man als Summe $(2016 - K) + K = 2016$, Antwort **(A)** erhält.

- 5 Punkte Beispiele -

21. Eine Kletterpflanze windet sich wie abgebildet genau 5 Mal um eine Säule mit 15 cm Umfang und erreicht dabei eine Höhe von 1 m. Beim Wachsen der Pflanze wächst auch die Höhe der Pflanze mit konstanter Geschwindigkeit. Wie lang ist die Kletterpflanze?



(A) 0,75 m (B) 1,0 m **(C) 1,25 m** (D) 1,5 m (E) 1,75 m

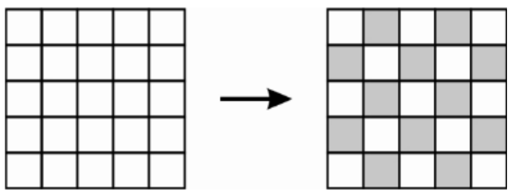
Eine Umrundung um die Säule ($15\ cm$) entspricht $20\ cm$ Höhe, da 5 Umrundungen $1\ m$ Höhe entsprechen. Somit hat die Kletterpflanze die Länge der Hypotenuse des rechtwinkeligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $15\ cm$ und $20\ cm$. Das ergibt $25\ cm$. Da die Kletterpflanze 5 Umrundungen lang ist, ist die gesamte Länge der Pflanze **(C) 1,25 m**.

22. Wie groß ist der größtmögliche Rest, den man erhalten kann, wenn man eine zweiziffrige Zahl durch ihre Ziffernsumme dividiert?

(A) 13 (B) 14 **(C) 15** (D) 16 (E) 17

Der Rest bei einer Division ist immer kleiner als der Divisor. Die Ziffernsumme einer zweiziffrigen Zahl ist höchstens 18, allerdings ergibt $99: (9 + 9)$ nur den Rest 9. Führt man diese Vorgangsweise weiter fort, erhält man den Rest 13 und 4 bei den Rechnungen
$98: (9 + 8)$ bzw. $89: (9 + 8)$. Der nächstgrößere Divisor ist 16 und da $79: (9 + 7)$ den Rest 15 ergibt, ist dies der größtmögliche Rest und Antwort **(C)** ist richtig.

23. Wir betrachten ein 5×5 Quadrat, das in 25 Felder aufgeteilt ist. Zu Beginn sind alle Felder weiß. In jedem Zug ist es erlaubt, die Farben von zwei horizontal oder vertikal benachbarten Feldern zu ändern (d.h. weiße Felder werden schwarz und schwarze werden weiß). Was ist die kleinste Anzahl von Zügen, mit denen man die in der Figur abgebildete Schachbrettfärbung erreichen kann?



(A) 11 **(B) 12** (C) 13 (D) 14 (E) 15

Zuerst erkennen wir, dass diese Färbung mittels 11 Zügen nicht erreicht warden kann. Da keine schwarzen Felder nebeneinander liegen, benöigen wir zum Färben eines Feldes mindestens einen Zug, also insgesamt mindestens 12 Züge. Es gibt tatsächlich eine Möglichkeit, die gewünschte Färbung mittels 12 Zügen zu erreichen: Zuerst färben wir das Feld in der Mitte 4 mal: jeweils einmal mit dem Feld darüber, darunter, links und rechts davon. Das Feld in der Mitte ist wieder weiß (4 mal gefärbt), die benachbarten 4 Felder sind alle Schwarz (jeweils einmal gefärbt worden). Danach müssen noch 4 kleine 2×2 Quadrate am Rand (links oben, rechts oben, links unten, rechts unten) richtig gefärbt werden. Dafür färbt man zB jedes der 4 Eckfelder einmal mit dem darunter (bzw. darüber) liegenden Feld und einmal mit dem Feld links davon (bzw. rechts davon). Nunsind die Eckfelder wieder weiß und genau die 12 gewünschten Felder Schwarz. Wir haben im ersten Schritt 4 Züge benötigt, im zweiten Schritt 8 Züge, insgesamt also **(B) 12** Züge.

24. Ein Motorboot fährt in der Mitte eines Stromes. Stromabwärts braucht es von X nach Y vier Stunden. Um wieder von Y nach X zurückzufahren, benötigt es sechs Stunden. Auf dem Strom schwimmen auch Baumstämme. Wie viele Stunden dauert es, bis ein Baumstamm in der Strommitte von X nach Y treibt?

(A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 20 **(E) 24**

1. Aufgrund der Formel „Weg=Geschwindigkeit mal Zeit“ erhält man folgende Gleichungen

$$W = (v + k) \cdot 4$$
$$W = (v - k) \cdot 6$$

Dabei ist der Weg von X nach Y (bzw. Y nach X) gleich W und die Geschwindigkeit des Motorbootes v. Die Geschwindigkeit der Strömung nennen wir k, und da man für die erste Strecke kürzere Zeit benötigt, wird die Strömungsgeschwindigkeit addiert. Nun erhält man

$$v = \frac{W}{4} - k = \frac{W}{6} + k$$

indem man die beiden Gleichungen nach v auflöst. Daraus berechnet man
$W = 2 \cdot k.$
Für den Baumstamm gilt es nun, die Zeit t zu berechnen, die er für den Weg von X nach Y benötigt:

$$W = k \cdot t$$
$$24 \cdot k = k \cdot t$$

woraus $t = 24$ folgt. Antwort **(E)** ist richtig.

25. In der Känguru-Republik hat jeder Monat 40 Tage, die von 1 bis 40 durchnummeriert sind. Jeder Tag mit einer durch 6 teilbaren Zahl ist ein Feiertag, und ebenso jeder Tag mit einer Primzahl. Wie oft kommt es im Monat vor, dass genau ein Arbeitstag zwischen zwei Feiertagen liegt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Wir markieren alle Feiertage eines Monats:
1 **2 3** 4 **5 6 7** 8 9 10 **11 12 13** 14 15 16 **17 18 19** 20 21 22 **23 24** 25 26 27 28 **29 30 31** 32 33 34 35 **36 37** 38 39 40 1
Man sieht, dass nur der 4. Tag des Monats zwischen zwei Feiertagen liegt, womit Antwort **(A) 1** richtig ist.

26. Zwei Höhen eines Dreiecks haben die Längen 10 cm und 11 cm. Welche der folgenden Längen kann die dritte Höhe nicht haben?

(A) 5 cm (B) 6 cm (C) 7 cm (D) 10 cm (E) 100 cm

Sei die dritte Höhe des Dreiecks h, die drei Seiten a, b und c. Die Dreiecksungleichung besagt, dass die Summe zweier Seiten immer größer sein muss als die dritte Seite. Wir nutzen die Flächenformel $A = \frac{a \cdot h_a}{2}$ und versuchen ein Dreieck zu finden, dessen Höhe $h = h_c = 5$ cm ist. Dieses müsste die Gleichungen

$$\frac{a \cdot 10}{2} = \frac{b \cdot 11}{2} = \frac{c \cdot 5}{2}$$

erfüllen. Demnach ist die Seite b am kleinsten und die Seite c doppelt so groß wie die Seite a. Nun wäre $c = a + a > a + b$, was ein Widerspruch zur Dreiecksungleichung ist. Damit ist ein Dreieck mit **(A) 5** cm als dritter Höhe unmöglich.

27. Jakob notiert vier aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen. Er berechnet alle möglichen Summen von je drei dieser Zahlen und stellt fest, dass keine dieser Summen eine Primzahl ist.
Was ist die kleinste Zahl, die Jakob notiert haben kann?

(A) 12 (B) 10 **(C) 7** (D) 6 (E) 3

$$6+8+9=23$$

Somit ist die kleinstmögliche Zahl nicht 6. Allerdings gilt

$$7+8+9=24$$
$$7+8+10=25,$$
$$7+9+10=26$$
$$8+9+10=27$$

und keine dieser Summen ist eine Primzahl. Antwort **(C) 7** ist richtig.

28. Vier Sportlerinnen und Sportler sitzen zum Abendessen an einem runden Tisch. Sie betreiben vier verschiedene Sportarten: Eislauf, Schifahren, Hockey und Rodeln. Die Person, die Schi fährt, sitzt links neben Sandra. Die Person, die Eis läuft, sitzt gegenüber von Benjamin. Eva und Philipp sitzen neben einander. Eine Frau sitzt links neben der Person, die Hockey spielt. Welchen Sport betreibt Eva?

(A) Eislauf (B) Schifahren (C) Hockey (D) Rodeln
(E) Man kann es mit dieser Information nicht herausfinden.

Benjamin muss links neben Sandra sitzen und somit Schifahren, damit Eva und Philipp nebeneinander sitzen können. Eva muss gegenüber von Benjamin sitzen und Eis laufen, damit eine Frau links neben der Person sitzen kann, die Hockey spielt (Philipp). Somit rodelt Sandra und die Zuordnung (Sitzplatz und Sportart) ist eindeutig, sobald eine Person einen fixen Platz zugeteilt bekommt (zB Sandra sitzt "unten"):

	Philipp (Hockey)	
Benjamin (Schi fahren)		Eva (Eislauf)
	Sandra (Rodeln)	

Antwort **(A) Eislauf** ist richtig.

29. Ein Datum kann man in der Form TT.MM.JJJJ schreiben. So ist z.B. das heutige Datum der 17.03.2016. Wir bezeichnen ein Datum als „überraschend", wenn alle 8 Ziffern in dieser Schreibweise verschieden sind.
In welchem Monat findet das nächste überraschende Datum statt?

(A) März **(B) Juni** (C) Juli (D) August (E) Dezember

Da 2016 eine 0, eine 1 und eine 2 enthält, kann es in diesem Jahr kein überraschendes Datum geben, da für das Monat mindestens eine dieser Ziffern benötigt wird.
Ein "überraschendes" Datum ist 17.06.2345.
Behauptung: Davor gibt es kein überraschendes Datum mehr.
Die Ziffer 0 muss für den Tag oder das Monat frei bleiben, somit wäre das nächstmögliche Jahr von der Form $21xy$. Dafür müsste der Tag der 30. im Monat sein, weil die Ziffern 1und 2 schon verwendet wurden. Damit wurden aber die Ziffern 0,1 und 2 bereits verwendet wurden und kein Monat steht mehr zur Verfügung, um ein "überraschendes" Datum zu erhalten.
Somit ist tatsächlich ein Jahr der Form $23xy$ für ein "überraschendes" Datum notwendig, und da die Ziffern 0 und 1 für das Monat oder den Tag auf alle Fälle benötigt wird, ist das obengenannte Datum das nächste überraschende Datum und Antwort **(B) Juni** richtig.

30. An einer Konferenz nehmen genau 2016 Personen teil. Diese werden als P1 bis P2016 im System geführt. Jede Person von P1 bis P2015 hat genau so vielen anderen die Hand gegeben, wie die eigene Systemnummer angibt. Wie vielen Personen hat P2016 die Hand gegeben?

(A) 1 (B) 504 (C) 672 **(D) 1008** (E) 2015

P2015 gab jedem anderen Teilnehmer (also auch P2016) die Hand, P2014 jedem außer P1, P2013 jedem außer P1 und P2 usw. P1008 gab jedem die Hand, dessen Nummer größer ist als die eigene und alle Handschläge sind dadurch eindeutig beschrieben. Somit hat P2016 den Teilnehmern P1008,P1009,...,P2015 die Hand gegeben, was der Antwort **(D) 1008** entspricht.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Kategorie: Student, Schulstufe: 11 – 13

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2016“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Punkte Beispiele -

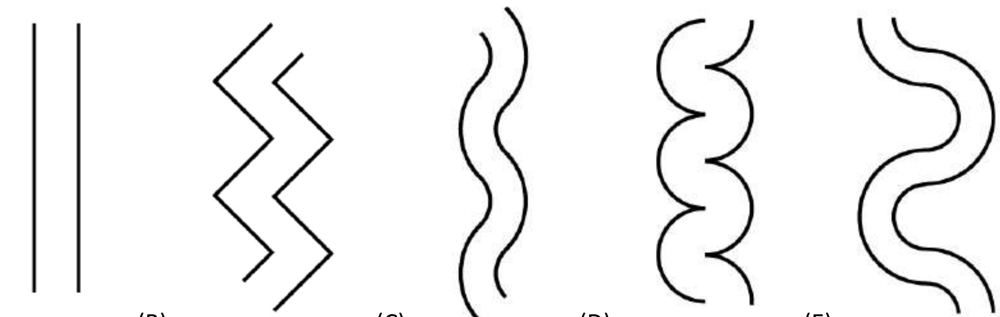
1. Die Summe der Alter von Tom und Johann ist 23. Die Summe der Alter von Johann und Alex ist 24 und die Summe der Alter von Alex und Tom ist 25. Wie alt ist der Älteste von ihnen?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

2. Die Summe $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ ergibt

(A) $\frac{3}{111}$ (B) $\frac{111}{1110}$ (C) $\frac{111}{1000}$ (D) $\frac{3}{1000}$ (E) $\frac{3}{1110}$

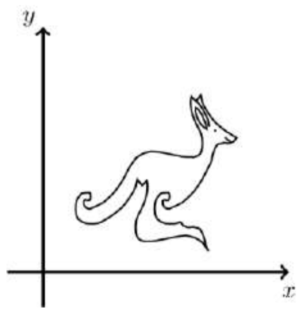
3. Maria möchte eine Brücke über einen Fluss bauen. Dieser Fluss hat die besondere Eigenschaft, dass von jedem Punkt am einen Ufer aus die kürzest mögliche Brücke ans andere Ufer immer gleich lang ist. Welches der folgenden Bilder ist sicher keine Abbildung dieses Flusses?



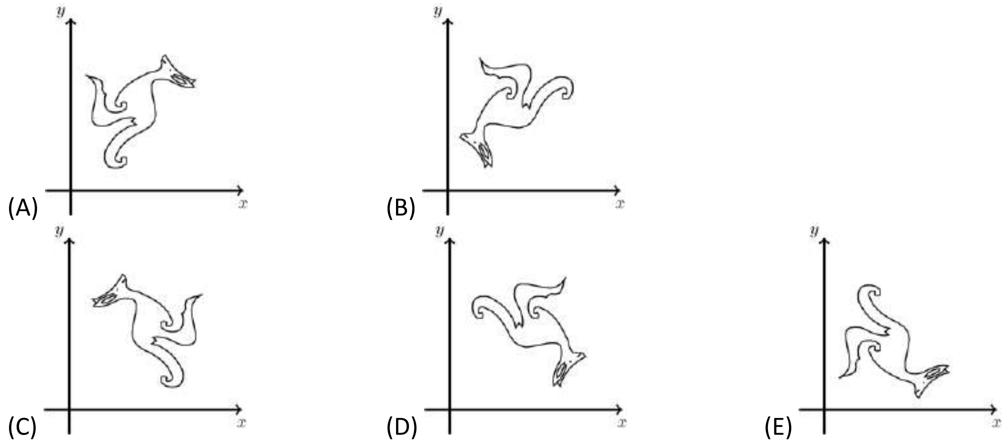
(A) (B) (C) (D) (E)

4. Wie viele ganze Zahlen sind größer als $2015\cdot 2017$, aber kleiner als $2016\cdot 2016$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2017

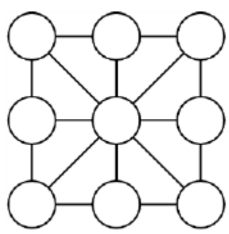


5. Eine Punktmenge ergibt wie abgebildet in der *xy*-Ebene das Bild eines Kängurus. Für jeden Punkt werden die *x*- und *y*-Koordinaten vertauscht. Wie sieht das resultierende Bild aus?



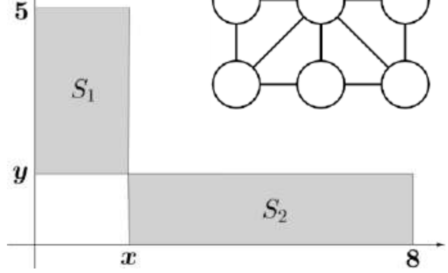
6. Wie viele Ebenen benötigt man mindestens, um einen begrenzten Bereich im dreidimensionalen Raum einzugrenzen?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



7. Diana möchte in jeden Kreis des vorgegebenen Musters ganze Zahlen so eintragen, dass für alle acht kleinen Dreiecke die Summe der drei Zahlen an den Ecken gleich sind. Wie viele verschiedene Zahlen kann sie dabei höchstens verwenden?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8



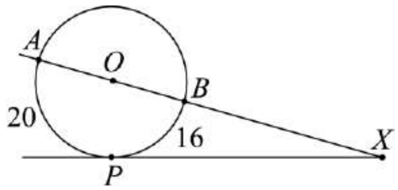
8. Die Rechtecke S_1 und S_2 im Bild haben dieselbe Fläche. Bestimme das Verhältnis $x : y$.

(A) $1:1$ (B) $3:2$ (C) $4:3$ (D) $7:4$ (E) $8:5$

9. Wenn $x^2 - 4x + 2 = 0$ gilt, so ist $x + \frac{2}{x}$ gleich

(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

10. In der Abbildung sehen wir einen Kreis mit Mittelpunkt *O*, sowie eine Tangente an diesen Kreis mit Berührpunkt *P*. Der Bogen *AP* hat die Länge 20, der Bogen *BP* die Länge 16. Wie groß ist der Winkel $\angle AXP$?

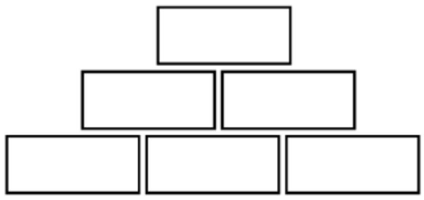


(A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° (E) 10°

- 4 Punkte Beispiele -

11. a, b, c, d sind positive ganze Zahlen, für die $a + 2 = b - 2 = c \cdot 2 = d : 2$ gilt.
Welche der vier Zahlen a, b, c und d ist am größten?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) Es ist nicht eindeutig bestimmt.



12. In dieser Zahlenpyramide ist die Zahl in jedem der oberen Felder gleich dem Produkt der beiden Zahlen in den unmittelbar darunterliegenden Feldern. Welche der folgenden Zahlen kann im obersten Feld nicht auftreten, wenn die Felder der untersten Reihe jeweils nur natürliche Zahlen größer als 1 enthalten?

(A) 56 (B) 84 (C) 90 (D) 105 (E) 220

13. Welchen Wert nimmt x_4 an, wenn $x_1 = 2$ und $x_{n+1} = {x_n}^{x_n}$ für $n \geq 1$ gilt?

(A) 2^{2^3} (B) 2^{2^4} (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

14. Im Rechteck $ABCD$ ist die Seite $\overline{BC}$ genau halb so lang wie die Diagonale $\overline{AC}$. Es sei *X* jener Punkt auf $\overline{CD}$, für den $|\overline{AX}| = |\overline{XC}|$ gilt. Wie groß ist der Winkel $\angle CAX$?

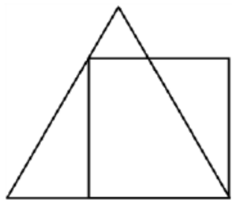
(A) 12,5° (B) 15° (C) 27,5° (D) 42,5° (E) ein anderer Winkel

15. Diana zerschneidet ein Rechteck mit der Fläche 2016 in 56 identische Quadrate. Die Seitenlängen des Rechtecks und der Quadrate sind lauter ganze Zahlen. Für wie viele verschiedene Rechtecke kann sie dies tun? (Zwei Rechtecke gelten als verschieden, wenn sie nicht kongruent sind.)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 0

16. Der Umfang des Quadrats in der Figur ist 4. Dann ist der Umfang des gleichseitigen Dreiecks

(A) 4 (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3 + \sqrt{2}$ (E) $4 + \sqrt{3}$

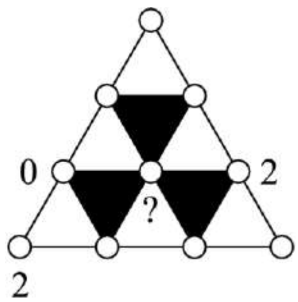


17. Auf der Insel der Ritter und Lügner ist jeder entweder ein Ritter (der nur die Wahrheit sagt) oder ein Lügner (der immer lügt). Während deiner Reise auf der Insel triffst du auf 7 Personen, die im Kreis um ein Lagerfeuer sitzen. Sie sagen dir alle „Ich sitze zwischen zwei Lügnern!". Wie viele Lügner sitzen am Lagerfeuer?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) Man benötigt mehr Information, um dies zu entscheiden.

18. Drei dreiziffrige Zahlen werden aus den Ziffern von 1 bis 9 so gebildet, dass jede der neun Ziffern genau einmal verwendet wird. Welche der folgenden Zahlen kann nicht die Summe der drei Zahlen sein?

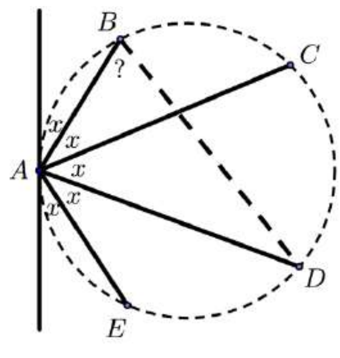
(A) 1500 (B) 1503 (C) 1512 (D) 1521 (E) 1575



19. Jeder der zehn Punkte in der Figur ist mit einer der Zahlen 0, 1 oder 2 beschriftet. Es ist bekannt, dass die Summe der Zahlen an den Eckpunkten jedes weißen Dreiecks durch 3 teilbar ist, während die Summe der Zahlen an den Eckpunkten jedes schwarzen Dreiecks nicht durch 3 teilbar ist. Drei der Punkte sind bereits so beschriftet, wie in der Figur vorgegeben. Mit welchen Zahlen kann der innere Punkt beschriftet werden?

(A) nur 0 (B) nur 1 (C) nur 2 (D) nur 0 und 1 (E) entweder 0 oder 1 oder 2

20. Bettina wählt fünf Punkte A, B, C, D und E auf einem Kreis und zeichnet die Kreistangente im Punkt A. Sie bemerkt, dass die fünf mit x beschrifteten Winkel alle gleich groß sind. (Beachte, dass die Figur nicht im Maßstab gezeichnet ist!)
Wie groß ist der Winkel $\angle ABD$?



(A) 66° (B) 70,5° (C) 72° (D) 75° (E) 77,5°

- 5 Punkte Beispiele -

21. Wie viele verschiedene reelle Lösungen hat die Gleichung

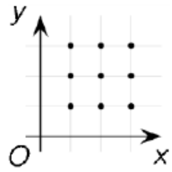
$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1 \qquad ?$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) unendlich viele

22. Ein Viereck besitzt einen Inkreis (d.h. alle vier Seiten des Vierecks sind Tangenten an den Kreis). Das Verhältnis vom Umfang des Vierecks zu dem des Kreises beträgt 4:3. Das Verhältnis von der Fläche des Vierecks zu dem des Kreises ist dann

(A) $4 : \pi$ (B) $3\sqrt{2} : \pi$ (C) $16 : 9$ (D) $\pi : 3$ (E) $4 : 3$

23. Wie viele quadratische Funktionen $y = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$) haben Graphen, die durch mindestens 3 der markierten Punkte gehen?



(A) 6 (B) 15 (C) 19 (D) 22 (E) 27

24. Im rechtwinkeligen Dreieck ABC (mit rechtem Winkel in A) schneiden einander die Winkelsymmetralen der spitzen Winkel im Punkt P . Der Abstand von P zur Hypotenuse beträgt $\sqrt{8}$. Wie groß ist der Abstand von P zu A ?

(A) 8 (B) 3 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$ (E) 4

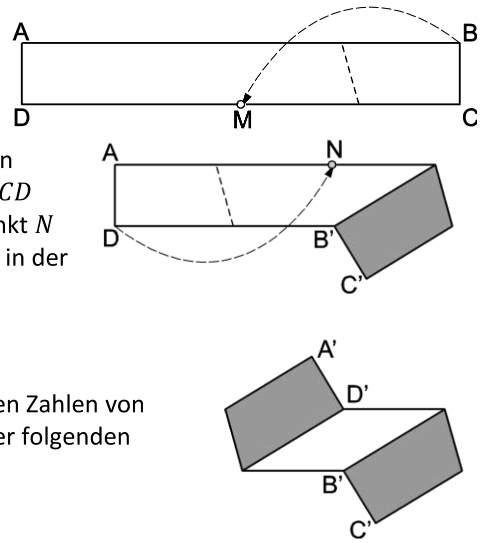
25. Die Gleichungen $x^2 + ax + b = 0$ und $x^2 + bx + a = 0$ haben beide reelle Lösungen. Es ist bekannt, dass die Summe der Quadrate der Lösungen der ersten Gleichung gleich der Summe der Quadrate der Lösungen der zweiten Gleichung ist, und dass $a \neq b$ gilt. Dann ist $a + b$ gleich

(A) 0 (B) -2 (C) 4 (D) -4 (E) Die Summe kann nicht eindeutig bestimmt werden.

26. In einem festen Würfel ist *P* ein Punkt im Inneren. Wir zerschneiden den Würfel in 6 (schiefe) Pyramiden. Jede Pyramide besitzt eine Seitenfläche des Würfels als Basisfläche und den Punkt *P* als Spitze. Die Volumina von fünf dieser Pyramiden betragen 2, 5, 10, 11 und 14. Wie groß ist das Volumen der sechsten Pyramide?

(A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

27. Ein rechteckiger Papierstreifen $ABCD$ ist 5 cm breit und 50 cm lang. Der Streifen ist auf einer Seite weiß und auf der anderen Seite grau. Christina faltet den Streifen wie abgebildet so, dass der Eckpunkt B mit dem Mittelpunkt M der Seite CD zusammenfällt. Anschließend faltet sie so, dass der Eckpunkt D mit dem Mittelpunkt N der Seite AB zusammenfällt. Wie groß ist die Fläche des sichtbaren weißen Stücks in der Figur?

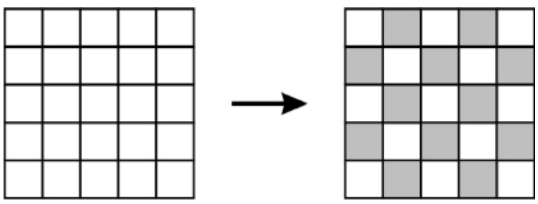


(A) 50 cm² (B) 60 cm² (C) 62,5 cm² (D) 100 cm² (E) 125 cm²

28. Anna wählt eine positive ganze Zahl n und notiert die Summe aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n. Eine Primzahl p teilt diese Summe, aber keine der Summanden. Welche der folgenden Zahlen ist ein möglicher Wert von $n + p$?

(A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269

29. Wir betrachten ein 5×5 Quadrat, das in 25 Felder aufgeteilt ist. Zu Beginn sind alle Felder weiß. In jedem Zug ist es erlaubt, die Farben von drei in einer waagrechten oder senkrechten Linie aneinander grenzenden Feldern zu tauschen (d.h. weiße Felder werden schwarz und schwarze werden weiß). Was ist die kleinste Anzahl von Zügen, mit denen man die in der Figur abgebildete Schachbrettfärbung erreichen kann?



(A) weniger als 10 (B) 10 (C) 12 (D) mehr als 12 (E) Diese Färbung kann nicht erreicht werden.

30. Die positive ganze Zahl N hat genau sechs verschiedene (positive) Teiler, inklusive 1 und N. Das Produkt von fünf dieser Teiler ist 648. Welche der folgenden Zahlen ist der sechste Teiler von N?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2016
17. 03. 2016

Level: Student, Grade 11 to 13

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2016“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2017 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2017 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.

DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2016
Level Student (from grade 11)
Österreich – 17.03.2016

- 3 Point Questions -

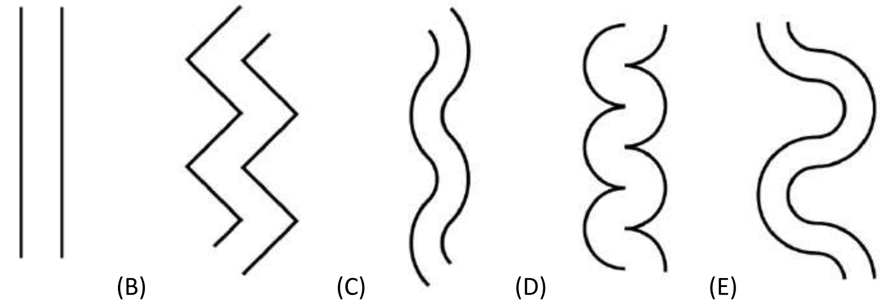
1. The sum of the ages of Tom and Johann is 23. The sum of the ages of Johann and Alex is 24 and the sum of the ages of Alex and Tom is 25. How old is the oldest of them?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

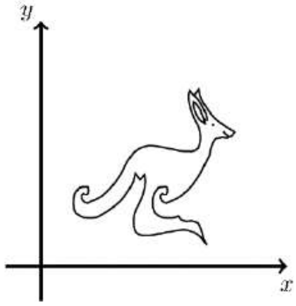
2. The sum $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$ gives

(A) $\frac{3}{111}$ (B) $\frac{111}{1110}$ (C) $\frac{111}{1000}$ (D) $\frac{3}{1000}$ (E) $\frac{3}{1110}$

3. Maria wants to build a bridge across a river. This river has the special feature that from each point along one shore the shortest possible bridge to the other shore has always got the same length. Which of the following diagrams is definitely not a sketch of this river?



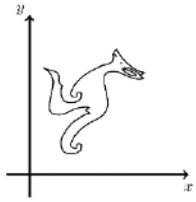
(A) (B) (C) (D) (E)



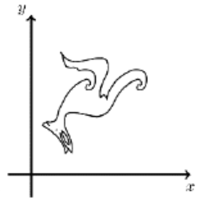
4. How many whole numbers are bigger than 2015×2017 but smaller than 2016×2016?

(A) 0 (B) 1 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2017

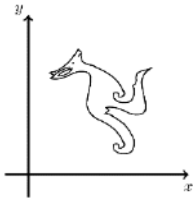
5. A scatter diagram on the *xy*-plane gives the picture of a kangaroo as shown on the right. Now the *x*- and the *y*-coordinate are swapped around for every point. What does the resulting picture look like?



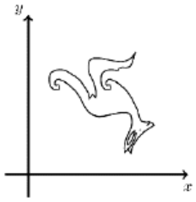
(A)



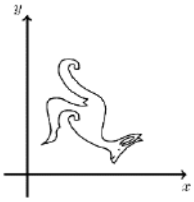
(B)



(C)



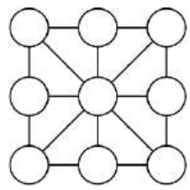
(D)



(E)

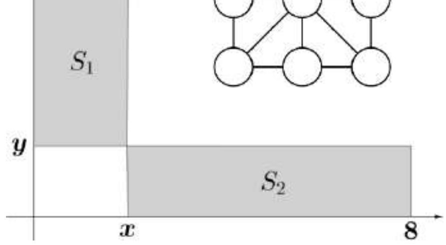
6. What is the minimum number of planes necessary to border a certain region in a three-dimensional space?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



7. Diana wants to write whole numbers into each circle in the diagram, so that for all eight small triangles the sum of the three numbers in the corners is always the same. What is the maximum amount of different numbers she can use?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 8



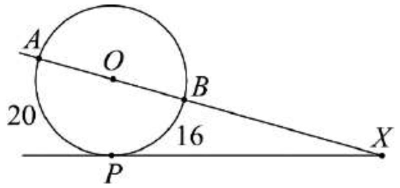
8. The rectangles S_1 and S_2 shown in the picture have the same area. Determine the ratio $x: y$.

(A) 1:1 (B) 3:2 (C) 4:3 (D) 7:4 (E) 8:5

9. If $x^2-4x+2=0$ then $x+\frac{2}{x}$ equals

(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4

10. The diagram shows a circle with centre *O* as well as a tangent that touches the circle in point *P*. The arc *AP* has length 20, the arc *BP* has length 16. What is the size of the angle $\angle AXP$?



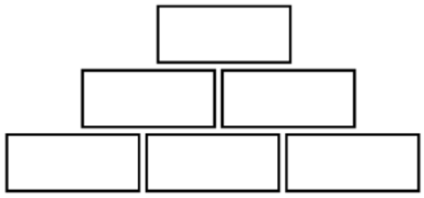
(A) 30° (B) 24° (C) 18° (D) 15° (E) 10°

- 4 Point Questions -

11. a, b, c, d are positive whole numbers for which $a + 2 = b - 2 = c \times 2 = d \div 2$ holds true.
Which of the four numbers a, b, c and d is biggest?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) It is not uniquely defined.

12. In this number pyramid each number in a higher cell is equal to the product of the two numbers in the cells immediately underneath that number. Which of the following numbers cannot appear in the topmost cell, if the cells on the bottom row hold natural numbers greater than 1 only?



(A) 56 (B) 84 (C) 90 (D) 105 (E) 220

13. Which value does x_4 take if $x_1 = 2$ and $x_{n+1} = {x_n}^{x_n}$ for $n \geq 1$?

(A) $2^{2^{3}}$ (B) $2^{2^{4}}$ (C) $2^{2^{11}}$ (D) $2^{2^{16}}$ (E) $2^{2^{768}}$

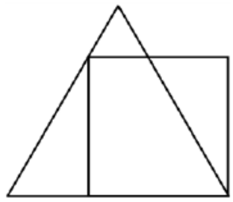
14. In rectangle $ABCD$ the side BC is exactly half as long as the diagonal $\overline{AC}$. Let X be the point on $\overline{CD}$ for which $|\overline{AX}| = |\overline{XC}|$ holds true. How big is the angle $\angle CAX$?

(A) 12.5° (B) 15° (C) 27.5° (D) 42.5° (E) another angle

15. Diana cuts a rectangle of area 2016 into 56 identical squares. The side lengths of the rectangle and the squares are all whole numbers. For how many different rectangles can she do this? (Two rectangles are said to be different if they are not congruent.)

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 0

16. The square shown in the diagram has a perimeter of 4. The perimeter of the equilateral triangle is



(A) 4 (B) $3 + \sqrt{3}$ (C) 3 (D) $3 + \sqrt{2}$ (E) $4 + \sqrt{3}$

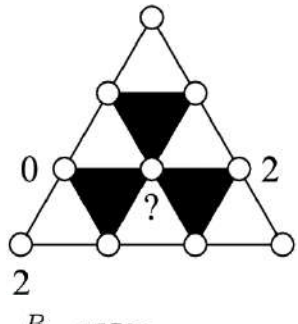
17. On the island of knights and liars everybody is either a knight (who only tells the truth) or a liar (who always lies). On your journey on the island you meet 7 people who are sitting in a circle around a bonfire. They all tell you "I am sitting between two liars!". How many liars are sitting around the bonfire?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) More information is necessary to make a decision.

18. Three three-digit numbers are built using the digits 1 to 9 so that each of the nine digits is used exactly once. Which of the following numbers cannot be the sum of the three numbers?

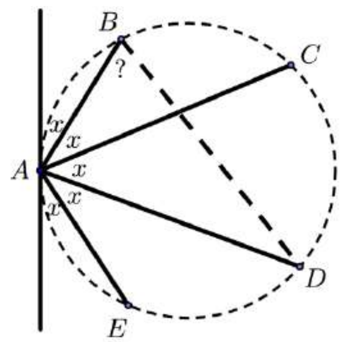
(A) 1500 (B) 1503 (C) 1512 (D) 1521 (E) 1575

19. Each of the ten points in the diagram is labelled with one of the numbers 0, 1 or 2. It is known that the sum of the numbers in the corner points of each white triangle is divisible by 3, while the sum of the numbers in the corner points of each black triangle is not divisible by 3. Three of the points are already labeled as shown in the diagram. With which numbers can the inner point be labeled?



(A) only 0 (B) only 1 (C) only 2 (D) only 0 and 1 (E) either 0 or 1 or 2

20. Bettina chooses five points A, B, C, D and E on a circle and draws the tangent to the circle at point A. She realizes that the five angles marked x are all equally big. (Note that the diagram is not drawn to scale!)
How big is the angle $\angle ABD$?



(A) 66° (B) 70.5° (C) 72° (D) 75° (E) 77.5°

- 5 Point Questions -

21. How many different real solutions does the following equation have?

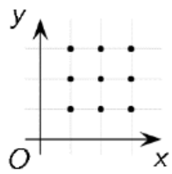
$$(x^2-4x+5)^{x^2+x-30}=1 \qquad ?$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) infinitely many

22. A quadrilateral has an inner circle (i.e. all four sides of the quadrilateral are tangents to the circle). The ratio of the perimeter of the quadrilateral to the circumference of the circle is 4:3. The ratio of the area of the quadrilateral to that of the circle is therefore

(A) $4:\pi$ (B) $3\sqrt{2}:\pi$ (C) $16:9$ (D) $\pi:3$ (E) $4:3$

23. How many quadratic functions $y=ax^2+bx+c$ (with $a\neq 0$) have graphs that go through at least 3 of the marked points?



(A) 6 (B) 15 (C) 19 (D) 22 (E) 27

24. In the right-angled triangle ABC (with the right angle in A) the angle bisectors of the acute angles intersect at point P. The distance of P to the hypotenuse is $\sqrt{8}$. What is the distance of P to A?

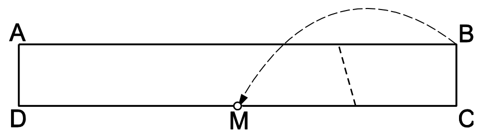
(A) 8 (B) 3 (C) $\sqrt{10}$ (D) $\sqrt{12}$ (E) 4

25. The equations $x^2+ax+b=0$ and $x^2+bx+a=0$ both have real solutions. It is known that the sum of the squares of the solutions of the first equation is equal to the sum of the squares of the solutions of the second equation and that $a\neq b$. $a+b$ equals

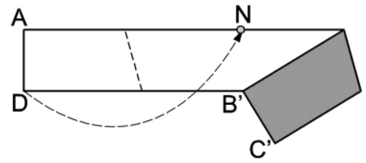
(A) 0 (B) -2 (C) 4 (D) -4 (E) The sum cannot be uniquely determined.

26. In a solid cube *P* is a point on the inside. We cut the cube into 6 (sloping) pyramids. Each pyramid has one face of the cube as its base and point *P* as its top. The volumes of five of these pyramids are 2, 5, 10, 11 and 14. What is the volume of the sixth pyramid?

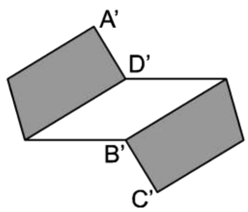
(A) 1 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12



27. A rectangular piece of paper $ABCD$ is 5 cm wide and 50 cm long. The paper is white on one side and grey on the other. Christina folds the strip as shown so that the vertex B coincides with M the midpoint of the edge CD. Then she folds it so that the vertex D coincides with N the midpoint of the edge AB. How big is the area of the visible white part in the diagram?



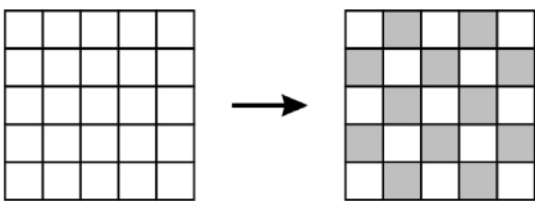
(A) 50 cm² (B) 60 cm² (C) 62.5 cm² (D) 100 cm² (E) 125 cm²



28. Anna chooses a positive whole number n and writes down the sum of all positive whole numbers from 1 to n. A prime number p divides this sum but none of the summands. Which of the following numbers is a possible value of $n+p$?

(A) 217 (B) 221 (C) 229 (D) 245 (E) 269

29. We consider a 5×5 square that is split up into 25 fields. Initially all fields are white. In each move it is allowed to change the colour of three fields that are adjacent in a horizontal or vertical line (i.e. white fields turn black and black ones turn white). What is the smallest number of moves needed to obtain the chessboard colouring shown in the diagram?



(A) less than 10 (B) 10 (C) 12 (D) more than 12 (E) This colouring cannot be obtained.

30. The positive whole number N has exactly six different (positive) factors including 1 and N. The product of five of these factors is 648. Which of these numbers is the sixth factor of N?

(A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 24

Känguru 2016 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. **Lösungsweg 1:** Tom und Johann sind zusammen 23 Jahre alt, Tom und Alex zusammen 25. Da das Alter von Tom in beiden Summen gleich ist, muss Alex also um 2 Jahre älter sein als Johann.

   Johann und Tom sind zusammen 23 Jahre alt, Johann und Alex zusammen 24. Hier ist das Alter von Johann in beiden Summen gleich, also muss Alex um ein Jahr älter sein als Tom.

   Daher ist **Alex** am ältesten.

   Lösungsweg 2: In diesem Lösungsweg erfahren sogar das genaue Alter aller drei Personen. Wir wenden den in vielen Situationen nützlichen Trick an, einfach alle drei Summen zusammenzuzählen. So erfahren wir, dass die Summe der Alter von Tom + Johann + Johann + Alex + Alex + Tom gleich 23 + 24 + 25 = 72 ist. Halbieren wir das, so wissen wir, dass die Summe der Alter von Alex + Johann + Tom gleich 36 ist.

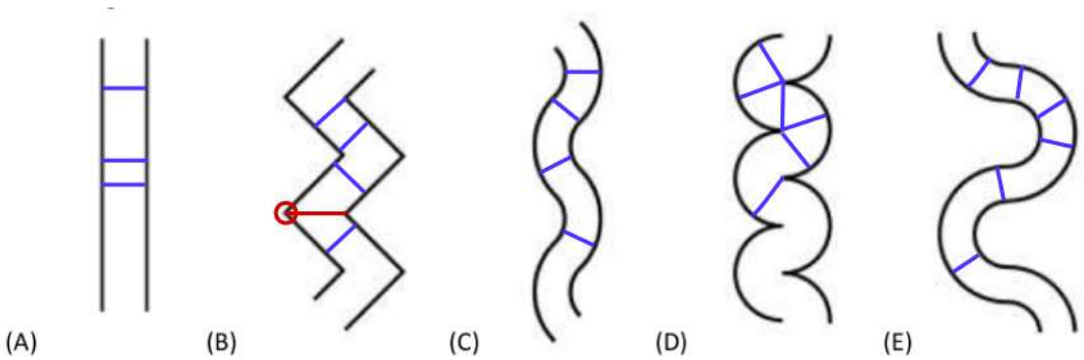
   Wenn Alex + Johann + Tom = 36 und laut Angabe Tom + Johann = 23 ist, dann ist Alex = 13.

   Auf dem gleichen Wege sehen wir Johann + Alex = 24 und daher Tom = 12, und schließlich Alex + Tom = 25 und daher Johann = 11.

   Also ist **Alex** am ältesten.

2. $$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=\frac{100}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{1}{1000}=\mathbf{\frac{111}{1000}}$$

3. In der folgenden Skizze sind bei jedem Fluss von einigen Punkten aus die kürzesten Brücken ans andere Ufer eingezeichnet:

   Bei Flüssen (A), (C), (D) und (E) sind alle blauen Linien über den jeweiligen Fluss gleich lang. Bei **(B)** dagegen ist vom rot markierten Kreis aus die kürzestmögliche Brücke deutlich länger als die entlang der blauen Linien möglichen Brücken am gleichen Fluss.

4. **Lösungsweg 1:** Es gilt $2015 \cdot 2017 = 4064255$ und $2016 \cdot 2016 = 4064256$, daher gibt es **keine** Zahlen, die dazwischen liegen.

   Lösungsweg 2: Wenn wir die Multiplikation nicht ausrechnen wollen, können wir die Rechnung auch wie folgt vereinfachen: $2015 \cdot 2017 = (2016-1)\cdot(2016+1) = 2016^2 - 1$. Somit ist $2016 \cdot 2016$ nur um 1 größer als $2015 \cdot 2017$, daher gibt es **keine** Zahlen, die dazwischen liegen.

5. **Lösungsweg 1:** Wenn wir wissen, dass die Vertauschung der x- und y-Koordinaten einer Spiegelung entlang der Geraden $y = x$ entspricht, sehen wir sofort, dass **(A)** das Ergebnis ist.

   Lösungsweg 2: Wir betrachten für einige markante Punkte, wo sie nach der Vertauschung liegen.

   - Bei der Nase des Kängurus rechts oben sind x- und y-Koordinate ungefähr gleich groß, daher ändert sich durch die Vertauschung nicht viel. Die Nase bleibt also ungefähr an der gleichen Stelle rechts oben.
   - Auch bei der Schwanzspitze des Kängurus links unten sind x- und y-Koordinate beide ungefähr gleich, daher bleibt die Schwanzspitze ungefähr an der gleichen Stelle links unten.
   - Die Zehenspitzen des Kängurus rechts unten haben eine große x- und eine kleine y-Koordinate. Nach der Vertauschung ist die x-Koordinate klein und die y-Koordinate groß, also landen die Zehenspitzen links oben.

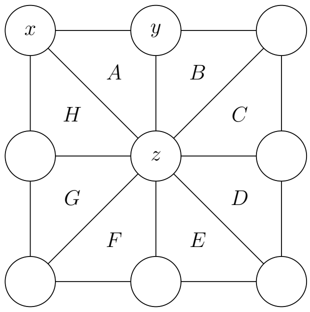
- Umgekehrt hat die leere Fläche über dem Rücken links oben kleine x- und große y-Koordinaten, daher sind nach der Vertauschung die x-Koordinaten groß und die y-Koordinaten klein, daher landet der leere Bereich rechts unten.

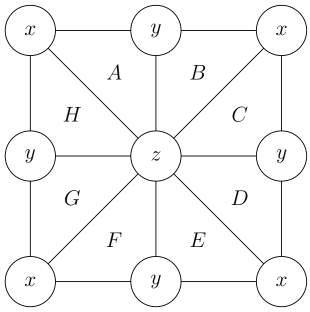
Daher stellt **(A)** das Känguru dar, dass wir nach der Vertauschung erhalten.

6. Bereits mit **4 Ebenen** ist es möglich, einen begrenzen Bereich einzugrenzen, beispielsweise einen Tetraeder (dreiseitige Pyramide).

   Es ist bekannt, dass 3 Ebenen dafür noch nicht genügen, was man etwa so argumentieren kann: Ein von Ebenen begrenzter Körper im dreidimensionalen Raum hat mehrere Ecken, wobei eine Ecke immer dort entsteht, wo 3 oder mehr Ebenen zusammenstoßen. Umgekehrt wissen wir aber, dass drei Ebenen einander in höchstens einem Punkt schneiden. Mit 3 Ebenen können wir also höchstens einen Eckpunkt bilden, was für einen begrenzten Körper zu wenig ist.

7. Wie in der ersten Zeichnung bezeichnen wir die Zahlen links oben, oben und in der Mitte mit x, y und z (wobei diese Zahlen nicht notwendigerweise verschieden sein müssen).





   Die Dreiecke A und B müssen dieselbe Summe haben. Dreieck A hat Summe $x + y + z$, Dreieck B hat Summe $y + z +$ [Ecke rechts oben], daher muss in der Ecke rechts oben ebenfalls die Zahl x stehen.

   Dreiecke B und C müssen dieselbe Summe haben, also steht rechts in der Mitte wieder y. Dreiecke C und D haben dieselbe Summe, also steht rechts unten sicher wieder x, und so weiter, bis wir gezeigt haben, dass die Zahlen so verteilt sind wie in der rechten Zeichnung.

   Es kommen also nur die Zahlen x, y und z vor, daher können nicht mehr als drei Zahlen auftreten. Umgekehrt können wir für x, y und z drei verschiedene Zahlen wählen und sehen, dass trotzdem immer noch alle 8 kleinen Dreiecke dieselbe Summe $x + y + z$ haben, also ist eine Lösung mit drei verschiedenen Zahlen möglich.

   Sie kann daher höchstens **3** verschiedene Zahlen verwenden.

8. Bezeichne A das kleine weiße Rechteck (mit Größe $x \times y$) links unten. Die beiden Rechtecke S_1 und S_2 dieselbe Fläche. Fügen wir zu beiden das kleine weiße Rechteck hinzu, so haben auch $S_1 + A$ und $S_2 + A$ dieselbe Fläche.

   Von diesen neuen Rechtecken sind die Flächen nun leicht zu berechnen: Das Rechteck $S_1 + A$ ist x breit und 5 hoch, also ist die Fläche gleich $x \cdot 5$. Das Rechteck $S_2 + A$ ist 8 breit und y hoch, also ist die Fläche gleich $8 \cdot y$.

   Die Flächen sind nach Angabe gleich groß, also gilt $5x = 8y$, was sich leicht umformen lässt (durch Division durch $5y$) zu $x : y =$ **8 : 5**.

9. Es soll $x^2 - 4x + 2 = 0$ gelten, was für $x = 0$ nicht erfüllt wäre, daher ist $x \neq 0$. Daher dürfen wir beide Seiten der Gleichung durch x dividieren und erhalten die äquivalente Gleichung $x - 4 + \frac{2}{x} = 0$. Addieren wir auf beiden Seiten 4, so erhalten wir $x + \frac{2}{x} =$ **4**.

10. Wir wissen, dass die Bogenlängen sich zueinander gleich verhalten wie die dazugehörigen Winkel zum Mittelpunkt, also $\sphericalangle AOP : \sphericalangle POB = 20 : 16 = 5 : 4$. Die Summe der beiden Winkel ist $180°$. Der Winkel $\sphericalangle POB$ macht daher $\frac{4}{9}$ davon aus und beträgt somit $80°$.

    Da die Tangente PX im Berührpunkt P normal auf den Radius PO steht, ist $\sphericalangle XPO$ ein rechter Winkel.

    Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $180°$, daher bleiben für den gesuchten Winkel $\sphericalangle AXP = \sphericalangle OXP = 180° - \sphericalangle POX - \sphericalangle XPO = 180° - 80° - 90° =$ **10°** übrig.

11. Wir formen $a + 2 = b - 2$ um zu $a = b - 4$ und sehen, dass b um 4 größer ist als a.

    Die dritte Gleichung $c \cdot 2 = d : 2$ formen wir um zu $c \cdot 4 = d$ und sehen, dass d vier Mal so groß ist wie c.

    Nun müssen wir noch b und d vergleichen, daher formen wir $b-2 = d : 2$ um zu $d = 2b-4 = b+b-4 = b+a$. Daher ist d so groß wie a und b zusammen und somit die größte Zahl.

12. Seien a, b und c die Zahlen in der untersten Reihe. Dann stehen in der mittleren Reihe die Zahlen ab und bc, und oben steht die Zahl ab^2c. Es können daher nur solche Zahlen oben stehen, die sich als solches Produkt darstellen lassen.

    Betrachten wir die 5 Lösungsmöglichkeiten, so sehen wir, dass diese Darstellung bei vier davon möglich ist, während bei einer nicht genügend Primfaktoren dafür zur Verfügung stehen:

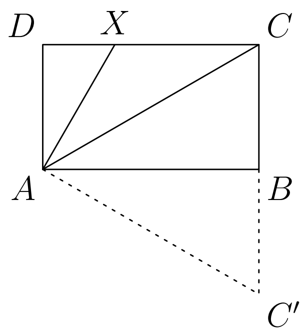
    (A) $56 = 2 \cdot 2^2 \cdot 7$ (B) $84 = 3 \cdot 2^2 \cdot 7$ (C) $84 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ **(D)** $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ (E) $220 = 5 \cdot 2^2 \cdot 11$

13. Wir berechnen den Wert unter Anwendung der Rechenregeln für Potenzen:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 2^2$$
$$x_3 = \left(2^2\right)^{\left(2^2\right)} = 2^{2 \cdot 2^2} = 2^{2^{2+1}} = 2^{2^3}$$
$$x_4 = \left(2^{2^3}\right)^{\left(2^{2^3}\right)} = 2^{2^3 \cdot 2^{2^3}} = 2^{2^3 \cdot 2^8} = 2^{2^{3+8}} = \mathbf{2^{2^{11}}}$$

14. Da BC genau halb so lang ist wie AC, ist ABC genau die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks $AC'C$. In diesem beträgt jeder Winkel 60°, also insbesondere $\sphericalangle ACB = 60°$. Als Ergänzung auf den rechten Winkel des Rechtecks erhalten wir weiters $\sphericalangle DCA = 90° - \sphericalangle ACB = 90° - 60° = 30°$.

    Wegen $XA = XC$ ist das Dreieck AXC gleichschenkelig, damit gilt weiters $\sphericalangle CAX = \sphericalangle ACX = \mathbf{30°}$.



15. Da die Gesamtfläche 2016 und die Anzahl der Quadrate 56 bereits vorgegeben sind, muss jedes der Quadrate die Fläche $\frac{2016}{56} = 36$ haben, und somit die Seitenlänge 6. Unabhängig von der ursprünglichen Form des Rechtecks sehen die Quadrate also immer gleich aus.

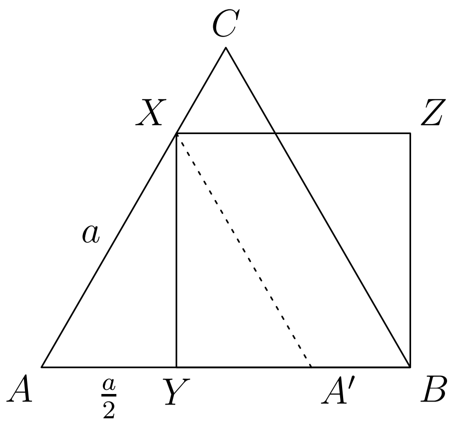
    Daher müssen wir nur noch berechnen, auf wieviele Arten diese 56 Quadrate wieder zu einem Rechteck zusammengelegt werden können. Wenn das erhaltene Rechteck n Quadrate breit ist, muss es $\frac{56}{n}$ Quadrate hoch sein, wobei sowohl n als auch $\frac{56}{n}$ ganze Zahlen sein müssen. Wir können für n daher alle Teiler von 56 wählen: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56. Jeweils 2 dieser Rechtecke haben nach Drehung dieselbe Form (zum Beispiel $4 \times \frac{56}{4} = 4 \times 14$ und $14 \times \frac{56}{14} = 14 \times 4$), also gibt es 4 verschiedene Formen.

16. Wir beschriften die Punkte wie in der Zeichnung. Das Quadrat hat einen Umfang von 4, also eine Seitenlänge von 1.

    Bezeichne a den Abstand AX. Das Dreieck AXY hat einen rechten Winkel und einen Winkel von 60°, daher ist es genau die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks $AA'X$ mit Höhenfußpunkt Y. Somit beträgt der Abstand AY gleich $\frac{a}{2}$.

    Im rechtwinkeligen Dreieck AXY gilt nach Pythagoras, dass $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1^2 = a^2$, was sich umformen lässt (durch Multiplikation mit 4) zu $a^2 + 4 = 4a^2$, und somit weiters zu $a^2 = \frac{4}{3}$ und $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

    Die gesamte Länge AB beträgt daher $BY + YA = 1 + \frac{a}{2} = 1 + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Das dreifache davon ergibt einen Umfang von $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3 + \frac{3}{\sqrt{3}} = \mathbf{3 + \sqrt{3}}$.



17. Ein Ritter sagt immer die Wahrheit, daher muss jeder Ritter gemäß seiner eigenen Aussage zwischen zwei Lügnern sitzen. Daher können wir höchstens 3 Ritter am Lagerfeuer unterbringen, weil bei 4 oder mehr Rittern zwei davon benachbart sitzen würden.

    Wenn ein Lügner behauptet, er würde zwischen zwei Lügnern sitzen, dann muss mindestens einer seiner Sitznachbarn in Wirklichkeit ein Ritter sein, da der Lügner ja sonst die Wahrheit gesagt hätte. Daher können nie mehr als 2 Lügner in einer Reihe nebeneinander sitzen. Deshalb können höchstens 4 Lügner am Lagerfeuer sitzen, da bei 5 oder mehr Lügnern auf jeden Fall irgendwo drei davon in einer Reihe nebeneinander sitzen müssten.

    Deshalb sitzen am Lagerfeuer genau 3 Ritter und **4 Lügner**.

18. Wir wissen, dass die Ziffernsumme einer Zahl bei Division durch 9 den gleichen Rest haben muss wie die Zahl selbst. Wenn wir drei dreistellige Zahlen $[abc]$, $[def]$ und $[ghi]$ betrachten, dann hat $[abc]$ den gleichen Rest bei Division durch 9 wie $a+b+c$, $[def]$ hat den gleichen Rest wie $d+e+f$, und $[ghi]$ hat den gleichen Rest wie $g+h+i$.

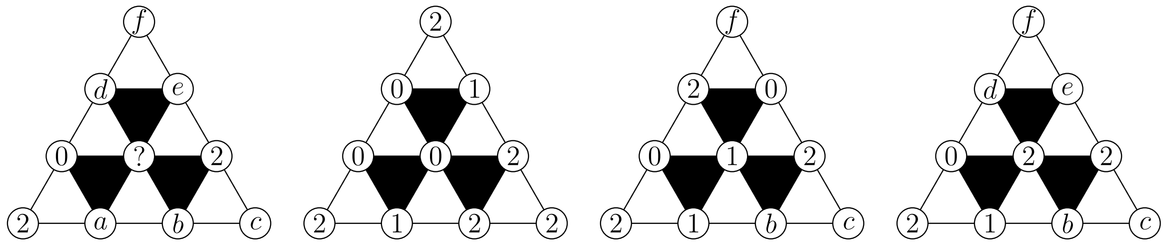
    Addiert man diese Zahlen, so hat auch die Summe $[abc]+[def]+[ghi]$ den gleichen Rest bei Division durch 9 wie $a+b+c+d+e+f+g+h+i$. Die Summe $a+b+c+d+e+f+g+h+i$ kennen wir aber, da laut Angabe ja jede der Ziffern von 1 bis 9 genau ein Mal darin vorkommt, also $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = 5 \cdot 9$.

    Daher gilt für die Summe $[abc]+[def]+[ghi]$ sicher, dass auch diese durch 9 teilbar ist. Für die Zahl 1500 gilt dies nicht, daher kann sie nicht das Ergebnis einer solchen Summe sein.

    Der Umkehrschluss gilt nicht, daher müssen wir für die anderen Zahlen erst zeigen, dass sie als solche Summe dargestellt werden können. Wir finden für die vier vorgegebenen Zahlen die folgenden Beispiele:

    (B) $1503 = 316 + 428 + 759$
    (C) $1512 = 315 + 428 + 769$
    (D) $1521 = 214 + 538 + 769$
    (E) $1575 = 231 + 465 + 879$

19. Wir bezeichnen die Zahlen wie in der ersten Skizze. Wir müssen auf jeden Fall $a = 1$ setzen, damit die Summe im linken unteren weißen Dreieck durch 3 teilbar ist.



    Wenn wir ? = 0 setzen, so erhalten wir die Lösung, die in der zweiten Skizze abgebildet ist und deren Korrektheit wir leicht überprüfen können.

    Wenn wir ? = 1 setzen wie in der dritten Skizze, so müssen wir $d = 2$ setzen für das weiße Dreieck links auf halber Höhe. Für das weiße Dreieck rechts auf halber Höhe müssen wir $e = 0$ setzen. Dann ist aber die Summe beim oberen schwarzen Dreieck durch 3 teilbar, also ist diese Lösung nicht möglich.

    Wenn wir ? = 2 setzen wie in der vierten Skizze, dann ist die Summe beim linken unteren schwarzen Dreieck durch 3 teilbar, also ist auch diese Lösung nicht möglich.

    Eine gültige Lösung können wir daher **nur für 0** erhalten.

20. Da die fünf Winkel x zusammen 180° betragen, gilt $x = 36°$.

    Auf Grund der Symmetrie ist BE parallel zu der Tangente. Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°, daher ist $\sphericalangle ABE = \frac{180° - 3x}{2} = 36° = x$.

    Der Peripheriewinkelsatz besagt, dass eine Sehne von jedem Punkt des Kreises aus unter demselben Winkel erscheint. Über der Sehne ED beispielsweise gilt $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EAD = x$.

    Der Winkel $\sphericalangle ABD$ beträgt daher $\sphericalangle ABE + \sphericalangle EBD = 2x =$ **72°**.

21. Für reelle Zahlen a und b gibt es folgende Fälle, in denen $a^b = 1$ gilt:

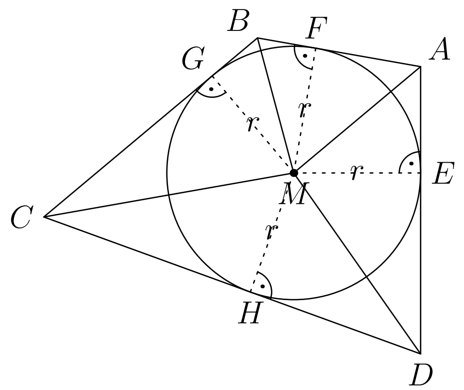
- $a = 1$, b beliebig: Für $a = x^2 - 4x + 5 = 1$ erhalten wir die Doppellösung $x_1 = x_2 = 2$.
- $a = -1$, b ganzzahlig gerade: $a = x^2 - 4x + 5 = -1$ ist äquivalent zu $x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 = 0$, was keine Lösung hat.
- a beliebig ungleich 0, $b = 0$: Für $b = x^2 + x - 30 = 0$ erhalten wir die beiden Lösungen $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 30} = \frac{-1 \pm 11}{2}$. Der Term $a = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ kann nie 0 werden, daher sind beide tatsächlich Lösungen.

Wir haben daher insgesamt **3** Lösungen gefunden.

22. Seien wie in der Zeichnung A, B, C und D die Eckpunkte des Tangentenvierecks, E, F, G und H die Berührpunkte des Inkreises, und M der Mittelpunkt des Inkreises. Weiters sei r der Radius des Inkreises.

Der Umfang des Vierecks berechnet sich als $U_\square = AB + BC + CD + DA$, der Umkreis des Kreises als $U_\bigcirc = 2r\pi$. Das Verhältnis der Umfänge ist also

$$\frac{U_\square}{U_\bigcirc} = \frac{AB + BC + CD + DA}{2r\pi} .$$



Für die Berechnung der Fläche zerlegen wir das Tangentenviereck in vier Dreiecke. Für jedes dieser Dreiecke berechnet sich die Fläche als "$\frac{\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe}}{2}$", also erhalten wir die Gesamtfläche

$$A_\square = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{CD \cdot r}{2} + \frac{DA \cdot r}{2} = \frac{(AB + BC + CD + DA) \cdot r}{2} .$$

Die Fläche des Kreises berechnet sich als $A_\bigcirc = r^2\pi$.

Für das Verhältnis der Flächen erhalten wir somit

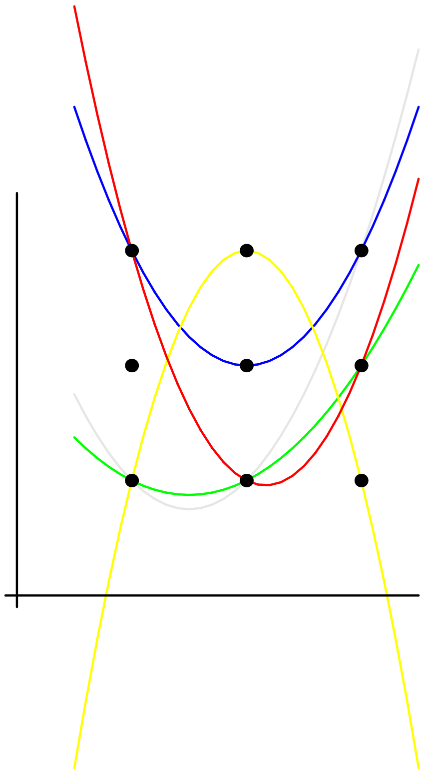
$$\frac{A_\square}{A_\bigcirc} = \frac{\frac{(AB+BC+CD+DA)\cdot r}{2}}{r^2\pi} = \frac{AB + BC + CD + DA}{2r\pi} = \frac{U_\square}{U_\bigcirc}.$$

Somit gilt sogar in jedem beliebigen Tangentenviereck die Gleichung $A_\square : A_\bigcirc = U_\square : U_\bigcirc$. Für das Tangentenviereck aus der Angabe folgt also $A_\square : A_\bigcirc = U_\square : U_\bigcirc =$ **4 : 3**.

23. Zunächst wissen wir, dass eine quadratische Funktion bei jeder x-Koordinate nur einen Wert annehmen kann, also kann die Funktion immer nur durch höchstens einen von drei direkt übereinander angeordneten Punkten verlaufen. Wenn die Funktion durch drei der markierten Punkte gehen soll, muss sie also aus jeder der drei übereinanderliegenden Gruppen genau einen Punkt enthalten. Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ verschiedene Möglichkeiten, aus jeder dieser drei Gruppen genau einen Punkt auszuwählen.

Weiters wissen wir, dass eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ dann und nur dann drei Punkte in einer geraden Linie enthält, wenn $a = 0$ ist. (Begründung: Mit 3 Punkten ist eine quadratische Funktion eindeutig bestimmt. Eine lineare Funktion ist ein Sonderfall einer quadratischen Funktion, bei der x^2 den Koeffizienten 0 hat. Da es durch 3 auf einer Geraden liegenden Punkte eine lineare Funktion gibt, ist diese die einzige "quadratische" Funktion durch diese Punkte.) Dies schließt 5 Fälle aus: Die 3 unteren Punkte, die 3 mittleren Punkte, die 3 oberen Punkte, die Diagonale von links unten nach rechts oben, und die Diagonale von links oben nach rechts unten.

Für die verbleibenden **22 Möglichkeiten** können wir Beispiele finden, von denen einige in der Grafik zu sehen sind und der Rest durch Spiegelungen und Verschiebungen erhalten werden kann:



(a) 8 Möglichkeiten ähnlich der grünen Linie, bei der zwei benachbarte Punkte auf der gleichen Höhe sind und der dritte Punkt um 1 höher oder tiefer.

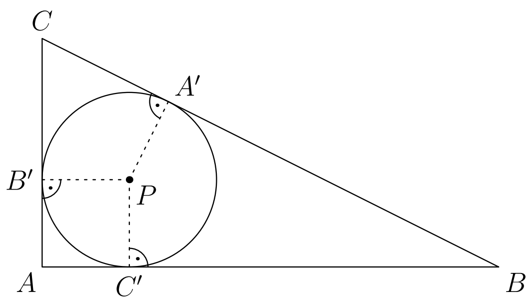
(b) 4 Möglichkeiten ähnlich der grauen Linie, bei der zwei benachbarte Punkte auf der gleichen Höhe sind und der dritte Punkt um 2 höher oder tiefer.

(c) 4 Möglichkeiten ähnlich der blauen Linie, bei der die zwei äußeren Punkte auf der gleichen Höhe sind und der mittlere Punkt um 1 höher oder tiefer.

(d) 2 Möglichkeiten ähnlich der gelben Linie, bei der die zwei äußeren Punkte auf der gleichen Höhe sind und der mittlere Punkt um 2 höher oder tiefer.

(e) 4 Möglichkeiten ähnlich der roten Linie, bei denen alle drei Punkte auf verschiedenen Höhen sind.

24. Beim Schnittpunkt zweier Winkelsymmetralen eines Dreiecks handelt es sich um den Inkreismittelpunkt, daher ist der gegebene Abstand von $\sqrt{8}$ zwischen P und der Hypotenuse BC gleichzeitig der Inkreisradius. Diesen finden wir wieder bei den Abständen zu den Fußpunkten B' und C' von P auf die Seiten AC und AB. Somit haben wir ein kleines Quadrat $AC'PB'$ mit Seitenlänge $\sqrt{8}$. Gesucht ist die Diagonale AP dieses Quadrats, die sich demnach berechnet als $AP = \sqrt{2} \cdot B'P = \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = \mathbf{4}$.



25. Seien x_1 und x_2 die beiden Lösungen von $x^2 + ax + b = 0$. Gemäß Satz von Vieta gilt $a = -x_1 - x_2$ und $b = x_1 x_2$. Falls wir den Satz von Vieta gerade nicht zur Hand haben, können wir es auch ausrechnen:

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$
$$x_1 + x_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\ldots} - \frac{a}{2} - \sqrt{\ldots} = -a$$
$$x_1 x_2 = \left(-\frac{a}{2} + \sqrt{\ldots}\right) \cdot \left(-\frac{a}{2} - \sqrt{\ldots}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - b\right) = b$$

Durch geschickte Kombination erhalten wir $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-a)^2 - 2b = a^2 - 2b$.

Mit der gleichen Methode erhalten wir aus der Gleichung $x^2 + bx + a = 0$ mit den Lösungen y_1 und y_2 die Gleichheit $y_1^2 + y_2^2 = b^2 - 2a$.

Gemäß der Angabe ist die Summe der Quadrate gleich groß, also $a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = b^2 - 2a$. Dies formen wir um:

$$\begin{aligned} a^2 - 2b &= b^2 - 2a && \Big| -b^2 + 2b \\ a^2 - b^2 &= -2a + 2b && \\ (a+b)(a-b) &= -2(a-b) && \Big| : (a-b) \neq 0 \\ a + b &= \mathbf{-2} && \end{aligned}$$

wobei wir die Division durch $(a - b)$ deshalb durchführen dürfen, da laut Angabe $a \neq b$ gilt.

26. Sei s die Seitenlänge des Würfels. Das Volumen einer Pyramide berechnet sich als „$\frac{\text{Grundfläche}\cdot\text{Höhe}}{3}$". Wir betrachten die Volumina der Pyramiden über zwei gegenüberliegenden Flächen. Sei h die Höhe der einen Pyramide, dann hat die gegenüberliegende Pyramide die Höhe $s-h$. Beide Pyramiden haben eine Grundfläche von s^2. Die Summe der Volumina beträgt also $\frac{s^2\cdot h}{3}+\frac{s^2\cdot(s-h)}{3}=\frac{s^2}{3}\cdot(h+s-h)=\frac{s^3}{3}$. Diese Summe ist nicht von der Lage des Punktes P abhängig.

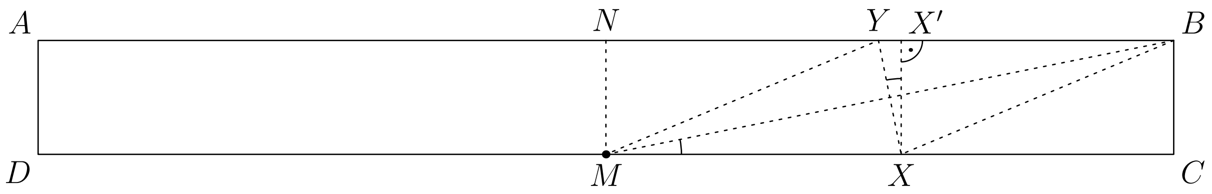
    Daraus folgt, dass wir die 6 Pyramiden zu 3 Paaren zusammenfassen können, die jeweils in Summe das gleiche Volumen haben. Nun bleibt nur noch zu klären, welche der vorgegebenen Pyramiden zu Paaren zusammengehören. Es ist klar, dass von den 6 Pyramiden die größte mit der kleinsten ein Paar bildet, die zweitgrößte mit der zweitkleinsten und die drittgrößte mit der drittkleinsten.

    Nehmen wir an, die fehlende Pyramide hätte ein Volumen x kleiner als 2, dann wären die Paare $\{x, 14\}$, $\{2, 11\}$ und $\{5, 10\}$. Aber $2+11\neq 5+10$.

    Hätte die fehlende Pyramide ein Volumen x größer als 14, so wären die Paare $\{2, x\}$, $\{5, 14\}$ und $\{10, 11\}$. Aber $5+14\neq 10+11$.

    Daher hat die fehlende Pyramide ein Volumen x zwischen 2 und 14. Somit bilden die Pyramiden mit den Volumen 2 und 14 ein Paar, daher hat jedes Paar zusammen ein Volumen von 16. Daher bildet 5 ein Paar mit 11, und der Pyramide mit Volumen 10 fehlt ihr Gegenüber mit dem Volumen **6**.

27. Bei dieser Aufgabe ist die Berechnung selbst für den Zweck des Wettbewerbs relativ leicht. Will man allerdings mathematisch ganz sauber argumentieren, warum gewisse Figuren ähnlich oder kongruent sind, so brauchen einige Schritte etwas längere Ausführungen. Da das Ziel dieser Lösungssammlung auch ist zu zeigen, wie eine klare Beweisführung erfolgen könnte, mag die folgende Erklärung etwas umfangreicher erscheinen, als zum reinen Ausrechnen notwendig wäre. Für den Känguru-Bewerb an sich würde es natürlich völlig ausreichen zu erkennen, dass durch die Faltung alles symmetrisch ist.



    Seien X und Y die Endpunkte der ersten Faltlinie auf CD bzw. AB wie in der Zeichnung zu sehen. Die weiße Fläche am Ende ist genau doppelt so groß wie die Fläche des Dreiecks MNY, daher berechnen wir nur diese Fläche.

    Nach dem Falten liegt das Dreieck YBX genau auf YMX, daher ist $YB = YM$ und $XB = XM$, und außerdem $\sphericalangle YBX = \sphericalangle YMX$. Die Seiten AB und CD sind parallel, daher gilt nach Parallelwinkelsatz $\sphericalangle ABX = \sphericalangle BXC$. Zusammengesetzt ergibt das $\sphericalangle YMC = \sphericalangle BXC$, das heißt, dass MY und XB denselben Winkel zu CD einschließen und daher zueinander parallel sind. Als Seitenteile des Rechtecks sind auch MX und YB zueinander parallel. Insgesamt haben wir damit also bewiesen, dass $MXBY$ eine Raute ist.

    Sei X' der Fußpunkt der Höhe von X auf AB. Wir bezeichnen den Winkel $\sphericalangle BMX$ mit α. In einer Raute stehen die Diagonalen normal aufeinander, daher folgt aus der Winkelsumme im Dreieck zwischen M, X und dem Mittelpunkt der Raute, dass $\sphericalangle MXY = 180° - 90° - \sphericalangle BMX = 90° - \alpha$. Der Winkel $\sphericalangle MXX'$ beträgt $90°$, daher bleibt für den Winkel $\sphericalangle X'XY = 90° - \sphericalangle MXY = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Daraus folgt, dass die Dreiecke MCB und $XX'Y$ zueinander ähnlich sind, da sie die gleichen Winkel haben.

    Aus der Ähnlichkeit folgt nun $YX' : X'X = BC : CM = 5 : 25 = 1 : 5$. Da XX' als Breite des Streifens eine Länge von 5 hat, hat YX' folglich eine Länge von 1.

    Für $NY + X'B$ bleibt also eine Länge von 24 übrig. Wegen $NY = NB - YB = MC - MX = XC = X'B$ sind die beiden Teile links und rechts von YX' gleich lang, also $NY = X'B = 12$.

    Für das Dreieck MNY ergibt sich eine Fläche von $\frac{MN\cdot NY}{2} = \frac{5\cdot 12}{2} = 30$, und für beide Hälften zusammen somit die gesuchte Fläche von **60**.

28. Die Summe der Zahlen von 1 bis n berechnet sich als $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Wenn p diese Summe teilen soll, muss also p entweder ein Teiler von n oder ein Teiler von $n+1$ sein. Laut Angabe teilt p nicht n, daher ist p ein Teiler von $n+1$.

    Jeder Teiler einer Zahl ist kleiner oder gleich als die Zahl selbst. Wäre p kleiner als $n+1$, so wäre p eine Zahl zwischen 1 und n und somit insbesondere ein Teiler dieser Zahl, was laut Angabe ebenfalls ausgeschlossen ist. Daher ist $p = n+1$.

    Wir suchen also eine Zahl n, für die $n+1$ eine Primzahl ist und $n+n+1 = 2n+1$ einen der fünf vorgegebenen Werte annimmt. Darauf überprüfen wir die fünf möglichen Werte:

    A $217 = 108 + 109$: 109 ist eine Primzahl

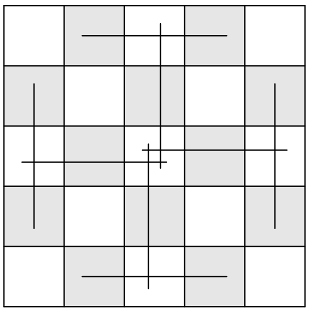
    B $221 = 110 + 111 = 110 + 3 \cdot 37$

    C $229 = 114 + 115 = 114 + 5 \cdot 23$

    D $245 = 122 + 123 = 122 + 3 \cdot 41$

    E $269 = 134 + 135 = 134 + 5 \cdot 27$

29. Hier eine Lösung mit 8 Zügen, also **weniger als 10**:



30. Eine Zahl n mit Primfaktorenzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ hat $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\dots\cdot(\alpha_k+1)$ Teiler (da jeder Primfaktor p_i zwischen 0 und α_i oft verwendet werden kann).

    Wenn $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\dots\cdot(\alpha_k+1) = 6$ gilt, gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder $k=1$ und $\alpha_1 = 5$, oder $k=2$, $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 2$. (Für $k \geq 3$ gäbe es immer mindestens 8 Teiler.)

    Im ersten Fall hätte n die Form p^5 und somit die Teiler 1, p, p^2, p^3, p^4 und p^5. Das Produkt von 5 dieser Teiler hätte daher die Form p^x für eine Primzahl p und eine ganze Zahl x. Aber $648 = 2^3 \cdot 3^4$ hat zwei verschiedene Primfaktoren.

    Daher muss der andere Fall gelten, also $n = pq^2$ mit zwei verschiedenen Primzahlen p und q. Die sechs Teiler sind 1, p, q, pq, q^2, pq^2.

    Multipliziert man alle 6 Teiler, so erhält man p^3q^6, also eine Zahl mit 9 Primfaktoren. Das gegebene Produkt 648 von 5 dieser 6 Teiler enthält 7 Primfaktoren, daher hat der noch fehlende Teiler zwei Primfaktoren. Es fehlt also entweder der Teiler pq oder der Teiler q^2.

    Wenn der Teiler pq fehlen würde, wäre das Produkt der restlichen 5 Teiler gleich $1 \cdot p \cdot q \cdot q^2 \cdot pq^2 = p^2 \cdot q^5$, das passt von den Hochzahlen her aber nicht zu $648 = 2^3 \cdot 3^4$.

    Daher fehlt der Teiler q^2. Das Produkt der restlichen 5 Teiler ist $1 \cdot p \cdot q \cdot pq \cdot pq^2 = p^3 \cdot q^4 = 648 = 2^3 \cdot 3^4$, also $p = 2$ und $q = 3$. Der fehlende Teiler hat daher den Wert $q^2 = 3^2 = \mathbf{9}$.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Kategorie: Felix, 1. und 2. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

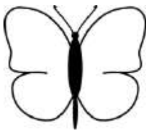
6	7	8	9	10

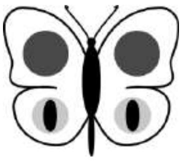
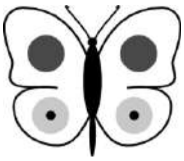
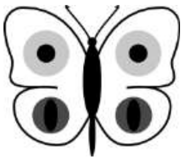
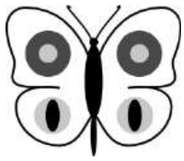
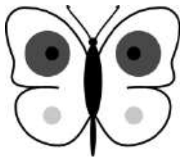
11	12	13	14	15

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

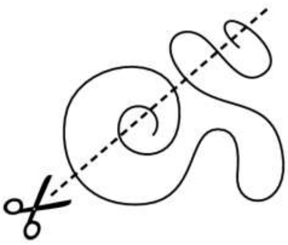
Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

– 3 Punkte Beispiele –

1. Ellen möchte den Schmetterling  mit den 6 Stickern  dekorieren.
Welchen Schmetterling kann sie basteln?

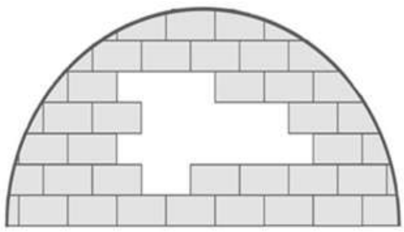
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. In wie viele Teile wird die Schnur zerschnitten?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

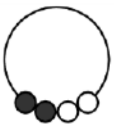
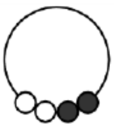
3. Wie viele Steine fehlen in diesem Iglu?



(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

4. Das Bild  zeigt ein Armband mit Perlen.

Welches der unteren Bänder zeigt dasselbe Armband wie oben?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

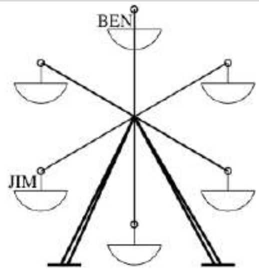
5. Vier der Zahlen 1, 3, 4, 5 und 7 werden so in die Kästchen geschrieben, dass die Rechnung stimmt.
Welche Zahl wurde nicht verwendet?

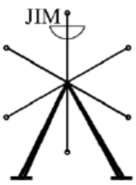
$$\square + \square = \square + \square$$

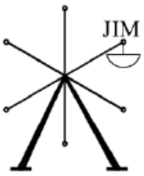
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

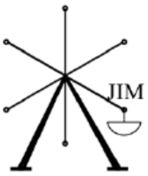
– 4 Punkte Beispiele –

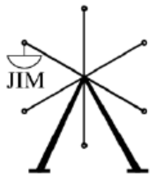
6. Jim und Ben sitzen im Riesenrad (siehe rechtes Bild).
Das Riesenrad dreht sich weiter.
Nun befindet sich Ben an der Position, wo Jim vorher war.
Wo befindet sich Jim jetzt?

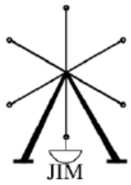


(A) 

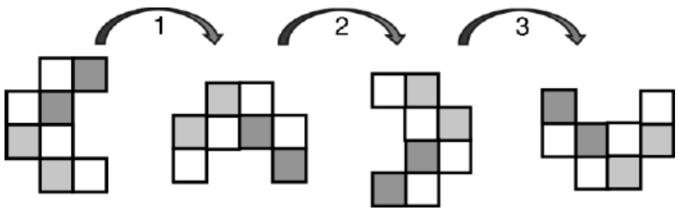
(B) 

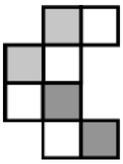
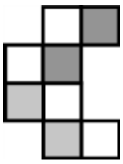
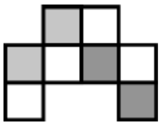
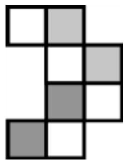
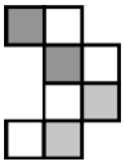
(C) 

(D) 

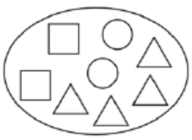
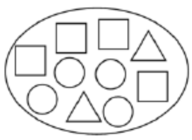
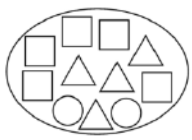
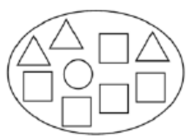
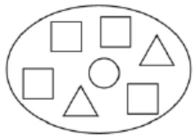
(E) 

7. Alfred dreht seinen Baustein 10 Mal.
Die ersten drei Mal sind im Bild zu sehen.
Wie liegt der Baustein am Schluss?



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

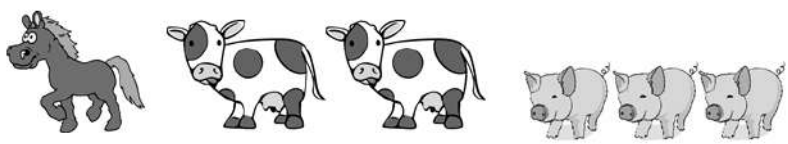
8. In welchem Bild befinden sich halb so viele Kreise wie Dreiecke und doppelt so viele Quadrate wie Dreiecke?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

9. Leo und Max stehen in einer Schlange, die aus 11 Personen besteht.
Vor Leo stehen 7 Personen, Max steht in der Schlange direkt hinter ihm.
Wie viele Personen stehen hinter Max?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

10. Old McDonald hat ein Pferd, zwei Kühe und drei Schweine.



Wie viele Kühe braucht er noch, damit genau die Hälfte aller Tiere Kühe sind?

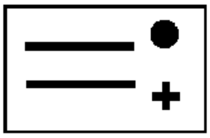
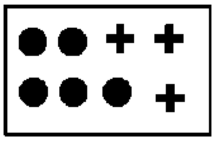
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

– 5 Punkte Beispiele –

11. In jedem Feld steht das Ergebnis der Plusrechnung der Zahlen ganz links und ganz oben (zum Beispiel 5 + 7 = 12). Welche Zahl steht hinter dem Stern?

+	10	7
5	15	12
?	14	★

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

12. Lisa hat mehrere Bastelbögen der Sorten  und  .

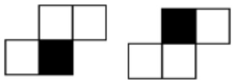
Sie möchte 7 gleiche Kronen  basteln.

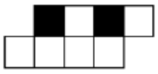
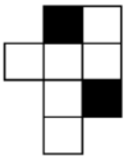
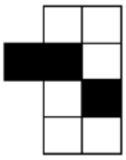
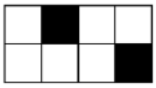
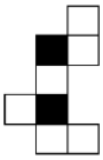
Dazu schneidet sie die benötigten Teile aus.

Wie viele Bastelbögen muss sie mindestens zerschneiden?

(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 13

13. Simon hat zwei gleiche Plättchen deren Vorderseite so aussieht:
Die Rückseite ist weiß.
Welches Muster kann er mit diesen beiden Plättchen legen?

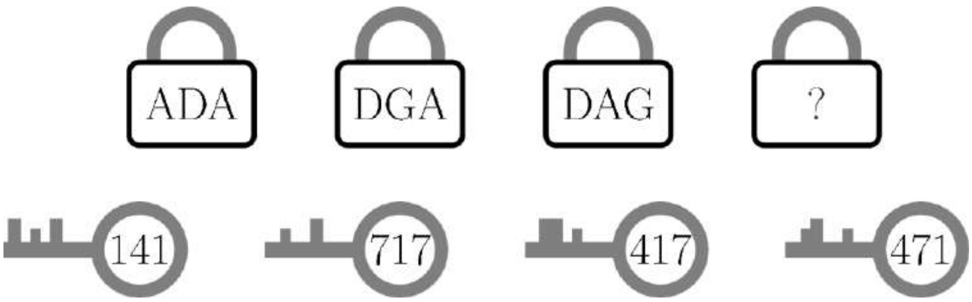


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. Ein Känguru macht in einer Minute immer zehn Sprünge.
Danach ruht es sich drei Minuten aus.
Wie viele Minuten braucht es, um 50 Sprünge zu machen?

(A) 4 (B) 5 (C) 16 (D) 17 (E) 21

15. Jeder der vier Schlüssel passt genau in ein Vorhängeschloss. Jeder Buchstabe eines Schlosses steht für genau eine Ziffer. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.
Welche Buchstaben müssen im vierten Vorhängeschloss stehen?



(A) GDA (B) ADG (C) GAD (D) GAG (E) DAD

KÄNGURU DER MATHEMATIK
2017
16. 3. 2017

Level: Felix, Grade: 1 and 2

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
15 starting points
Each correct answer to questions 1. – 5.: 3 Points
Each correct answer to questions 6. – 10.: 4 Points
Each correct answer to questions 11. – 15.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 15). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

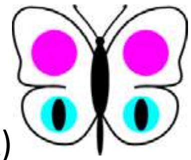
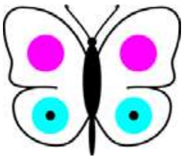
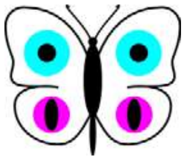
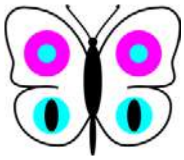
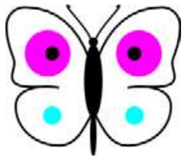
11	12	13	14	15

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

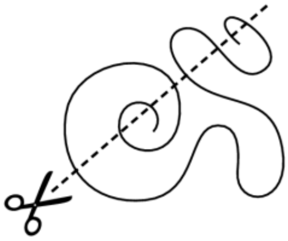
Känguru der Mathematik 2017
Level Felix (Grade 1 and 2)
Österreich – 16. 3. 2017

– 3 Points Questions –

1. Ellen wants to decorate the butterfly  using these 6 stickers 
Which butterfly can she make?

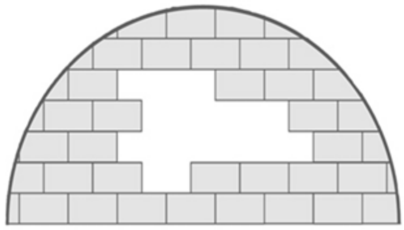
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Into how many pieces will the string be cut?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

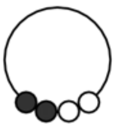
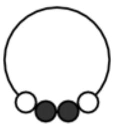
3. How many blocks are missing in this igloo?



(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

4. This picture  shows a bracelet with pearls.

Which of the bands below shows the same bracelet as above?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

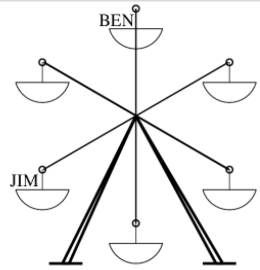
5. Four of the numbers 1, 3, 4, 5 and 7 are written into the boxes so that the calculation is correct.
Which number was not used?

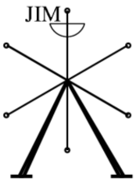
$$\square + \square = \square + \square$$

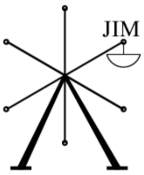
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

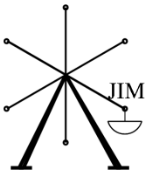
4 Points Questions

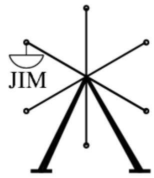
6. Jim and Ben are sitting in a ferris wheel (see picture on the right).
The ferris wheel is turning.
Now Ben is in the position where Jim was beforehand.
Where is Jim now?

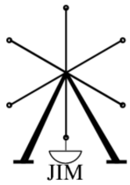


(A) 

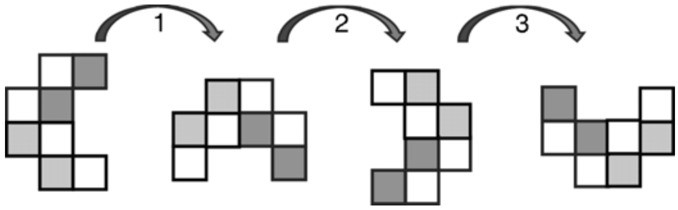
(B) 

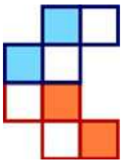
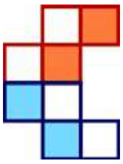
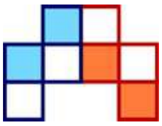
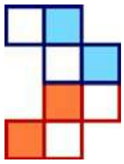
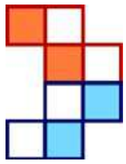
(C) 

(D) 

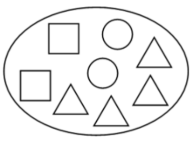
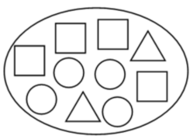
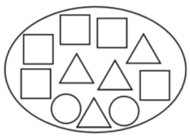
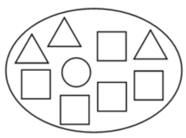
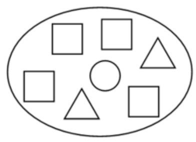
(E) 

7. Alfred turns his building block 10 times.
The first three times can be seen in the picture.
What is the final position of the building block?



(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

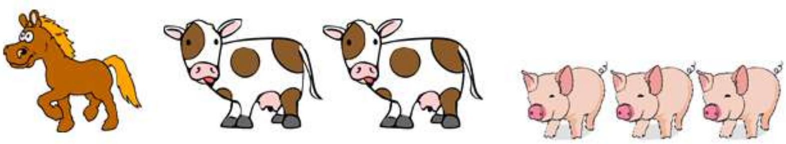
8. In which picture are there half as many circles as triangles and twice as many squares as triangles?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

9. Leo and Max are standing in a queue that is made up of 11 people in total.
There are 7 people in front of Leo, Max stands directly behind him in the queue.
How many people are behind Max?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

10. Old McDonald has a horse, two cows and three pigs.



How many more cows does he need, so that exactly half of all his animals are cows?

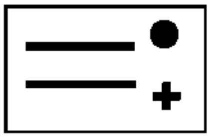
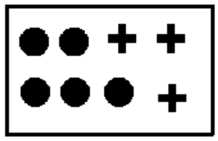
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

– 5 Points Questions –

11. Every box shows the result of the addition of the numbers on the very left and on the very top (for example: 5 + 7 = 12). Which number is written behind the star?

+	10	7
5	15	12
?	14	★

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

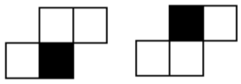
12. Lisa has several sheets of construction paper like this  and 

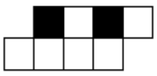
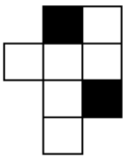
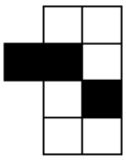
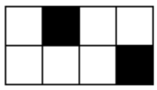
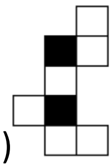
She wants to make 7 identical crowns: 

For that she cuts out the necessary parts.

What is the minimum number of sheets of construction paper that she has to cut up?

(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 13

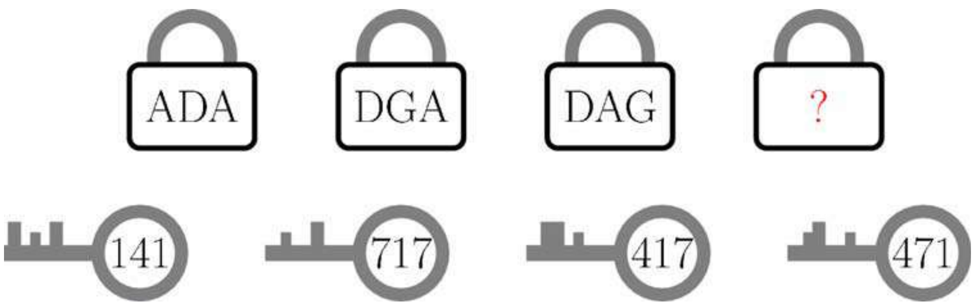
13. Simon has two identical tiles, whose front look like this: 
The back is white.
Which pattern can he make with those two tiles?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. A kangaroo always does ten jumps within a minute.
Then he has a three minute break.
How many minutes does it need in order to do 50 jumps?

(A) 4 (B) 5 (C) 16 (D) 17 (E) 21

15. Each one of the four keys locks exactly one padlock. Every letter on a padlock stands for exactly one digit. Same letters mean same digits.
Which letters must be written on the fourth padlock?



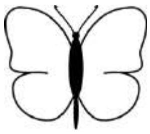
(A) GDA (B) ADG (C) GAD (D) GAG (E) DAD

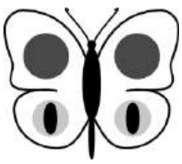
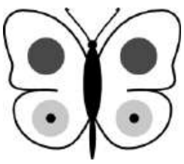
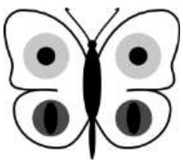
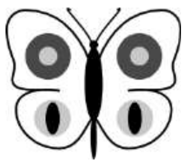
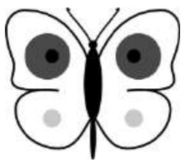
Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

Lösungsvektor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	E	C	E	C	C	D	E	B	C	B	B	A	D	D

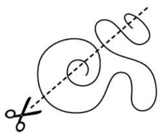
3 Punkte Beispiele

1. Ellen möchte den Schmetterling  mit den 6 Stickern  dekorieren.
Welchen Schmetterling kann sie basteln?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

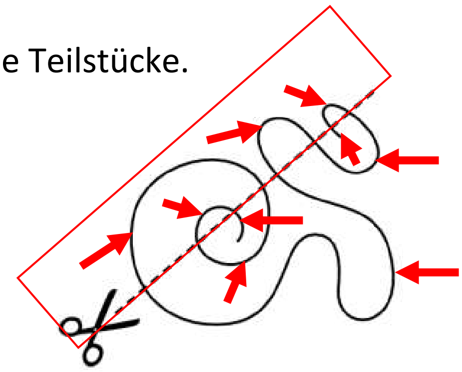
Nur beim Schmetterling (A) kommen die vorgegebenen Sticker vor.

2. In wie viele Teile wird die Schnur zerschnitten?

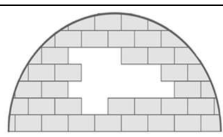


(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 **(E) 9**

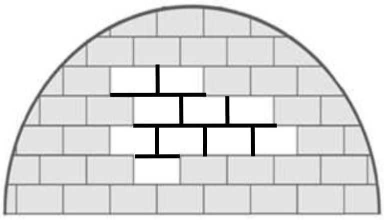
Die roten Pfeile markieren die Teilstücke.



3. Wie viele Steine fehlen in diesem Iglu?

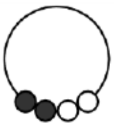
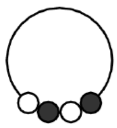


(A) 8 (B) 9 **(C) 10** (D) 11 (E) 12

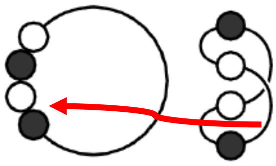


4. Das Bild  zeigt ein Armband mit Perlen.

Welches der unteren Bänder zeigt dasselbe Armband wie oben?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Die Schnüre werden „ausgewickelt“, indem die obere Schnur nach links gelegt wird.



Du kannst auch mit dem Finger die Schnur entlang fahren und siehst dann, in welcher Reihenfolge die Perlen kommen.

5. Vier der Zahlen 1, 3, 4, 5 und 7 werden so in die Kästchen geschrieben, dass die Rechnung stimmt.
Welche Zahl wurde nicht verwendet?

$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{} + \boxed{}$

(A) 1 (B) 3 **(C) 4** (D) 5 (E) 7

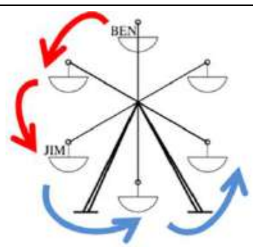
Je zwei Zahlen ergeben 8:

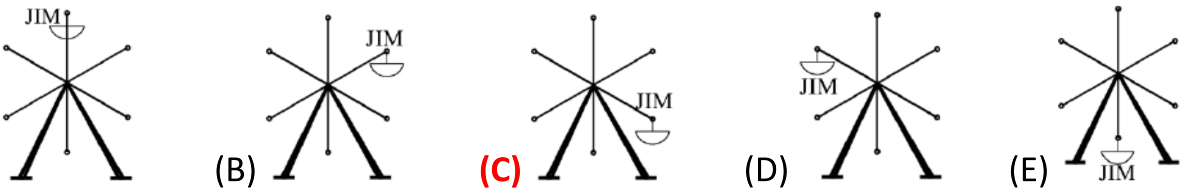
$\boxed{1} + \boxed{7} = \boxed{3} + \boxed{5}$

Daher kann die 4 nicht verwendet werden.

– 4 Punkte Beispiele –

6. Jim und Ben sitzen im Riesenrad (siehe rechtes Bild).
Das Riesenrad dreht sich weiter.
Nun befindet sich Ben an der Position, wo Jim vorher war.
Wo befindet sich Jim jetzt?

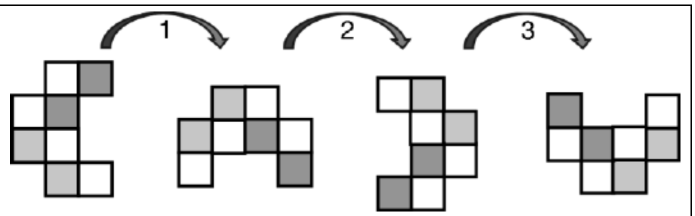


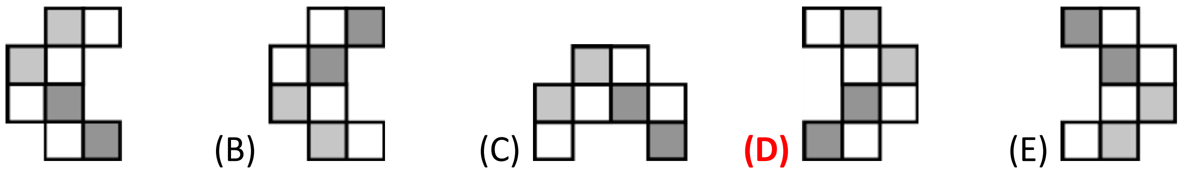


(A) (B) **(C)** (D) (E)

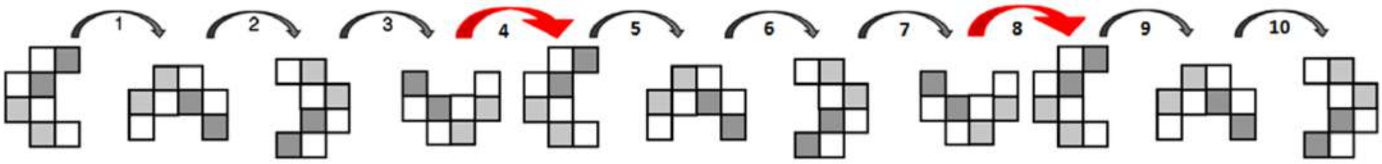
Die roten Pfeile zeigen die Positionsänderungen von Ben, die blauen die von Jim.

7. Alfred dreht seinen Baustein 10 Mal.
Die ersten drei Mal sind im Bild zu sehen.
Wie liegt der Baustein am Schluss?

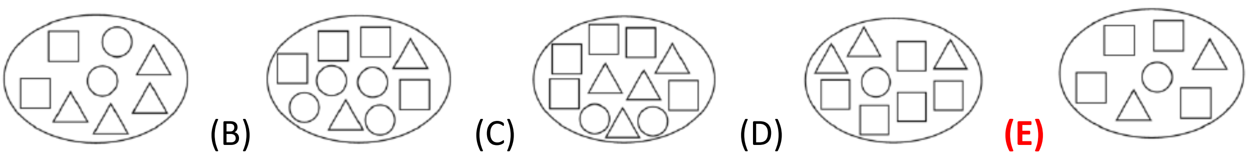




(A) (B) (C) **(D)** (E)



8. In welchem Bild befinden sich **halb so viele Kreise wie Dreiecke** und **doppelt so viele Quadrate wie Dreiecke**?



(A) (B) (C) (D) **(E)**

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
2□, 4△, 2○	4□, 2△, 4○	5□, 4△, 2○	5□, 3△, 1○	4□, 2△, 1○
2□, 4△, 2○	4□, 2△, 4○	5□, 4△, 2○	5□, 3△, 1○	4□, 2△, 1○

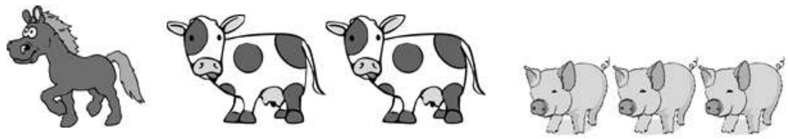
Beide Anforderungen werden nur in Abbildung E erfüllt.

9. Leo und Max stehen in einer Schlange die aus 11 Personen besteht.
Vor Leo stehen 7 Personen, Max steht in der Schlange direkt hinter ihm.
Wie viele Personen stehen hinter Max?

(A) 1 **(B) 2** (C) 3 (D) 4 (E) 5

1	2	3	4	5	6	7	**Leo**	**Max**	**1**	**2**

10. Old McDonald hat ein Pferd, zwei Kühe und drei Schweine.



Wie viele Kühe braucht er noch, damit genau die Hälfte aller Tiere Kühe sind?

(A) 0 (B) 1 **(C) 2** (D) 3 (E) 4

1 Pferd + 3 Schweine = 4 Tiere Das ist die genau die Hälfte aller Tiere.

4 – 2 = 2 Er braucht noch 2 Kühe.

– 5 Punkte Beispiele –

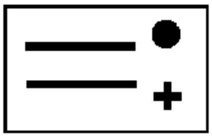
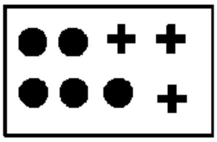
11. In jedem Feld steht das Ergebnis der Plusrechnung der Zahlen ganz links und ganz oben (zum Beispiel 5 + 7 = 12). Welche Zahl steht hinter dem Stern?

+	**10**	**7**
5	**15**	**12**
?	**14**	☆

(A) 10 **(B) 11** (C) 12 (D) 13 (E) 15

Da 5 + 10 = 15 gilt, ist **?** + 10 = 14. **?** muss somit 4 sein.

Somit folgt: 4 + 7 = 11 ☆ = 11.

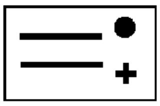
12. Lisa hat mehrere Bastelbögen der Sorten  und .

Sie möchte 7 gleiche Kronen  basteln.

Dazu schneidet sie die benötigten Teile aus.
Wie viele Bastelbögen muss sie mindestens zerschneiden?

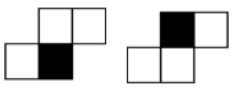
(A) 7 **(B) 9** (C) 10 (D) 11 (E) 13

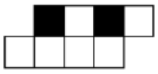
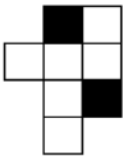
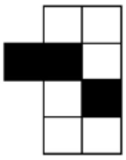
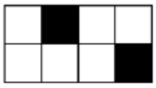
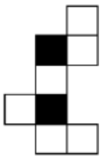
Lisa braucht 7 ▬ , 7 ✚ und 7 • 4 = 28 ●.

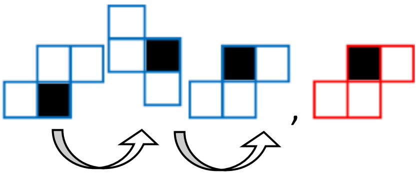
Für die 7 ▬ benötigt sie **4 Bögen** dieser Art: 

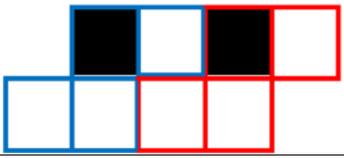
Somit hat sie auch schon 4 ✚ und 4 ●. Es fehlen ihr noch 24 ●.

Dafür braucht sie **5 Bögen**, denn 24 : 5 = 4 und 4 Rest.

13. Simon hat zwei gleiche Plättchen deren Vorderseite so aussieht: 
Die Rückseite ist weiß.
Welches Muster kann er mit diesen beiden Plättchen legen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Der blaue Stein muss zuerst gedreht werden: 

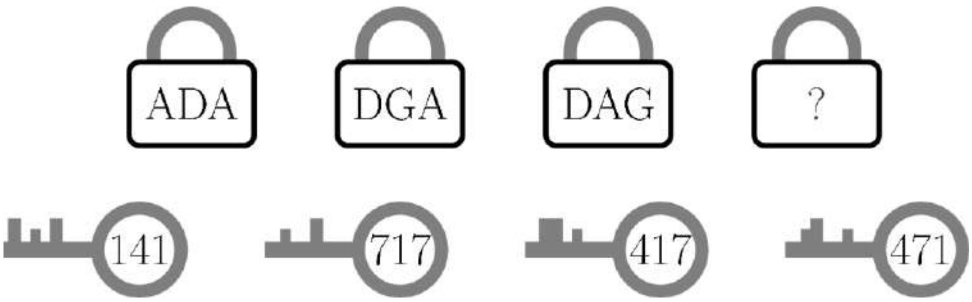


14. Ein Känguru macht in einer Minute immer zehn Sprünge.
Danach ruht es sich drei Minuten aus.
Wie viele Minuten braucht es um 50 Sprünge zu machen?

(A) 4 (B) 5 (C) 16 **(D) 17** (E) 21

Bei 50 Sprüngen muss das Känguru 5 • 10 Sprünge mit insgesamt 4 Pausen dazwischen machen.
Also 5 Minuten für die Sprünge und 4 • 3 Minuten für die Pausen
5 + 12 = 17

15. Jeder der vier Schlüssel passt genau in ein Vorhängeschloss. Jeder Buchstabe eines Schlosses steht für genau eine Ziffer. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.
Welche Buchstaben müssen im vierten Vorhängeschloss stehen?



(A) GDA (B) ADG (C) GAD **(D) GAG** (E) DAD

Für das erste Schloss **A**DA kommen nur die Schlüssel infrage, die vorne und hinten dieselben Ziffern haben. 

A kann also für 1 oder 7 stehen und D für 1 oder 4.

Gilt D = 1, dann muss A = 7 sein. Die Schlüssel 

passen dann nur in Schlösser mit 4DA und 4AD. Diese gibt es nicht.

Also muss D = 4 sein.

DGA und DAG passen nun zu Schlüsseln mit 4GA und 4AG.
Ist **A = 1** gilt: 471 und 417

Dann passt der Schlüssel 717 zu Schloss 7A7. Das ist Schloss GAG.
(Wäre A = 7, passt der Schlüssel 717 zu Schloss A1A. Das gibt es nicht.)

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Kategorie: Ecolier, 3. und 4. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

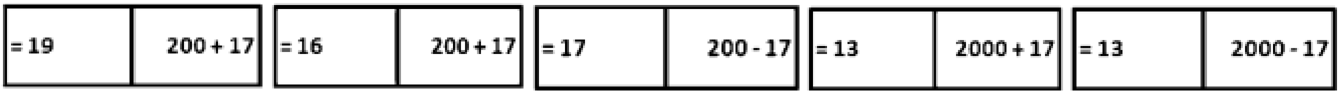
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welcher der Dominoteile A bis E muss in die Mitte der beiden gegebenen Teile eingefügt werden, damit beide Rechnungen stimmen?

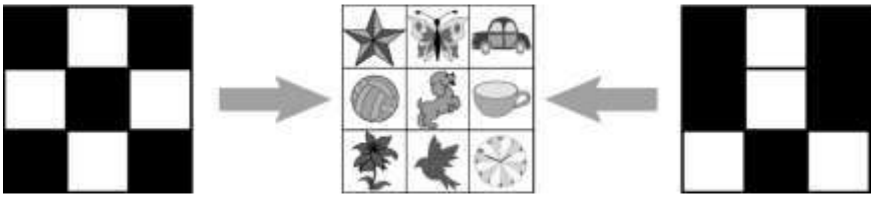


(A) (B) (C) (D) (E)

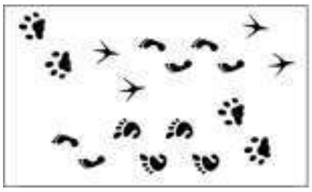
2. Wenn John aus dem Fenster schaut, sieht er die Hälfte der Kängurus im Park.
Wie viele Kängurus gibt es insgesamt im Park?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 14

3. Zwei quadratische Blätter bestehen aus durchsichtigen und schwarzen kleinen Quadraten. Beide werden übereinander auf das Blatt in der Mitte gelegt. Welche Figur kann man dann noch sehen?

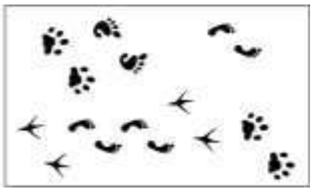


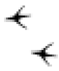
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. 

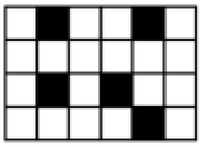
Das linke Bild wird gedreht.
Das rechte Bild zeigt die neue Lage nach der Drehung.

Welche Fußabdrücke fehlen nach der Drehung?



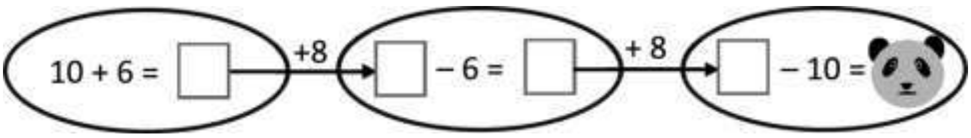
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Wie viele weiße Quadrate müssen schwarz gefärbt werden, damit es genau doppelt so viele weiße wie schwarze Quadrate gibt?



(A) 1 (B) 3 (C) 8 (D) 12 (E) 16

6. Welche Zahl ist hinter dem Panda versteckt?

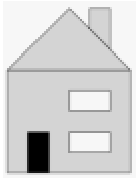


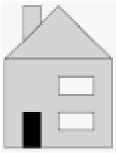
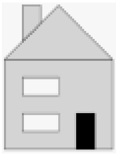
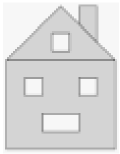
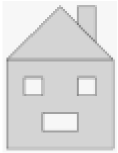
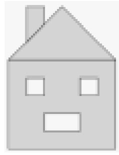
(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 28

7. Im folgenden Bild sieht man eine Halskette mit sechs Perlen:
Welche der folgenden Abbildungen zeigt dieselbe Halskette?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

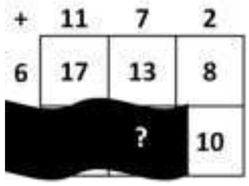
8. Im folgenden Bild siehst du Annas Haus von vorne:
Auf der Rückseite hat es drei Fenster aber keine Tür.
Welches Bild zeigt Annas Haus von hinten?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

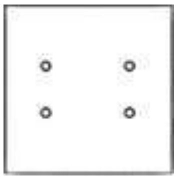
9. In jedem Feld steht das Ergebnis der Addition der Zahlen ganz links und ganz oben (zum Beispiel: 6 + 2 = 8). Welche Zahl steht hinter dem Fragezeichen?
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

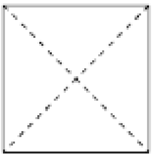
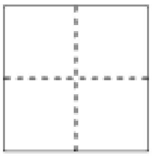
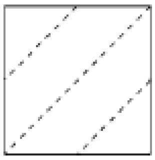
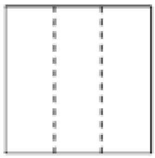


10. Vier Äpfel und eine Birne wiegen gleich viel wie drei Birnen.
Was stimmt dann?
(A) Eine Birne wiegt gleich viel wie ein Apfel.
(B) Drei Äpfel wiegen gleich viel wie eine Birne.
(C) Drei Birnen wiegen gleich viel wie ein Apfel.
(D) Zwei Birnen wiegen gleich viel wie ein Apfel.
(E) Zwei Äpfel wiegen gleich viel wie eine Birne.

11. Luftballons werden in Packungen zu je 5, 10 oder 25 Stück verkauft. Marius kauft ganz genau 70 Ballons.
Wie viele Packungen muss er mindestens kaufen?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

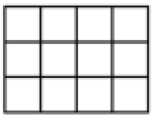
12. Bob faltet ein Blatt Papier, stanzt ein Loch in das
Papier und faltet es wieder auf. Das aufgefaltete Papier sieht dann so aus:
Entlang welcher punktierten Linien hat Bob das Papier zuvor gefaltet?

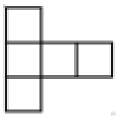
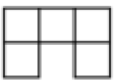
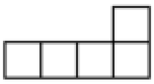
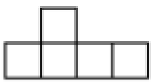
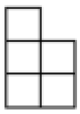


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Für einen Wettbewerb haben sich 13 Kinder angemeldet. Danach kamen weitere 19 dazu. Für den Wettbewerb benötigt man sechs gleich große Mannschaften.
Wie viele zusätzliche Kinder braucht man noch, damit man sechs gleich große Mannschaften bilden kann?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

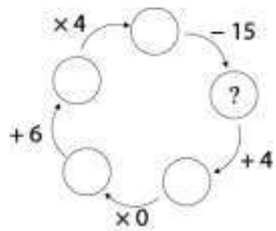
14. Ben möchte aus dem 4 x 3 Raster zwei identische Stücke herausschneiden.
Bei welcher der folgenden Formen gelingt das nicht?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

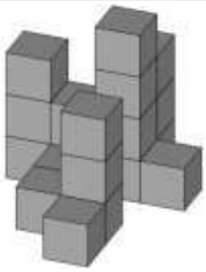
15. David hat einen Herd mit zwei Kochplatten, auf dem er fünf verschiedene Speisen zubereiten möchte.
Die Speisen benötigen 40 min, 15 min, 35 min, 10 min und 45 min bis sie fertig gekocht sind.
Er möchte möglichst kurz in der Küche stehen, darf aber nur fertige Speisen von der Herdplatte nehmen.
Wie lange benötigt er für die Zubereitung?
(A) 60 min (B) 70 min (C) 75 min (D) 80 min (E) 85 min

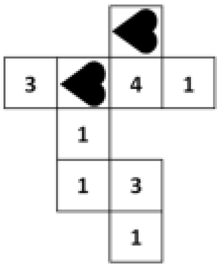
16. Welche Zahl muss man in den Kreis mit dem Fragezeichen schreiben,
damit die Rechnung stimmt?
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12



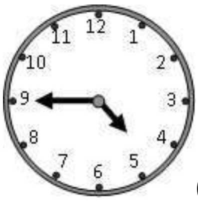
- 5 Punkte Beispiele -

17. Max baut mit einigen kleinen gleich großen Würfeln dieses Bauwerk. Betrachtet er sein Bauwerk von oben, gibt der Plan rechts die Anzahl der Würfel in jedem Turm an.
Wie groß ist die Summe der Zahlen unter den beiden Herzen?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7





18. Georg beginnt um 5 Uhr nachmittags sein Training. Er braucht 5 Minuten zur Bushaltestelle. Die Busfahrt dauert 15 Minuten. Danach muss er 5 Minuten zum Spielfeld gehen. Um 6 Uhr morgens fährt der Bus zum ersten Mal, danach fährt er alle 10 Minuten.
Wann muss er spätestens das Haus verlassen, um rechtzeitig am Spielfeld zu sein?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

19. Vier Brüder haben zusammen 11 Kekse gegessen. Jeder aß zumindest ein Keks, aber alle aßen verschieden viele Kekse. Drei der Brüder aßen zusammen 9 Kekse, wovon einer genau 3 Kekse bekam.
Wie viele Kekse aß der Bub, der die meisten Kekse gegessen hat?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

20. In jedes kleine Quadrat einer 4 x 4 Tabelle wurde eine Zahl geschrieben.
Mary sucht jene 2 x 2 Tabelle, in der die Summe der vier Zahlen am größten ist.
Wie groß ist diese Summe?
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

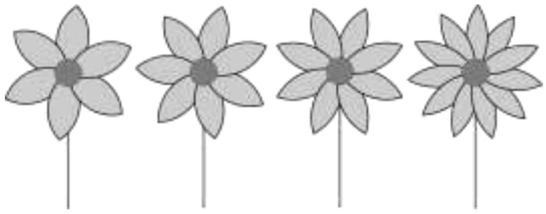
1	2	1	3
4	1	1	2
1	7	3	2
2	1	3	1

21. Fünf Burschen teilen sich 10 Sackerl mit Murmeln. Jeder bekommt davon genau zwei Sackerl:

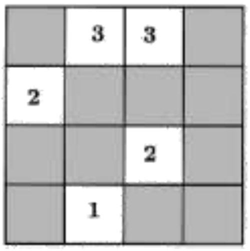
Alex erhält 5 Murmeln, Bob 7, Charles 9 und Dennis 15. Eric bekommt die beiden Sackerl, die übrig bleiben.
Wie viele Murmeln erhält er?
(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 17 (E) 19

22. Ein kleiner Zoo hat eine Giraffe, einen Elefanten, einen Löwen und eine Schildkröte.
Susi möchte heute genau zwei der Tiere besuchen, aber nicht mit dem Löwen beginnen.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat sie, die beiden Tiere nacheinander zu besuchen?
(A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

23. Kate hat vier Blumen, die 6, 7, 8 beziehungsweise 11 Blütenblätter besitzen. Sie reißt nun von drei verschiedenen Blumen jeweils ein Blütenblatt ab. Das wiederholt sie solange, bis es nicht mehr möglich ist, von drei verschiedenen Blumen je ein Blütenblatt abzureißen.
Wie viele Blütenblätter bleiben mindestens übrig?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



24. Leonie hat hinter einigen grauen Feldern jeweils einen Smiley versteckt. Die Zahlen geben an, wie viele Smileys in den benachbarten Zellen versteckt sind. Zwei Zellen sind genau dann benachbart, wenn sie eine Seite oder eine Ecke gemeinsam haben.
Wie viele Smileys hat Leonie versteckt?
(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 11



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Level: Ecolier, Grade: 3 and 4

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
Each correct answer to questions 1. – 8.: 3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.: 4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

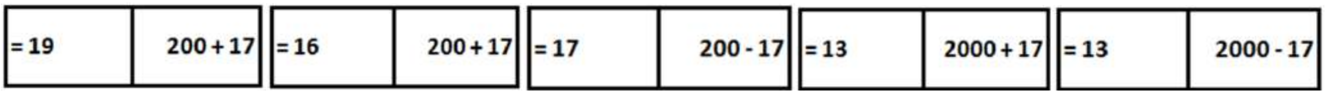
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2017
Level Ecolier (Grade 3 and 4)
Österreich – 16. 3. 2017

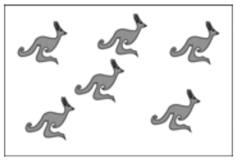
- 3 Points Questions -

1. Which one of the domino piece's A to E has to be placed in between the shown pieces, so that both calculations are correct?



(A) (B) (C) (D) (E)

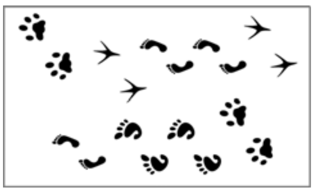
2. If John looks out the window he can see half of the kangaroos in the park. How many kangaroos in total are there in the park?



(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 12 (E) 14

3. Two square sheets are made up of see-through and black little squares. Both are placed on top of each other onto the sheet in the middle. Which shape can then still be seen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

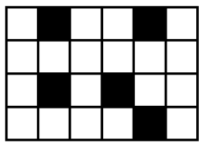
4. 

The left picture rotated.
The right picture shows the new position after the rotation.

Which footprints are missing after the rotation?

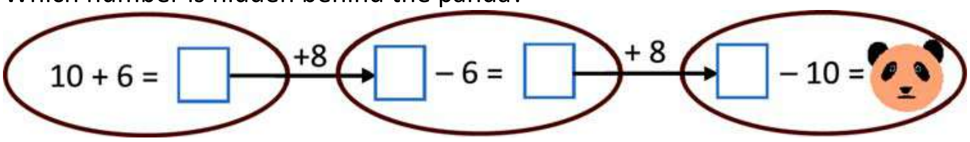
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. How many white squares need to be coloured in black, so that there are exactly twice as many white squares as there are black squares?



(A) 1 (B) 3 (C) 8 (D) 12 (E) 16

6. Which number is hidden behind the panda?

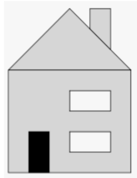


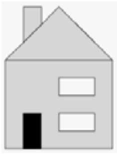
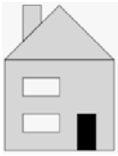
(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 28

7. The following picture shows a necklace with six pearls:
Which of the following diagrams shows the same necklace?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

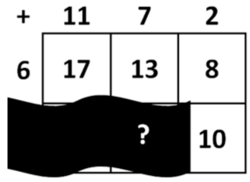
8. This picture shows you Anna's house from the front:
At the back it has three windows but no door.
Which picture shows Anna's house from the back?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Points Questions -

9. Every box shows the result of the addition of the numbers on the very left and on the very top (for example: 6 + 2 = 8). Which number is written behind the question mark?

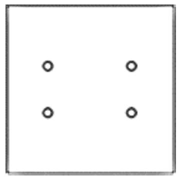


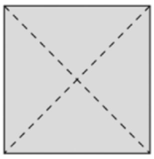
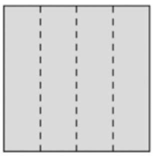
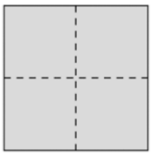
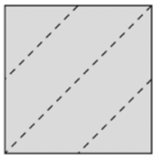
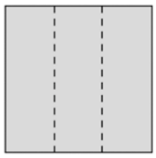
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 15

10. Four apples and one pear weigh as much as three pears.
What is therefore correct?
(A) One pear weighs as much as one apple.
(B) Three apples weigh as much as one pear.
(C) Three pears weigh as much as one apple.
(D) Two pears weigh as much as one apple.
(E) Two apples weigh as much as one pear.

11. Balloons are sold in packages of 5, 10 or 25 pieces each. Marius buys exactly 70 balloons.
What is the minimum number of packages he has to buy?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

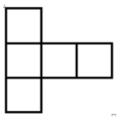
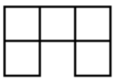
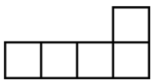
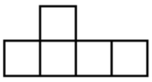
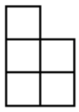
12. Bob folds a piece of paper, then punches a hole into the paper and unfolds it again. The unfolded paper then looks like this:
Along which dotted line has Bob folded the paper beforehand?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

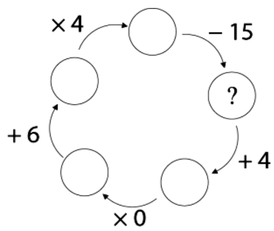
13. 13 children registered for a competition. Then another 19 joined. Six equally big teams are needed for the competition.
How many more children are needed, so that six equally big teams can be formed?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

14. Ben wants to cut out two identical pieces out of the 4 x 3 grid.
For which of the following shapes can he not achieve that?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

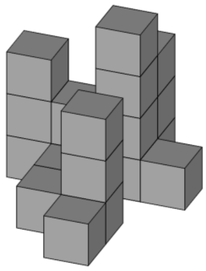
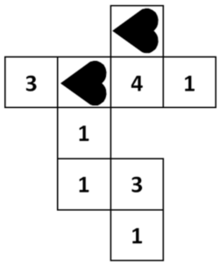
15. David has a stove with two hobs on which he wants to prepare five different dishes.
The dishes need 40 min, 15 min, 35 min, 10 min and 45 min until they are fully cooked.
He wants to spend as little time in the kitchen as possible but is only allowed to take dishes off the hob when they are fully cooked.
How long does he need for the preparation?
(A) 60 min (B) 70 min (C) 75 min (D) 80 min (E) 85 min

16. Which number must be written into the circle with the question mark so that the calculation is correct?
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

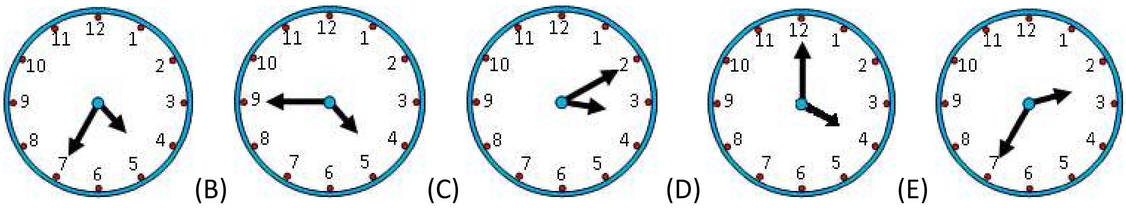


- 5 Points Questions -

17. Max builds this construction using some small equally big cubes.
If he looks at his construction from above, the plan on the right tells the number of cubes in every tower.
How big is the sum of the numbers covered by the two hearts?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

18. Georg starts his training at 5 o'clock in the afternoon. It takes him 5 minutes to get to the bus stop. The bus journey takes 15 minutes. Then he has to walk for 5 minutes to get to the pitch. The bus comes at 6 o'clock in the morning for the first time and then every 10 minutes.
What is the latest possible time he has to leave the house in order to be at the pitch on time?



(A) (B) (C) (D) (E)

19. Four brothers have eaten 11 biscuits altogether. Everyone has eaten at least one biscuit but all of them have eaten a different amount of biscuits. Three of the brothers ate 9 biscuits altogether, where one of them got exactly 3 biscuits.
How many biscuits did the boy who had the most biscuits eat?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

20. A number is written into every square of a 4 x 4 table.
Mary is looking for the 2 x 2 table where the sum of the four numbers is greatest.
How big is this sum?
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

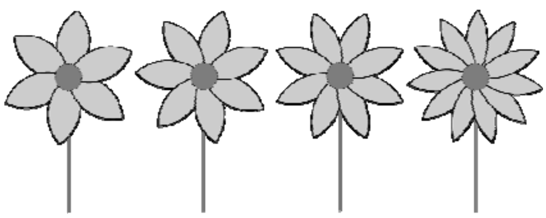
1	2	1	3
4	1	1	2
1	7	3	2
2	1	3	1

21. Five boys share 10 bags of marbles between themselves. Everyone gets exactly two bags:

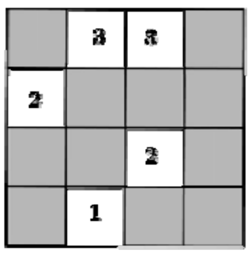
Alex gets 5 marbles, Bob 7, Charles 9 and Dennis 15. Eric gets the two bags that are left over.
How many marbles does he get?
(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 17 (E) 19

22. A small zoo has a giraffe, an elephant, a lion and a turtle.
Susi wants to visit exactly two of the animals today but does not want to start with the lion.
How many different possibilities does she have, to visit the two animals one after the other?
(A) 3 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

23. Kate has four flowers, which have 6, 7, 8 and 11 petals respectively.
She now tears off one petal from each of three different flowers. She repeats this until it is no longer possible to tear off one petal from each of three different flowers.
What is the minimum number of petals left over?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



24. Leonie has hidden a Smiley behind some of the grey boxes. The numbers state how many Smileys there are in the neighbouring boxes. Two boxes are neighbouring if they have one side or one corner in common.
How many Smileys has Leonie hidden?
(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 11



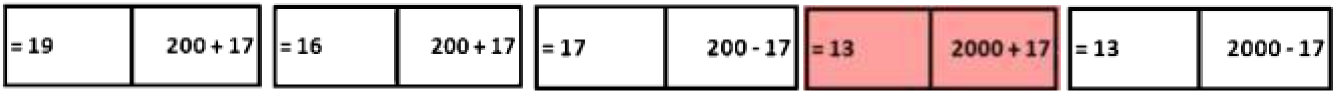
Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

Lösungsvektor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	D	E	C	B	A	A	E	E	E	B	C	D	A	C	B	C	A	C	D	E	D	B	B

3 Punkte Beispiele

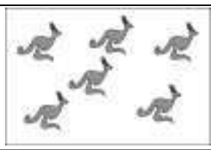
1. Welcher der Dominoteile A bis E muss in die Mitte der beiden gegebenen Teile eingefügt werden, damit beide Rechnungen stimmen?



(A) (B) (C) **(D)** (E)

16 – 3 = 13, deswegen kommen nur Antwort D oder E in Frage. 2000 – 17 = 1983, **2000 + 17 = 2017**.

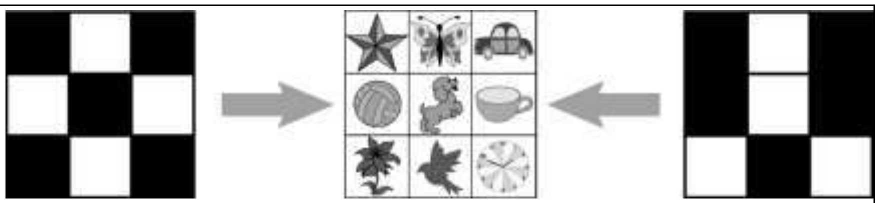
2. Wenn John aus dem Fenster schaut, sieht er die Hälfte der Kängurus im Park. Wie viele Kängurus gibt es insgesamt im Park?



(A) 6 (B) 7 (C) 8 **(D) 12** (E) 14

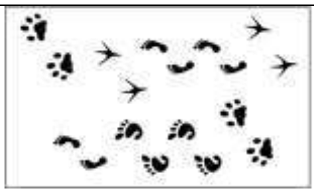
Im Bild sind 6 Kängurus gezeichnet. Das Doppelte von 6 ist 12.

3. Zwei quadratische Blätter bestehen aus durchsichtigen und schwarzen kleinen Quadraten. Beide werden übereinander auf das Blatt in der Mitte gelegt. Welche Figur kann man dann noch sehen?



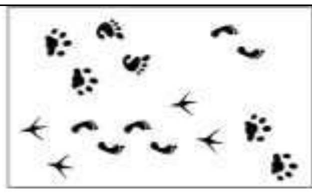
(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Legt man beide Quadrate übereinander, bleibt das mittlere obere Feld durchsichtig. Daher sieht man den Schmetterling.

4. 

Das linke Bild wird gedreht.
Das rechte Bild zeigt die neue Lage nach der Drehung.

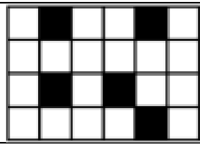
Welche Fußabdrücke fehlen nach der Drehung?



(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E)

Es fehlen 

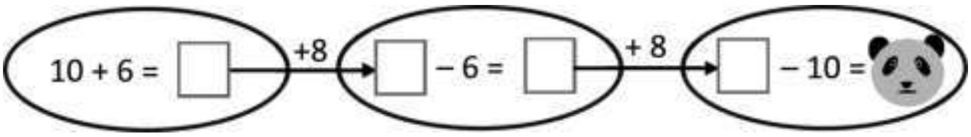
5. Wie viele weiße Quadrate müssen schwarz gefärbt werden, damit es genau doppelt so viele weiße wie schwarze Quadrate gibt?



(A) 1 **(B) 3** (C) 8 (D) 12 (E) 16

Es gibt 5 schwarze und 19 weiße Quadrate. Färbt man ein weißes Quadrat schwarz, wird die Anzahl der schwarzen Quadrate um 1 größer und die der weißen um 1 kleiner, man hat dann also 6 schwarze und 18 weiße Quadrate. Folgend: 7 schwarze und 17 weiße und dann 8 schwarze und 16 weiße Quadrate. 16 ist das Doppelte von 8. Man muss also 3 Quadrate umfärben.

6. Welche Zahl ist hinter dem Panda versteckt?



(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 28

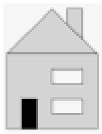
10 + 6 = 16. 16 + 8 = 24. 24 – 6 = 18. 18 + 8 = 26. 26 – 10 = 16.

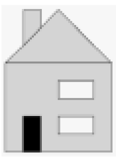
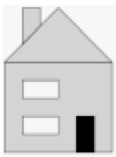
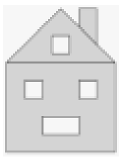
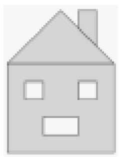
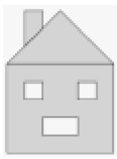
7. Im folgenden Bild sieht man eine Halskette mit sechs Perlen:
Welche der folgenden Abbildungen zeigt dieselbe Halskette?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

„Fährt" man (mit dem Finger) die Kette nach, ist die Reihenfolge der Perlen von links nach rechts: schwarz, weiß, weiß, schwarz, schwarz, weiß

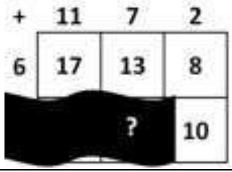
8. Im folgenden Bild siehst du Annas Haus von vorne:
Auf der Rückseite hat es drei Fenster aber keine Tür.
Welches Bild zeigt Annas Haus von hinten?



(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Die Häuser, die auf der Rückseite keine Tür haben, sind C, D und E. Da man das Haus von hinten sieht, muss der Schornstein auf der anderen Seite des Daches sein als bei der Ansicht von vorne. Das ist nur bei E der Fall.

9. In jedem Feld steht das Ergebnis der Addition der Zahlen ganz links und ganz oben (zum Beispiel: 6 + 2 = 8). Welche Zahl steht hinter dem Fragezeichen?



(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 **(E) 15**

2 + 8 = 10, daher steht in der zweiten Zeile ganz links außen die Zahl 8. 8 + 7 = 15.

10. Vier Äpfel und eine Birne wiegen gleich viel wie drei Birnen.
Was stimmt dann?

(A) Eine Birne wiegt gleich viel wie ein Apfel.
(B) Drei Äpfel wiegen gleich viel wie eine Birne.
(C) Drei Birnen wiegen gleich viel wie ein Apfel.
(D) Zwei Birnen wiegen gleich viel wie ein Apfel.
(E) Zwei Äpfel wiegen gleich viel wie eine Birne.

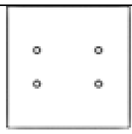
Nimmt man von beiden Seiten der Waage eine Birne weg, wiegen vier Äpfel gleich viel wie zwei Birnen. Daher wiegen zwei Äpfel gleich viel wie eine Birne.

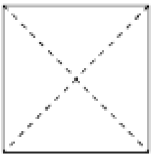
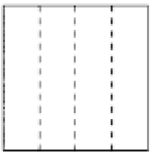
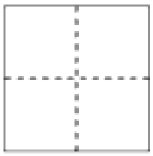
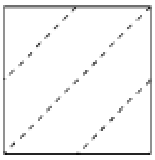
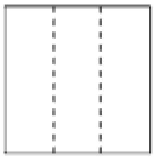
11. Luftballons werden in Packungen zu je 5, 10 oder 25 Stück verkauft. Marius kauft ganz genau 70 Ballons. Wie viele Packungen muss er mindestens kaufen?

(A) 3 **(B) 4** (C) 5 (D) 6 (E) 7

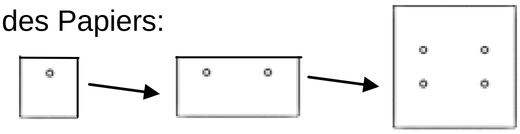
25 + 25 + 10 + 10 = 70. Das sind vier Packungen.

12. Bob faltet ein Blatt Papier, stanzt ein Loch in das Papier und faltet es wieder auf. Das aufgefaltete Papier sieht dann so aus:
Entlang welcher punktierten Linien hat Bob das Papier zuvor gefaltet?



(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Auffalten des Papiers:

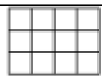


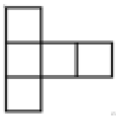
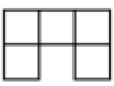
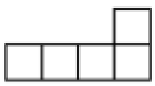
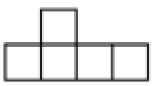
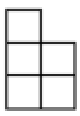
13. Für einen Wettbewerb haben sich 13 Kinder angemeldet. Danach kamen weitere 19 dazu. Für den Wettbewerb benötigt man sechs gleich große Mannschaften.
Wie viele zusätzliche Kinder braucht man noch, damit man sechs gleich große Mannschaften bilden kann?

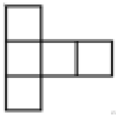
(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D) 4** (E) 5

13 + 19 = 32. Die nächstgrößere Zahl, die durch 6 teilbar ist, ist 36. 36 – 32 = 4

14. Ben möchte aus dem 4 x 3 Raster zwei identische Stücke herausschneiden.
Bei welcher der folgenden Formen gelingt das nicht?



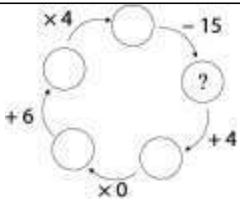
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Diese Figur  ist zu „sperrig“, um zweimal hineinzupassen.

15. David hat einen Herd mit zwei Kochplatten, auf dem er fünf verschiedene Speisen zubereiten möchte. Die Speisen benötigen 40 min, 15 min, 35 min, 10 min und 45 min bis sie fertig gekocht sind.
Er möchte möglichst kurz in der Küche stehen, darf aber nur fertige Speisen von der Herdplatte nehmen.
Wie lange benötigt er für die Zubereitung?
(A) 60 min (B) 70 min **(C)** 75 min (D) 80 min (E) 85 min

Die eine Kochplatte wird für die Speisen mit 40 und 35min, die andere für die mit 15, 10 und 45min verwendet. 40 + 35 = 75, 15 + 10 + 45 = 70. Die maximale Kochzeit beträgt daher 75min.

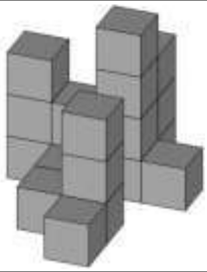
16. Welche Zahl muss man in den Kreis mit dem Fragezeichen schreiben, damit die Rechnung stimmt?
(A) 8 **(B) 9** (C) 10 (D) 11 (E) 12

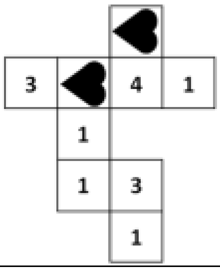


Man beginnt mit der Multiplikation mit 0: 0 + 6 = 6, 6 x 4 = 24, 24 – 15 = 9

5 Punkte Beispiele

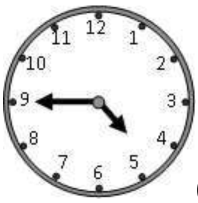
17. Max baut mit einigen kleinen gleich großen Würfeln dieses Bauwerk. Betrachtet er sein Bauwerk von oben, gibt der Plan rechts die Anzahl der Würfel in jedem Turm an.
Wie groß ist die Summe der Zahlen unter den beiden Herzen?
(A) 3 (B) 4 **(C) 5** (D) 6 (E) 7





Die fraglichen Türme bestehen aus 2 und 3 Würfeln = 5 Würfel. Als einfachster Vergleichsturm kann jener an die beiden fraglichen angrenzende Turm mit 4 Würfeln dienen.

18. Georg beginnt um 5 Uhr nachmittags sein Training. Er braucht 5 Minuten zur Bushaltestelle. Die Busfahrt dauert 15 Minuten. Danach muss er 5 Minuten zum Spielfeld gehen. Um 6 Uhr morgens fährt der Bus zum ersten Mal, danach fährt er alle 10 Minuten.
Wann muss er spätestens das Haus verlassen, um rechtzeitig am Spielfeld zu sein?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Er braucht 25min von zuhause bis zum Spielfeld und der Bus fährt um 16:40. Diesen erreicht er, wenn er um 16:35 von daheim weggeht.

19. Vier Brüder haben zusammen 11 Kekse gegessen. Jeder aß zumindest ein Keks, aber alle aßen verschieden viele Kekse. Drei der Brüder aßen zusammen 9 Kekse, wovon einer genau 3 Kekse bekam.
Wie viele Kekse aß der Bub, der die meisten Kekse gegessen hat?
(A) 3 (B) 4 **(C) 5** (D) 6 (E) 7

3 + 1 + 5= 9, 9 + 2 = 11. Die Brüder aßen 1, 2, 3 und 5 Kekse.

20. In jedes kleine Quadrat einer 4 x 4 Tabelle wurde eine Zahl geschrieben.
Mary sucht jene 2 x 2 Tabelle, in der die Summe der vier Zahlen am größten ist.
Wie groß ist diese Summe?
(A) 11 (B) 12 (C) 13 **(D) 14** (E) 15

1	2	1	3
4	1	1	2
1	7	3	2
2	1	3	1

7 + 3+ 3 + 1 = 14

1	2	1	3
4	1	1	2
1	7	3	2
2	1	3	1

21. Fünf Burschen teilen sich 10 Sackerl mit Murmeln. Jeder bekommt davon genau zwei Sackerl:

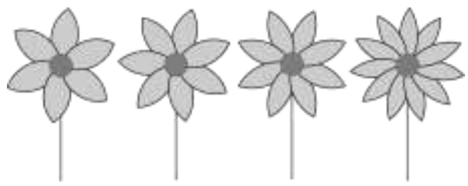
Alex erhält 5 Murmeln, Bob 7, Charles 9 und Dennis 15. Eric bekommt die beiden letzten Sackerl.
Wie viele Murmeln erhält er?
(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 17 **(E) 19**

Es stehen die Zahlen von 1 bis 10 zur Verfügung, wobei keine Zahl doppelt verwendet werden kann. Zum Beispiel: 2 + 3 = 5, 1 + 6 = 7, 4 + 5 = 9, 7 + 8 = 15. Die beiden Sackerl, die übrig bleiben, sind in jedem Fall die mit 9 bzw. 10 Murmeln.

22. Ein kleiner Zoo hat eine Giraffe, einen Elefanten, einen Löwen und eine Schildkröte.
Susi möchte heute genau zwei der Tiere besuchen, aber nicht mit dem Löwen beginnen.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat sie, die beiden Tiere nacheinander zu besuchen?
(A) 3 (B) 7 (C) 8 **(D) 9** (E) 12

Die Möglichkeiten sind: Giraffe Elefant; Giraffe Löwe; Giraffe Schildkröte; Elefant Giraffe; Elefant Löwe; Elefant Schildkröte; Schildkröte Giraffe; Schildkröte Elefant; Schildkröte Löwe

23. Kate hat vier Blumen, die 6, 7, 8 beziehungsweise 11 Blütenblätter besitzen. Sie reißt nun von drei verschiedenen Blumen jeweils ein Blütenblatt ab. Das wiederholt sie solange, bis es nicht mehr möglich ist, von drei verschiedenen Blumen je ein Blütenblatt abzureißen.
Wie viele Blütenblätter bleiben mindestens übrig?
(A) 1 **(B) 2** (C) 3 (D) 4 (E) 5

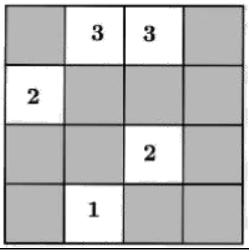


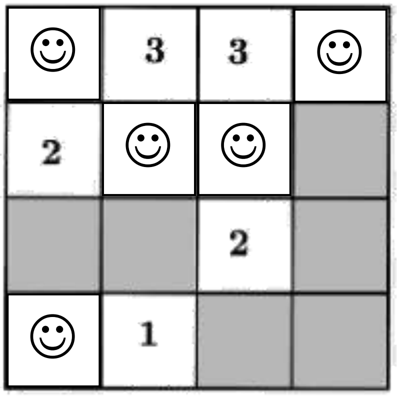
Die Spalten der folgenden Tabelle enthalten jeweils die Anzahl der Blütenblätter nach einer „Abreiß-Runde“:

6 Blätter	6	5	5	5	4	3	2	1	0	
7 Blätter	6	6	5	4	4	3	3	2	1	0
8 Blätter	7	6	5	4	3	3	2	2	1	0
11 Blätter	10	9	8	7	6	5	4	3	3	**2**

24. Leonie hat hinter einigen grauen Feldern jeweils einen Smiley versteckt. Die Zahlen geben an, wie viele Smileys in den benachbarten Zellen versteckt sind. Zwei Zellen sind genau dann benachbart, wenn sie eine Seite oder eine Ecke gemeinsam haben. Wie viele Smileys hat Leonie versteckt?

(A) 4 **(B) 5** (C) 7 (D) 8 (E) 11





KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Kategorie: Benjamin, 5. und 6. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. – 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. – 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

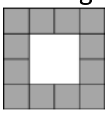
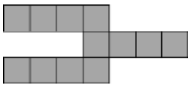
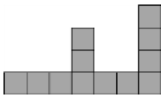
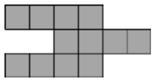
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

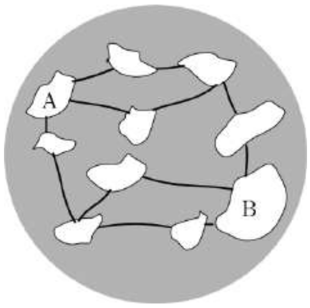
- 3 Punkte Beispiele -

1. Vier Karten liegen in der Reihenfolge 2 0 1 7
Welche Reihenfolge kann man nicht erhalten, wenn man nur zwei Karten miteinander vertauscht?
(A) 2 7 1 0 (B) 0 1 2 7 (C) 1 0 2 7 (D) 0 2 1 7 (E) 2 0 7 1

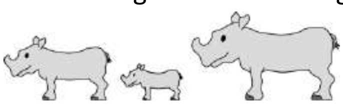
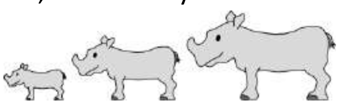
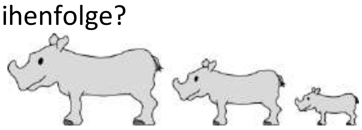
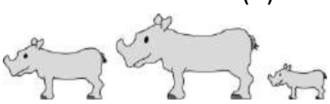
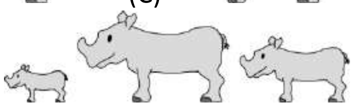
2. Eine Fliege hat 6 Beine, eine Spinne 8.
Daher haben 3 Fliegen und 2 Spinnen zusammen genauso viele Beine wie 9 Hühner und
(A) 2 Katzen (B) 3 Katzen (C) 4 Katzen (D) 5 Katzen (E) 6 Katzen

3. Anna hat vier identische Bausteine der folgenden Gestalt: 
Welche Figur kann sie damit nicht legen?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

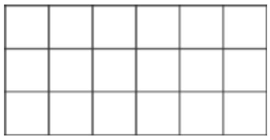
4. Kevin weiß, dass 1111 x 1111 = 1234321 ergibt. Welches Ergebnis erhält er für 1111 x 2222?
(A) 3456543 (B) 2345432 (C) 2234322 (D) 2468642 (E) 4321234

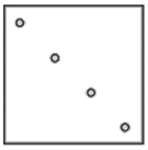
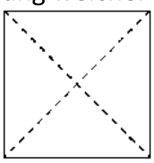
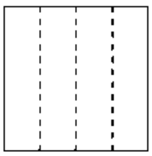
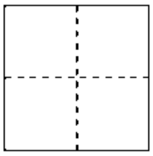
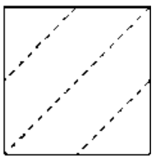
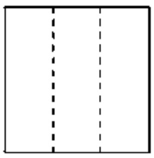


5. Die 10 Inseln sind mit 12 Brücken verbunden (siehe Abbildung). Alle Brücken sind für den Verkehr geöffnet. Wie viele Brücken müssen mindestens geschlossen werden, damit der Verkehr zwischen A und B zum Erliegen kommt?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

6. Jane, Kate und Lynn gehen spazieren. Jane spaziert ganz vorne, Kate in der Mitte und Lynn ganz hinten. Jane wiegt 500 kg mehr als Kate und Kate wiegt 1000 kg weniger als Lynn.
Welche der folgenden Abbildungen zeigt Jane, Kate und Lynn in der richtigen Reihenfolge?
(A)  (B)  (C) 
(D)  (E) 

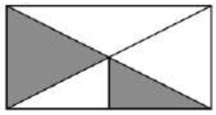
7. Max färbt die Quadrate des Rasters so, dass ein Drittel aller Quadrate blau und die Hälfte aller Quadrate gelb ist. Den Rest färbt er rot. Wie viele Quadrate muss er rot färben?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



8. Bob faltet ein Blatt Papier, stanzt danach ein Loch in das Papier und faltet es wieder auf.
Das aufgefaltete Papier sieht dann so aus: 
Entlang welcher punktierten Linien hat Bob das Papier zuvor gefaltet?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

9. Ein Rechteck ist doppelt so lang wie breit. Welcher Bruchteil des Rechtecks ist grau gefärbt?

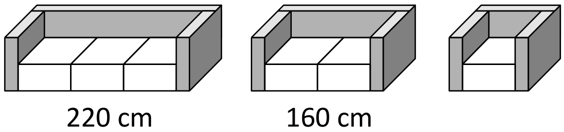


(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{5}$

10. Nur vier Spieler schossen Tore in einem Handball-Match. Jeder von ihnen erzielte eine andere Anzahl an Toren. Michael hat am wenigsten Tore geschossen. Wenn die anderen drei Spieler insgesamt 20 Tore erzielen konnten, wie viele Tore kann Michael höchstens geschossen haben?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Ein Möbelgeschäft verkauft 3-sitzige, 2-sitzige und 1-sitzige Sofas, die jeweils links und rechts gleich breite Armlehnen haben. Jeder Sitzplatz ist gleich breit (siehe Bild). Mitsamt den Armlehnen ist das 3-sitzige Sofa 220 cm und das 2-sitzige Sofa 160 cm breit. Wie breit ist das 1-sitzige Sofa?



(A) 60 cm (B) 80 cm (C) 90 cm (D) 100 cm (E) 120 cm

12. Tom reiht alle Zahlen von 1 bis 20 aneinander und erhält die 31-stellige Zahl 1234567891011121314151617181920.
Danach streicht er 24 Ziffern der Zahl so, dass die verbleibende Zahl möglichst groß ist.
Welche Zahl erhält er?

(A) 9671819 (B) 9567892 (C) 9781920 (D) 9912345 (E) 9818192

13. Auf jeder Seitenfläche eines besonderen Würfels steht eine Zahl. Die Summe der Zahlen, die auf gegenüberliegenden Flächen liegen, ist jeweils gleich groß. Fünf der sechs Zahlen lauten 5, 6, 9, 11 und 14.
Welche Zahl steht auf der sechsten Fläche?

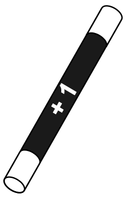
(A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 13 (E) 15

14. Paul macht eine fünftägige Wandertour. Er startet am Montag und beendet sie am Freitag. Jeden Tag geht er um 2 km mehr als am Vortag. Insgesamt wandert er 70 km.
Welche Strecke legt er am Donnerstag zurück?

(A) 12 km (B) 13 km (C) 14 km (D) 15 km (E) 16 km

15. Boris möchte sein Taschengeld vermehren. Dafür gibt ihm eine Fee drei Zauberstäbe.
Er muss jeden genau einmal verwenden.

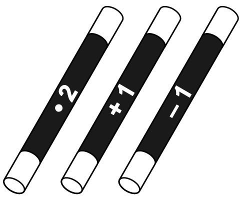
Zauberstab "**+1**" vergrößert sein Geld um 1 €



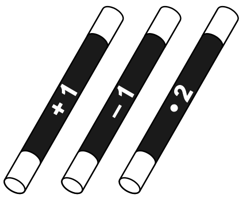
Zauberstab "**–1**" verkleinert es um 1 €

Zauberstab "**•2**" verdoppelt es.

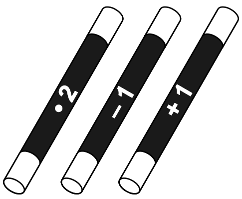
In welcher Reihenfolge muss er die Zauberstäbe anwenden um möglichst viel Geld zu erhalten?



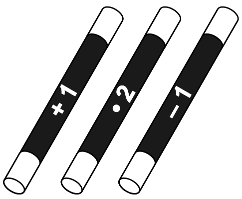
(A)



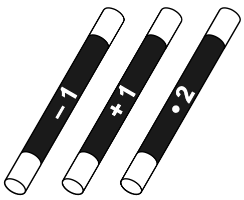
(B)



(C)

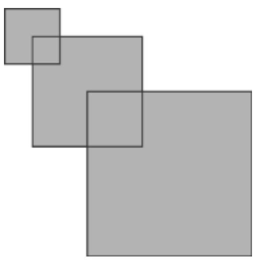


(D)



(E)

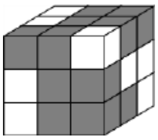
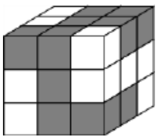
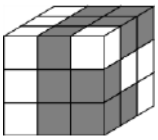
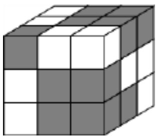
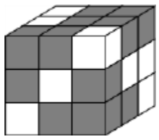
16. Raphael hat drei Quadrate. Das erste hat 2 cm Seitenlänge, das zweite hat 4 cm Seitenlänge und ein Eckpunkt ist der Mittelpunkt des ersten Quadrates. Das dritte Quadrat hat 6 cm Seitenlänge und ein Eckpunkt ist der Mittelpunkt des zweiten Quadrates.
Welche Fläche besitzt die abgebildete Figur?



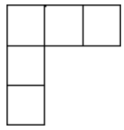
(A) 51 cm^2 (B) 32 cm^2 (C) 27 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 6 cm^2

- 5 Punkte Beispiele -

17. Ein großer Würfel wird aus 9 identischen Bausteinen gebaut. Jeder Baustein sieht so aus wie in der folgenden Abbildung:  Welcher große Würfel ist möglich?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

18. Die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 müssen in die fünf Felder dieser Figur nach folgenden Regeln geschrieben werden: Steht eine Zahl unter einer anderen, muss sie größer sein; steht eine Zahl rechts von einer anderen, muss sie größer sein. Auf wie viele verschiedene Arten kann dies geschehen?



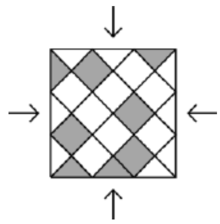
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

19. Acht Kängurus stehen so wie in der Zeichnung zu sehen ist in einer Reihe.

Zwei benachbarte Kängurus, die sich in die Augen schauen, tauschen die Plätze, indem sie aneinander vorbeihüpfen. Das geschieht solange, bis keine weiteren Sprünge mehr möglich sind.
Wie oft wurde Platz getauscht?

(A) 2 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 16

20. Ein quadratischer Boden besteht aus dreieckigen und quadratischen Fliesen, in den Farben grau und weiß. Was ist die kleinste Anzahl an grauen Fliesen, die mit weißen Fliesen vertauscht werden müssen, sodass der Boden aus den vier angegebenen Blickrichtungen gleich aussieht?

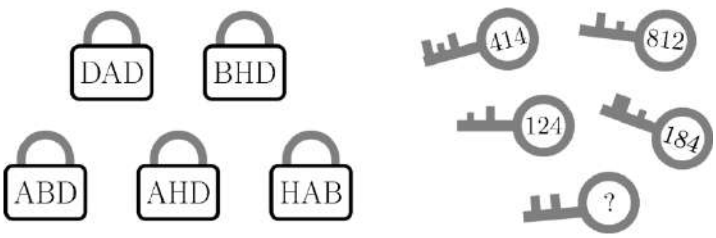


(A) drei Dreiecke, ein Quadrat (B) ein Dreieck, drei Quadrate (C) ein Dreieck, ein Quadrat
(D) drei Dreiecke, drei Quadrate (E) drei Dreiecke, zwei Quadrate

21. In einem Sack befinden sich nur rote und grüne Murmeln. Entnimmt man dem Sack zufällig fünf Murmeln, so ist zumindest eine rot. Entnimmt man dem Sack sechs Murmeln, dann ist zumindest eine grün.
Wie viele Murmeln befinden sich maximal in der Tasche?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

22. Jeder der 5 Schlüssel sperrt genau ein Vorhängeschloss. Jeder Buchstabe eines Schlosses steht für genau eine Ziffer, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern. Welche Ziffern stehen auf dem Schlüssel mit dem Fragezeichen?

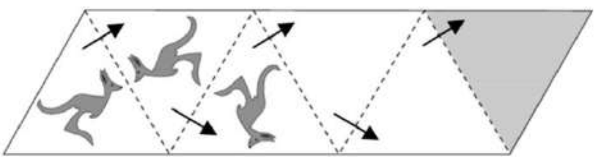


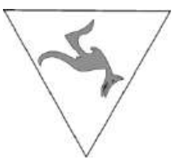
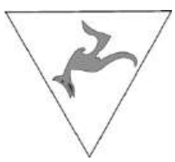
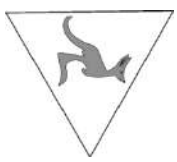
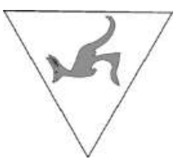
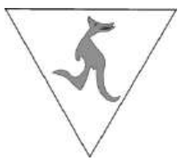
(A) 382 (B) 282 (C) 284 (D) 823 (E) 824

23. Petra mag gerade Zahlen, Ina durch drei teilbare und Celina durch 5 teilbare Zahlen. In einem Korb befinden sich 8 Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Jedes der drei Mädchen ging alleine zum Korb und entnahm sich alle Kugeln entsprechend ihrer Vorlieben. Petra nahm 32 und 52, Ina nahm 24, 33 und 45, und Celina nahm 20, 25 und 35. In welcher Reihenfolge gingen sie zum Korb?

(A) Petra, Celina, Ina (B) Celina, Ina, Petra (C) Ina, Petra, Celina (D) Ina, Celina, Petra (E) Celina, Petra, Ina

24. Das erste Känguru wird fortlaufend an den punktierten Linien gespiegelt. Zwei Spiegelungen wurden durchgeführt.
Welche Position nimmt das Känguru im grauen Dreieck ein?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Level: Benjamin, Grade: 5 and 6

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
Each correct answer to questions 1. – 8.: 3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.: 4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

Känguru der Mathematik 2017
Level Benjamin (Grade 5 and 6)
Österreich – 16. 3. 2017

- 3 Points Questions -

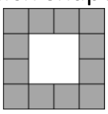
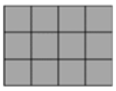
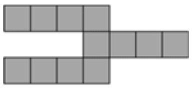
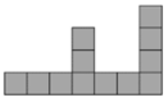
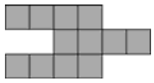
1. Four cards are placed in this order: 2 0 1 7
Which order cannot be obtained, if only two cards are swapped?

(A) 2 7 1 0 (B) 0 1 2 7 (C) 1 0 2 7 (D) 0 2 1 7 (E) 2 0 7 1

2. A fly has 6 legs, a spider 8.
Therefore 3 flies and 2 spiders together have the same amount of legs as 9 chickens and

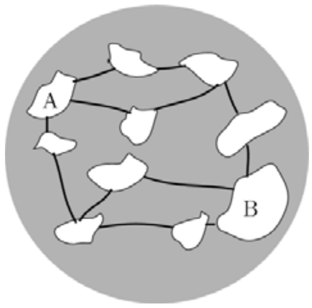
(A) 2 cats (B) 3 cats (C) 4 cats (D) 5 cats (E) 6 cats

3. Anna has four identical building blocks that each look like this: 
Which shape can she not form with them?

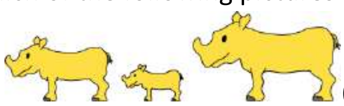
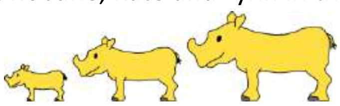
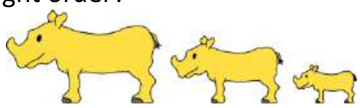
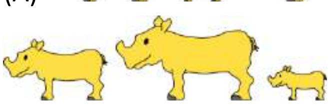
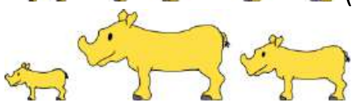
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Kevin knows that 1111 x 1111 = 1234321. Which result does he get for 1111 x 2222?
(A) 3456543 (B) 2345432 (C) 2234322 (D) 2468642 (E) 4321234

5. The 10 islands are connected by 12 bridges (see diagram). All bridges are open for traffic. What is the minimum number of bridges that need to be closed off, so that the traffic between A and B comes to a halt?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

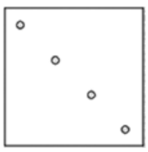


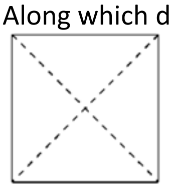
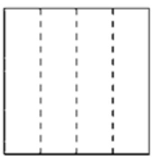
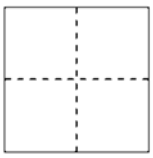
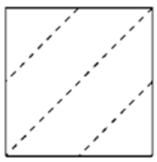
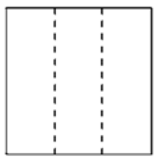
6. Jane, Kate and Lynn go for a walk. Jane walks at the very front, Kate in the middle and Lynn at the very back. Jane weighs 500 kg more than Kate and Kate weighs 1000 kg less than Lynn.
Which of the following pictures shows Jane, Kate and Lynn in the right order?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Max colours in the squares of the grid, so that one third of all squares are blue and one half of all squares are yellow. The rest he colours in red. How many squares does he have to colour in red?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

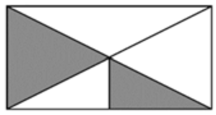
8. Bob folds a piece of paper, then punches a hole into the paper and unfolds it again.

The unfolded paper then looks like this: 
Along which dotted line has Bob folded the paper beforehand?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Points Questions -

9. A rectangle is twice as long as wide. Which fraction of the rectangle is coloured in grey?

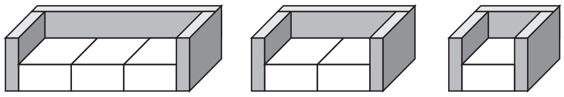


(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{5}$

10. Only four players score goals in a handball game. Each one scored a different number of goals. Michael scored the fewest number of goals. If the other players altogether managed to score 20 goals in total, what is the maximum number of goals Michael could have scored?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. A furniture shop sells 3-seater, 2-seater and 1-seater sofas that each have an equally wide armrest on the left and the right hand side. Each seat is equally wide (see picture). Together with the armrests the 3-seater sofa is 220 cm and the 2-seater sofa 160 cm wide.



220 cm 160 cm

How wide is the 1-seater sofa?

(A) 60 cm (B) 80 cm (C) 90 cm (D) 100 cm (E) 120 cm

12. Tom strings together the numbers from 1 to 20 and obtains the 31-digit number 1234567891011121314151617181920.
Then he deletes 24 digits of the number, so that the remaining number is as big as possible.
Which number does he obtain?

(A) 9671819 (B) 9567892 (C) 9781920 (D) 9912345 (E) 9818192

13. There is a number written on every face of a special die. The sum of the numbers, which are on opposite sides to each other, is always equally big. Five of the six numbers are 5, 6, 9, 11 and 14. Which number is on the sixth face?

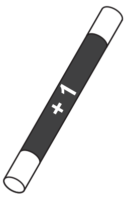
(A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 13 (E) 15

14. Paul goes on a 5-day hiking trek. He starts on Monday and finishes on Friday. Every day he covers 2 km more than the day before. In total he hikes 70 km.
Which distance does he cover on Thursday?

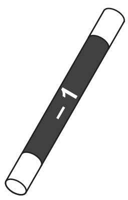
(A) 12 km (B) 13 km (C) 14 km (D) 15 km (E) 16 km

15. Boris wants to increase his pocket money. To achieve this a fairy gives him three magic wands.
He has to use every single one exactly once.

Magic wand "+**1**" increases his money by 1 €

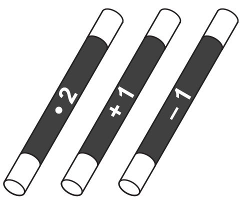


Magic wand "–**1**" decreases it by 1 €.

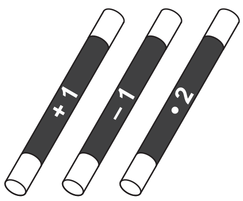


Magic wand "**•2**" doubles it.

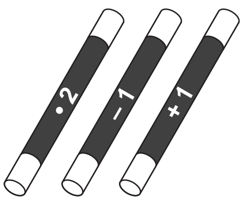
In which order does he have to use the magic wands, in order to get the most money?



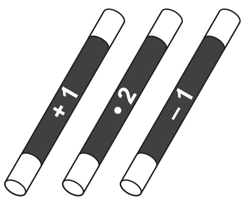
(A)



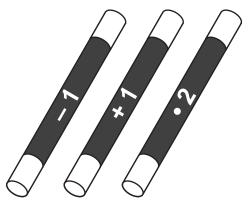
(B)



(C)

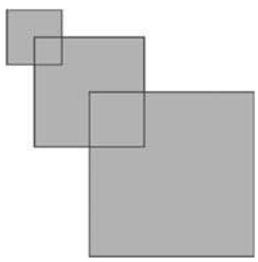


(D)



(E)

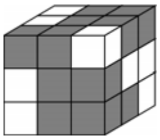
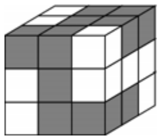
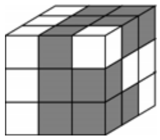
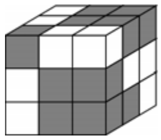
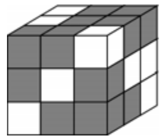
16. Raphael has three squares. The first one has side length 2 cm, the second one has side length 4 cm and one corner is the centre of the first square.
The third square has side length 6 cm and one corner is the centre of the second square.
What is the total area of the figure shown?



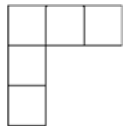
(A) 51 cm^2 (B) 32 cm^2 (C) 27 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 6 cm^2

- 5 Points Questions -

17. A big cube is made up of 9 identical building blocks. Each building block looks like this:  Which big cube is possible?

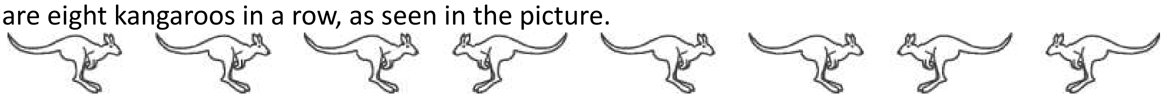
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

18. The numbers 1, 2, 3, 4 and 5 have to be written into the five fields of this diagram according to the following rules: If one number is below another number, it has to be greater; if one number is to the right of another, it has to be greater. How many ways are there to place the numbers?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

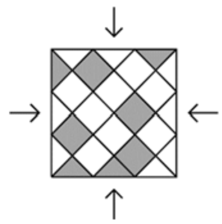
19. There are eight kangaroos in a row, as seen in the picture.



Two kangaroos, that are standing next to each other and that are looking into each others eyes, are changing places by hopping past each other. This is carried out until no more jumps are possible.
How often did a change of places occur?

(A) 2 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 16

20. A square floor is made up of triangular and square tiles in grey and white. What is the smallest number of grey tiles that have to be swapped with white tiles, so that the floor looks the same from all four given viewing directions?

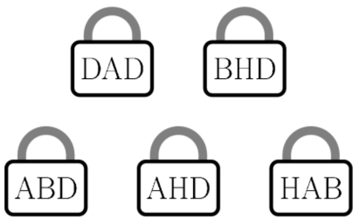


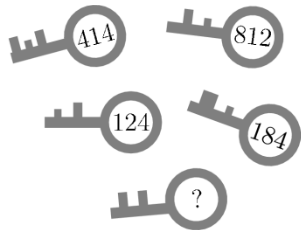
(A) three triangles, one square (B) one triangle, three squares (C) one triangle, one square
(D) three triangles, three squares (E) three triangles, two squares

21. In a bag there are only red and green marbles. If one randomly takes out five marbles, there is at least one red one. If one randomly takes out six marbles, there is at least one green one.
What is the maximum number of marbles in the bag?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

22. Each one of the 5 keys locks exactly one padlock. Every letter on a padlock stands for exactly one digit, same letters mean same digits.
Which digits are on the key with the question mark?



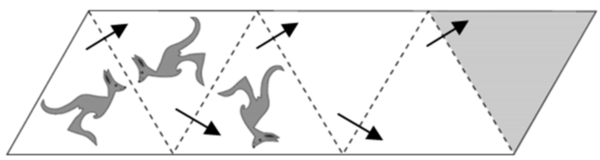


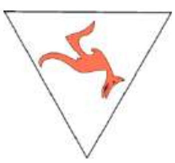
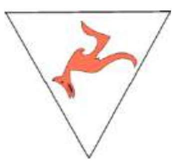
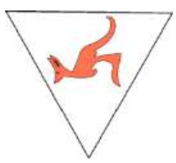
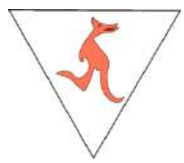
(A) 382 (B) 282 (C) 284 (D) 823 (E) 824

23. Petra likes even numbers, Ina likes numbers that are divisible by three and Celina numbers that are divisible by 5. In a basket there are 8 balls, each with one number written on them. Each one of the three girls went to the basket on their own and took all balls according to their preferences. Petra took 32 and 52, Ina took 24, 33 and 45, and Celina took 20, 25 and 35. In which order did they go to the basket?

(A) Petra, Celina, Ina (B) Celina, Ina, Petra (C) Ina, Petra, Celina (D) Ina, Celina, Petra (E) Celina, Petra, Ina

24. The first kangaroo is repeatedly mirrored along the dotted lines. Two reflections were already carried out.
In which position is the kangaroo in the grey triangle?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

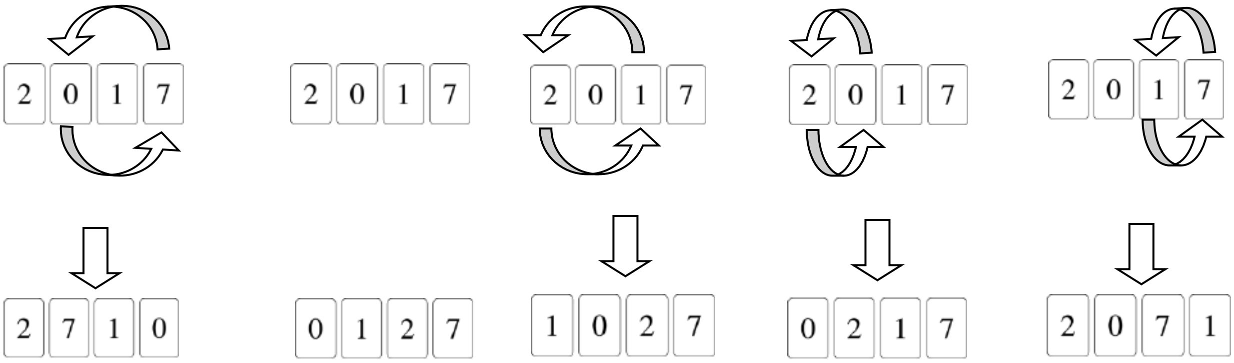
-Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

Lösungsvektor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	C	E	D	B	A	C	D	B	C	D	C	E	E	D	A	A	D	D	C	C	C	D	E

3 Punkte Beispiele

1. Vier Karten liegen in der Reihenfolge . 2 0 1 7
Welche Reihenfolge kann man nicht erhalten, wenn man nur zwei Karten miteinander vertauscht?
(A) 2 7 1 0 (B) 0 1 2 7 (C) 1 0 2 7 (D) 0 2 1 7 (E) 2 0 7 1

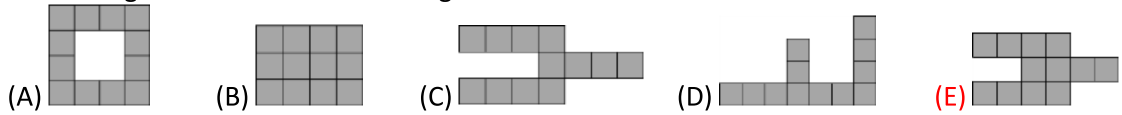


Nur bei B ist es nicht möglich mit nur dem Tausch zweier Karten die neue Reihenfolge zu erhalten.

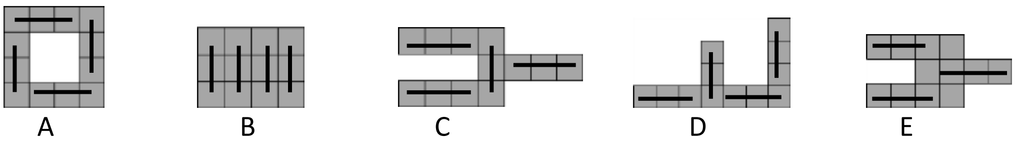
2. Eine Fliege hat 6 Beine, eine Spinne 8.
Daher haben 3 Fliegen und 2 Spinnen zusammen genauso viele Beine wie 9 Hühner und
(A) 2 Katzen (B) 3 Katzen (C) 4 Katzen (D) 5 Katzen (E) 6 Katzen

Drei Fliegen liefern 18 Beine, zwei Spinnen 16 Beine, also insgesamt 34 Beine. 9 Hühner liefern 18 Beine, demnach verbleiben noch 16 Beine. Dafür benötigt man 4 Katzen.

3. Anna hat vier identische Bausteine der folgenden Gestalt: 
Welche Figur kann sie damit nicht legen?



Die vier identischen Bausteine  können nur in der Figur E nicht gelegt werden.
Eine mögliche Anordnung der Baustein wird hier angeführt.

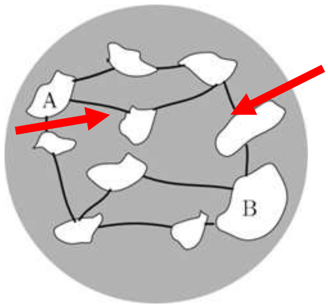


4. Kevin weiß, dass 1111 x 1111 = 1234321 ergibt. Welches Ergebnis erhält er für 1111 x 2222?

(A) 3456543 (B) 2345432 (C) 2234322 (D) 2468642 (E) 4321234

Das Ergebnis 1111 x 2222 liefert das doppelte Ergebnis der Multiplikation 1111 x 1111.
Man kann 1111 x 2222 auch als Multiplikation 1111 x (1111) x 2 anschreiben, deshalb ist die Lösung D.

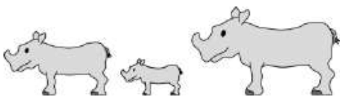
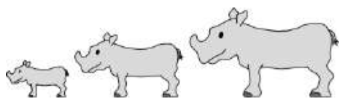
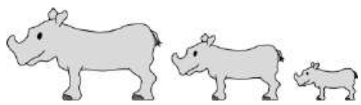
5. Die 10 Inseln sind mit 12 Brücken verbunden (siehe Abbildung). Alle Brücken sind für den Verkehr geöffnet. Wie viele Brücken müssen mindestens geschlossen werden, damit der Verkehr zwischen A und B zum Erliegen kommt?

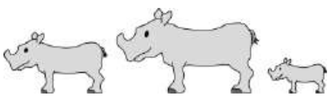
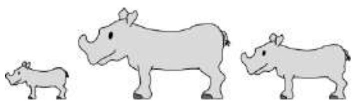


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Es genügt die beiden Brücken mit den roten Pfeilen zu schließen. Lösung B ist daher die richtige Lösung.

6. Jane, Kate und Lynn gehen spazieren. Jane spaziert ganz vorne, Kate in der Mitte und Lynn ganz hinten. Jane wiegt 500 kg mehr als Kate und Kate wiegt 1000 kg weniger als Lynn. Welche der folgenden Abbildungen zeigt Jane, Kate und Lynn in der richtigen Reihenfolge?

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

Jane geht vorne, Kate in der Mitte und Lynn ganz hinten.

Jane	Kate	Lynn
Kate + 500 kg	Lynn – 1000 kg	

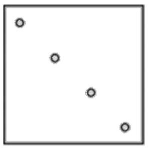
Jane wiegt um 500 kg mehr als Kate, da aber Kate um 1000 kg leichter als Lynn ist, ist Kate das leichteste Nashorn, danach folgt Jane, und Lynn ist das schwerste. Die Lösung A zeigt die richtige Reihenfolge.

7. Max färbt die Quadrate des Rasters so, dass ein Drittel aller Quadrate blau und die Hälfte aller Quadrate gelb ist. Den Rest färbt er rot. Wie viele Quadrate muss er rot färben?

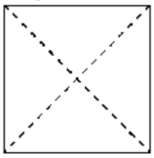
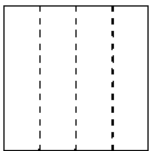
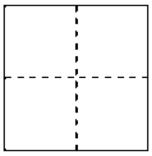
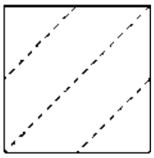
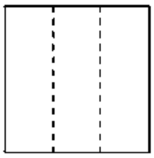
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Das Raster besteht aus 18 kleinen Quadraten. Ein Drittel, also 6 Quadrate, werden blau gefärbt. Die Hälfte, das sind 9 Quadrate, werden gelb bemalt, deshalb bleiben nur mehr 3 Quadrate übrig, die rot gefärbt werden. Lösung: C

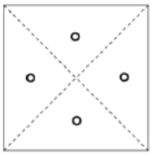
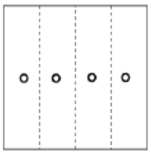
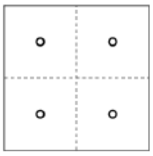
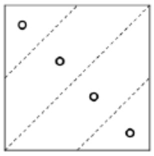
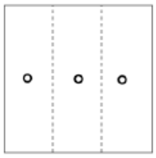
8. Bob faltet ein Blatt Papier, stanzt danach ein Loch in das Papier und faltet es wieder auf.

Das aufgefaltete Papier sieht dann so aus: 

Entlang welcher punktierten Linien hat Bob das Papier zuvor gefaltet?

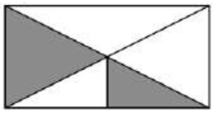
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Die folgenden Abbildungen zeigen die Löcher, so wie sie nach den vorgegebenen Faltungen entstehen:

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

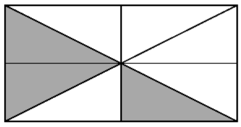
4 Punkte Beispiele

9. Ein Rechteck ist doppelt so lang wie breit. Welcher Bruchteil des Rechtecks ist grau gefärbt?



(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{5}$

Teilt man das Rechteck in acht gleich große Teile, so sind genau drei davon grau, deshalb Lösung B.



10. Nur vier Spieler schossen Tore in einem Handball-Match. Jeder von ihnen erzielte eine andere Anzahl an Toren. Michael hat am wenigsten Tore geschossen. Wenn die anderen drei Spieler insgesamt 20 Tore erzielen konnten, wie viele Tore kann Michael höchstens geschossen haben?

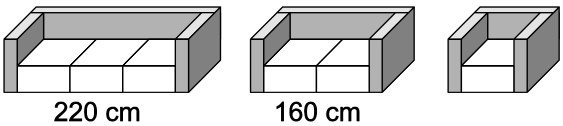
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Da jeder Spieler eine andere Anzahl von Toren geschossen hat und die drei besseren Spieler insgesamt 20 Tore erzielten, gibt es nur die Möglichkeiten für 5, 7 und 8 Tore, bzw. 5, 6 und 9 Tore für die besseren Spieler. Michael kann daher höchstens 4 Tore erzielt haben. Die richtige Lösung lautet somit C.

Michael	Spieler 2	Spieler 3	Spieler 4
4	5	7	8
4	5	6	9

11. Ein Möbelgeschäft verkauft 3-sitzige, 2-sitzige und 1-sitzige Sofas, die jeweils links und rechts gleich breite Armlehnen haben. Jeder Sitzplatz ist gleich breit (siehe Bild). Mitsamt den Armlehnen ist das 3-sitzige Sofa 220 cm und das 2-sitzige Sofa 160 cm breit.

Wie breit ist das 1-sitzige Sofa?



(A) 60 cm (B) 80 cm (C) 90 cm (D) 100 cm (E) 120 cm

Da die Armlehnen bei allen Sofas gleich breit sind, kann man den Unterschied des 3-sitzigen und 2-sitzigen Sofas errechnen. Dieser beträgt 60 cm. Eine weiße Sitzfläche ist daher 60 cm breit. Subtrahiert man vom 2-sitzigen Sofa zwei solche Sitzflächen, bleiben 40 cm für die Armlehnen übrig. Das 1-sitzige Sofa ist daher 60 + 40 = 100 cm breit.

12. Tom reiht alle Zahlen von 1 bis 20 aneinander und erhält die 31-stellige Zahl 1234567891011121314151617181920.
Danach streicht er 24 Ziffern der Zahl so, dass die verbleibende Zahl möglichst groß ist.
Welche Zahl erhält er?
(A) 9671819 (B) 9567892 (C) 9781920 (D) 9912345 (E) 9818192

Um die größtmögliche Zahl zu erhalten werden zuerst die Ziffern 1, 2, … bis 8 gestrichen. Bei der Streichung der restlichen 16 Ziffern muss man darauf achten, dass die erstmögliche größte Zahl nach der Ziffer 9 steht, dies gelingt bei der Ziffer 7. Das bedeutet, dass alle Ziffern bis 7 gestrichen werden, danach gibt es nur mehr eine Stelle, die gestrichen werden kann, das ist die Ziffer 1 nach 7. Dies ergibt die Lösung C.

13. Auf jeder Seitenfläche eines besonderen Würfels steht eine Zahl. Die Summe der Zahlen, die auf gegenüberliegenden Flächen liegen, ist jeweils gleich groß. Fünf der sechs Zahlen lauten 5, 6, 9, 11 und 14.
Welche Zahl steht auf der sechsten Fläche?
(A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 13 (E) 15

6 + 14 = 20, ebenso liefert die Addition 9 + 11 = 20, und 5 + 15 = 20. Lösung E ist richtig.

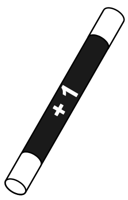
14. Paul macht eine fünftägige Wandertour. Er startet am Montag und beendet sie am Freitag. Jeden Tag geht er um 2 km mehr als am Vortag. Insgesamt wandert er 70 km.
Welche Strecke legt er am Donnerstag zurück?
(A) 12 km (B) 13 km (C) 14 km (D) 15 km (E) 16 km

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
	+ 2 km	+ 4 km	+ 6 km	+ 8 km

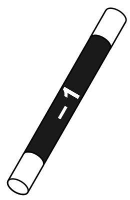
Da er jeden Tag 2 km mehr als am Vortag geht, geht er insgesamt 20 km mehr, als würde er jeden Tag die gleiche Strecke gehen. Subtrahiert man diese 20 km von den 70 km, bleiben 50 km übrig. 50 : 5 = 10 km. Am Montag beträgt die Strecke 10 km, am Donnerstag 16 km, Lösung E ist daher richtig.

15. Boris möchte sein Taschengeld vermehren. Dafür gibt ihm eine Fee drei Zauberstäbe.
Er muss jeden genau einmal verwenden.

Zauberstab "+**1**" vergrößert sein Geld um 1 €

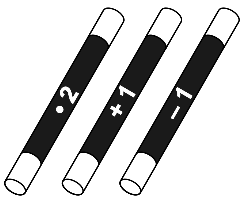


Zauberstab "–**1**" verkleinert verkleinert es um 1 €

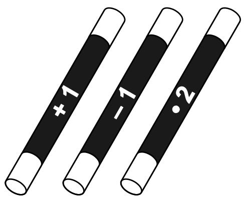


Zauberstab "•**2**" verdoppelt es.

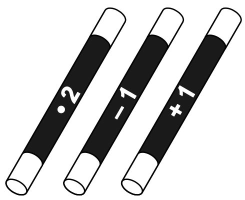
In welcher Reihenfolge muss er die Zauberstäbe anwenden um möglichst viel Geld zu erhalten?



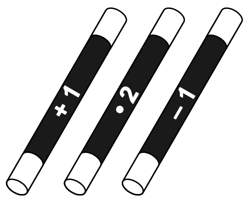
(A)



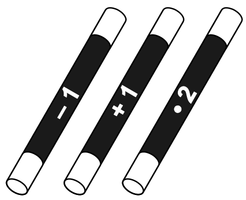
(B)



(C)



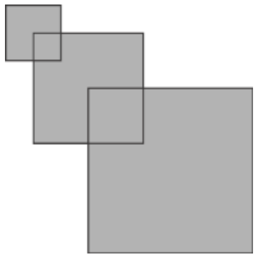
(D)



(E)

Aufgrund der vorgegebenen Anweisungen verdoppeln A, B, C und E den ursprünglichen Betrag, während D den ursprünglichen Betrag verdoppelt und zusätzlich um 1 vergrößert. Ein Beispiel:
A: 10 x 2 + 1 – 1 = 20 B: (10 + 1 – 1) x 2 = 20 C : 10 x 2 – 1 + 1 = 20 D: (10 + 1) x 2 – 1 = 21 E: (10 – 1 + 1) x 2 = 20

16. Raphael hat drei Quadrate. Das erste hat 2 cm Seitenlänge, das zweite hat 4 cm Seitenlänge und ein Eckpunkt ist der Mittelpunkt des ersten Quadrates. Das dritte Quadrat hat 6 cm Seitenlänge und ein Eckpunkt ist der Mittelpunkt des zweiten Quadrates.
Welche Fläche besitzt die abgebildete Figur?

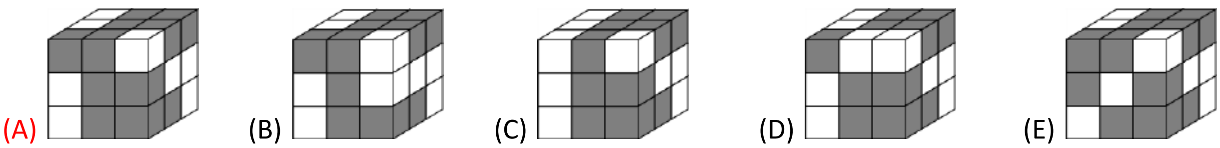


(A) 51 cm^2 (B) 32 cm^2 (C) 27 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 6 cm^2

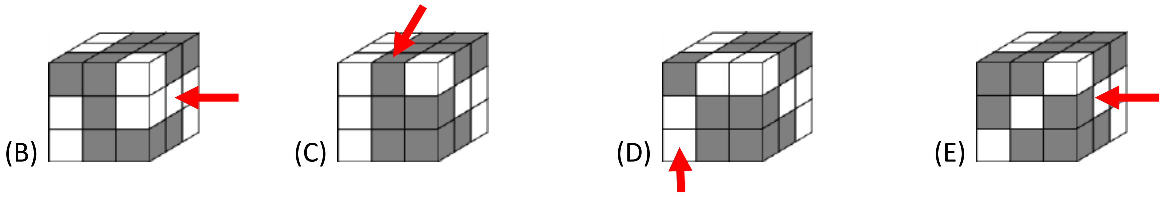
Der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats beträgt 4 cm^2, der des mittleren Quadrats 16 cm^2 und der des größten 36 cm^2. Diese Flächeninhalte ergeben addiert 56 cm^2. Nun müssen noch die Flächeninhalte der überlappenden Quadrate subtrahiert werden. Diese betragen für das kleine Quadrat 1 cm^2 und für das zweite 4 cm^2.
56 cm^2 – 5 cm^2 = 51 cm^2, also Lösung A.

5 Punkte Beispiele

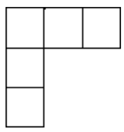
17. Ein großer Würfel wird aus 9 identischen Bausteinen gebaut. Jeder Baustein sieht so aus wie in der folgenden Abbildung:  Welcher große Würfel ist möglich?



Nur der große Würfel, der A zeigt, kann aus den vorgegebenen Bausteinen gebaut werden, bei den übrigen funktioniert es nicht.
(Es gibt mehrere Möglichkeiten bei den großen Würfeln, die roten Pfeile zeigen exemplarisch eine davon.)

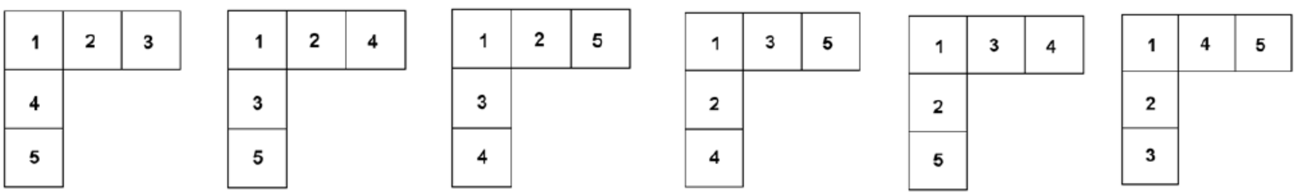


18. Die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 müssen in die fünf Felder dieser Figur nach folgenden Regeln geschrieben werden: Steht eine Zahl unter einer anderen, muss sie größer sein; steht eine Zahl rechts von einer anderen, muss sie größer sein. Auf wie viele verschiedene Arten kann dies geschehen?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

Für die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 gibt es genau sechs Möglichkeiten sie nach den angegebenen Regeln in die Figur zu schreiben.

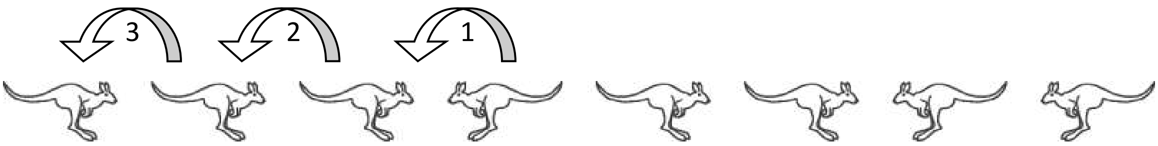


19. Acht Kängurus stehen so wie in der Zeichnung zu sehen ist in einer Reihe.

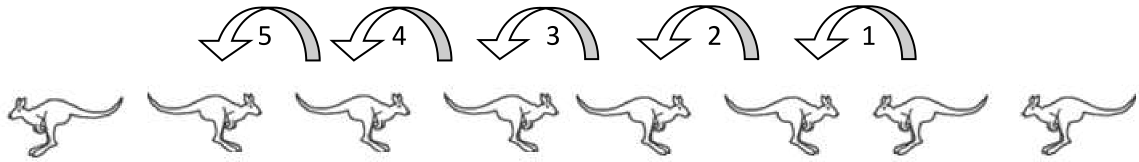
Zwei benachbarte Kängurus, die sich in die Augen schauen, tauschen die Plätze, indem sie aneinander vorbeihüpfen. Das geschieht solange, bis keine weiteren Sprünge mehr möglich sind.
Wie oft wurde Platz getauscht?

(A) 2 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 16

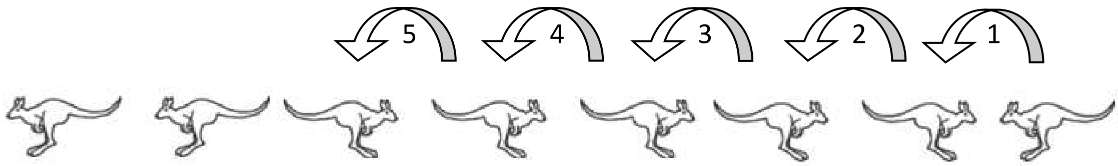
Das vierte, siebente und achte Känguru schauen nach links, die anderen nach rechts. Das vierte Känguru muss dreimal den Platz mit den links von ihm befindlichen Kängurus tauschen, dann kann es kein weiteres Mal mehr den Platz tauschen. Das siebente und achte Känguru müssen jeweils fünf Mal Platz tauschen, danach schauen drei Kängurus nach links, die anderen nach rechts, und es ist kein weiterer Tausch mehr möglich. Insgesamt wurde 13 Mal Platz getauscht, somit ist D die richtige Lösung.



Nach drei Sprüngen schauen nur mehr das siebente und das achte Känguru nach links.

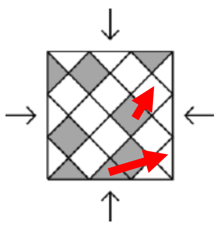


Nach fünf Sprüngen kann das siebente Känguru keinen weiteren Tausch mehr durchführen.



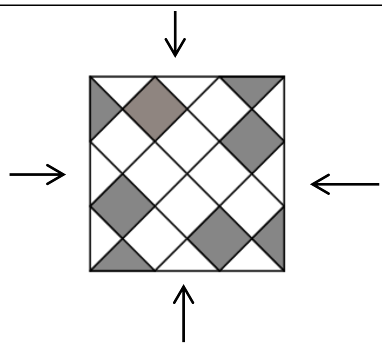
Nach weiteren fünf Sprüngen kann kein weiterer Tausch mehr durchgeführt werden.

20. Ein quadratischer Boden besteht aus dreieckigen und quadratischen Fliesen, in den Farben grau und weiß. Was ist die kleinste Anzahl an grauen Fliesen, die mit weißen Fliesen vertauscht werden müssen, sodass der Boden aus den vier angegebenen Blickrichtungen gleich aussieht?



(A) drei Dreiecke, ein Quadrat (B) ein Dreieck, drei Quadrate (C) ein Dreieck, ein Quadrat
(D) drei Dreiecke, drei Quadrate (E) drei Dreiecke, zwei Quadrate

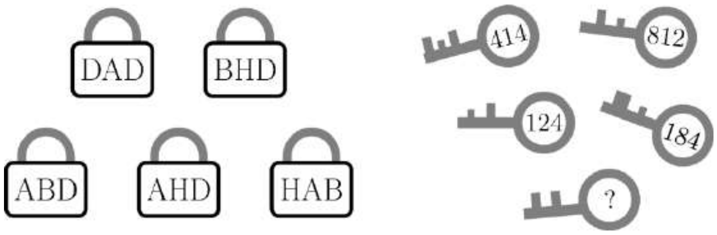
Das graue Dreieck und das graue Quadrat (siehe Zeichnung, jeweils mit roten Pfeil versehen) müssen mit dem jeweiligen weißen Dreieck und Quadrat vertauscht werden.



21. In einem Sack befinden sich nur rote und grüne Murmeln. Entnimmt man dem Sack zufällig fünf Murmeln, so ist zumindest eine rot. Entnimmt man dem Sack sechs Murmeln, dann ist zumindest eine grün.
Wie viele Murmeln befinden sich maximal in der Tasche?
(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

Entnimmt man zufällig 5 Murmeln, so ist zumindest eine rot bedeutet, dass es maximal 4 grüne Murmeln gibt.
Entnimmt man zufällig 6 Murmeln, so ist zumindest eine grün bedeutet, dass es maximal 5 rote Murmeln gibt.
Das bedeutet, dass es 4 grüne und 5 rote Murmeln gibt, also insgesamt maximal 9 Murmeln.

22. Jeder der 5 Schlüssel sperrt genau ein Vorhängeschloss. Jeder Buchstabe eines Schlosses steht für genau eine Ziffer, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern. Welche Ziffern stehen auf dem Schlüssel mit dem Fragezeichen?



(A) 382 (B) 282 (C) 284 (D) 823 (E) 824

Für das Schloss DAD kommt nur der Schlüssel 414 in Frage, deshalb ist D = 4 und A = 1.
Nun ergeben sich folgende Schlüssel für folgende Schlösser:

Schloss	Schlüssel	
BHD	BH4	
ABD	1B4	hier sperrt der Schlüssel 124 oder 184
AHD	1B4	hier sperrt der Schlüssel 124 oder 184
HAB	H1B	

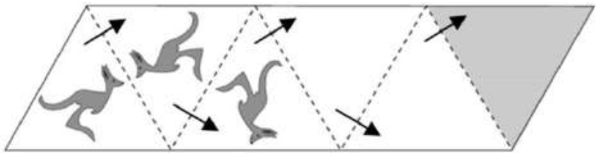
Wenn B = 2, dann muss H = 8 sein, was bedeutet, dass im Schloss BHD der Schlüssel 284 sperrt, und im Schloss HAB der Schlüssel 812. Den Schlüssel 812 gibt es, daher sperrt der Schlüssel 284 das Schloss BHD, und die Lösung C ist richtig.
Wenn B = 8, dann muss H = 2 sein, was wiederrum bedeutet, dass der Schlüssel 824 BHD sperrt, und der Schlüssel 218 das Schloss HAB. Den Schlüssel 218 gibt es aber nicht, diese Belegung der Buchstaben B und H ist also nicht möglich.

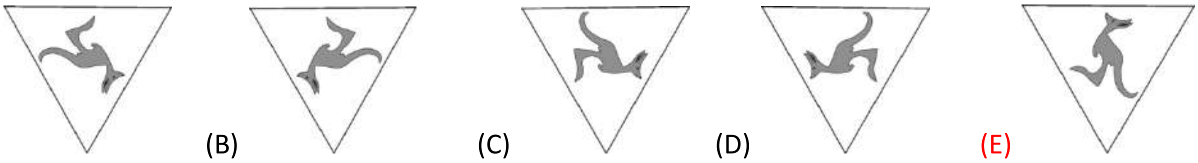
23. Petra mag gerade Zahlen, Ina durch drei teilbare und Celina durch 5 teilbare Zahlen. In einem Korb befinden sich 8 Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Jedes der drei Mädchen ging alleine zum Korb und entnahm sich alle Kugeln entsprechend ihrer Vorlieben. Petra nahm 32 und 52, Ina nahm 24, 33 und 45, und Celina nahm 20, 25 und 35. In welcher Reihenfolge gingen sie zum Korb?

(A) Petra, Celina, Ina (B) Celina, Ina, Petra (C) Ina, Petra, Celina (D) Ina, Celina, Petra (E) Celina, Petra, Ina

Im Korb befinden sich die Kugeln mit den Nummern 20, 24, 25, 32, 33, 35, 45 und 52.
Wäre Petra als erste dran, dann hätte sie auch die Kugeln 20 und 24 entnommen, da diese Kugeln auf die beiden anderen verteilt sind, war Petra nicht die erste.
Wäre Celina die erste gewesen, hätte sie wahrscheinlich auch die Kugel 45 genommen, die hat aber Ina, deshalb war auch Celina nicht die erste.
Somit war Ina die erste, und sie nahm sich alle Kugeln mit den durch drei teilbaren Zahlen. Nun folgte Celina, die alle Kugeln mit den durch fünf teilbaren Zahlen entnahm, und so blieben für Petra nur mehr zwei Kugeln über.

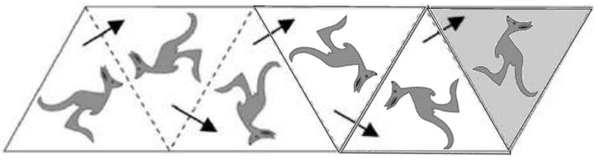
24. Das erste Känguru wird fortlaufend an den punktierten Linien gespiegelt. Zwei Spiegelungen wurden durchgeführt. Welche Position nimmt das Känguru im grauen Dreieck ein?





(A) (B) (C) (D) (E)

Das Känguru nimmt folgende Positionen ein:



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017

16. 3. 2017

Kategorie: Kadett, 7. und 8. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

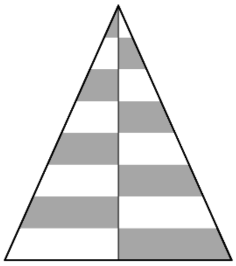
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

- 3 Punkte Beispiele -

1 In der Abbildung ist ein gleichschenkeliges Dreieck zu sehen, in dem die Höhe eingezeichnet ist und dessen Fläche mit gleich breiten weißen und grauen Streifen unterteilt ist. Welcher Bruchteil der Dreiecksfläche ist weiß?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{2}{5}$

2 Wie spät ist es 17 Stunden nach 17 Uhr?

(A) 8:00 (B) 10:00 (C) 11:00 (D) 12:00 (E) 13:00

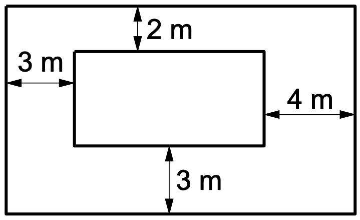
3 Welche Zahl muss man von -17 subtrahieren, um -33 zu erhalten?

(A) -50 (B) -16 (C) 16 (D) 40 (E) 50

4 Welche Aussage ist richtig?

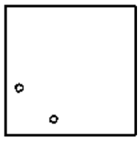
(A) $\frac{4}{1} = 1{,}4$ (B) $\frac{5}{2} = 2{,}5$ (C) $\frac{6}{3} = 3{,}6$ (D) $\frac{7}{4} = 4{,}7$ (E) $\frac{8}{5} = 5{,}8$

5 Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke mit zueinander parallelen Seiten. Um wie viel ist der Umfang des großen Rechtecks größer als der Umfang des kleinen Rechtecks?

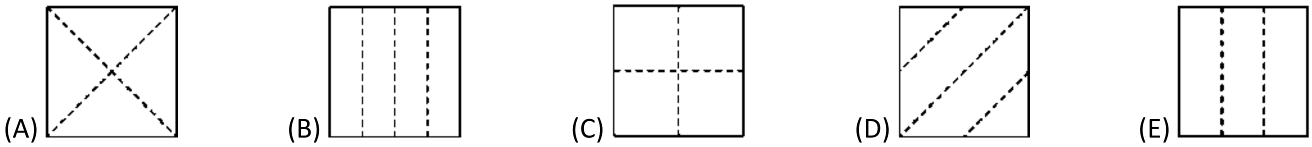


(A) 12 m (B) 16 m (C) 20 m (D) 21 m (E) 24 m

6 Paul faltet ein Blatt Papier, stanzt danach ein Loch in das Papier und faltet es wieder auf. Das aufgefaltete Papier sieht danach wie in der Abbildung rechts aus.



Entlang welcher punktierten Linien kann Paul das Papier zuvor gefaltet haben?



7 Die Summe von drei verschiedenen positiven ganzen Zahlen beträgt 7. Wie groß ist ihr Produkt?

(A) 12 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 5

8 Petra bastelt ein Schmuckstück aus zwei schwarzen und zwei weißen Herzen. Die Herzen haben Flächeninhalte von 1 cm², 4 cm², 9 cm² und 16 cm². Sie legt die Herzen wie in der Abbildung übereinander und klebt sie zusammen.
Wie groß ist der Gesamtflächeninhalt des sichtbaren schwarzen Bereichs?

(A) 9 cm^2 (B) 10 cm^2 (C) 11 cm^2 (D) 12 cm^2 (E) 13 cm^2

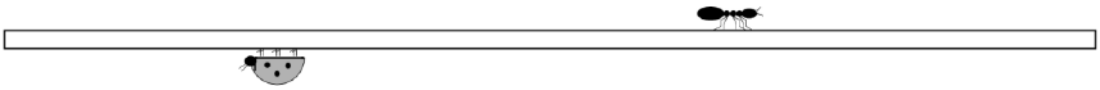
9 Yvonne hat 20 €, jede ihrer vier Schwestern hat 10 €. Wie viel Euro muss Yvonne jeder ihrer Schwestern geben, damit alle den gleichen Geldbetrag haben?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 8 (E) 10

10 Einige Mädchen stehen im Kreis. Die Lehrerin lässt die Mädchen durchzählen. Bianca sagt eins, ihre Nachbarin sagt zwei, und so weiter. Wenn sie im Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia fünf. Wenn sie gegen den Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia acht.
Wie viele Mädchen bilden den Kreis?
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

- 4 Punkte Beispiele -

11 Die Ameise Annie startet am linken Ende der Stange und krabbelt $\frac{2}{3}$ der Stangenlänge. Der Marienkäfer Bob startet am rechten Ende der Stange und krabbelt $\frac{3}{4}$ der Stangenlänge.
Welchen Bruchteil der Stangenlänge sind die beiden dann voneinander entfernt?

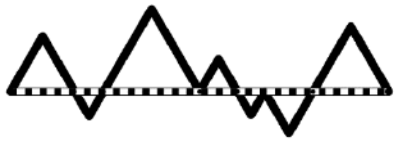


(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{7}{12}$

12 Ein Sechstel aller Zuschauer in einem Kindertheater sind Erwachsene, der Rest sind Kinder. Zwei Fünftel der Kinder sind Mädchen. Welcher Bruchteil aller Zuschauer sind Knaben?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$

13 Die schwarze und die strichlierte Linie bilden gemeinsam sieben gleichseitige Dreiecke. Die strichlierte Linie ist 20 cm lang. Wie lang ist die schwarze Linie?



(A) 25 cm (B) 30 cm (C) 35 cm (D) 40 cm (E) 45 cm

14 Vier Cousinen sind 3, 8, 12 und 14 Jahre alt. Emma ist jünger als Rita. Sowohl die Summe der Alter von Zita und Emma als auch die Summe der Alter von Zita und Rita ist durch 5 teilbar. Wie viele Jahre ist Ina (die 4. Cousine) alt?

(A) 14 (B) 12 (C) 8 (D) 2017 (E) 3

15 Mehr als 800 Personen nehmen am Kängurulauf teil. Unter den Teilnehmenden sind 35 % weiblich. Es gibt um 252 mehr männliche Teilnehmer als weibliche Teilnehmerinnen. Wie viele Personen nehmen insgesamt am Lauf teil?

(A) 802 (B) 810 (C) 822 (D) 824 (E) 840

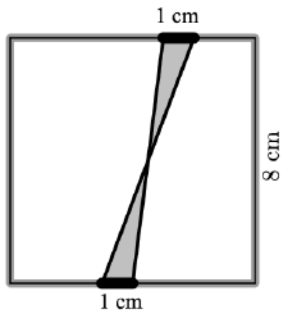
16 Ria möchte in jedes der Kästchen eine Zahl schreiben. Zwei Zahlen hat sie schon geschrieben. Die Summe aller fünf Zahlen soll 35 ergeben, die Summe der ersten drei Zahlen soll 22, die Summe der letzten drei Zahlen soll 25 ergeben. Welches Produkt erhält Ria, wenn sie die beiden Zahlen in den grauen Kästchen multipliziert?

(A) 63 (B) 108 (C) 0 (D) 48 (E) 39

17 Simon möchte einen Draht in 9 gleich lange Teile schneiden und markiert die Schnittstellen. Barbara möchte denselben Draht in 8 gleich lange Teile schneiden und markiert ihre Schnittstellen. Carl schneidet den Draht an allen markierten Stellen durch. Wie viele Teile erhält Carl?

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

18 Zwei 1 cm lange Strecken werden auf gegenüberliegenden Seiten eines Quadrates mit 8 cm Seitenlänge markiert. Die Endpunkte der Strecken werden, wie in der Abbildung zu sehen, miteinander verbunden. Wie groß ist die Fläche des grauen Teils?



(A) 2 cm^2 (B) 4 cm^2 (C) 6.4 cm^2 (D) 8 cm^2 (E) 10 cm^2

19 Michael plant sein Lauftraining. Er möchte jede Woche an denselben Wochentagen laufen gehen. Niemals will er an zwei aufeinanderfolgenden Tagen laufen. Er möchte aber zwei Mal pro Woche laufen. Aus wie vielen möglichen Wochenplänen kann er unter diesen Bedingungen auswählen?
(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10 (E) 8

20 Emily möchte in die 3 x 3 Tabelle neun Zahlen so schreiben, dass die Summe der Zahlen in zwei benachbarten Feldern (mit einer gemeinsamen Seitenkante) immer gleich groß ist. Zwei Zahlen hat sie schon in die Tabelle geschrieben. Wie groß ist die Summe aller neun Zahlen?

2		
		3

(A) 18 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

- 5 Punkte Beispiele -

21 Misst man die Winkel eines Dreiecks, so erhält man drei verschiedene natürliche Zahlen. Wie groß ist die kleinste mögliche Summe des größten und des kleinsten Winkel des Dreiecks?

(A) 61° (B) 90° (C) 91° (D) 120° (E) 121°

22 In einer Reihe stehen 10 Kängurus, wie im Bild zu sehen. Zwei Kängurus, die nebeneinander stehen und sich ansehen können, dürfen die Plätze tauschen, indem sie aneinander vorbeihüpfen. Das wird solange durchgeführt, bis keine weiteren Sprünge mehr erlaubt sind. Wie oft tauschen zwei Kängurus ihre Plätze?

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 21

23 Diana addiert zu jeder der ganzen Zahlen von 1 bis 9 entweder 2 oder 5. Sie möchte möglichst wenig verschiedene Summen erhalten. Wie viele verschiedene Werte erhält sie mindestens?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

24 Alle drei Minuten verlässt ein Bus den Flughafen, um ins Stadtzentrum zu fahren. Ein Auto verlässt den Flughafen gleichzeitig mit einem Bus und fährt auf der gleichen Strecke wie der Bus ins Stadtzentrum. Jeder Bus benötigt 60 Minuten für den Weg vom Flughafen zum Stadtzentrum, das Auto nur 35 Minuten.
Wie viele Busse überholt das Auto auf seinem Weg ins Stadtzentrum? Der Bus, der gleichzeitig mit dem Auto startet, wird nicht mitgezählt.

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 13

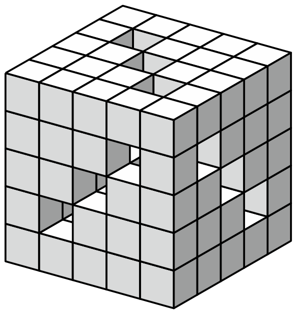
25 Die Abbildung zeigt Marias quadratisches Tischtuch maßstabsgetreu. Alle kleinen hellen Quadrate sind gleich groß und ihre Diagonalen sind parallel zu den Seiten des Tischtuchs. Welcher Anteil des gesamten Tischtuchs ist schwarz?

(A) 16 % (B) 24 % (C) 25 % (D) 32 % (E) 36 %

26 Die Ziffernfolge 2, 3, 6, 8, 8, … entsteht folgendermaßen: Die ersten beiden Ziffern sind 2 und 3. Danach ist jede folgende Ziffer die Einerziffer des Produktes der beiden vorangegangenen Ziffern. Welche Ziffer steht an der 2017-ten Stelle?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

27 Mike hat 125 kleine, gleich große Würfel. Er klebt einige davon so zusammen, dass ein großer Würfel mit genau neun Tunneln entsteht (siehe Abbildung). Die Tunnel gehen gerade durch den ganzen Würfel. Wie viele der 125 Würfel verwendet er nicht?

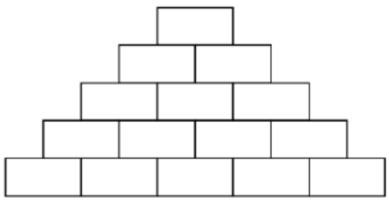


(A) 52 (B) 45 (C) 42 (D) 39 (E) 36

28 Zwei Läufer trainieren zur gleichen Zeit auf einer 720 m langen runden Laufbahn. Sie laufen mit konstanter Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen. Der erste Läufer benötigt vier Minuten für eine Runde, der zweite fünf Minuten.
Wie viele Meter läuft der zweite Läufer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Treffen der beiden Läufer?

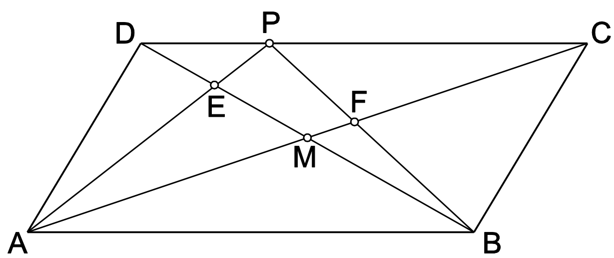
(A) 355 (B) 350 (C) 340 (D) 330 (E) 320

29 Sarah möchte auf jeden Ziegel der abgebildeten Zahlenmauer eine positive ganze Zahl so schreiben, dass jede Zahl gleich der Summe der beiden Zahlen auf den unmittelbar darunterliegenden Ziegeln ist.
Wie viele ungerade Zahlen kann Sarah höchstens auf die Ziegel schreiben?



(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 11

30 Das Parallelogramm besitzt die Fläche 1. Die beiden Diagonalen schneiden einander im Punkt M. Ein weiterer Punkt P liegt auf der Strecke DC. E ist der Schnittpunkt der Strecken AP und BD, und F ist der Schnittpunkt der Strecken BP und AC. Wie groß ist die Fläche des Vierecks EMFP, wenn die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AED und BFC $\frac{1}{3}$ ist?



(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{14}$

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017

16. 3. 2017

Level: Kadett, Grade: 7 and 8

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

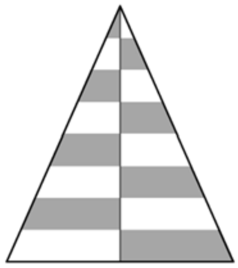
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

Känguru der Mathematik 2017
Level Kadett (Grade 7 and 8)
Österreich – 16. 3. 2017

– 3 Points Questions –



1 The diagram shows an isosceles triangle, where the height is marked and its area is split up into equally wide white and grey stripes. Which fraction of the area of the triangle is white?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{2}{5}$

2 What is the time 17 hours after 17 o'clock?

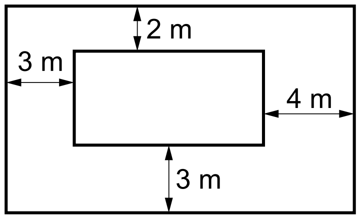
(A) 8:00 (B) 10:00 (C) 11:00 (D) 12:00 (E) 13:00

3 Which number has to be subtracted from -17 in order to obtain -33?

(A) -50 (B) -16 (C) 16 (D) 40 (E) 50

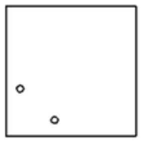
4 Which statement is correct?

(A) $\frac{4}{1} = 1.4$ (B) $\frac{5}{2} = 2.5$ (C) $\frac{6}{3} = 3.6$ (D) $\frac{7}{4} = 4.7$ (E) $\frac{8}{5} = 5.8$



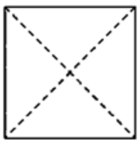
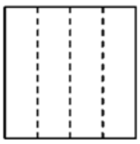
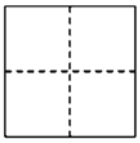
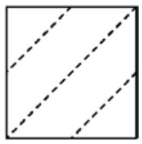
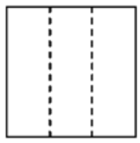
5 The diagram shows two rectangles whose sides are parallel to each other. By how much is the perimeter of the bigger rectangle greater than the perimeter of the smaller rectangle?

(A) 12 m (B) 16 m (C) 20 m (D) 21 m (E) 24 m



6 Paul folds a piece of paper, then punches a hole into the paper and unfolds it again. The unfolded paper then looks like the picture on the right.

Along which dotted line can Paul have folded the paper beforehand?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7 The sum of three different positive whole numbers is 7. How big is their product?

(A) 12 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 5

8 Petra crafts a piece of jewellery out of two black and two white hearts. The hearts have areas of 1 cm², 4 cm², 9 cm² and 16 cm² respectively. She places the hearts on top of each other as shown in the diagram and glues them together.
How big is the total area of the visible black parts?

(A) 9 cm^2 (B) 10 cm^2 (C) 11 cm^2 (D) 12 cm^2 (E) 13 cm^2

9 Yvonne has 20 €, each of her four sisters has 10 €. How much does Yvonne have to give to each of her sisters so that all of them have the same amount of money?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 8 (E) 10

10 Some girls are standing in a circle. The teacher makes them do a headcount. Bianca says one, her neighbour says two and so on. If they count in a clockwise direction, Antonia says five. If they count in an anticlockwise direction, Antonia says eight.
How many girls are forming the circle?
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

- 4 Points Questions -

11 Ant Annie starts at the left end of the stick and crawls $\frac{2}{3}$ of the length of the stick. Ladybird Bob starts at the right end of the stick und crawls $\frac{3}{4}$ of the length of the stick.
Which fraction of the length of the stick are they then apart from each other?

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{5}{12}$ (E) $\frac{7}{12}$

12 One sixth of all spectators in a children's theater are adults, the rest are children.
Two fifths of the children are girls. Which fraction of all spectators are boys?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{2}{5}$

13 The black and the dashed line together form seven equilateral triangles. The dashed line is 20 cm long. How long is the black line?

(A) 25 cm (B) 30 cm (C) 35 cm (D) 40 cm (E) 45 cm

14 Four cousins are 3, 8, 12 and 14 years old. Emma is younger than Rita. The sum of the ages of Zita and Emma is divisible by 5, as is the sum of the ages of Zita and Rita. How old is Ina (the 4th cousin)?

(A) 14 (B) 12 (C) 8 (D) 2017 (E) 3

15 More than 800 people take part in the kangaroo-run. Amongst the participants 35 % are female. There are 252 more male than female participants. How many people in total are taking part in the run?

(A) 802 (B) 810 (C) 822 (D) 824 (E) 840

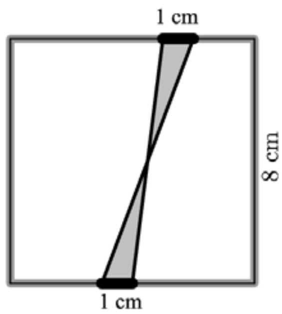
16 Ria wants to write a number into each box. She has already written two numbers. The sum of all five numbers should be 35, the sum of the first three numbers should be 22, the sum of the last three numbers should be 25. What is the product Ria gets, if she multiplies the two numbers in the grey boxes?

(A) 63 (B) 108 (C) 0 (D) 48 (E) 39

17 Simon wants to cut a piece of wire into 9 equally long pieces and makes marks where he needs to make his cuts. Barbara wants to cut the same piece of wire into 8 equally long pieces and makes marks where she needs to make her cuts. Carl cuts the piece of wire at every mark. How many pieces does Carl get?

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

18 Two 1 cm long segments are marked on opposite sides of a square with side length 8 cm. The end points of the segments are connected with each other as shown in the diagram. How big is the area of the grey part?



(A) 2 cm^2 (B) 4 cm^2 (C) 6.4 cm^2 (D) 8 cm^2 (E) 10 cm^2

19 Tycho plans his running training. Each week he wants to go for a run on the same weekdays. He never wants to go for a run on two consecutive days. But he wants to go for a run two days a week. How many different weekly plans meet those conditions?
(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10 (E) 8

20 Emily wants to insert nine numbers into the 3 x 3 table so that the sum of the numbers in two adjacent cells (with a common side) is always the same. She has already written two numbers into the table. How big is the sum of all nine numbers?
(A) 18 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

2		
		3

- 5 Points Questions -

21 If you measure the angles of a triangle, you obtain three different natural numbers. What is the smallest possible sum of the biggest and the smallest angle of the triangle?

(A) 61° (B) 90° (C) 91° (D) 120° (E) 121°

22 There are 10 kangaroos in a row, as seen in the picture. Two kangaroos, that are standing next to each other and can see each other are allowed to change places by hopping past each other. This is carried out until no more jumps are allowed. How often do two kangaroos swap places?

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 21

23 Diana adds either 2 or 5 to every whole number from 1 to 9. She wants to achieve as few different sums as possible. What is the minimum number of different values she obtains?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

24 Every three minutes a bus is leaving the airport to drive to the city centre. A car leaves the airport at the same time as a bus und travels the same route as the bus to the city centre. Every bus takes 60 minutes for the journey from the airport to the city centre, the car only 35 minutes.
How many buses does the car overtake on its way to the city centre? The bus that starts at the same time as the car does not count.

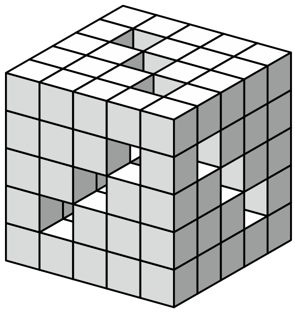
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 13

25 The diagram shows Maria's square tablecloth to scale. All small light squares are equally big and their diagonals are parallel to the sides of the table cloth.
Which part of the whole table cloth is black?

(A) 16 % (B) 24 % (C) 25 % (D) 32 % (E) 36 %

26 The number sequence 2, 3, 6, 8, 8, … is created by the following rule: The first two digits are 2 and 3. After that every subsequent digit is the unit digit of the product of the two previous digits. Which digit is the 2017th digit of the sequence?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

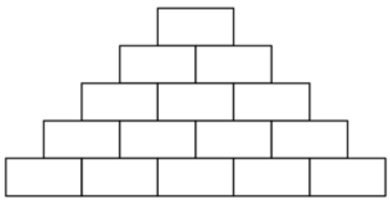


27 Mike has 125 small, equally big cubes. He glues some of them together in such a way that one big cube with exactly nine tunnels is created (see diagram). The tunnels go all the way straight through the cube. How many of the 125 cubes is he not using?

(A) 52 (B) 45 (C) 42 (D) 39 (E) 36

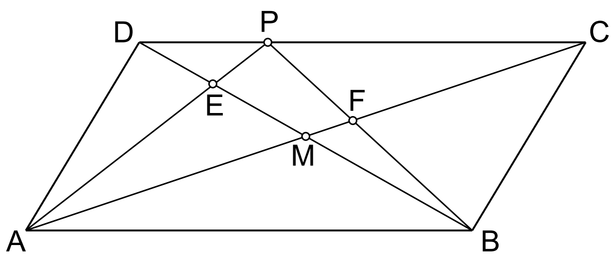
28 Two runners are training at the same time on a 720 m long, round running track. They run with constant speed in opposite directions. The first runner needs four minutes for one lap, the second five minutes.
How many meters does the second runner run in between two consecutive meetings of the two runners?

(A) 355 (B) 350 (C) 340 (D) 330 (E) 320



29 Sarah wants to write a positive whole number onto every tile in the number wall shown, so that every number is equal to the sum of the two numbers on the tiles that are directly below.
What is the maximum number of odd numbers Sarah can write on the tiles?

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 11



30 The parallelogram has area 1. The two diagonals intersect each other at point M. Another point P lies on the side DC. E is the point of intersection of the segments AP and BD, and F is the point of intersection of the segments BP and AC. What is the area of the quadrilateral EMFP, if the sum of the areas of the triangles AED and BFC is $\frac{1}{3}$?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{14}$

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Kategorie: Junior, 9. und 10. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2017“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

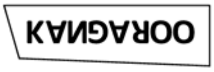
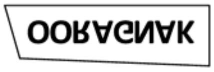
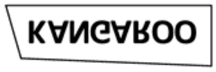
Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

- 3 Punkte Beispiele -

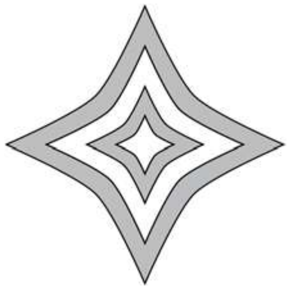
1 Der Wert von $\frac{20 \cdot 17}{2+0+1+7}$ ist

(A) 3,4 (B) 17 (C) 34 (D) 201,7 (E) 340

2 Peter schrieb, wie in der Abbildung zu sehen, das Wort KANGAROO auf ein durchsichtiges Stück Glas. Was kann er sehen, wenn er das Stück Glas zuerst um die rechte Seitenkante auf die Rückseite wendet und anschließend auf dem Tisch liegend um 180° dreht?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3 Angelika bastelt ein Schmuckstück aus zwei grauen und zwei weißen Sternen. Die Sterne haben Flächeninhalte von 1 cm², 4 cm², 9 cm² bzw. 16 cm². Sie legt die Sterne wie in der Abbildung übereinander und klebt sie zusammen.
Wie groß ist der Gesamtflächeninhalt des sichtbaren grauen Bereichs?



(A) 9 cm² (B) 10 cm² (C) 11 cm² (D) 12 cm² (E) 13 cm²

4 Maria hat 24 Euro. Jede ihrer 3 Schwestern hat 12 Euro.
Wie viel muss sie jeder ihrer Schwestern geben, damit alle vier gleich viel Euro haben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

5 Ein Rad rollt längs der abgebildeten Zick-Zack-Kurve. Welches der folgenden Bilder zeigt die Kurve, die vom Mittelpunkt des Rads beschrieben wird?

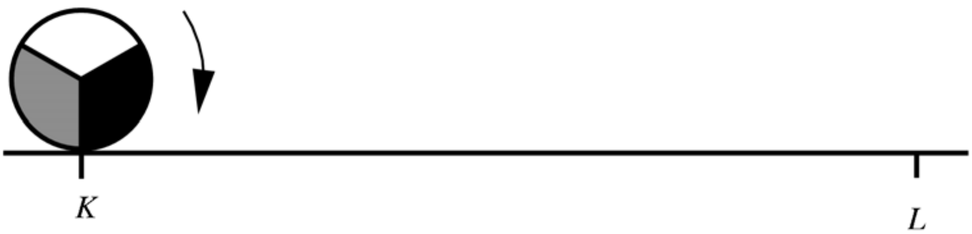
(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

6 Einige Mädchen stehen im Kreis. Die Lehrerin lässt die Mädchen durchzählen. Bianca sagt eins, ihre Nachbarin sagt zwei, und so weiter. Wenn sie im Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia sechs. Wenn sie gegen den Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia neun. Wie viele Mädchen bilden den Kreis?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

7 Ein Kreis mit Radius 1 rollt auf einer geraden Linie wie abgebildet vom Punkt K zum Punkt L, mit $KL = 11\pi$.
In welcher Lage befindet sich der Kreis, wenn er in L angekommen ist?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8 Martina spielt Schach. In dieser Saison hat sie bereits 15 Partien gespielt, von denen sie neun gewonnen hat. Sie muss noch 5 weitere Partien spielen.
Wie hoch ist ihre Gewinnrate am Ende dieser Saison, wenn sie alle noch ausstehenden Partien gewinnt?

(A) 60 % (B) 65 % (C) 70 % (D) 75 % (E) 80 %

9 Bei einer Hochzeit ist ein Achtel der Gäste minderjährig. Drei Siebentel der erwachsenen Gäste sind Männer. Wie groß ist der Anteil der erwachsenen Frauen unter allen Gästen?

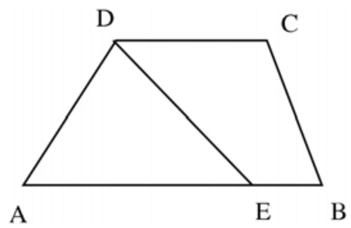
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$ (E) $\frac{3}{7}$

10 Ein wunderlicher Lehrer hat eine Schachtel mit 203 roten, 117 weißen und 28 blauen Knöpfen. Er bittet seine Schüler, ohne hinzusehen je einen Knopf blind aus der Schachtel zu nehmen. Mindestens wie viele Schüler müssen einen Knopf nehmen, sodass sicher drei der entnommenen Knöpfe dieselbe Farbe haben?

(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 28 (E) 203

- 4 Punkte Beispiele -

11 $ABCD$ ist ein Trapez mit Parallelseiten *AB* und *CD*. Es gilt *AB* = 50 und *CD* = 20. Der Punkt *E* liegt auf der Seite *AB* so, dass die Strecke *DE* das Trapez in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt. Wie lang ist die Strecke *AE*?

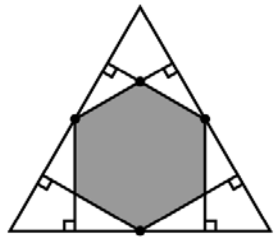


(A) 25 (B) 30 (C) 35 (D) 40 (E) 45

12 Wie viele positive ganze Zahlen *n* haben die Eigenschaft, dass genau eine der zwei Zahlen *n* und *n* + 20 vierziffrig ist?

(A) 19 (B) 20 (C) 38 (D) 39 (E) 40

13 In einem gleichseitigen Dreieck mit Flächeninhalt 1 werden, wie in der Abbildung zu sehen, aus den Seitenmittelpunkten die sechs Normalen auf die Dreiecksseiten gezeichnet. Welchen Flächeninhalt hat das dadurch entstandene graue Sechseck?

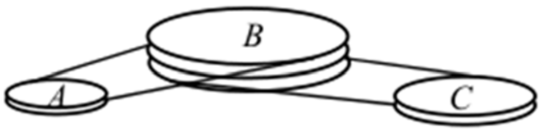


(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

14 Die Summe der Quadrate von drei aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist 770. Welche ist die größte dieser Zahlen?

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

15 Ein Riemensystem besteht aus Rädern *A*, *B* und *C*, die sich ohne Rutschen drehen. *B* dreht sich 4 Mal herum, während sich *A* 5 Mal herumdreht, und *B* dreht sich 6 Mal herum, während sich *C* 7 Mal herumdreht. Der Umfang von *C* ist 30 cm. Wie groß ist der Umfang von *A*?



(A) 27 cm (B) 28 cm (C) 29 cm (D) 30 cm (E) 31 cm

16 Tycho plant sein Lauftraining. Er möchte jede Woche an denselben Wochentagen laufen gehen. Niemals will er an zwei aufeinanderfolgenden Tagen laufen. Er möchte aber drei Mal pro Woche laufen. Aus wie vielen möglichen Wochenplänen kann er unter diesen Bedingungen auswählen?

(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 35

17 Vier Brüder sind verschieden groß. Tobias ist um gleich viele Zentimeter kleiner als Viktor, wie er größer als Peter ist. Oskar ist wiederum um ebenso viele Zentimeter kleiner als Peter. Tobias ist 184 cm groß, und die vier Brüder sind durchschnittlich 178 cm groß. Wie groß ist Oskar?

(A) 160 cm (B) 166 cm (C) 172 cm (D) 184 cm (E) 190 cm

18 Während unseres Urlaubs hat es an 7 Tagen geregnet. Wenn es am Vormittag geregnet hat, war der Nachmittag regenfrei. Wenn es am Nachmittag geregnet hat, war der Vormittag regenfrei. Es gab 5 regenfreie Vormittage und 6 regenfreie Nachmittage. Wie viele Tage hat unser Urlaub gedauert?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

19 Jenny möchte in die Felder einer 3x3-Tabelle Zahlen so eintragen, dass die Summe der Zahlen in jedem der vier 2x2-Quadrate gleich groß ist. Wie die Abbildung zeigt, hat sie bereits drei Zahlen eingetragen. Welche Zahl muss sie ins vierte Eckfeld schreiben?

3		1
2		?

(A) 5 (B) 4 (C) 1 (D) 0 (E) Die Zahl ist nicht eindeutig bestimmbar.

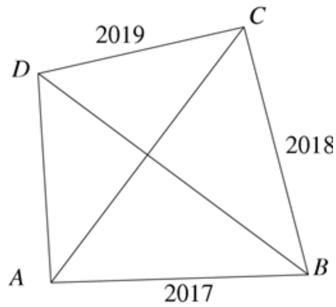
20 Sieben positive ganze Zahlen *a, b, c, d, e, f, g* werden in dieser Reihenfolge nebeneinander angeschrieben. Die Summe aller sieben Zahlen beträgt 2017. Je zwei benachbarte Zahlen unterscheiden sich immer um 1. Welche der Zahlen kann gleich 286 sein?

(A) nur a oder g (B) nur b oder f (C) nur c oder e (D) nur d (E) alle

- 5 Punkte Beispiele -

21 Im Primatengehege im Zoo befinden sich vier Gorillas. Alle sind jünger als 18 Jahre. Keine zwei sind gleich alt, und alle ihre Alter sind ganzzahlig. Das Produkt ihrer Alter ist 882. Wie groß ist die Summe ihrer Alter?
(A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 31 (E) 33

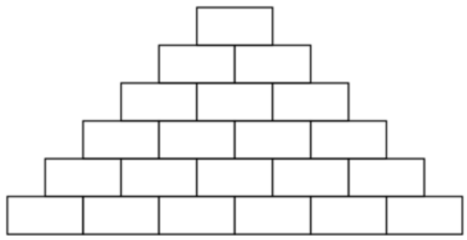
22 Auf den sechs Flächen eines Spielwürfels stehen die Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2.
Der Würfel wird zweimal geworfen. Die geworfenen Zahlen werden miteinander multipliziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Produkt negativ ist?
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{11}{36}$ (D) $\frac{13}{36}$ (E) $\frac{1}{3}$



23 Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen zueinander normal. Die Seiten haben die Längen $AB = 2017$, $BC = 2018$ und $CD = 2019$ (Abbildung nicht maßstabsgetreu). Wie lang ist die Seite AD?
(A) 2016 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ (D) $\sqrt{2018^2 + 2}$ (E) 2020

24 Eine beliebige zweiziffrige Zahl ist aus den Ziffern *a* und *b* zusammengesetzt. Schreibt man das Ziffernpaar drei Mal hintereinander, erhält man eine 6-ziffrige Zahl. Diese neue Zahl ist immer teilbar durch
(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

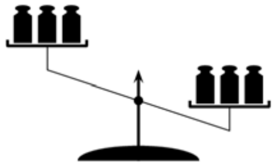
25 Mein Freund Heinz möchte ein besonderes Passwort verwenden, das aus sieben Ziffern besteht. Die jeweiligen Ziffern des Passwortes kommen im gesamten Passwort genau so oft vor, wie es ihren Werten entspricht. Außerdem stehen gleiche Ziffern immer aufeinanderfolgend. So kann er zum Beispiel 4444333 oder 1666666 als Passwörter verwenden. Aus wie vielen möglichen Passwörtern kann er auswählen?
(A) 6 (B) 7 (C) 10 (D) 12 (E) 13



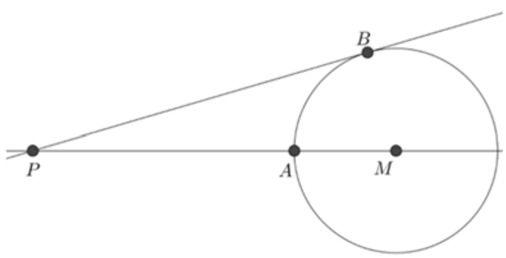
26 Paul möchte auf jeden Ziegel der abgebildeten Zahlenmauer eine positive ganze Zahl so schreiben, dass jede Zahl gleich der Summe der beiden Zahlen auf den unmittelbar darunterliegenden Ziegeln ist.
Wie viele ungerade Zahlen kann er höchstens auf die Ziegel schreiben?
(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

27 Lisa zeichnet einige Punkte auf einem Kreis und verbindet sie der Reihe nach zu einem Vieleck. Sie addiert die Innenwinkel des Vielecks. Dabei lässt sie irrtümlich einen Winkel aus und erhält als Summe 2017°.
Wie groß ist der Winkel, den sie übersehen hat?
(A) $37°$ (B) $53°$ (C) $97°$ (D) $127°$ (E) $143°$

28 In einem Kreis stehen 30 Tänzer und blicken alle zur Mitte. Der Tanzlehrer ruft „Links“, und viele drehen sich um 90° nach links. Leider sind einige verwirrt und drehen sich nach rechts, sodass einige Tänzer jetzt einander direkt ansehen. Alle, die einander ansehen, schütteln den Kopf. Es stellt sich heraus, dass 10 Tänzer den Kopf schütteln. Darauf sagt der Tanzlehrer „Kehrt“ und alle drehen sich um 180° in die entgegengesetzte Richtung. Wieder schütteln alle, die einander direkt ansehen, den Kopf. Wie viele Tänzer schütteln beim zweiten Mal den Kopf?
(A) 10 (B) 20 (C) 8 (D) 15 (E) Es steht nicht eindeutig fest.



29 Auf jede Waagschale einer Balkenwaage werden zufällig drei Gewichte gelegt. Die Waage senkt sich, wie im Bild zu sehen ist, auf die rechte Seite. Die Massen der Gewichte betragen 101, 102, 103, 104, 105 und 106 Gramm. Bei wieviel Prozent der möglichen Verteilungen befindet sich das 106-Gramm-Gewicht auf der rechten (schwereren) Seite?
(A) 75 % (B) 80 % (C) 90 % (D) 95 % (E) 100 %



30 Die Punkte *A* und *B* liegen auf dem Kreis mit Mittelpunkt *M*. Der Punkt *P* liegt auf der Geraden durch *A* und *M*. *PB* berührt den Kreis in *B*. Die Längen der Strecken *PA* und *MB* sind ganze Zahlen, und es gilt *PB* = *PA* + 6. Wie viele mögliche Werte gibt es für *MB*?
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Level: Junior, Grade 9 and 10

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect Answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2017“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.
DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

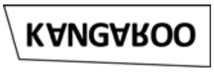
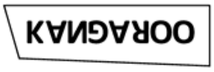
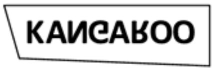
Känguru der Mathematik 2017
Level Junior (Grade 9 and 10)
Österreich – 16. 3. 2017

- 3 Points Questions -

1 The value of $\frac{20\cdot 17}{2+0+1+7}$ equals

(A) 3.4 (B) 17 (C) 34 (D) 201.7 (E) 340

2 Peter writes the word KANGAROO on a see-through piece of glass, as seen on the right. What can he see when he first flips over the glass onto its back along the right-hand side edge and then turns it about 180° while it is lying on the table?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3 Angelika crafts a piece of jewellery out of two grey and two white stars. The stars have areas of 1 cm², 4 cm², 9 cm² and 16 cm² respectively. She places the stars on top of each other as shown in the diagram and glues them together.
How big is the total area of the visible grey parts?

(A) 9 cm² (B) 10 cm² (C) 11 cm² (D) 12 cm² (E) 13 cm²

4 Maria has 24 Euros. Each of her 3 sisters has 12 Euros.
How much does she have to give to each sister so that all four of them have the same amount of Euros?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

5 A wheel rolls along a zigzag curve as can be seen below. Which of the following pictures shows the curve that is described by the centre of the wheel?

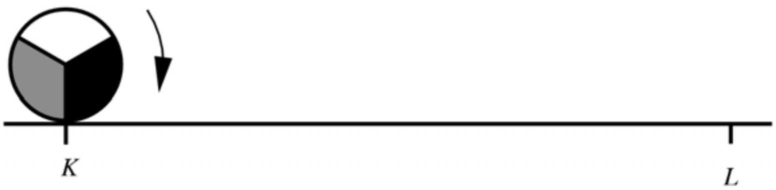
(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

6 Some girls are standing in a circle. The teacher makes them do a headcount. Bianca says one, her neighbour says two and so on. If they count in a clockwise direction, Antonia says six. If they count in an anticlockwise direction, Antonia says nine. How many girls are forming the circle?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

7 A circle with radius 1 rolls along a straight line from point K to point L, as shown, with $KL = 11\pi$.
In which position is the circle when it has arrived in L?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8 Martina plays chess. This season she has already played 15 games, nine of which she has won. She still has to play 5 more games.
How high is her win rate at the end of the season if she wins all remaining games?

(A) 60 % (B) 65 % (C) 70 % (D) 75 % (E) 80 %

9 At a wedding one eighth of the guests is underage. Three sevenths of the adult guests are men.
How big is the fraction of adult women amongst all guests?

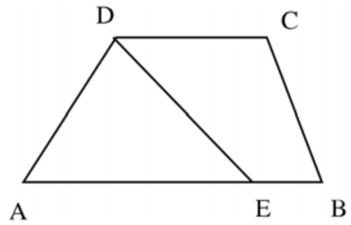
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$ (E) $\frac{3}{7}$

10 A whimsical teacher has a box with 203 red, 117 white and 28 blue buttons. He asks his students to each take one button out of the box without looking. What is the minimum number of students who have to take a button so that definitely at least three of the buttons picked have the same colour?

(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 28 (E) 203

- 4 Points Questions -

11 $ABCD$ is a trapezium with parallel sides AB and CD. Let AB = 50 and CD = 20. Point E lies on side AB in such a way that the straight line DE divides the trapezium into two shapes of equal area. How long is the straight line AE?

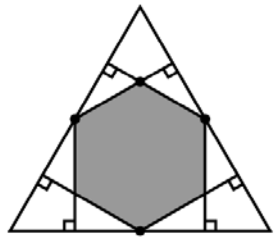


(A) 25 (B) 30 (C) 35 (D) 40 (E) 45

12 How many positive whole numbers n have the property that exactly one of the two numbers n and n + 20 has four digits?

(A) 19 (B) 20 (C) 38 (D) 39 (E) 40

13 In an equilateral triangle with area 1, we draw the six perpendicular lines from the midpoints of each side to the other two sides as seen in the diagram.
How big is the area of the grey hexagon that has been created this way?

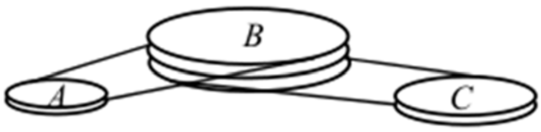


(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{2}{3}$

14 The sum of the squares of three consecutive positive whole numbers is 770.
What is the biggest of these numbers?

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

15 A belt system is made up of wheels A, B and C, which rotate without sliding. B rotates 4 times around, while A turns 5 times around, and B rotates 6 times around, while C turns 7 times around. The circumference of C is 30 cm. How big is the circumference of A?



(A) 27 cm (B) 28 cm (C) 29 cm (D) 30 cm (E) 31 cm

16 Tycho plans his running training. Each week he wants to go for a run on the same weekdays. He never wants to go for a run on two consecutive days. But he wants to go for a run three days a week. How many different weekly plans meet those conditions?

(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 35

17 Four brothers have different heights. Tobias is as many centimeters smaller than Viktor, as he is taller than Peter. Oskar on the other hand is equally many centimeters smaller than Peter. Tobias is 184 cm tall, and on average the four brothers are 178 cm tall. How tall is Oskar?

(A) 160 cm (B) 166 cm (C) 172 cm (D) 184 cm (E) 190 cm

18 During our holidays it rained on 7 days. If it rained before noon, then there was no rain in the afternoon. If it rained in the afternoon, there was no rain before noon. There were 5 days without rain before noon and six days without rain in the afternoon. How many days long was our holiday?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

19 Jenny wants to write numbers into the cells of a 3x3-table so that the sum of the numbers in each of the four 2x2-squares are equally big. As it is shown in the diagram, she has already inserted three numbers. What number does she have to write into the cell in the fourth corner?

3		1
2		?

(A) 5 (B) 4 (C) 1 (D) 0 (E) The number cannot be uniquely determined.

20 Seven positive whole numbers a, b, c, d, e, f, g are written down next to each other in this order. The sum of all seven numbers is 2017. Every two adjacent numbers always differ by 1. Which number can be equal to 286?

(A) only a or g (B) only b or f (C) only c or e (D) only d (E) all

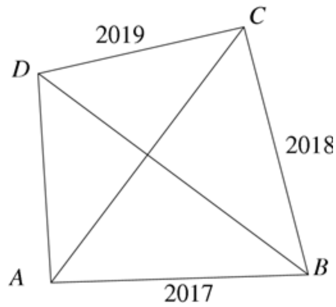
- 5 Points Questions -

21 In the primate enclosure in a zoo there are four gorillas. They are all younger than 18 years old. No two have the same age, and all their ages are whole numbers. The product of their ages is 882. How big is the sum of their ages?

(A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 31 (E) 33

22 The numbers -3, -2, -1, 0, 1, 2 are written on the six faces of a die.
The die is rolled twice. The numbers that were rolled are multiplied. How big is the probability that this product is negative?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{11}{36}$ (D) $\frac{13}{36}$ (E) $\frac{1}{3}$



23 In a convex quadrilateral $ABCD$ the diagonals are perpendicular to each other. The length of the edges are $AB = 2017$, $BC = 2018$ and $CD = 2019$ (diagram not to scale). How long is side AD?

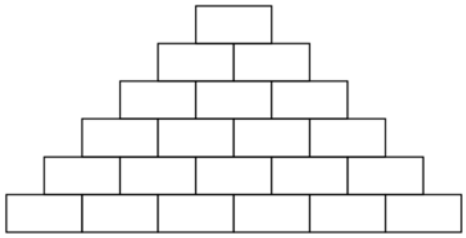
(A) 2016 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ (D) $\sqrt{2018^2 + 2}$ (E) 2020

24 A popular two-digit number is made up of the digits *a* and *b*. If the number pair is written down three times one after the other, a six-digit number is obtained. This new number is always divisible by

(A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 9 (E) 11

25 My friend Heinz wants to use a special password that is made up of seven digits. Each digit used in the password appears as many times in the password as is the value of the digit. Additionally, equal digits are always next to each other. Therefore he can for example use 4444333 or 1666666 as passwords. How many possible passwords can he choose from?

(A) 6 (B) 7 (C) 10 (D) 12 (E) 13



26 Paul wants to write a positive whole number onto every tile in the number wall shown, so that every number is equal to the sum of the two numbers on the tiles that are directly below.
What is the maximum number of odd numbers he can write on the tiles?

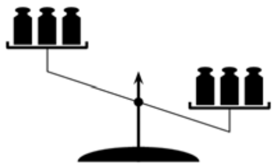
(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

27 Lisa places some points on a circle and then connects them in sequence to make a polygon. She adds up the interior angles of the polygon. By mistake she misses out one angle and obtains the sum 2017.
How big is the angle that she has overlooked?

(A) 37° (B) 53° (C) 97° (D) 127° (E) 143°

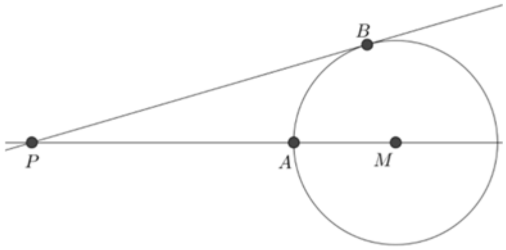
28 30 dancers are standing in a circle facing the centre. The dance instructor shouts “Left” and many of them turn 90° to the left. Unfortunately, some are confused and turn right, so that some dancers are now directly facing each other. All of the ones that are facing each other are shaking their head. It turns out that 10 dancers shake their head. Then the dance instructor says “Turn around” and all of them turn 180° to look in the opposite direction. Again, all of the ones that are directly facing each other shake their head. How many dancers are shaking their head second time round?

(A) 10 (B) 20 (C) 8 (D) 15 (E) It cannot be uniquely determined.



29 Three weights are randomly placed on each tray of a beam balance. The balance dips to the right hand side as shown on the picture. The masses of the weights are 101, 102, 103, 104, 105 and 106 grams. For how many percent of the possible distributions is the 106-grams-weight on the right (heavier) side?

(A) 75 % (B) 80 % (C) 90 % (D) 95 % (E) 100 %



30 The points *A* and *B* lie on a circle with centre *M*. The point *P* lies on the straight line through *A* and *M*. *PB* touches the circle in *B*. The lengths of the segments *PA* and *MB* are whole numbers, and *PB* = *PA* + 6. How many possible values for *MB* are there?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2017

Lösungsvektor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	E	B	C	E	C	E	C	A	C	C	E	D	C	B	B	A	C	D	A	D	E	D	C	E	B	E	A	B	D

3 Punkte Beispiele

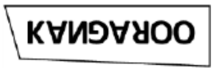
1. Der Wert von $\frac{20\cdot 17}{2+0+1+7}$ ist

(A) 3,4 (B) 17 **(C) 34** (D) 201,7 (E) 340

Es gilt $\frac{20\cdot 17}{2+0+1+7} = \frac{340}{10} = 34.$

2. Peter schrieb, wie in der Abbildung zu sehen, das Wort KANGAROO auf ein durchsichtiges Stück Glas.

Was kann er sehen, wenn er das Stück Glas zuerst um die rechte Seitenkante auf die Rückseite wendet und anschließend auf dem Tisch liegend um 180° dreht?

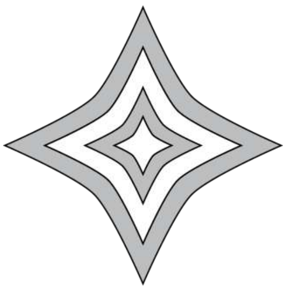
(A)  (B)  (C)  (D) 

(E) 

Nachdem er das Stück Glas um die rechte Seitenkante auf die Rückseite gewendet hat, schaut es so aus

Das anschließende Drehen um 180° liefert

3. Angelika bastelt ein Schmuckstück aus zwei grauen und zwei weißen Sternen. Die Sterne haben Flächeninhalte von $1\ cm^2$, $4\ cm^2$, $9\ cm^2$ bzw. $16\ cm^2$. Sie legt die Sterne wie in der Abbildung übereinander und klebt sie zusammen.



Wie groß ist der Gesamtflächeninhalt des sichtbaren grauen Bereichs?

(A) $9\ cm^2$ **(B) $10\ cm^2$** (C) $11\ cm^2$ (D) $12\ cm^2$ (E) $13\ cm^2$

Der große graue Bereich hat einen Flächeninhalt von $16\ cm^2 - 9\ cm^2 = 7\ cm^2$. Der kleine graue Bereich hat einen Flächeninhalt von $4\ cm^2 - 1\ cm^2 = 3\ cm^2$. Der Gesamtflächeninhalt ergibt sich aus der Summe und ist daher $7\ cm^2 + 3\ cm^2 = 10\ cm^2$.

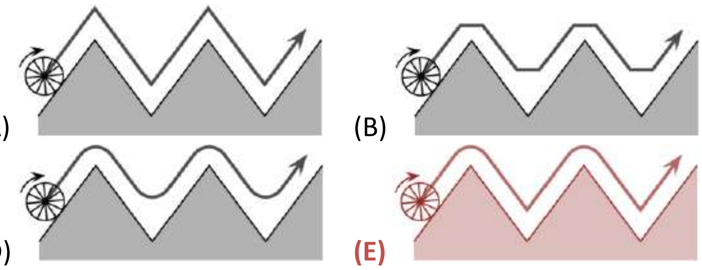
4. Maria hat 24 Euro. Jede ihrer 3 Schwestern hat 12 Euro.

Wie viel muss sie jeder ihrer Schwestern geben, damit alle vier gleich viel Euro haben?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 6

Insgesamt haben Maria und ihre Schwestern $24\text{ €} + 3 \cdot 12\text{ €} = 60\text{ €}$. Sobald alle vier gleich viel Geld haben, hat jede von ihnen also $\frac{60}{4} = 15\text{ €}$. Deshalb muss Maria jeder ihrer Schwestern 3 € geben.

5. Ein Rad rollt längs der abgebildeten Zick-Zack-Kurve. Welches der folgenden Bilder zeigt die Kurve, die vom Mittelpunkt des Rads beschrieben wird?



(A) (B) (C) (D) **(E)**

Der Normalabstand des Mittelpunktes des Rads zum Boden ist immer konstant (genau der Radius des Rades). Die Kurve, die vom Mittelpunkt des Rads beschrieben wird, ergibt daher an den Spitzen einen Kreisbogen und in den Tälern eine Zacke.

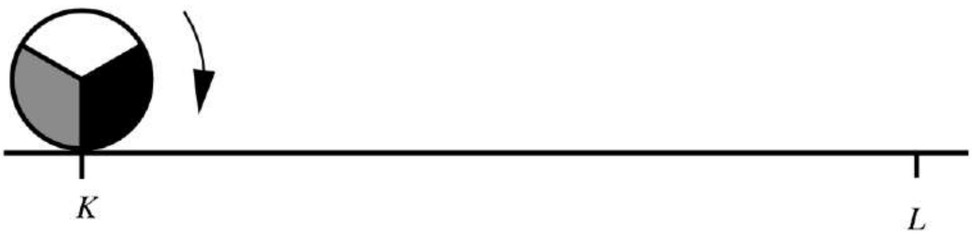
6. Einige Mädchen stehen im Kreis. Die Lehrerin lässt die Mädchen durchzählen. Bianca sagt eins, ihre Nachbarin sagt zwei, und so weiter. Wenn sie im Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia sechs. Wenn sie gegen den Uhrzeigersinn zählen, sagt Antonia neun. Wie viele Mädchen bilden den Kreis?

(A) 11 (B) 12 **(C)** 13 (D) 14 (E) 15

Zwischen Bianca und Antonia stehen im Uhrzeigersinn 4 Mädchen und gegen den Uhrzeigersinn 7. Ohne die beiden stehen also $4 + 7 = 11$ Mädchen im Kreis. Mit Bianca und Antonia bilden also 13 Mädchen den Kreis.

7. Ein Kreis mit Radius 1 rollt auf einer geraden Linie wie abgebildet vom Punkt K zum Punkt L, mit $KL = 11\pi$.

In welcher Lage befindet sich der Kreis, wenn er in L angekommen ist?



(A) (B) (C) (D) **(E)**

Der Kreis macht auf einer Länge von 2π genau eine Umdrehung. Damit macht der Kreis auf der Länge 11π genau 5 ganze Umdrehungen und eine halbe Umdrehung und befindet sich am Punkt L in Lage (D).

8. Martina spielt Schach. In dieser Saison hat sie bereits 15 Partien gespielt, von denen sie neun gewonnen hat. Sie muss noch 5 weitere Partien spielen.

Wie hoch ist ihre Gewinnrate am Ende dieser Saison, wenn sie alle noch ausstehenden Partien gewinnt?

(A) 60 % (B) 65 % **(C) 70** % (D) 75 % (E) 80 %

Insgesamt spielt sie $15 + 5 = 20$ Partien und gewinnt davon $9 + 5 = 14$. Also ist ihre Gewinnrate $\frac{14}{20} = 70\ \%$.

9. Bei einer Hochzeit ist ein Achtel der Gäste minderjährig. Drei Siebentel der erwachsenen Gäste sind Männer.

Wie groß ist der Anteil der erwachsenen Frauen unter allen Gästen?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{7}$ (E) $\frac{3}{7}$

Von den Gästen sind $\frac{7}{8}$ Erwachsene und davon $\frac{4}{7}$ Frauen. Also ist der Anteil an erwachsenen Frauen insgesamt $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$.

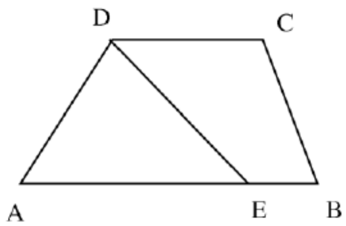
10. Ein wunderlicher Lehrer hat eine Schachtel mit 203 roten, 117 weißen und 28 blauen Knöpfen. Er bittet seine Schüler, ohne hinzusehen je einen Knopf blind aus der Schachtel zu nehmen. Mindestens wie viele Schüler müssen einen Knopf nehmen, sodass sicher drei der entnommenen Knöpfe dieselbe Farbe haben?

(A) 3 (B) 6 **(C) 7** (D) 28 (E) 203

Nach 6 entnommen Knöpfen kann es vorkommen, dass genau 2 Knöpfe von jeder Farbe entnommen wurden (2 rote, 2 weiße und 2 blaue). Bei 7 entnommen Knöpfen müssen von zumindest einer Farbe 3 Knöpfe vorkommen (Schubfachschluss).

4 Punkte Beispiele

11. $ABCD$ ist ein Trapez mit Parallelseiten *AB* und *CD*. Es gilt *AB* = 50 und *CD* = 20. Der Punkt *E* liegt auf der Seite *AB* so, dass die Strecke *DE* das Trapez in zwei Teile gleichen Flächeninhalts teilt. Wie lang ist die Strecke *AE*?



(A) 25 (B) 30 **(C) 35** (D) 40 (E) 45

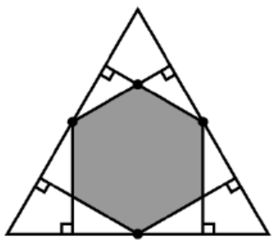
Sei h die Höhe des Trapezes. Die Fläche des Dreiecks AED ist $\frac{AE \cdot h}{2}$. Die Fläche des Trapezes $EBCD$ ist $\frac{(EB+CD)\cdot h}{2}$. Da beide Flächen gleich groß sind, ergibt sich $AE = EB + CD = (50 - AE) + 20$. Also $AE = 35$.

12. Wie viele positive ganze Zahlen *n* haben die Eigenschaft, dass genau eine der zwei Zahlen *n* und *n* + 20 vierziffrig ist?

(A) 19 (B) 20 (C) 38 (D) 39 **(E) 40**

Gesucht sind die Zahlen zwischen 980 und 999, sowie zwischen 9980 und 9999.

13. In einem gleichseitigen Dreieck mit Flächeninhalt 1 werden, wie in der Abbildung zu sehen, aus den Seitenmittelpunkten die sechs Normalen auf die Dreiecksseiten gezeichnet.

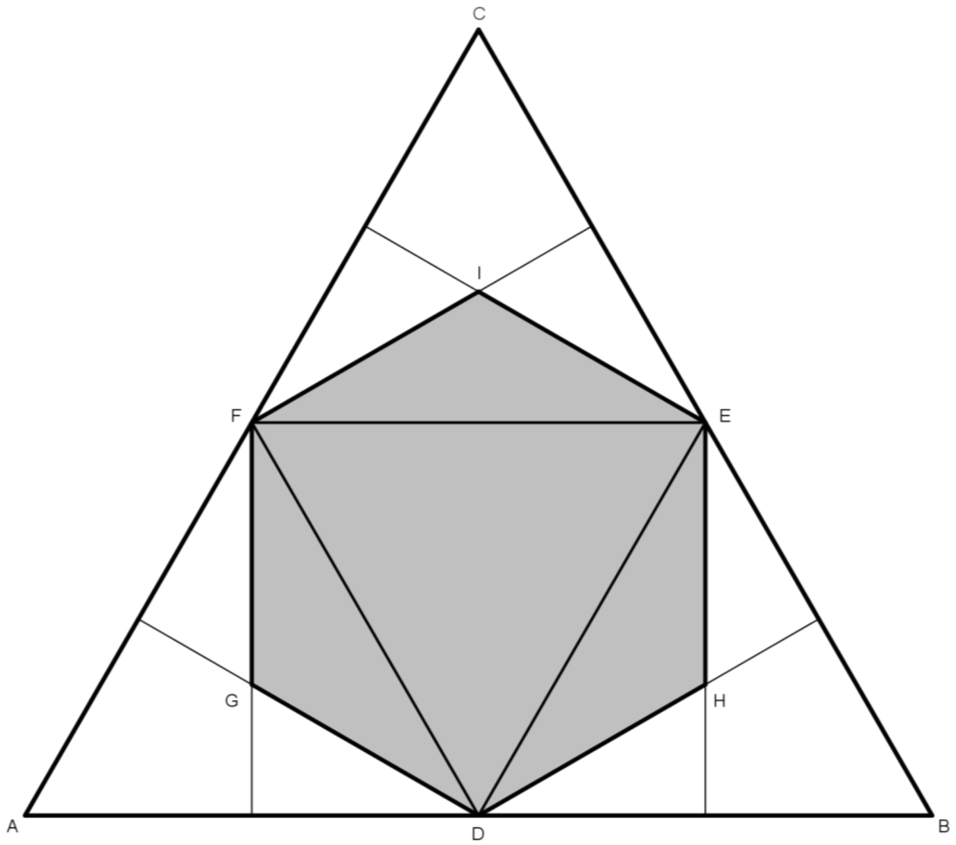


Welchen Flächeninhalt hat das dadurch entstandene graue Sechseck?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{9}$ **(D) $\frac{1}{2}$** (E) $\frac{2}{3}$

Durch Verbinden der Seitenmittelpunkte D, E und F des Dreiecks unterteilt man das Dreieck in vier flächengleiche gleichseitige Dreiecke ADF, DBE, FEC und DEF. Der Flächeninhalt ist jeweils $\frac{1}{4}$.

Die eingezeichneten Normalen sind Höhen der Dreiecke ADF, DBE und FEC mit Höhenschnittpunkten G, H und I.
Da ADF, DBE und FEC gleichseitige Dreiecke sind, dritteln die Dreiecke GDF, DHE und FEI diese jeweils. Die Dreiecke GDF, DHE und FEI haben also jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.
Das graue Sechseck hat insgesamt den Flächeninhalt $\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.



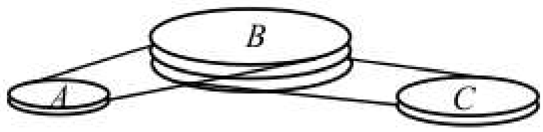
14. Die Summe der Quadrate von drei aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist 770.

Welche ist die größte dieser Zahlen?

(A) 15 (B) 16 **(C) 17** (D) 18 (E) 19

Es gilt $770 = 15^2 + 16^2 + 17^2$.

15. Ein Riemensystem besteht aus Rädern *A*, *B* und *C*, die sich ohne Rutschen drehen. *B* dreht sich 4 Mal herum, während sich *A* 5 Mal herumdreht, und *B* dreht sich 6 Mal herum, während sich *C* 7 Mal herumdreht. Der Umfang von *C* ist 30 cm. Wie groß ist der Umfang von *A*?



(A) 27 cm **(B) 28 cm** (C) 29 cm (D) 30 cm (E) 31 cm

Wenn sich *C* 14 Mal dreht, dann dreht sich *B* 12 Mal und *A* 15 Mal. Gleichzeit muss sich jedes der Räder um $14 \cdot 30\ cm$ weiterdrehen. Also hat *A* einen Umfang von $\frac{14 \cdot 30}{15}\ cm = 28\ cm$.

16. Tycho plant sein Lauftraining. Er möchte jede Woche an denselben Wochentagen laufen gehen. Niemals will er an zwei aufeinanderfolgenden Tagen laufen. Er möchte aber drei Mal pro Woche laufen. Aus wie vielen möglichen Wochenplänen kann er unter diesen Bedingungen auswählen?

(A) 6 **(B) 7** (C) 9 (D) 10 (E) 35

Es gibt folgende gültige Wochenpläne:

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
✓		✓		✓		
✓		✓			✓	
✓			✓		✓	
	✓		✓		✓	
	✓		✓			✓
	✓			✓		✓
		✓		✓		✓

17. Vier Brüder sind verschieden groß. Tobias ist um gleich viele Zentimeter kleiner als Viktor, wie er größer als Peter ist. Oskar ist wiederum um ebenso viele Zentimeter kleiner als Peter. Tobias ist $184\ cm$ groß, und die vier Brüder sind durchschnittlich $178\ cm$ groß. Wie groß ist Oskar?

(A) $160\ cm$ (B) $166\ cm$ (C) $172\ cm$ (D) $184\ cm$ (E) $190\ cm$

Viktor ist größer als Tobias, Tobias ist größer als Peter, und Peter ist größer als Oskar. Der Durchschnitt von $178\ cm$ ist genau in der Mitte der Größen von Tobias und Peter. Peter ist daher $178\ cm - (184 - 178)cm = 172\ cm$ groß. Oskar ist um gleich viel kleiner als Peter, wie Peter kleiner als Tobias ist. Oskar ist also $172\ cm - 12\ cm = 160\ cm$ groß.

18. Während unseres Urlaubs hat es an 7 Tagen geregnet. Wenn es am Vormittag geregnet hat, war der Nachmittag regenfrei. Wenn es am Nachmittag geregnet hat, war der Vormittag regenfrei. Es gab 5 regenfreie Vormittage und 6 regenfreie Nachmittage. Wie viele Tage hat unser Urlaub gedauert?

(A) 7 (B) 8 **(C) 9** (D) 10 (E) 11

Es hat insgesamt an $5 + 6 = 11$ Halbtagen nicht geregnet. Da es höchstens einen Halbtag pro Tag geregnet hat, gab es 7 verregnete Halbtage. Insgesamt dauerte der Urlaub somit $11 + 7 = 18$ Halbtage, also 9 Tage.

19. Jenny möchte in die Felder einer 3x3-Tabelle Zahlen so eintragen, dass die Summe der Zahlen in jedem der vier 2x2-Quadrate gleich groß ist. Wie die Abbildung zeigt, hat sie bereits drei Zahlen eingetragen. Welche Zahl muss sie ins vierte Eckfeld schreiben?

3		1
2		?

(A) 5 (B) 4 (C) 1 **(D) 0** (E) Die Zahl ist nicht eindeutig bestimmbar.

Die Zahl im mittleren Feld kann beliebig sein, da sie in jedem der vier 2x2-Quadrate vorkommt (Jenny setzt der Einfachheit halber die Zahl 0 ein). Dann setzt sie für zwei der Randfelder wie in der Tabelle die Variablen x und y ein. Das linke obere 2x2-Quadrat liefert die Summe $x + y + 3$. Diese Summe muss auch das rechte obere 2x2-Quadrat liefern. In das rechte Randfeld muss Jenny also $(x + y + 3) - y - 1 = x + 2$ eintragen. Weiters muss sie in das untere Randfeld $(x + y + 3) - x - 2 = y + 1$ schreiben.

3	y	1
x	0	x+2
2	y+1	?

In das vierte Eckfeld muss Jenny die Zahl $(x + y + 3) - (x + 2) - (y + 1) = 0$ eintragen.

20. Sieben positive ganze Zahlen a, b, c, d, e, f, g werden in dieser Reihenfolge nebeneinander angeschrieben. Die Summe aller sieben Zahlen beträgt 2017. Je zwei benachbarte Zahlen unterscheiden sich immer um 1. Welche der Zahlen kann gleich 286 sein?

(A) nur a oder g (B) nur b oder f (C) nur c oder e (D) nur d (E) alle

Wir können von jeder der Zahlen a, b, c, d, e, f und g die Zahl 286 abziehen. Die Summe der sieben Zahlen muss dann $2017 - 7 \cdot 286 = 15$ ergeben und die Frage lautet dann, welche der Zahlen 0 sein kann. Die Zahlen können dabei auch negativ sein.
Für $b = 0$ oder $d = 0$ oder $f = 0$ ist die Summe immer gerade, also nie 15. Für $c = 0$ erreichen wir als maximale Summe $2 + 1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 13 < 15$. Symmetrisches gilt für $e = 0$.
Für $a = 0$ finden wir die Lösung $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 15$. Symmetrisches gilt für $g = 0$.

5 Punkte Beispiele

21. Im Primatengehege im Zoo befinden sich vier Gorillas. Alle sind jünger als 18 Jahre. Keine zwei sind gleich alt, und alle ihre Alter sind ganzzahlig. Das Produkt ihrer Alter ist 882. Wie groß ist die Summe ihrer Alter?

(A) 23 (B) 25 (C) 27 **(D) 31** (E) 33

Die Primfaktorzerlegung von 882 ist $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$. Mögliche Alter sind also 14, 7, 9 und 1. Bei allen anderen Verteilungen sind zwei Gorillas gleich alt oder mindestens einer älter als 18. Damit ist die Summe 31.

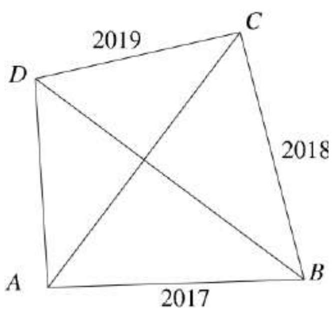
22. Auf den sechs Flächen eines Spielwürfels stehen die Zahlen -3, -2, -1, 0, 1, 2.

Der Würfel wird zweimal geworfen. Die geworfenen Zahlen werden miteinander multipliziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Produkt negativ ist?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{11}{36}$ (D) $\frac{13}{36}$ **(E) $\frac{1}{3}$**

Das Produkt ist negativ, wenn eine Zahl negativ ist und die andere positiv. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zahl negativ ist, ist $\frac{3}{6}$ und dafür, dass eine Zahl positiv ist, ist $\frac{2}{6}$. Ein negatives Produkt tritt also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$ auf. Die Multipliaktion mit 2 ergibt sich, da der erste Wurf negativ und der zweite positiv sein kann, oder umgekehrt.

23. Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen zueinander normal. Die Seiten haben die Längen $AB = 2017$, $BC = 2018$ und $CD = 2019$ (Abbildung nicht maßstabsgetreu). Wie lang ist die Seite AD?



(A) 20 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ **(D) $\sqrt{2018^2 + 2}$** (E) 2020

Sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Dann können wir in den vier Dreiecken AMB, BMC, CMD und DMA den Satz von Pythagoras verwenden. Damit erhalten wir die Gleichungen

$$MA^2 + MB^2 = 2017^2,$$
$$MB^2 + MC^2 = 2018^2,$$
$$MC^2 + MD^2 = 2019^2,$$
$$MD^2 + MA^2 = AD^2.$$

Wir subtrahieren nun die zweite Gleichung von der Summe der ersten und dritten Gleichung und erhalten

$$MA^2 + MD^2 = 2017^2 - 2018^2 + 2019^2.$$

Durch Gleichsetzen mit der vierten Gleichung haben wir $AD^2 = 2017^2 - 2018^2 + 2019^2 = (2018-1)^2 - 2018^2 + (2018+1)^2 = 2018^2 - 2 \cdot 2018 + 1 - 2018^2 + 2018^2 + 2 \cdot 2018 + 1 = 2018^2 + 2$. Also ist (D) die Lösung.

24. Eine beliebige zweiziffrige Zahl ist aus den Ziffern a und b zusammengesetzt. Schreibt man das Ziffernpaar drei Mal hintereinander, erhält man eine 6-ziffrige Zahl. Diese neue Zahl ist immer teilbar durch

(A) 2 (B) 5 **(C) 7** (D) 9 (E) 11

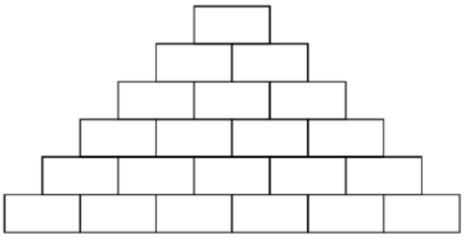
Die Teilbarkeitsregel durch 7 lautet: Zuerst Dreierblöcke einer Zahl alternierend addieren und subtrahieren. Die Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn das Ergebnis durch 7 teilbar ist.
Für die 6-ziffrige Zahl ababab müssen wir also rechnen $aba - bab = (100 \cdot a + 10 \cdot b + a) - (100 \cdot b + 10 \cdot a + b) = 91 \cdot (a - b)$. Da 91 durch 7 teilbar ist, ist die Lösung (C).

25. Mein Freund Heinz möchte ein besonderes Passwort verwenden, das aus sieben Ziffern besteht. Die jeweiligen Ziffern des Passwortes kommen im gesamten Passwort genau so oft vor, wie es ihren Werten entspricht. Außerdem stehen gleiche Ziffern immer aufeinanderfolgend. So kann er zum Beispiel 4444333 oder 1666666 als Passwörter verwenden. Aus wie vielen möglichen Passwörtern kann er auswählen?

(A) 6 (B) 7 (C) 10 (D) 12 **(E) 13**

Die Zahl 7 kann man als folgende fünf Summen darstellen, in denen kein Summand öfter als einmal vorkommt: $7, 6+1, 5+2, 4+3, 4+2+1$. Daraus erhält man Passwörter, indem man jeden Summanden so oft schreibt, wie es seinem Wert entspricht. Dabei kann man die Reihenfolge der Summanden vertauschen. Bei zwei Summanden sind das zwei Anordnungen, bei drei Summanden sechs. Insgesamt haben wir also $1 + 2 + 2 + 2 + 6 = 13$ mögliche Passwörter.

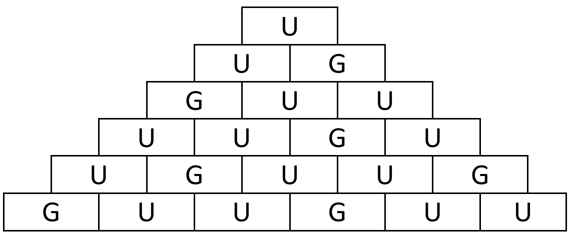
26. Paul möchte auf jeden Ziegel der abgebildeten Zahlenmauer eine positive ganze Zahl so schreiben, dass jede Zahl gleich der Summe der beiden Zahlen auf den unmittelbar darunterliegenden Ziegeln ist.



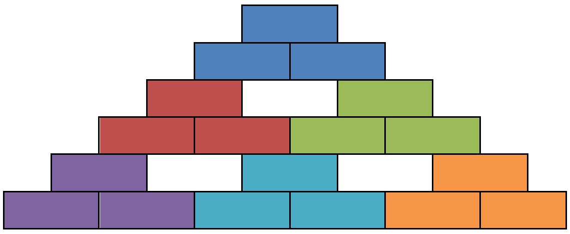
Wie viele ungerade Zahlen kann er höchstens auf die Ziegel schreiben?

(A) 13 **(B) 14** (C) 15 (D) 16 (E) 17

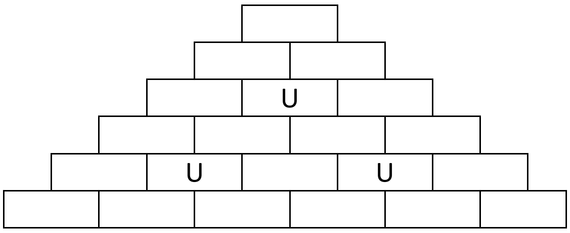
Die Summe zweier Zahlen ist genau dann ungerade, wenn eine der beiden Zahlen ungerade und die andere gerade ist. Eine gerade Zahl kann Summe von zwei geraden Zahlen oder zwei ungeraden Zahlen sein. Da Paul viele ungerade Zahlen schreiben möchte, ist der zweite Fall der bessere. Wir beschränken uns darauf, zu betrachten, ob Zahlen ungerade (U) oder gerade (G) sind. Wir beginnen an der Spitze mit einer ungeraden Zahl. Jede gerade Zahl ersetzen wir durch zwei ungerade Zahlen in der Zeile darunter. Jede ungerade Zahl ersetzen wir in der Zeile darunter durch eine ungerade Zahl und eine gerade. Dabei versuchen wir, möglichst wenige gerade Zahlen zu schreiben. Damit erhalten wir die folgende Lösung mit 14 ungeraden Zahlen.



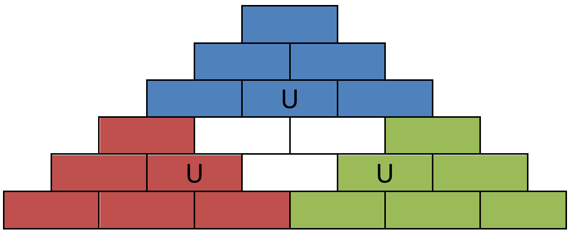
Um mathematisch korrekt zu beweisen, dass mehr als 14 ungerade Zahlen nicht möglich sind, kann man folgendes Argument verwenden. Wir unterteilen die Zahlenmauer in sechs kleine Zahlenmauern mit jeweils 3 Feldern (siehe Abbildung).



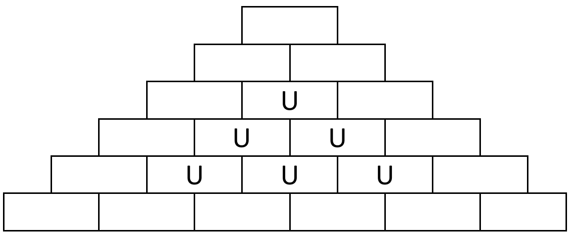
In jeder der kleinen Zahlenmauern können entweder ein oder drei gerade Zahlen stehen. Damit erhalten wir mindesten sechs gerade Zahlen. Da es insgesamt 21 Felder in der Zahlenmauer gibt, gibt es also höchstens 15 ungerade Zahlen. Lösungen (D) und (E) sind also ausgeschlossen. Da wir bereits eine Möglichkeit für (B) kennen, müssen wir nur noch (C) ausschließen.
Angenommen es gibt 15 ungerade und damit 6 gerade Zahlen. Dann steht in jeder der kleinen Zahlenmauern genau eine gerade Zahl, und in den drei weißen Felder, die zu keiner kleinen Zahlenmauer gehören, nur ungerade Zahlen, also so wie in dieser Abbildung:



Jetzt unterteilen wir die Zahlenmauer in drei mittlere Zahlenmauern mit 6 Feldern, wie in der Abbildung.



Es ist nicht möglich eine mittlere Zahlenmauer mit keiner oder nur einer geraden Zahl zu füllen. Also haben wir mindestens zwei gerade Zahlen pro mittlerer Zahlenmauer, insgesamt also mindestens 6. Wir haben angenommen, dass wir genau sechs gerade Zahlen haben, also kann in dem weißen Bereich keine gerade Zahl stehen. Damit haben wir folgende Zahlenmauer.



Das geht allerdings nicht, die Summe zweier ungerade Zahlen immer gerade ist. Widerspruch, unsere Annahme, dass es 15 ungerade Zahlen gibt, war also falsch.

27. Lisa zeichnet einige Punkte auf einem Kreis und verbindet sie der Reihe nach zu einem Vieleck. Sie addiert die Innenwinkel des Vielecks. Dabei lässt sie irrtümlich einen Winkel aus und erhält als Summe 2017°.

Wie groß ist der Winkel, den sie übersehen hat?

(A) 37° (B) 53° (C) 97° (D) 127° **(E)** 143°

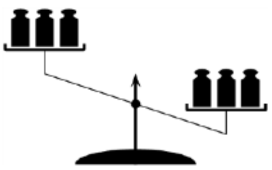
Ein konvexes n-Eck hat eine Innenwinkelsumme von $180 \cdot (n-2)°$. Da $11 \cdot 180 < 2017 < 12 \cdot 180$ gilt, fehlt der Winkel $(12 \cdot 180 - 2017)° = 143°$.

28. In einem Kreis stehen 30 Tänzer und blicken alle zur Mitte. Der Tanzlehrer ruft „Links“, und viele drehen sich um 90° nach links. Leider sind einige verwirrt und drehen sich nach rechts, sodass einige Tänzer jetzt einander direkt ansehen. Alle, die einander ansehen, schütteln den Kopf. Es stellt sich heraus, dass 10 Tänzer den Kopf schütteln. Darauf sagt der Tanzlehrer „Kehrt“ und alle drehen sich um 180° in die entgegengesetzte Richtung. Wieder schütteln alle, die einander direkt ansehen, den Kopf. Wie viele Tänzer schütteln beim zweiten Mal den Kopf?

(A) 10 (B) 20 (C) 8 (D) 15 (E) Es steht nicht eindeutig fest.

Zwischen je einem Paar, das einander direkt ansieht und dem nächsten solchen Paar stehen zwei Tänzer Rücken an Rücken. Und zwischen je einem Paar, das Rücken an Rücken steht und dem nächsten Paar, das Rücken an Rücke steht gibt es zwei Tänzer, die einander direkt ansehen.
Es gibt 5 Paare, die einander direkt ansehen, also auch 5 Paare, die Rücken an Rücken stehen. Nach dem Umdrehen sehen einander genau diese 5 Paare direkt an und diese 10 Tänzer schütteln den Kopf.

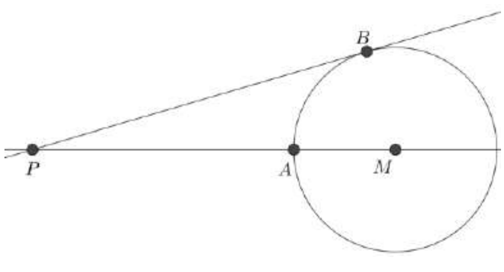
29. Auf jede Waagschale einer Balkenwaage werden zufällig drei Gewichte gelegt. Die Waage senkt sich, wie im Bild zu sehen ist, auf die rechte Seite. Die Massen der Gewichte betragen 101, 102, 103, 104, 105 und 106 Gramm. Bei wieviel Prozent der möglichen Verteilungen befindet sich das 106-Gramm-Gewicht auf der rechten (schwereren) Seite?



(A) 75 % **(B) 80 %** (C) 90 % (D) 95 % (E) 100 %

Wir betrachten die analoge Aufgabe mit Gewichten der Massen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Gramm, insgesamt also 21 Gramm. Auf der leichteren Seite stehen insgesamt höchstens 10 Gramm und es können nicht beide Seiten gleich schwer sein.
Wenn das 6-Gramm-Gewicht auf der leichteren Seite steht, dann haben die anderen beiden Gewichte auf der leichteren Seite zusammen eine Masse von höchstens 4 Gramm. Es gibt dafür also die Möglichkeiten 1 und 2 Gramm oder 1 und 3 Gramm.
Insgesamt gibt es $\binom{6}{3} \cdot \frac{1}{2} = 10$ Aufteilungen auf eine leichtere und eine schwerere Seite.
Damit ist das 6-Gramm-Gewicht in $\frac{8}{10} = 80\ \%$ der Fälle auf der schwereren Seite.

30. Die Punkte *A* und *B* liegen auf dem Kreis mit Mittelpunkt *M*. Der Punkt *P* liegt auf der Geraden durch *A* und *M*. *PB* berührt den Kreis in *B*. Die Längen der Strecken *PA* und *MB* sind ganze Zahlen, und es gilt *PB* = *PA* + 6. Wie viele mögliche Werte gibt es für *MB*?



(A) 0 (B) 2 (C) 4 **(D) 6** (E) 8

Da PB eine Tangente ist, ist der Winkel $\angle PBM = 90°$. Nach dem Satz von Pythagoras im Dreieck PBM gilt $PB^2 + BM^2 = PM^2$. Da $PB = PA + 6$ und $PM = PA + MB$ haben wir

$$(PA + 6)^2 + MB^2 = (PA + MB)^2.$$

Durch Ausquadrieren erhält man $6 \cdot PA + 18 = PA \cdot MB$. Wir dividieren durch PA und erhalten $6 + \frac{18}{PA} = MB$.
Da MB und PA ganze Zahlen sind, muss PA ein Teiler von 18 sein. Alle sechs Teiler von 18, also 1, 2, 3, 6, 9 und 18 liefern einen möglichen Wert für MB.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Kategorie: Student, Schulstufe: 11 – 13

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2017“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

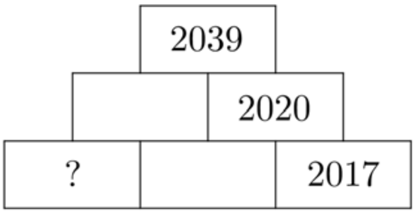
Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

Känguru der Mathematik 2017
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 16. 3. 2017

- 3 Punkte Beispiele -

1 In der abgebildeten Zahlenmauer ist die Zahl auf jedem Ziegel gleich der Summe der Zahlen auf den beiden darunter liegenden Ziegeln.
Welche Zahl steht auf dem mit „?“ markierten Ziegel?

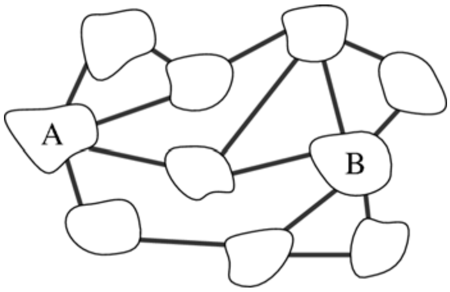


(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

2 Viele Modelleisenbahnen verwenden den H0-Maßstab 1:87. Benjamin besitzt für seine Eisenbahn ein genau 2 cm hohes Modell seines Bruders im H0-Maßstab. Wie groß ist sein Bruder in Wirklichkeit?

(A) 1,74 m (B) 1,62 m (C) 1,86 m (D) 1,94 m (E) 1,70 m

3 In der Abbildung sehen wir 10 Inseln, die durch 15 Brücken verbunden sind. Wie viele Brücken müssen mindestens gesperrt werden, damit es von A nach B keine Brückenverbindung mehr gibt?

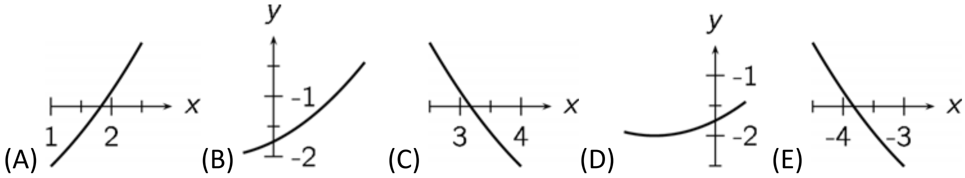


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

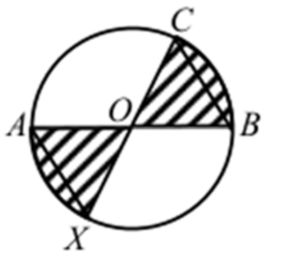
4 Zwei positive Zahlen a und b haben die Eigenschaft, dass 75 % von a gleich 40 % von b sind. Daraus folgt:

(A) $15a = 8b$ (B) $7a = 8b$ (C) $3a = 2b$ (D) $5a = 12b$ (E) $8a = 15b$

5 Vier der folgenden fünf Bilder zeigen Ausschnitte aus dem Graphen derselben quadratischen Funktion. Welcher Ausschnitt gehört nicht dazu?

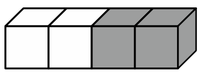


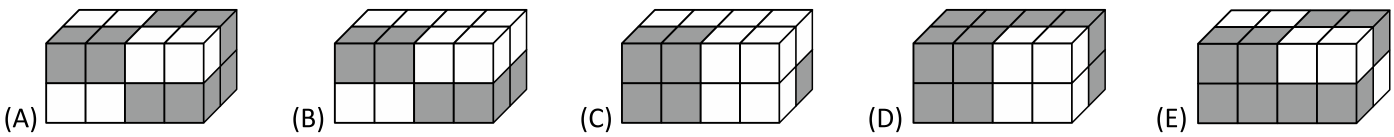
6 Die Abbildung zeigt einen Kreis mit Mittelpunkt O und den Durchmessern AB und CX. Es gilt $OB = BC$. Welcher Anteil der Kreisfläche ist schraffiert?



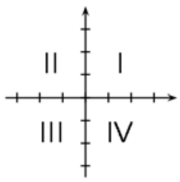
(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{4}{11}$

7 Ein $4 \times 1 \times 1$ Quader ist wie abgebildet aus 2 weißen und 2 grauen Würfeln zusammengesetzt. Welchen der folgenden Quader kann man aus lauter solchen $4 \times 1 \times 1$ Quadern bauen?





8 Welcher Quadrant enthält keinen Punkt des Graphen der linearen Funktion $f(x) = -3{,}5x + 7$?



(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) Jeder Quadrant enthält mindestens einen Punkt des Graphen.

9 In jeder der fünf Schachteln (A) bis (E) befinden sich rote und blaue Bälle. Benedikt möchte ohne hinzusehen genau einen Ball aus einer dieser Schachteln entnehmen, und hofft darauf, einen blauen Ball zu erwischen. Bei welcher Schachtel ist die Wahrscheinlichkeit dafür am größten?

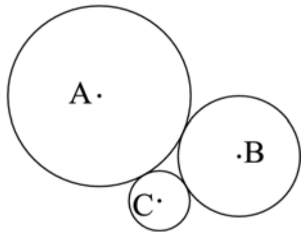
(A) 10 blaue, 8 rote (B) 6 blaue, 4 rote (C) 8 blaue, 6 rote (D) 7 blaue, 7 rote (E) 12 blaue, 9 rote

10 Der Graph welcher der folgenden Funktionen hat die meisten Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion $f(x) = x$?

(A) $g_1(x) = x^2$ (B) $g_2(x) = x^3$ (C) $g_3(x) = x^4$ (D) $g_4(x) = -x^4$ (E) $g_5(x) = -x$

- 4 Punkte Beispiele -

11 Drei Kreise mit den Mittelpunkten A, B, C berühren einander paarweise von außen (siehe Abbildung). Ihre Radien sind 3, 2 und 1.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?



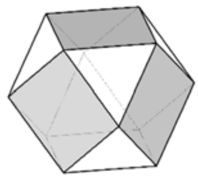
(A) 6 (B) $4\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) 9 (E) $2\sqrt{6}$

12 Die positive Zahl p ist kleiner als 1, und die Zahl q ist größer als 1.
Welche der folgenden Zahlen ist am größten?

(A) $p \cdot q$ (B) $p + q$ (C) $\frac{p}{q}$ (D) p (E) q

13 Zwei Drehzylinder A und B haben dasselbe Volumen. Der Radius des Basiskreises von B ist um 10 % größer als jener von A. Um wie viel ist die Höhe von A größer als jene von B?
(A) 5 % (B) 10 % (C) 11 % (D) 20 % (E) 21 %

14 Jede Seitenfläche des abgebildeten Polyeders ist entweder ein Dreieck oder ein Quadrat. Jedes Quadrat grenzt an 4 Dreiecke, und jedes Dreieck grenzt an 3 Quadrate. Das Polyeder hat 6 Quadrate. Wie viele Dreiecke hat es?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

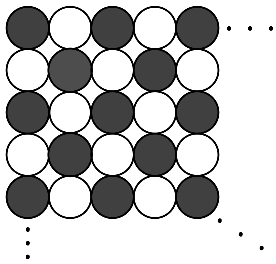
15 Die vier Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den vier Ziffern 2, 0, 1 und 7 beschriftet (auf jeder Seitenfläche eine Ziffer). Für ein Spiel werden vier derartige Tetraeder als faire Spielwürfel verwendet. Alle vier Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen. Drei der vier Seitenflächen jedes Spielwürfels sind dann von oben sichtbar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mit jeweils genau einer der drei sichtbaren Ziffern von jedem Würfel die Zahl 2017 bilden können?

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{63}{64}$ (C) $\frac{81}{256}$ (D) $\frac{3}{32}$ (E) $\frac{29}{32}$

16 Das Polynom $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ hat ganzzahlige Koeffizienten a und b.
Welche der folgenden Zahlen ist sicher keine Lösung der Gleichung $5x^3 + ax^2 + bx + 24 = 0$?

(A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

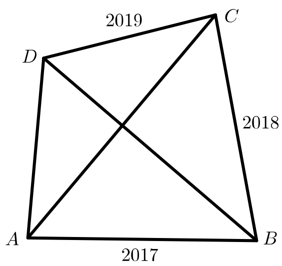
17 Julia hat 2017 runde Spielplättchen zur Verfügung: 1009 schwarze und 1008 weiße. Sie möchte damit wie abgebildet ein möglichst großes quadratisches Muster legen und beginnt mit einem schwarzen Plättchen links oben. In weiterer Folge legt sie die Plättchen so, dass sie in jeder Zeile und jeder Spalte farblich abwechseln. Wie viele Plättchen bleiben ihr übrig, wenn sie das größtmögliche Quadrat gelegt hat?



(A) keine (B) 40 von jeder Farbe (C) 40 schwarze und 41 weiße
(D) 41 von jeder Farbe (E) 40 weiße und 41 schwarze

18 Auf einer Tafel stehen zwei aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen, deren Ziffernsummen jeweils durch 7 teilbar sind. Wie viele Ziffern muss die kleinere der beiden Zahlen mindestens haben?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

19 Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die Diagonalen zueinander normal. Die Seiten haben die Längen $AB = 2017$, $BC = 2018$ und $CD = 2019$ (Abbildung nicht maßstabsgetreu). Wie lang ist die Seite AD?



(A) 2016 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ (D) $\sqrt{2018^2 + 2}$ (E) 2020

20 Lilli versucht, ein braves Känguru zu sein, aber es macht ihr einfach zu viel Spaß, zwischendurch zu lügen. Daher ist jede dritte Aussage von ihr eine Lüge; der Rest ist wahr. Manchmal beginnt sie mit einer Lüge und manchmal auch mit ein oder zwei wahren Aussagen. Lilli denkt an eine zweiziffrige Zahl und sagt zu ihrem Freund:

1: „Eine Ziffer der Zahl ist eine 2.“ 2: „Die Zahl ist größer als 50.“ 3: „Es ist eine gerade Zahl.“
4: „Die Zahl ist kleiner als 30.“ 5: „Die Zahl ist durch 3 teilbar.“ 6: „Eine Ziffer der Zahl ist eine 7.“
Wie groß ist die Ziffernsumme der Zahl, an die Lilli denkt?

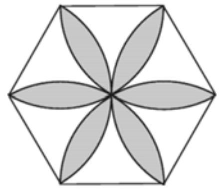
(A) 9 (B) 12 (C) 13 (D) 15 (E) 17

- 5 Punkte Beispiele -

21 Wie viele positive ganze Zahlen haben die Eigenschaft, dass man durch Löschen der letzten Ziffer eine neue Zahl erhält, die genau gleich 1/14 der ursprünglichen Zahl ist?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

22 Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 1. Die graue Blume wird von Kreisbögen mit Radius 1 umrandet, deren Mittelpunkte in den Eckpunkten des Sechsecks liegen.
Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Blume?

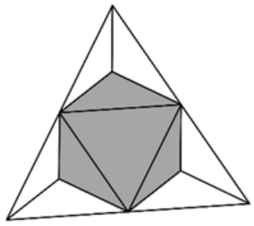


(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\pi$ (D) $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}$ (E) $2\pi-3\sqrt{3}$

23 Wir betrachten die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_1 = 2017$ und $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$. Dann gilt: $a_{999} =$

(A) -2017 (B) 2017 (C) $\frac{2016}{2017}$ (D) 1 (E) $-\frac{1}{2016}$

24 Wir betrachten ein regelmäßiges Tetraeder mit Volumen 1. Seine vier Ecken werden durch Ebenen abgeschnitten, die durch die Mittelpunkte der jeweiligen Kanten gehen (siehe Abbildung).
Wie groß ist das Volumen des verbleibenden Körpers?



(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$

25 Die Summe der Längen der drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks beträgt 18. Die Summe der Quadrate dieser drei Längen beträgt 128. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

(A) 18 (B) 16 (C) 12 (D) 10 (E) 9

26 Anna hat fünf Schachteln, sowie fünf schwarze Kugeln und fünf weiße Kugeln. Sie darf entscheiden, wie sie die Kugeln auf die Schachteln verteilt, solange sie in jede Schachtel mindestens eine Kugel legt. Beate wählt zufällig eine Schachtel und zieht daraus blind eine Kugel. Beate gewinnt, wenn sie eine weiße Kugel zieht. Andernfalls gewinnt Anna.
Wie soll Anna die Kugeln verteilen, um die höchste Gewinnwahrscheinlichkeit zu erreichen?

(A) Anna gibt in jede Schachtel je eine weiße und eine schwarze Kugel.
(B) Anna verteilt die schwarzen Kugeln auf drei Schachteln und die weißen Kugeln auf die restlichen zwei Schachteln.
(C) Anna verteilt die schwarzen Kugeln auf vier Schachteln und legt alle weißen Kugeln in die verbliebene Schachtel.
(D) Anna legt alle weißen Kugeln in die gleiche Schachtel und legt dann je eine schwarze Kugel in jede Schachtel.
(E) Anna legt alle schwarzen Kugeln in die gleiche Schachtel und legt dann je eine weiße Kugel in jede Schachtel.

27 In die Felder einer 3×3-Tabelle wurden neun ganze Zahlen geschrieben. Die Summe dieser neun Zahlen ist 500. Wir wissen, dass sich die Zahlen in zwei benachbarten Feldern (mit einer gemeinsamen Seitenkante) jeweils um genau 1 unterscheiden.
Welche Zahl steht im mittleren Feld?

	?	

(A) 50 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

28 Wie groß ist $x + y$, wenn sowohl $|x| + x + y = 5$ als auch $x + |y| - y = 10$ gilt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

29 Wie viele dreiziffrige Zahlen ABC gibt es, sodass $(A + B)^C$ eine dreiziffrige Zweierpotenz ist?

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 21

30 Auf einer Insel leben 2017 Personen. Jede von ihnen ist entweder ein Lügner (der immer lügt) oder ein Edler (der immer die Wahrheit sagt). Mehr als tausend von ihnen nehmen an einem Bankett teil, wobei sie alle gemeinsam an einem großen runden Tisch sitzen. Alle sagen „Von meinen beiden Sitznachbarn ist einer ein Lügner und einer ein Edler." Wie viele Edle gibt es höchstens auf der Insel?

(A) 1683 (B) 668 (C) 670 (D) 1344 (E) 1343

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2017
16. 3. 2017

Level: Student, Grade 11 to 13

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2017" an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt.
DVR-Nummer: 300 37 06

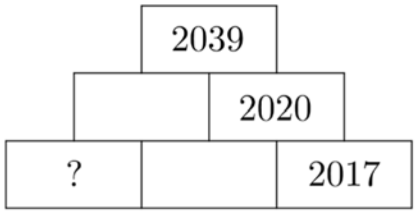
Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

Känguru der Mathematik 2017
Level Student (Grade 11 to 13)
Österreich - 16. 3. 2017

- 3 Point Questions -

1 On the number wall shown the number on each tile is equal to the sum of the numbers on the two tiles directly below it.
Which number is on the tile marked with "?" ?

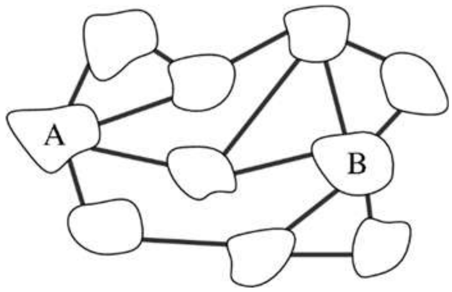


(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

2 Many model railways use the H0-scale 1:87. For his railway Benjamin owns a 2 cm high model of his brother in H0-scale. How tall is his brother in reality?

(A) 1.74 m (B) 1.62 m (C) 1.86 m (D) 1.94 m (E) 1.70 m

3 In the diagram we see 10 islands that are connected by 15 bridges. What is the minimum number of bridges that need to be closed off so that there is no connection from A to B anymore?

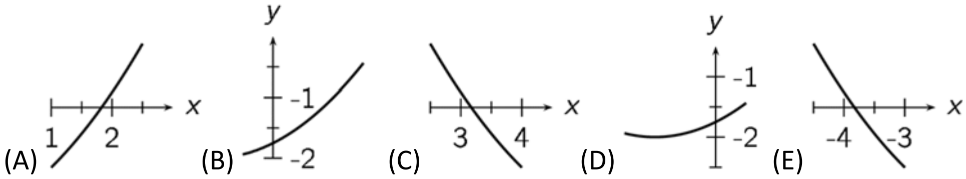


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

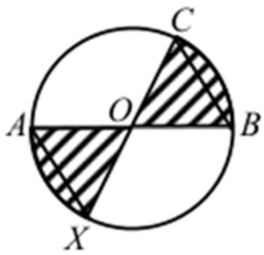
4 Two positive numbers a and b have the following property: 75 % of a is equal to 40 % of b. From that follows:

(A) $15a = 8b$ (B) $7a = 8b$ (C) $3a = 2b$ (D) $5a = 12b$ (E) $8a = 15b$

5 Four of the following five pictures show pieces of the graph of the same quadratic function. Which piece does not belong?

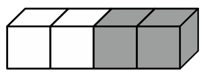


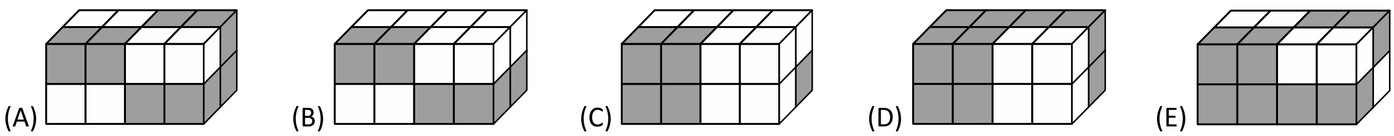
6 The diagram shows a circle with centre O and the diameters AB and CX. Let $OB = BC$. Which fraction of the circle area is shaded?



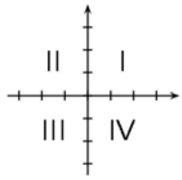
(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{4}{11}$

7 A $4 \times 1 \times 1$ cuboid is made up of 2 white and 2 grey cubes as shown. Which of the following cuboids can be build entirely out of such $4 \times 1 \times 1$ cuboids?





8 Which quadrant contains no points of the graph of the linear function $f(x) = -3.5x + 7$?



(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) Every quadrant contains at least one point of the graph.

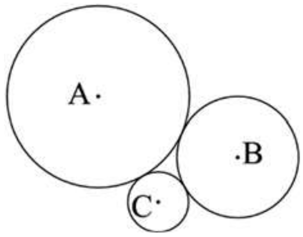
9 In each of the five boxes (A) to (E) there are red and blue balls. Benedict wants to take exactly one ball without looking, out of one of these boxes and hopes to get a blue ball. In which box is the probability of that happening greatest?

(A) 10 blues, 8 reds (B) 6 blues, 4 reds (C) 8 blues, 6 reds (D) 7 blues, 7 reds (E) 12 blues, 9 reds

10 The graph of which of the following functions has the most intersections with the graph of the function $f(x) = x$?

(A) $g_1(x) = x^2$ (B) $g_2(x) = x^3$ (C) $g_3(x) = x^4$ (D) $g_4(x) = -x^4$ (E) $g_5(x) = -x$

- 4 Point Questions -



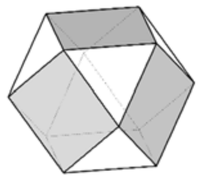
11 Three circles with centres A, B, C touch each other in pairs from the outside (see diagram). Their radii are 3, 2 and 1.
How big is the area of the triangle ABC?

(A) 6 (B) $4\sqrt{3}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) 9 (E) $2\sqrt{6}$

12 The positive number p is smaller than 1, and the number q is greater than 1.
Which of the following numbers is biggest?

(A) $p \times q$ (B) $p + q$ (C) $\frac{p}{q}$ (D) p (E) q

13 Two cylinders A and B have the same volume. The radius of the base of B is 10 % bigger than that of A. How much is the height of A greater than that of B?
(A) 5 % (B) 10 % (C) 11 % (D) 20 % (E) 21 %



14 Each face of the polyhedron shown is either a triangle or a square. Each square borders 4 triangles, and each triangle borders 3 squares. The polyhedron has 6 squares. How many triangles does it have?

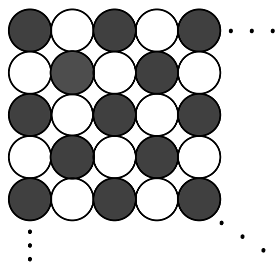
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

15 The four faces of a regular tetrahedron are labelled with the four digits 2, 0, 1 and 7 (one digit on each face). For a game, four such tetrahedrons are used as fair dice. All four dice are thrown simultaneously. Three of the four faces of each die can then be seen from above.
What is the probability that we can form the number 2017 using exactly one of the three visible digits of each die?

(A) $\frac{1}{256}$ (B) $\frac{63}{64}$ (C) $\frac{81}{256}$ (D) $\frac{3}{32}$ (E) $\frac{29}{32}$

16 The polynomial $5x^3 + ax^2 + bx + 24$ has whole number coefficients a and b.
Which of the following numbers is definitely not a solution to the equation $5x^3 + ax^2 + bx + 24 = 0$?

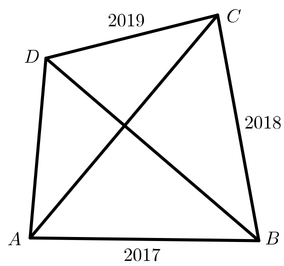
(A) 1 (B) -1 (C) 3 (D) 5 (E) 6



17 Julia has 2017 round discs available: 1009 black ones and 1008 white ones. Using them, she wants to lay the biggest square pattern (as shown) possible and starts by using a black disc in the left upper corner. Subsequently she lays the discs in such a way that the colours alternate in each row and column. How many discs are left over when she has laid the biggest square possible?

(A) none (B) 40 of each colour (C) 40 black and 41 white ones
(D) 41 of each colour (E) 40 white and 41 black ones

18 Two consecutive positive whole numbers are written on a board. The sum of the digits of each number is divisible by 7. What is the minimum number of digits the smaller of the two numbers has to have?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



19 In a convex quadrilateral $ABCD$ the diagonals are perpendicular to each other. The length of the edges are $AB = 2017$, $BC = 2018$ and $CD = 2019$ (diagram not to scale). How long is side AD?
(A) 2016 (B) 2018 (C) $\sqrt{2020^2 - 4}$ (D) $\sqrt{2018^2 + 2}$ (E) 2020

20 Lilli tries to be a well-behaved kangaroo but she is having just too much fun not to lie every now and then. Therefore every third statement of hers is a lie and the rest is true. Sometimes she starts with a lie and sometimes with one or two true statements. Lilli thinks of a two-digit number and says to her friend:

1: "One digit of the number is a 2." 2: "The number is greater than 50." 3: "It is an even number."
4: "The number is less than 30." 5: "The number is divisible by 3." 6: "One digit of the number is a 7."
How big is the sum of the digits of the number, Lilli is thinking of?

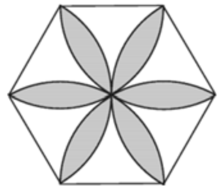
(A) 9 (B) 12 (C) 13 (D) 15 (E) 17

- 5 Point Questions -

21 How many positive whole numbers have the property that, if you delete the last digit you obtain a new number, which is exactly equal to 1/14 of the original number?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

22 The diagram shows a regular hexagon with side length 1. The grey flower is outlined by circular arcs with radius 1 whose centre's lie in the vertices of the hexagon.
How big is the area of the grey flower?

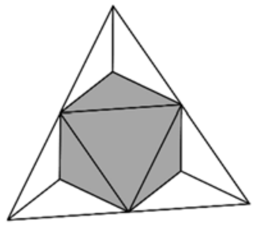


(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\pi$ (D) $\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}$ (E) $2\pi-3\sqrt{3}$

23 We look at the sequence $\langle a_n \rangle$ with $a_1 = 2017$ and $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{a_n}$. Then: $a_{999} =$

(A) -2017 (B) 2017 (C) $\frac{2016}{2017}$ (D) 1 (E) $-\frac{1}{2016}$

24 We look at a regular tetrahedron with volume 1. Its four vertices are cut off by planes that go through the midpoints of the respective edges (see diagram).
How big is the volume of the remaining solid?



(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{3}$

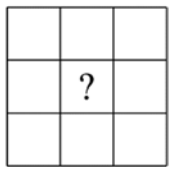
25 The sum of the three side lengths of a right-angled triangle equals 18. The sum of the squares of these three side lengths equals 128. How big is the area of the triangle?

(A) 18 (B) 16 (C) 12 (D) 10 (E) 9

26 Anna has five boxes, as well as five black balls and five white balls. She is allowed to decide how she shares out the balls between the boxes as long as she puts at least one ball into each box. Beate randomly chooses one box and takes one ball without looking. Beate wins if she draws a white ball. Otherwise Anna wins.
How should Anna distribute the balls in order to get the highest probability of winning?

(A) Anna puts one white and one black ball into each box.
(B) Anna distributes the black balls into three of the boxes and the white ones into the remaining two boxes.
(C) Anna distributes the black balls into four of the boxes and puts all of the white ones into the remaining box.
(D) Anna puts all of the white balls into one box and then puts one black ball into each box.
(E) Anna puts all of the black balls into one box and then puts one white ball into each box.

27 Nine whole numbers were written into the cells of a 3×3-table. The sum of these nine numbers is 500. We know that the numbers in two adjacent cells (with a common sideline) differ by exactly 1.
Which number is in the middle cell?



(A) 50 (B) 54 (C) 55 (D) 56 (E) 57

28 How big is $x+y$, if $|x|+x+y=5$ as well as $x+|y|-y=10$ holds true?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

29 How many different three-digit numbers ABC are there so that $(A+B)^C$ is a three-digit power of two?

(A) 15 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 21

30 2017 people live on an island. Each person is either a liar (who always lies) or a nobleman (who always tells the truth). Over a thousand of them attend a banquet where they all sit together around one big round table. Everyone is saying, "Of my two neighbours, one is a liar and one is a nobleman." What is the maximum number of noblemen on the island?

(A) 1683 (B) 668 (C) 670 (D) 1344 (E) 1343

Känguru 2017 – Student – Lösungen und Erklärungen

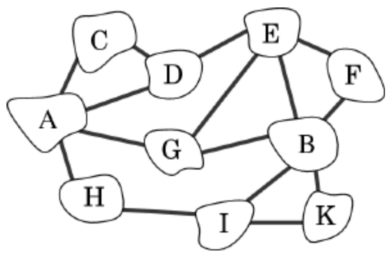
1. Wir bezeichnen die fehlenden Ziegel wie folgt mit x, y und z:

	2039	
x	2020	
z	y	2017

   Es muss gelten $x + 2020 = 2039$, daraus folgt $x = 19$. Dann muss in der Zeile darunter rechts weiters gelten $y + 2017 = 2020$, daraus folgt $y = 3$. Und schließlich gilt links unten $z + y = x$, also $z + 3 = 19$, daraus folgt $\mathbf{z = 16}$.

2. Der Maßstab $1 : 87$ bedeutet: 1cm im Modell entspricht 87cm in Wirklichkeit. Also entsprechen 2cm im Modell $2 \cdot 87\text{cm} = 174\text{cm} =$ **1,74m** in Wirklichkeit.

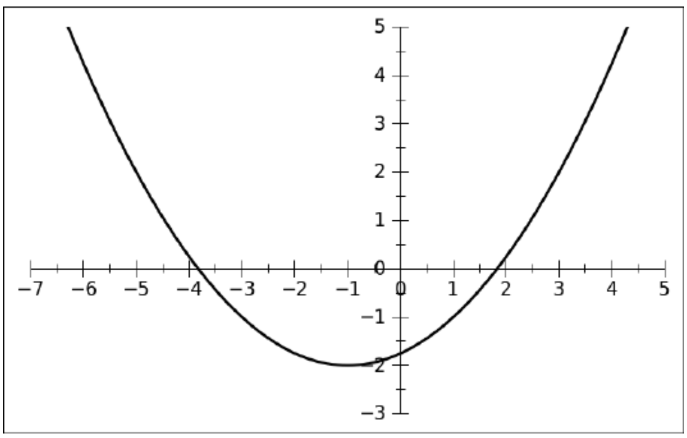
3. Wir beschriften die Inseln wie rechts abgebildet.
   Wenn man die Brücke D–E, die Brücke A–G und die Brücke A–H löscht, zerfällt die Inselgruppe in einen linken Teil bestehend aus A, C und D, und einen rechten Teil bestehend aus den restlichen Inseln. Zwischen diesen Teilen ist nun keine Verbindung mehr möglich, insbesondere also auch nicht von A nach B.
   Nun bleibt aber noch zu zeigen, dass tatsächlich 3 Brücken gesperrt werden müssen und es nicht auch schon mit 1 oder 2 Brücken möglich ist. Dazu überlegen wir uns, dass jeder vorher mögliche Weg unterbrochen werden muss – beispielsweise also auch der Weg A–D–E–B, der Weg A–G–B und der Weg A–H–I–B. Diese drei Wege haben aber keine einzige Brücke gemeinsam, also müssen bereits um diese drei Wege zu unterbrechen **mindestens 3 Brücken** gesperrt werden.



4. Wir schreiben das einfach als eine Gleichung an: $0.75 \cdot a = 0.4 \cdot b$. Multiplizieren wir beide Seiten mit 20, so erhalten wir $\mathbf{15a = 8b}$.

5. Eine quadratische Funktion ist eine Parabel. Wir vermuten einmal, dass Ausschnitt D zur Funktion dazugehört. In Ausschnitt D sehen wir, dass die Parabel ihren tiefsten Punkt etwa bei $x = -1$ hat. Nun überprüfen wir, welche der anderen Ausschnitte dazupassen. In Ausschnitt A sehen wir ein Stück, das rechts von $x = -1$ liegt und steigt, das passt. In Ausschnitt B sehen wir ein Parabelstück, das sich mit dem aus Ausschnitt D sogar teilweise überdeckt und an derselben Stelle die y-Achse schneidet, auch das passt. In Ausschnitt E sehen wir ein Stück, das links von $x = -1$ liegt und fallend ist, auch das passt.

   Insgesamt sieht die Kurve, die diese vier Ausschnitte enthält, etwa so aus:



   Aber in Ausschnitt C sehen wir ein Stück, das rechts von $x = -1$ liegt und fallend ist, und das passt nicht zu den schon betrachteten vier Ausschnitten. Also ist **Ausschnitt C** der nicht dazupassende Ausschnitt.

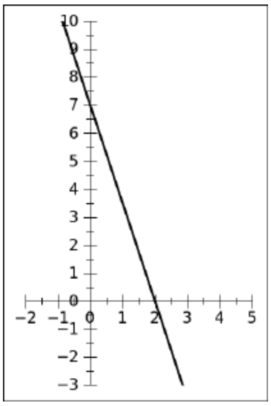
6. Als Radien des Kreises sind OA, OB, OC und OX alle gleich lang, laut Angabe hat auch BC dieselbe Länge, und wegen der Symmetrie auch AX. Wir sehen also zwei gleichseitige Dreiecke OBC und OAX, von denen wir daher wissen, dass ihre Winkel jeweils $60°$ betragen.

   Nun bleibt nur noch zu klären, welchen Anteil der Fläche diese beiden schraffierten "Tortenstücke" (mit Innenwinkeln von jeweils $60°$) ausmachen. Weil $\sphericalangle COA = 180° - \sphericalangle BOC = 120°$ gilt, passen in das obere und untere weiße Stück jeweils noch zwei identische Tortenstücke. Daher ist $\mathbf{\frac{1}{3}}$ **der Fläche** schraffiert.

   Wenn man die Formel für die Berechnung der Fläche eines Kreissektors gerade zur Hand hat, kann man alternativ auch direkt ausrechnen, dass die Fläche eines solchen Tortenstücks $F = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$ beträgt, wobei α der Innenwinkel ist. Ein Stück mit $\alpha = 60°$ hat also eine Fläche von $F = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{60°}{360°} = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{6}$. Zwei solche Stücke haben die doppelte Fläche, also $r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3}$. Und der gesamte Kreis hat eine Fläche von $r^2 \cdot \pi$. Der schraffierte Anteil beträgt also $\frac{r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{1}{3}$.

7. Egal, wie man diese Steine zusammenbaut, eine Stange aus 4 Würfeln muss immer zwei weiße und zwei graue Würfel enthalten. In Quader A ist das erfüllt. In Quadern B, C und D besteht jeweils die hinten oben liegende 4er-Stange aus vier gleichfarbigen Würfeln, in Quader E die vorne unten liegende 4er-Stange. Also kann **nur Quader A** aus solchen $4 \times 1 \times 1$-Quadern zusammengesetzt werden.

8. Wir sehen sofort aus der Gleichung, dass die lineare Funktion die y-Achse bei 7 schneidet und fallend ist. Die lineare Funktion sieht also etwa so aus wie rechts abgebildet.
   Daher enthält **Quadrant III** keinen Punkt der Funktion.

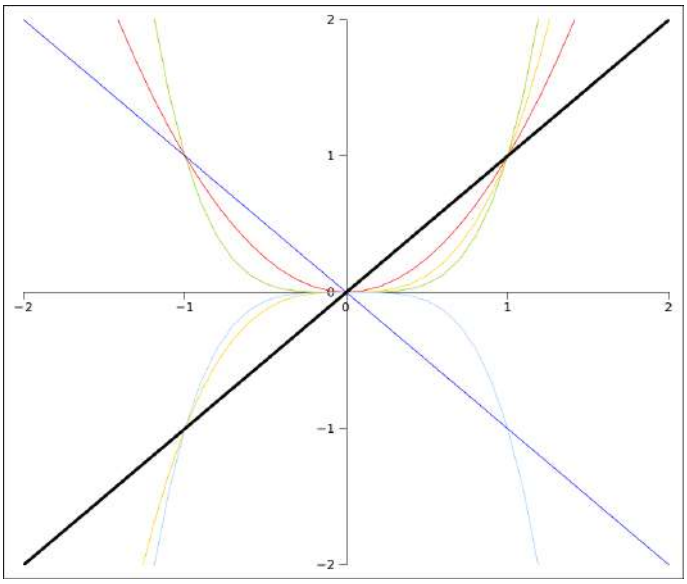


9. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich jeweils als $\frac{\text{"günstige"}}{\text{"mögliche"}}$. Für die fünf Schachteln ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten, einen blauen Ball zu erwischen:
   (A) $\frac{10}{10+8} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \approx 0{,}5555$
   (B) $\frac{6}{6+4} = \frac{6}{10} = 0{,}6$
   (C) $\frac{8}{8+6} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714$
   (D) $\frac{7}{7+7} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
   (E) $\frac{12}{12+9} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714$

   Ohne Taschenrechner lassen sich viele dieser Verhältnisse auch gut abschätzen, um sich das explizite Ausrechnen in der kurzen Wettbewerbszeit zu ersparen: Beispielsweise sehen wir sofort, dass (D) $= \frac{7}{14}$ schlechter ist als (C) $= \frac{8}{14}$, da der Nenner gleich aber der Zähler niedriger ist. Auch, dass (C) und (E) gleich sind, sieht man bereits nach dem Kürzen. Für die verbleibenden Vergleiche kann man sich zu Nutze machen, dass $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ für positive ganze Zahlen a, b, c und d genau dann gilt, wenn $ad < bc$ (Äquivalenzumformung durch Multiplikation mit b und d). Also zum Beispiel $\frac{5}{9} < \frac{4}{7}$ weil $5 \cdot 7 = 35 < 36 = 9 \cdot 4$.

   Die höchste Wahrscheinlichkeit für einen blauen Ball besteht also bei **Schachtel (B)**.

10. Zeichnen wir alle Graphen auf:



Die Graphen von $g_1(x) = x^2$ (rot) sowie von $g_3(x) = x^4$ (grün) schneiden $f(x) = x$ (schwarz) jeweils in 0 und in 1. Der Graph von $g_2(x) = x^3$ (gelb) schneidet $f(x) = x$ in -1, in 0 und in 1. Der Graph von $g_4(x) = -x^4$ (hellblau) schneidet $f(x) = x$ in -1 und in 0. Schließlich schneidet der Graph von $g_5(x) = -x$ (dunkelblau) die Funktion $f(x) = x$ nur in 0.

Daher hat $\mathbf{g_2(x) = x^3}$ die meisten Schnittpunkte mit $f(x)$.

11. Die Seitenlängen setzen sich jeweils zusammen aus zwei Radien, also $AB = 3 + 2 = 5$, $BC = 2 + 1 = 3$ und $CA = 1 + 3 = 4$. Nun ist uns vielleicht bekannt, dass die Längen 3, 4 und 5 ein pythagoräisches Tripel bilden, also das Dreieck ABC rechtwinkelig ist mit rechtem Winkel in C.

    Die Fläche lässt sich daher leicht berechnen als $F = \frac{CA \cdot CB}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \mathbf{6}$.

12. $p + q$ ist sicher größer als p sowie größer als q jeweils für sich, da ja alle Zahlen positiv sind und etwas dazuzugeben die Summe daher größer macht. Weiters ist $p \cdot q$ kleiner als q, weil der Wert bei Multiplikation mit einer Zahl zwischen 0 und 1 kleiner wird. Ebenso ist $\frac{p}{q}$ kleiner als p, weil der Wert bei einer Division durch eine Zahl größer als 1 kleiner wird. Daher ist $\mathbf{p + q}$ am größten.

13. Das Volumen berechnet sich als Volumen = Grundfläche · Höhe. Die Grundfläche ihrerseits berechnet sich als Fläche eines Kreises. Sei r der Radius des Basiskreises von A. Dann ist die Grundfläche von A gleich $r^2 \cdot \pi$, und jene von B laut Angabe gleich $(r \cdot 1{,}1)^2 \cdot \pi = 1{,}21r^2 \cdot \pi$.

    Sei h_A die Höhe von A, dann ist das Volumen von A gleich $r^2 \cdot \pi \cdot h_A$. Sei h_B die Höhe von B, dann ist das Volumen von B gleich $1{,}21r^2 \cdot \pi \cdot h_B$.

    Laut Angabe sind diese beiden Volumen identisch, also $r^2 \cdot \pi \cdot h_A = 1{,}21r^2 \cdot \pi \cdot h_B$. Kürzt man auf beiden Seiten $r^2 \cdot \pi$, so bleibt $h_A = 1{,}21h_B$ übrig. Die Höhe von A ist also um **21%** größer als jene von B.

14. Jede Kante des Polyeders grenzt an genau ein Quadrat und genau ein Dreieck. Wir wissen, dass es 6 Quadrate gibt, also hat das Polyeder genau $6 \cdot 4 = 24$ Kanten. Jede dieser Kanten muss nun auch Seitenkante eines Dreiecks sein (und kann nicht Seitenkante von zwei Dreiecken sein), also ist klar, dass es genau $\frac{24}{3} =$ **8 Dreiecke** geben muss.

15. Falls bei allen vier Spielwürfeln dieselbe Ziffer unten liegt, kann es uns nicht gelingen, die Zahl 2017 zu bilden, weil uns ja eine Ziffer fehlt. Etwas schwieriger ist schon die Argumentation, warum es in allen anderen Fällen möglich ist. Zwar ist relativ “offensichtlich”, dass sehr viele Möglichkeiten zur Verfügung stehen und es deshalb “schon irgendwie möglich sein wird” (und in der Wettbewerbssituation ist uns das wahrscheinlich genug). Um das wirklich zu beweisen, müssen wir aber eine explizite Methode angeben, wie man nach jedem möglichen Würfelergebnis eine Zuordnung finden kann, welcher Würfel welche Ziffer darstellt. Dazu unterscheiden wir einige Fälle nach der Häufigkeit der am häufigsten unten liegenden Ziffer.

    Es darf wie gesagt nicht dieselbe Ziffer bei allen vier Würfeln unten liegen, sonst gibt es keine Anordnung.

    Wenn dieselbe Ziffer bei drei Würfeln unten liegt, muss ich den vierten Würfel zur Darstellung dieser Ziffer verwenden. Die verbleibenden drei Würfel können jeweils jede der noch benötigten drei Ziffern darstellen, also ordne ich sie einfach in irgendeiner Reihenfolge den noch benötigten Ziffern zu und habe eine Anordnung gefunden.

    In allen anderen Fällen, also wenn jede Ziffer höchstens bei zwei Würfeln unten liegt, kann ich die vier Würfel so in zwei Paare aufteilen, dass jedes Paar aus zwei Würfeln besteht, die verschiedene Ziffern unten liegen haben.

    Zwischenüberlegung: Jedes solche Paar kann jede beliebige Kombination von zwei verschiedenen Ziffern darstellen: Wenn ich möchte, dass das Paar die Ziffern A und B darstellt, versuche ich zuerst, ob es möglich ist, A mit dem ersten und B mit dem zweiten Würfel darzustellen. Wenn das nicht geht, vertausche ich die beiden Ziffern. Dieser zweite Versuch ist sicher von Erfolg gekrönt: Nehmen wir an, im ersten Versuch war es nicht möglich, A am ersten Würfel darzustellen. (Es ist uns egal, ob B am zweiten Würfel möglich war oder nicht.) Dann ist nach der Vertauschung alles in Ordnung: Der erste Würfel hat A unten (sonst wäre A darzustellen ja möglich gewesen), also kann er B darstellen. Und der erste Würfel hat A unten, der zweite Würfel gemäß unserer Zusammenstellung des Paares eine andere Ziffer, also kann der zweite Würfel A darstellen. (Falls im ersten Versuch nur B nicht möglich war, gilt dasselbe Argument “analog” durch Vertauschung von “A” und “B”.)

    Also verwende ich das erste Paar, um 2 und 0 darzustellen, und das zweite Paar um 1 und 7 darzustellen.

    Nach dieser etwas mühsamen Überlegung wissen wir nun also, dass nur jene Fälle ungünstig sind, in denen alle vier Würfel dieselbe Ziffer unten liegen haben. Insgesamt gibt es vier solche ungünstigen Würfelergebnisse (alle 2er unten, alle 0er unten, alle 1er unten, alle 7er unten) von insgesamt $4^4 = 256$ möglichen Ergebnissen. Die Wahrscheinlichkeit für ein günstiges Ergebnis ist also $\frac{\text{“günstige”}}{\text{“mögliche”}} = \frac{256-4}{256} = \frac{252}{256} = \mathbf{\frac{63}{64}}$.

16. Vielleicht ist einem der Satz geläufig, dass bei einem Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten alle Lösungen Teiler des konstanten Glieds, hier 24, sein müssen (Satz über rationale Nullstellen, Lemma von Gauß). Von den angebotenen Lösungsmöglichkeiten sind 1, -1, 3 und 6 Teiler von 24, aber nicht 5. Daher ist **5 sicher keine Lösung**.

    Wenn man diesen Satz nicht kennt, erkennt man dasselbe aber auch leicht durch einige Überlegungen über die Teilbarkeit durch 5: Setzt man $x = 5$ ein, so ist $5x^3 = 5^4$ durch 5 teilbar, ebenso $ax^2 = a \cdot 5^2$, und ebenso $bx = b \cdot 5$. Aber 24 ist nicht durch 5 teilbar, also kann die Summe nicht 0 werden, egal für welche Zahlen a und b.

    Nun bleibt, wenn man exakt sein, will, noch zu überprüfen, dass die anderen vier Zahlen Lösungen sein können, d.h. wir müssen jeweils mindestens ein Beispiel (von denen es reichlich gilt) für ein Polynom mit dieser Lösung angeben. Diese finden wir zum Beispiel durch Einsetzen und Ausprobieren:

    (A) Für $x = 1$ erhalten wir $5 + a + b + 24 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = -29$ setzen. Das Polynom $5x^3 - 29x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung 1.

    (B) Für $x = -1$ erhalten wir $-5 + a - b + 24 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = 19$ setzen. Das Polynom $5x^3 + 19x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung -1.

    (C) Für $x = 3$ erhalten wir $5 \cdot 27 + a \cdot 9 + b \cdot 3 + 24 = 0$, oder etwas vereinfacht $9a + 3b + 159 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = -53$ setzen. Das Polynom $5x^3 - 53x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung 3.

    (E) Für $x = 6$ erhalten wir $5 \cdot 216 + a \cdot 36 + b \cdot 6 + 24 = 0$, oder etwas vereinfacht $36a + 6b + 1104 = 0$, also können wir zum Beispiel $a = 0$ und $b = -184$ setzen. Das Polynom $5x^3 - 184x + 24 = 0$ hat unter anderem die Lösung 6.

17. Zuerst müssen wir heraufinden, wie groß das Quadrat wird. Es gilt $44^2 = 1936$ und $45^2 = 2025$, also geht sich ein Quadrat mit Seitenlänge 44 gerade noch aus, und ein Quadrat mit Seitenlänge 45 nicht mehr.

    Da die Seitenlänge gerade ist, liegen in jeder Zeile genau gleich viele weiße wie schwarze Plättchen. Daher ist genau die Hälfte der verwendeten Plättchen schwarz. Im Quadrat liegen also $\frac{44^2}{2} = 968$ schwarze und ebensoviele weiße Plättchen. Also bleiben $1009 - 968 =$ **41 schwarze und** $1008 - 968 =$ **40 weiße Plättchen** übrig.

18. Was passiert, wenn man zu einer Zahl 1 dazuaddiert? Falls die letzte Ziffer kleiner als 9 ist, wird nur die letzte Ziffer um 1 größer, also unterscheiden die Ziffernsummen sich um 1. Damit können nicht beide Ziffernsummen durch 7 teilbar sein.

    Also muss die letzte Ziffer 9 sein. Wenn die Zehnerziffer kleiner als 9 ist, wird die Einerziffer um 9 kleiner und die Zehnerziffer durch den Überlauf um 1 größer, die restlichen Stellen ändern sich nicht. Dann unterscheiden die Ziffernsummen sich um 8, also können wieder nicht beide durch 7 teilbar sein.

    Folglich muss auch die Zehnerziffer gleich 9 sein. Betrachten wir als nächstes die Hunderterziffer. Ist diese kleiner als 9, so ändert sich die Einerziffer von 9 zu 0, die Zehnerziffer von 9 zu 0, die Hunderterziffer wird um 1 größer, und der Rest ändert sich nicht. Die Ziffernsumme wird insgesamt um 17 kleiner, also sind nicht beide Ziffernsummen durch 7 teilbar.

    Also ist auch die Hunderterziffer gleich 9. Wenn die Tausenderziffer kleiner als 9 ist, ändern die drei hinteren Ziffern sich jeweils von 9 zu 0, und die Tausenderziffer wird um 1 größer. Die Ziffernsumme wird um 26 kleiner, wieder nicht durch 7 teilbar.

    Also ist die Tausenderziffer gleich 9. Wenn die Zehntausenderziffer kleiner als 9 ist, ändern sich die vier hinteren Ziffern jeweils von 9 zu 0, und die Zehntausenderziffer wächst um 1. Die Ziffernsumme wird um 35 kleiner, und dies ist nun endlich eine durch 7 teilbare Differenz. Bei einer Zahl, die auf 9999 endet, ist es also prinzipiell möglich, dass ihre Ziffernsumme durch 7 teilbar ist und man durch Addition von 1 eine weitere Zahl erhält, deren Ziffernsumme durch 7 teilbar ist.

    Die kürzestmögliche Zahl, die auf 9999 endet, ist 9999 selbst, aber deren Ziffernsumme ist nicht durch 7 teilbar. Wir ergänzen also eine erste Ziffer 6 und erhalten 69999, deren Ziffernsumme durch 7 teilbar ist. Tatsächlich ist auch die Ziffernsumme von $69999 + 1 = 70000$ durch 7 teilbar, also ist das tatsächlich das kleinstmögliche Paar solcher Zahlen. Die kleinere Zahl hat daher **mindestens 5 Stellen**.

19. Wir beschriften den Mittelpunkt mit M und die vier Diagonalenteilstücke mit $AM = a$, $BM = b$, $CM = c$ und $DM = d$. Laut Satz von Pythagoras im rechtwinkeligen Dreieck AMB gilt $2017^2 = a^2 + b^2$. Im Dreieck BMC gilt $2018^2 = b^2 + c^2$. Im Dreieck CMD gilt $2019^2 = c^2 + d^2$.

    Sei x die gesuchte Seite AD. Im Dreieck DMA gilt laut Pythagoras $x^2 = a^2 + d^2$. Durch geschicktes Zusammenfügen der schon bekannten Summen erhalten wir ohne viel zu rechnen:

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + d^2 \\ &= a^2 + b^2 - b^2 - c^2 + c^2 + d^2 \\ &= 2017^2 - 2018^2 + 2019^2 \\ &= (2018-1)^2 - 2018^2 + (2018+1)^2 \\ &= 2018^2 - 2 \cdot 2018 + 1 - 2018^2 + 2018^2 + 2 \cdot 2018 + 1 \\ &= 2018^2 + 2 \end{aligned}$$

    Nun brauchen wir nur noch die Wurzel zu ziehen und erhalten $\mathbf{x = \sqrt{2018^2 + 2}}$.

20. Nehmen wir an, der erste und der zweite Satz sind wahr, die Zahl ist also größer als 50 und enthält die Ziffer 2. Da die Zehnerziffer nur mehr 5 oder größer sein kann, muss die Einerziffer gleich 2 sein. Dann stimmt aber auch die dritte Aussage "Es ist eine gerade Zahl.", und so viel Wahrheit nacheinander würde Lilli wohl kaum übers Herz bringen.

    Also muss entweder der erste oder der zweite Satz eine Lüge sein. Weiters heißt das, dass der dritte und sechste Satz wahr sein müssen. Folglich denkt Lilli an eine gerade Zahl, die eine Ziffer 7 enthält. Diese Ziffer 7 muss, weil die Zahl ja gerade ist, an der Zehnerstelle stehen. Somit ist die Zahl größer als 50, also ist auch Aussage 2 wahr, und damit wissen wir weiters, dass Aussage 5 wahr ist, und dass Aussagen 1 und 4 Lügen sind.

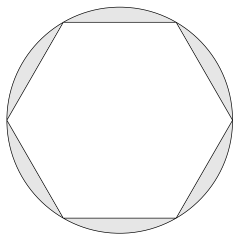
    Wir suchen also eine gerade Zahl zwischen 70 und 79, die durch 3 teilbar ist. Davon gibt es zwei: 72 und 78. Weil aber die erste Aussage eine Lüge ist, kann die Zahl keine Ziffer 2 enthalten. Die Zahl ist also 78, und ihre Ziffernsumme folglich **15**.

21. Wir betrachten eine Zahl, die diese Bedingung erfüllt, und stellen sie als $10x + y$ mit nicht-negativen ganzen Zahlen x und y und mit $0 \leq y \leq 9$ dar. (Beispielsweise würden wir die Zahl 1234 also mit $x = 123$ und $y = 4$ als $10 \cdot 123 + 4$ darstellen.)

    Die Zahl ohne letzte Ziffer entspricht dann x. Die geforderte Eigenschaft lässt sich nun anschreiben als $x \cdot 14 = 10x + y$. Subtrahieren wir auf beiden Seiten $10x$, so bleibt $4x = y$.

    Nun kann y aber nicht besonders groß werden (nicht größer als 9 laut Definition), und soll gleichzeitig ein Vielfaches von 4 sein, also bleiben eigentlich nur die Fälle $y = 4$ und $y = 8$ übrig. Beide liefern tatsächlich Zahlen, die die Eigenschaft erfüllen: 14 wird nach Löschen der letzten Stelle zu 1, und 28 wird nach Löschen der letzten Stelle zu 2. Es gibt also **2 solche Zahlen**.

22. Wir zerschneiden die Blütenblätter jeweils der Länge nach und erhalten 12 gleiche Teile, von denen wir 6 beispielsweise wie folgt außen an das Sechseck ansetzen können, um wieder einen Kreis zu erhalten.
    Die Summe der Flächen dieser 6 Teile ist also gleich der Kreisfläche (mit Radius 1) minus der Sechseckfläche (die sich aus 6 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge 1 zusammensetzt), also $1^2 \cdot \pi - 6 \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$. Um die Fläche von allen 12 Teilen zu erhalten, brauchen wir das nur noch zu verdoppeln (und etwas zu vereinfachen), und erhalten $2 \cdot \left(1^2 \cdot \pi - 6 \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \mathbf{2\pi - 3\sqrt{3}}$.



23. Wir berechnen die ersten paar Folgenelemente:

    - $a_1 = 2017$
    - $a_2 = \frac{2017-1}{2017} = \frac{2016}{2017}$
    - $a_3 = \frac{\frac{2016}{2017}-1}{\frac{2016}{2017}} = \frac{\frac{2016}{2017}-1}{\frac{2016}{2017}} \cdot \frac{2017}{2017} = \frac{2016-2017}{2016} = \frac{-1}{2016}$
    - $a_4 = \frac{\frac{-1}{2016}-1}{\frac{-1}{2016}} = \frac{\frac{-1}{2016}-1}{\frac{-1}{2016}} \cdot \frac{2016}{2016} = \frac{-1-2016}{-1} = 2017$

    Jedes Element hängt nur vom direkt vorhergehenden ab. Da $a_4 = a_1$ gilt, muss also auch $a_5 = a_2$ gelten, dann $a_6 = a_3$, und so weiter. Das heißt, jedes dritte Folgenelement ist immer wieder dasselbe.

    Also ist $a_{999} = a_{996} = a_{993} = \cdots = a_3 = \mathbf{\frac{-1}{2016}}$.

24. Im dreidimensionalen Raum gilt: Wenn man bei einem Körper die Seitenlänge halbiert, schrumpft das Volumen auf ein Achtel. Das gesamte Tetraeder hat Volumen 1. Das oben abgeschnittene Tetraeder hat genau die halbe Seitenlänge vom großen Tetraeder, daher ist sein Volumen gleich $\frac{1}{8}$. Dasselbe gilt für alle vier Tetraeder, die abgeschnitten werden. Es verbleibt also ein Volumen von $1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

25. Wir bezeichnen die drei Längen mit a, b und c, wobei c die Hypotenuse sei. Laut Satz von Pythagoras gilt $c^2 = a^2 + b^2$. Wenn die Summe $a^2 + b^2 + c^2 = 128$ sein soll, folgt durch Einsetzen also $c^2 + c^2 = 128$, also $c^2 = 64$ und somit $c = 8$.

    Aus der Summe der Längen folgt dann $a + b = 18 - c = 18 - 8 = 10$. Natürlich könnte man ab diesem Punkt aus $a^2 + b^2 = 64$ und $a + b = 10$ relativ schnöde die beiden Werte ausrechnen. (Zum Beispiel $b = 10 - a$ in der ersten Gleichung einsetzen und die quadratische Gleichung lösen.)

    Da wir beim Bewerb für sowas aber keine Zeit haben (und außerhalb des Wettbewerbs keine Lust), und wir ja eigentlich nur das Produkt $\frac{ab}{2}$ brauchen um die Fläche des rechtwinkeligen Dreiecks zu berechnen, bedienen wir uns eines mathematischen Tricks und kombinieren die beiden schon bekannten Gleichungen geschickt. Konkret betrachten wir den Term $(a + b)^2 - a^2 - b^2$. Dieser ist einerseits, wenn man ihn ausmultipliziert, gleich $2ab$. Andererseits aber können wir auch die bekannten Summen einsetzen und erhalten $(10)^2 - (64) = 100 - 64 = 36$.

    Wenn also $2ab = 36$ gilt, dann ist die Fläche $\frac{ab}{2} = \mathbf{9}$.

26. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten in den fünf Fällen, wobei die Gesamtwahrscheinlichkeit immer der Durchschnitt der Wahrscheinlichkeiten der fünf Schachteln ist.

    (A) In jeder Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel bei 50%, somit auch im Durchschnitt über alle fünf Schachteln.

    (B) In drei Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 0%, in zwei Schachteln 100%, somit im Durchschnitt 40%.

    (C) In vier Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 0%, in einer Schachtel 100%, somit im Durchschnitt 20%.

    (D) In vier Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 0%, in einer Schachtel $\frac{5}{6} \approx 83.33\%$, somit im Durchschnitt $\approx 16.67\%$.

    (E) In vier Schachtel beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel 100%, in einer Schachtel $\frac{1}{6} \approx 16.67\%$, somit im Durchschnitt $\approx 83.33\%$.

    Die geringsten Chancen für Beate, eine weiße Kugel zu ziehen, bestehen also bei **Verteilung (D)**.

27. Wir bezeichnen die Zahl im mittleren Feld mit x. Für ein fixes x erhält man die größtmögliche Summe, wenn die vier zu x benachbarten Felder jeweils $x + 1$ enthalten, und die vier Eckfelder jeweils $x + 2$. Die Summe beträgt dann $9x + 12$. Wenn diese gleich 500 sein soll, muss x also größer als 54 sein, sonst kommt man an diese Summe nicht heran.

    Die kleinstmögliche Summe für ein festes x erhält man, indem man in die benachbarten Felder $x - 1$ und in die Eckfelder $x - 2$ schreibt, diese Summe beträgt $9x - 12$. Damit diese 500 sein kann, muss x kleiner als 57 sein, sonst wird die Summe zu groß.

    Es stehen für x also nur noch die Werte 55 oder 56 zur Verfügung. Als nächstes betrachten wir, welche Zahlen gerade oder ungerade sein müssen. Wenn x ungerade ist, sind die benachbarten Felder gerade, und die Eckfelder wieder ungerade. Dann wäre die Summe ungerade und somit sicher nicht 500. Also können wir auch 55 ausschließen.

    Somit kann nur noch **56 im mittleren Feld** stehen.

    Wenn man mathematisch genau sein will, gibt man auch an dieser Stelle wieder ein Beispiel an, dass 56 auch tatsächlich im mittleren Feld stehen kann – es könnte ja auch sein, dass die Angabe falsch ist und es überhaupt keine Zahl gibt, die alle geforderten Bedingungen erfüllt. Glücklicherweise finden wir aber schnell das folgende Beispiel:

56	55	56
55	56	55
56	55	56

28. Der einzige Trick bei diesem Beispiel besteht darin, nur nicht zu lange zu versuchen, es elegant zu lösen, sondern einfach die notwendigen Fallunterscheidungen durchzuackern. (Wenn irgendetwas in Betragsstrichen steht, bietet es sich immer an, zwei Fälle zu betrachten, einen, in dem der Wert dazwischen positiv ist, und einen, in dem er negativ ist.)

    Wenn y positiv ist, dann ist $|y| - y = 0$, also folgt aus der zweiten Gleichung $x + |y| - y = 10$, dass $x = 10$ gelten muss. Dann folgt aus der ersten Gleichung $|x| + x + y = 5$ durch Einsetzen aber $10 + 10 + y = 5$ und daher $y = -15$, ein Widerspruch dazu, dass y positiv ist.

    Also muss y negativ sein. Wenn x ebenfalls negativ wäre, würde aus der ersten Gleichung $|x| + x + y = 5$ folgen, dass $y = 5$ ist, ein Widerspruch dazu, dass wir bereits wissen, dass y negativ sein muss.

    Also muss x positiv und y nach wie vor negativ sein. Dann vereinfachen sich die Gleichungen zu $2x+y = 5$ und $x - 2y = 10$. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 2 und addieren beide, sodass wir $4x + 2y + x - 2y = 10 + 10$ erhalten, vereinfacht also $5x = 20$ und somit $x = 4$. Es folgt aus $x - 2y = 10$ weiters $y = -3$.

    Für die Summe gilt daher $\mathbf{x + y = 1}$.

29. Zunächst überlegen wir, welche dreiziffrigen Zweierpotenzen es überhaupt gibt, und finden $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ und $2^9 = 512$. Wenn man eine solche Zweierpotenz 2^X auf irgendeine Art und Weise als Y^Z darstellen will, so muss Y selbst eine Zweierpotenz und Z ein Teiler von X sein. Beispielsweise lässt sich 2^8 also als 2^8, als 4^4, als 16^2 oder als 256^1 darstellen. Für diese Aufgabe werden wir für jede dieser möglichen Darstellungen versuchen, Werte für A, B und C zu finden, sodass der Klammerausdruck $(A + B) = Y$ und die Hochzahl $C = Z$ ist.

    Weiters ist zu beachten, dass A, B und C Ziffern einer dreiziffrigen Zahl sein müssen, das heißt es muss insbesondere gelten, dass $0 \leq A, B, C \leq 9$ und dass $A \neq 0$.

    - Fall 2^7: Da 7 eine Primzahl ist, gibt es nur die Darstellungsmöglichkeiten 2^7 oder 128^1.
        - Darstellung 2^7: Hier gilt auf jeden Fall $C = 7$. Weiters muss gelten $A + B = 2$. Dafür gibt es die Möglichkeiten $A = B = 1$ und $A = 2$, $B = 0$, insgesamt also die Zahlen 117 und 207.
        - Darstellung 128^1: Wir bräuchten $A + B = 128$, aber da die Ziffern höchstens 9 sein können, ist das natürlich nicht möglich.
    - Fall 2^8:
        - Darstellung 2^8: Hier gilt $C = 8$. Weiters muss gelten $A+B = 2$. Dafür gibt es dieselben Möglichkeiten wie im Fall 2^7, womit wir die Zahlen 118 und 208 erhalten.
        - Darstellung 4^4: Hier gilt $C = 4$. Weiters muss gelten $A + B = 4$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 404, 314, 224, 134.
        - Darstellung 16^2: Hier gilt $C = 2$. Weiters muss gelten $A+B = 16$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 972, 882, 792.
        - Darstellung 256^1: Wir bräuchten $A + B = 256$, aber da die Ziffern höchstens 9 sein können, ist das natürlich nicht möglich.
    - Fall 2^9:
        - Darstellung 2^9: Hier gilt $C = 9$. Weiters muss gelten $A + B = 2$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 119 und 209.
        - Darstellung 8^3: Hier gilt $C = 3$. Weiters muss gelten $A + B = 8$. Dafür gibt es die Möglichkeiten 803, 713, 623, 533, 443, 353, 263, 173.
        - Darstellung 512^1: Wir bräuchten $A + B = 512$, aber da die Ziffern höchstens 9 sein können, ist das natürlich nicht möglich.

    Alles in allem haben wir **21 Möglichkeiten** gefunden.

30. Wir betrachten **alle(!)** möglichen Verteilungen von Edlen und Lügnern auf der Insel, die die geforderten Bedingungen erfüllen. Wenn wir gewissenhaft alle überhaupt möglichen Verteilungen finden, dann beschreibt diejenige davon, in der es die meisten Edlen gibt, wieviele Edle es höchstens geben kann.

    Zunächst einmal betrachten wir, was passiert, wenn beim Bankett nur Lügner sitzen. Dann hat einmal jeder von ihnen mit seiner Aussage sicher gelogen, also ist diese Bedingung erfüllt. Es müssen mindestens 1001 Personen beim Bankett sitzen (wobei auch alle 2017 beim Bankett sitzen können). Die restlichen Personen auf der Insel können alle entweder Edle oder Lügner sein, da es hier keine weiteren Einschränkungen mehr gibt. Unter all diesen Konfigurationen hat also diejenige die meisten Edlen, bei der möglichst wenig Leute beim Bankett sitzen, und alle anderen Edle sind. Das wären dann $2017 - 1001 = 1016$ Edle.

Nun überlegen wir, was passiert, wenn auch nur ein einziger Edler beim Bankett sitzt. Nennen wir diesen Edlen Arthur. Dieser sagt, er sitzt neben einem Edlen und einem Lügner, und da er ja die Wahrheit sagt, muss das auch so sein. Sein edler Nachbar Lancelot macht dieselbe Aussage. Für Lancelot ist Arthur der edle Nachbar, also muss Lancelots anderer Nachbar ein Lügner sein.

Dieser Lügner, Mordred, behauptet ebenfalls, er würde neben einem Edlen und einem Lügner sitzen. Neben einem Edlen sitzt er sicher, nämlich neben Lancelot. Wenn sein anderer Nachbar ein Lügner wäre, dann hätte Mordred versehentlich die Wahrheit gesagt! Das kann nicht sein, also muss Mordred zwischen zwei Edlen sitzen.

Für Mordreds zweiten edlen Nachbarn gilt nun aber wieder dasselbe Argument wie für Arthur, und für dessen Nachbar wieder dieselbe Überlegung wie für Lancelot, und für diesen wieder dieselbe wie für Mordred, und so weiter und so fort. Rund um den Tisch sitzen also immer abwechselnd zwei Edle und ein Lügner, dann wieder zwei Edle und ein Lügner, und so weiter.

Das heißt weiters, dass die Anzahl der Personen beim Bankett durch 3 teilbar sein muss. Es können also $1002, 1005, 1008, \ldots,$ oder 2016 beim Bankett sitzen. Wie zuvor können alle anderen Personen ganz frei entscheiden, ob sie Edle oder Lügner sind.

Unter all diesen Konfigurationen findet man also die meisten Edlen, wenn möglichst wenig Leute beim Bankett sitzen – also 1002, davon sind zwei Drittel Edle – und alle, die nicht am Bankett teilnehmen, Edle sind. In diesem Fall gibt es also $\frac{2}{3} \cdot 1002 + (2017 - 1002) =$ **1683 Edle**.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Kategorie: Felix, Schulstufe: 1 – 2

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

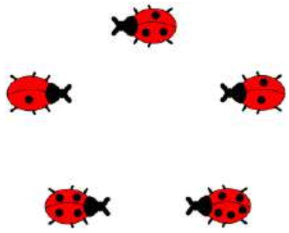
11	12	13	14	15

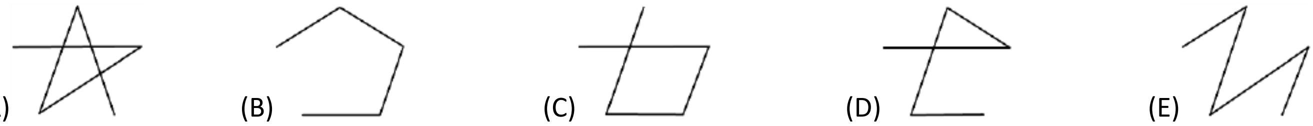
Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018

– 3 Punkte Beispiele –

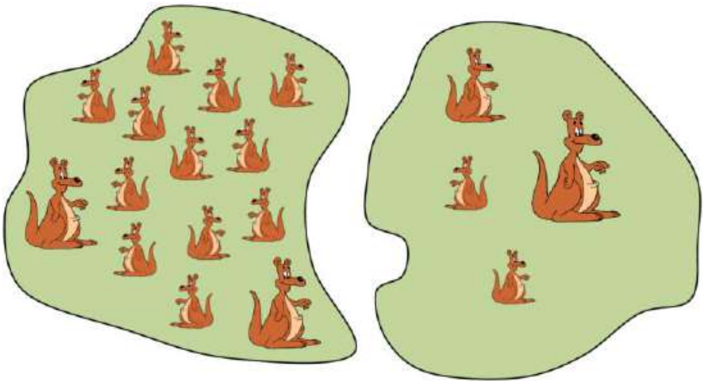
1. Alice zeichnet Linien zwischen den Käfern. Sie startet mit dem Käfer, der die wenigsten Punkte hat. Dann zeichnet sie immer weiter zu dem Käfer mit einem Punkt mehr. Welche Figur entsteht?





(A) (B) (C) (D) (E)

2. In beiden Parks sollen gleich viele Kängurus sein. Wie viele Kängurus müssen dafür vom linken Park in den rechten Park übersiedelt werden?

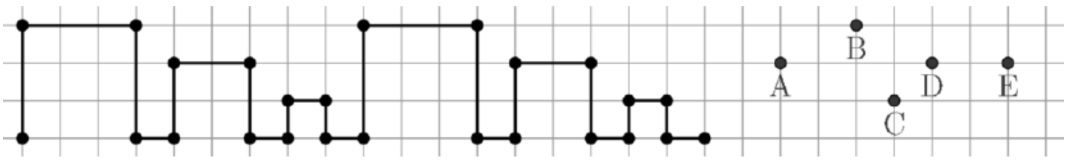


(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

3. Welcher Käfer muss wegfliegen, damit die restlichen Käfer zusammen genau 20 Punkte haben?

(A) Käfer mit 4 Punkten (B) Käfer mit 7 Punkten (C) Käfer mit 5 Punkten (D) Käfer mit 6 Punkten (E) kein Käfer

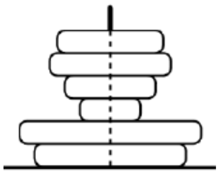
4. Peter hat dieses Muster gemalt:



Er malt genau das gleiche Muster noch einmal.
Welcher Punkt liegt auf seiner Zeichnung?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

5. Theodor hat diesen Turm aus Scheiben gebaut. Er schaut den Turm von oben an.
Wie viele Scheiben sieht er?



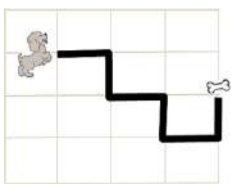
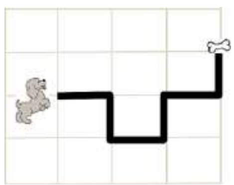
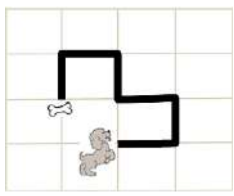
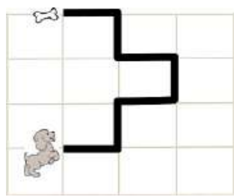
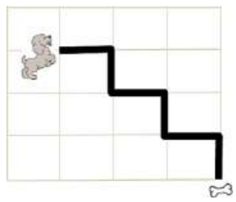
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

– 4 Punkte Beispiele –

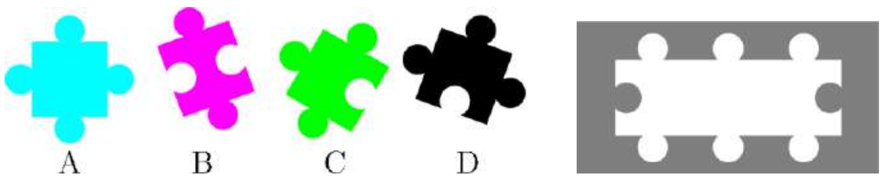
6. Hier sind zwei durchsichtige Folien abgebildet. Du legst die Folien übereinander.
Welches Muster erhältst du?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Um zu seinem Knochen zu gelangen, muss der Hund der schwarzen Linie folgen. Er biegt insgesamt 3-mal rechts und 2-mal links ab.
Welchen Weg nimmt er?

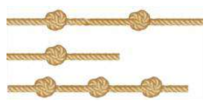
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8. Lisa benötigt genau 3 Teile, um ihr Puzzle fertigzustellen.
Welches der 4 Teile bleibt übrig?

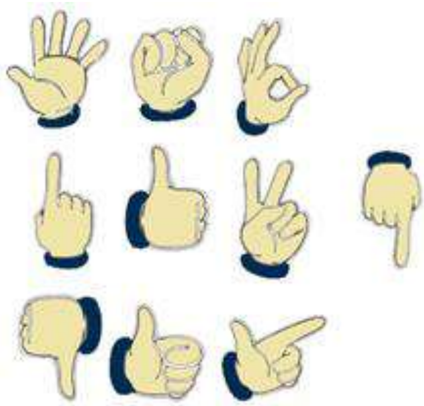


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) C oder D

9. Charles schneidet ein Seil in 3 gleich lange Teile. Dann macht er in einen Teil einen Knoten, in den nächsten 2 und in den dritten Teil 3 Knoten. Anschließend legt er die 3 Teile in einer beliebigen Reihenfolge auf.
Welches Bild sieht er?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

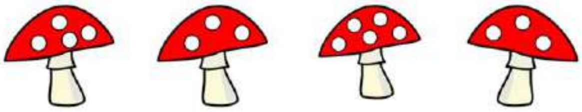
10. Wie viele der abgebildeten Hände zeigen eine rechte Hand?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

– 5 Punkte Beispiele –

11. Die Anzahl der Punkte auf den Fliegenpilzen zeigt, wie viele Zwerge darunter Platz haben. Wir sehen eine Seite der Pilze. Die andere Seite hat gleich viele Punkte. Bei Regen suchen 36 Zwerge Zuflucht unter den Pilzen.
Wie viele Zwerge werden nass?

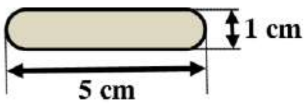


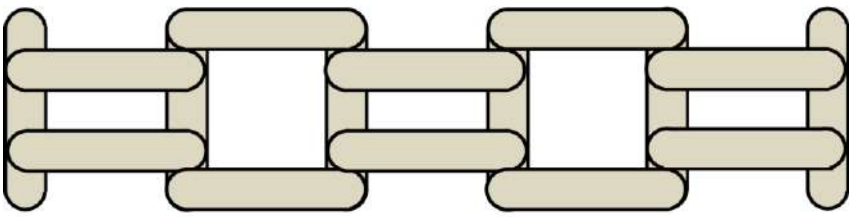
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. Du bildest zweistellige Zahlen mit den Ziffern 2, 0, 1 oder 8. Diese müssen größer als 10 und kleiner als 25 sein. Jede Zahl besteht aus zwei verschiedenen Ziffern.
Wie viele verschiedene Zahlen erhältst du?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

13. Alice hat 3 weiße, 2 schwarze und 2 graue Zettel. Zuerst schneidet sie jeden Zettel, der nicht schwarz ist, in zwei Teile. Dann halbiert sie jeden Zettel, der nicht weiß ist.
Wie viele Papierstücke erhält sie insgesamt?
(A) 14 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 20

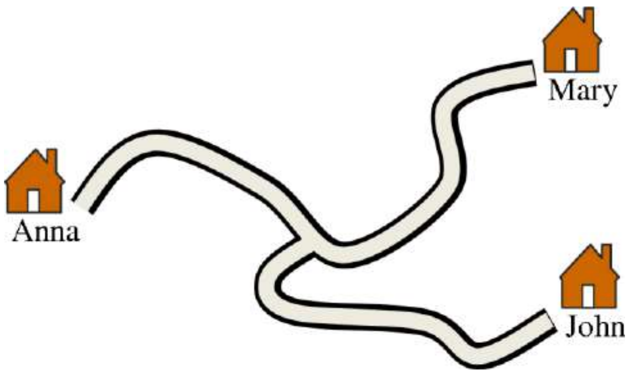
14. Susi legt mit Eisstäbchen dieses Muster. Jedes Stäbchen ist 5 cm lang und 1 cm breit.
Wie lange ist Susis Muster?





(A) 20 cm (B) 21 cm (C) 22 cm (D) 23 cm (E) 25 cm

15. Die Straße von Annas zu Marys Haus ist 16 km lang. Die Straße von Marys zu Johns Haus ist 20 km lang. Die Straße von der Kreuzung zu Marys Haus ist 9 km lang.
Wie lange ist die Straße von Annas zu Johns Haus?



(A) 7 km (B) 9 km (C) 11 km (D) 16 km (E) 18 km

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Level: Felix, Grade: 1 – 2

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
15 starting points
Each correct answer to questions 1. – 5.: 3 Points
Each correct answer to questions 6. – 10.: 4 Points
Each correct answer to questions 11. – 15.: 5 Points
Each question left unanswered: 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for this question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 15). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

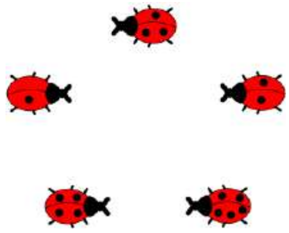
11	12	13	14	15

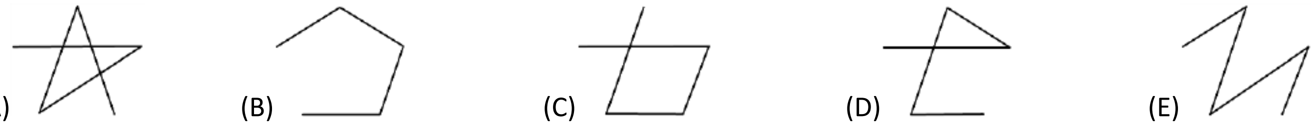
Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2018
Level Felix (Grade 1 and 2)
Austria – 15. 3. 2018

– 3 Point Examples –

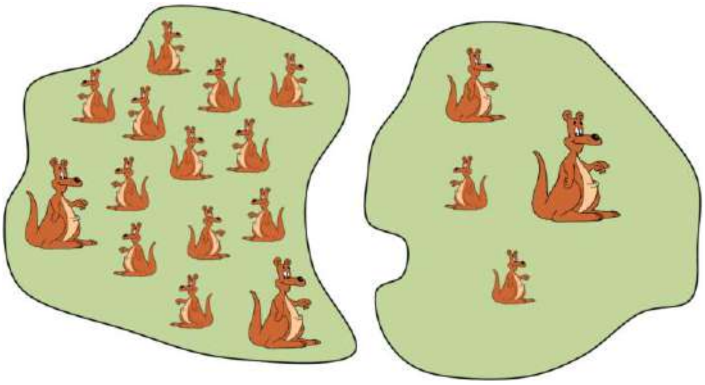
1. Alice draws lines between the beetles. She starts with the beetle with the fewest points. Then she continues drawing to the beetle with one more point.
Which figure is formed?





(A) (B) (C) (D) (E)

2. The same amount of kangaroos should be in both parks. How many kangaroos have to be moved from the left park to the right park for that to happen?

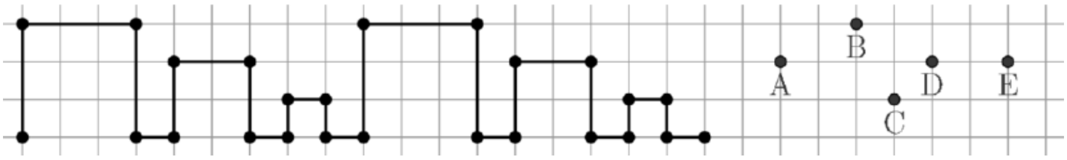


(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

3. Which beetle has to fly away so that the remaining beetles have 20 dots altogether?

(A) Beetle with 4 points (B) Beetle with 7 points (C) Beetle with 5 points (D) Beetle with 6 points (E) no beetle

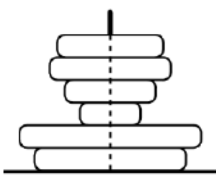
4. Peter has drawn this pattern:



He draws exactly the same pattern once more.
Which point is on his drawing?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

5. Theodor has built this tower made up of discs. He looks at the tower from above.
How many discs does he see?



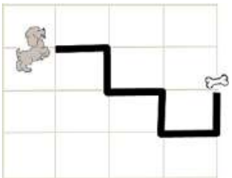
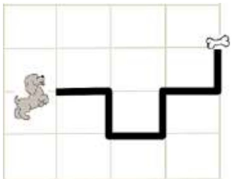
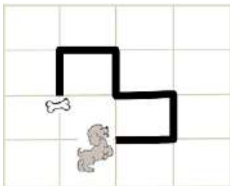
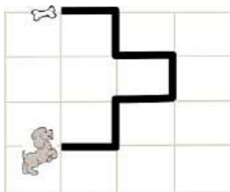
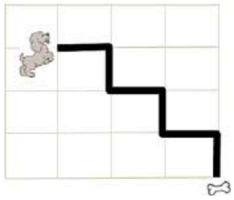
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4 Point Examples

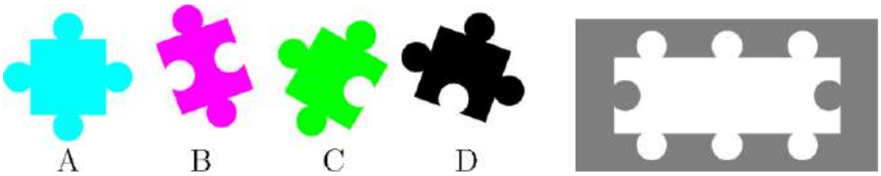
6. This diagram shows two see-through sheets. You place the sheets on top of each other.
Which pattern do you get?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. In order to get to his bone, the dog has to follow the black line. In total he turns 3-times to the right and 2-times to the left.
Which path does he take?

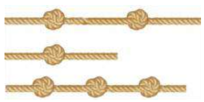
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8. Lisa needs exactly 3 pieces to complete her jigsaw.
Which of the 4 pieces is left over?

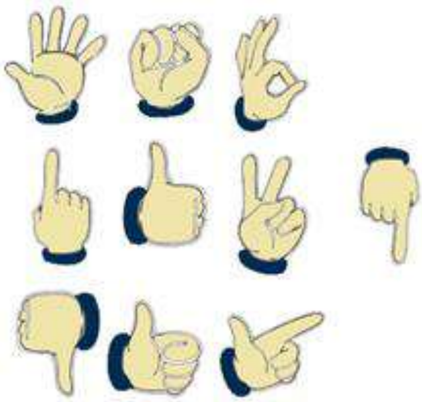


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) C or D

9. Charles cuts a rope into 3 equally long pieces. Then he makes one knot in one of the pieces, 2 in the next and in the third piece 3 knots. Then he lays the three pieces down in a random order.
Which picture does he see?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

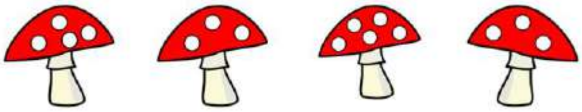
10. How many of the hands pictured show a right hand?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

– 5 Point Examples –

11. The number of spots on the fly agarics (toadstools) shows how many dwarfs fit under it. We can see one side of the fungi. The other side has the same amount of spots. When it rains 36 dwarfs are trying to hide under the fungi. How many dwarfs get wet?

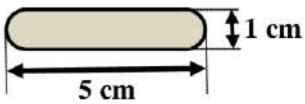


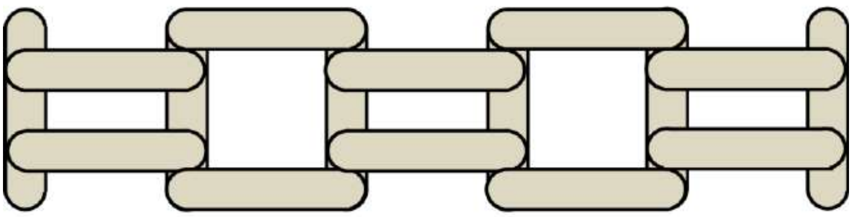
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

12. You are forming two-digit numbers using the digits 2, 0, 1 or 8. They have to be bigger than 10 and smaller than 25. Every number is made up of two different digits.
How many different numbers to you get?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

13. Alice has 3 white, 2 black and 2 grey pieces of paper. First she cuts every piece of paper that is not black into two pieces. Then she halves every piece of paper that is not white.
How many pieces of paper does she obtain in total?
(A) 14 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 20

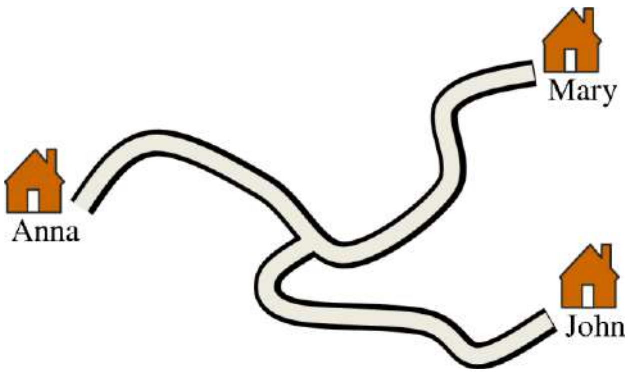
14. Susi makes this pattern using ice-lolly sticks. Each stick is 5 cm long and 1 cm wide.
How long is Susi's pattern?





(A) 20 cm (B) 21 cm (C) 22 cm (D) 23 cm (E) 25 cm

15. The road from Anna's to Mary's house is 16 km long. The road from Mary's to John's house is 20 km long. The road from the crossing to Mary's house is 9 km long.
How long is the road from Anna's to John's house?



(A) 7 km (B) 9 km (C) 11 km (D) 16 km (E) 18 km

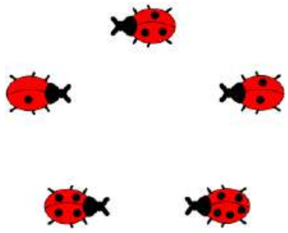
Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018

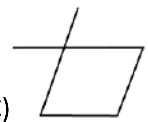
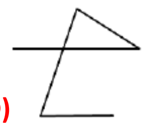
Lösungsvektor

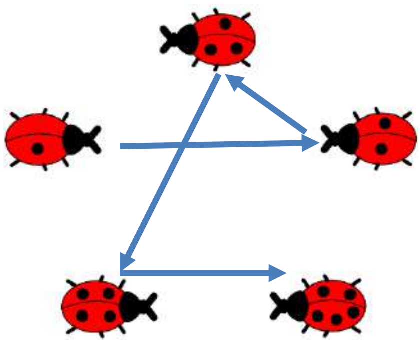
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	B	B	D	C	D	E	A	B	C	E	A	D	B	E

3 Punkte Beispiele

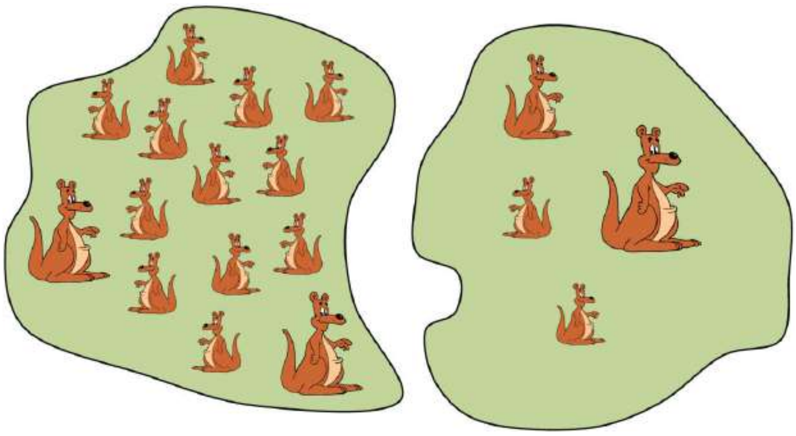
1. Alice zeichnet Linien zwischen den Käfern. Sie startet mit dem Käfer, der die wenigsten Punkte hat. Dann zeichnet sie immer weiter zu dem Käfer mit einem Punkt mehr.
Welche Figur entsteht?



(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 



2. In beiden Parks sollen gleich viele Kängurus sein. Wie viele Kängurus müssen dafür vom linken Park in den rechten Park übersiedelt werden?



(A) 4 **(B) 5** (C) 6 (D) 8 (E) 9

Im linken Park sind 14 Kängurus, im rechten 4.
14 – 4 = 10, daher müssen 5 Kängurus übersiedeln.

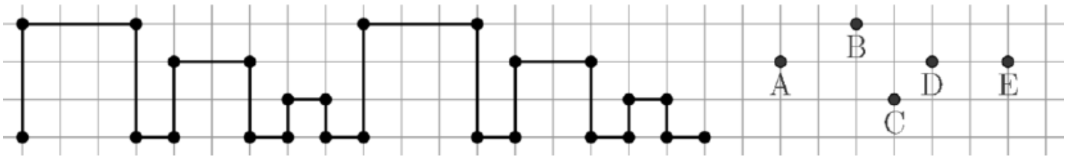
3. Welcher Käfer muss wegfliegen, damit die restlichen Käfer zusammen genau 20 Punkte haben?

(A) Käfer mit 4 Punkten **(B) Käfer mit 7 Punkten** (C) Käfer mit 5 Punkten (D) Käfer mit 6 Punkten (E) kein Käfer

5 + 7 + 5 + 6 + 4 = 27

Miteinander haben sie 27 Punkte. 27 – 20 = 7.
Somit muss der 2. Käfer (mit 7 Punkten) wegfliegen.

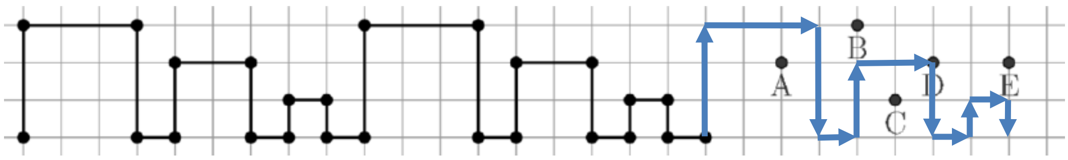
4. Peter hat dieses Muster gemalt:



Er malt genau das gleiche Muster noch einmal.
Welcher Punkt liegt auf seiner Zeichnung?

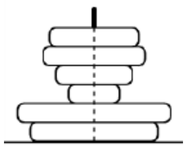
(A) A (B) B (C) C **(D) D** (E) E

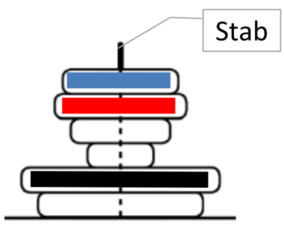
Wenn Peter das gleiche Muster noch einmal zeichnet, liegt der Punkt D auf dem Linienzug.



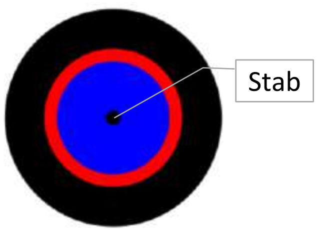
5. Theodor hat diesen Turm aus Scheiben gebaut. Er schaut den Turm von oben an.
Wie viele Scheiben sieht er?

(A) 1(B) 2 **(C) 3** (D) 4 (E) 5

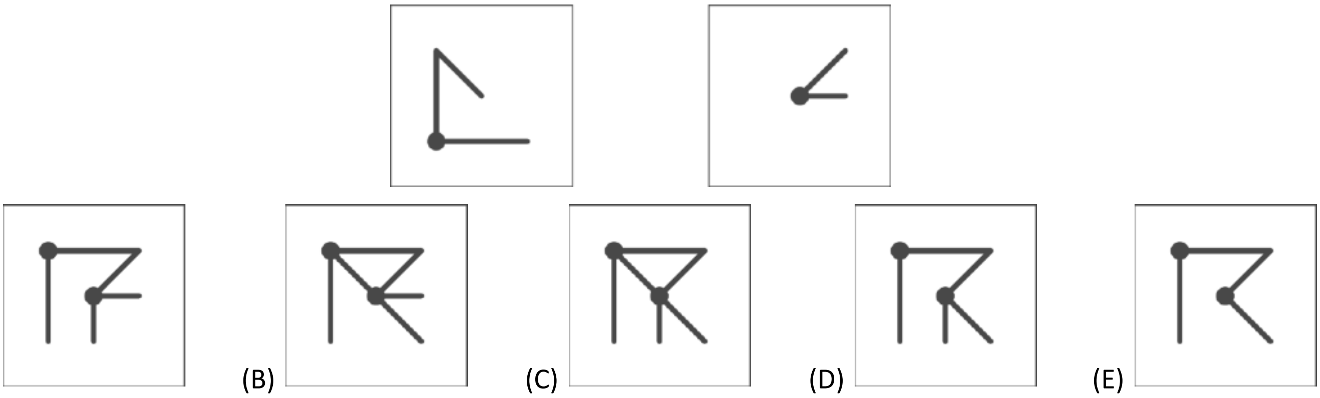




Ansicht von oben:

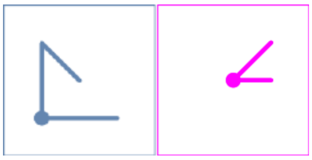


6. Hier sind zwei durchsichtige Folien abgebildet. Du legst die Folien übereinander.
Welches Muster erhältst du?



(A) (B) (C) (D) (E)

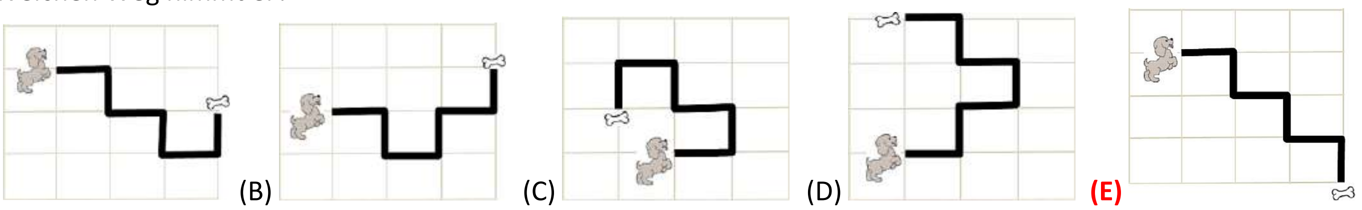
Wir schieben die Folien übereinander:



Dann erhalten wir diese Figur.

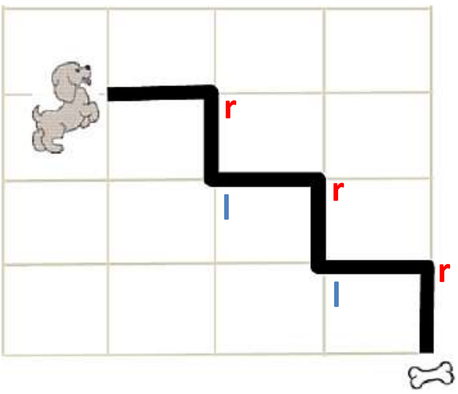
Nun drehen wir die Figur:

7. Um zu seinem Knochen zu gelangen, muss der Hund der schwarzen Linie folgen. Er biegt insgesamt 3-mal rechts und 2-mal links ab.
Welchen Weg nimmt er?

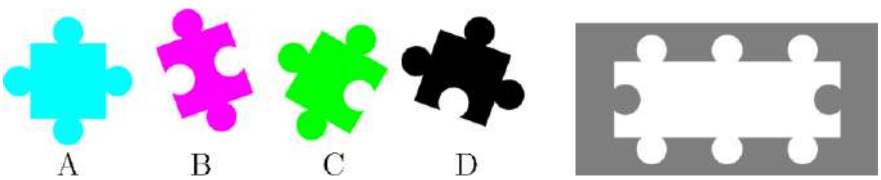


(A) (B) (C) (D) **(E)**

r … rechts
l … links



8. Lisa benötigt genau 3 Teile, um ihr Puzzle fertigzustellen.
Welches der 4 Teile bleibt übrig?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) C oder D

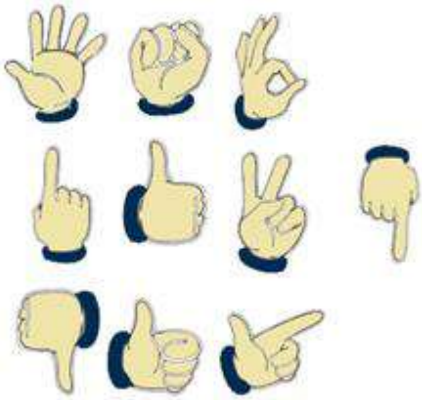
Wir legen Teil B in die Mitte und sehen, dass rechts und links die Teile C und D hineinpassen.

9. Charles schneidet ein Seil in 3 gleich lange Teile. Dann macht er in einen Teil einen Knoten, in den nächsten 2 und in den dritten Teil 3 Knoten. Anschließend legt er die 3 Teile in einer beliebigen Reihenfolge auf.
Welches Bild sieht er?

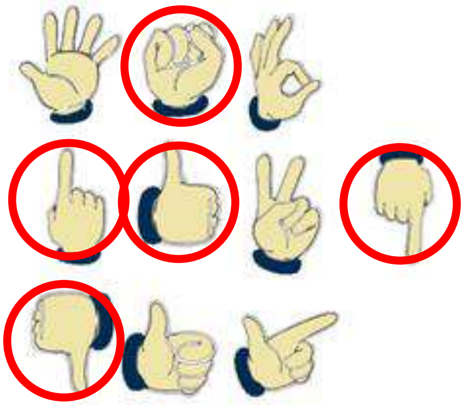
(A) **(B)** (C) (D) (E)

Wenn man in ein Seil einen Knoten macht, wird das Seil kürzer.
Das Seil mit einem Knoten ist am längsten, das mit 2 Knoten „mittellang“, das mit 3 Knoten am kürzesten.

10. Wie viele der abgebildeten Hände zeigen eine rechte Hand?

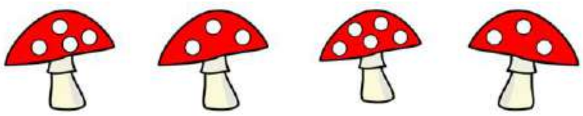


(A) 3 (B) 4 **(C) 5** (D) 6 (E) 7

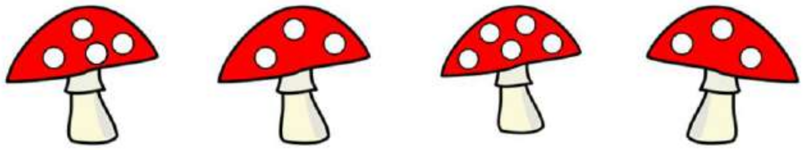


5 Punkte Beispiele

11. Die Anzahl der Punkte auf den Fliegenpilzen zeigt, wie viele Zwerge darunter Platz haben. Wir sehen eine Seite der Pilze. Die andere Seite hat gleich viele Punkte. Bei Regen suchen 36 Zwerge Zuflucht unter den Pilzen.
Wie viele Zwerge werden nass?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 **(E) 6**



Unter diesem Pilz haben 8 6 10 6 Zwerge Platz.
Also können sich 8 + 6 + 10 + 6 = 30 Zwerge unterstellen.
36 – 30 = 6 Zwerge werden nass.

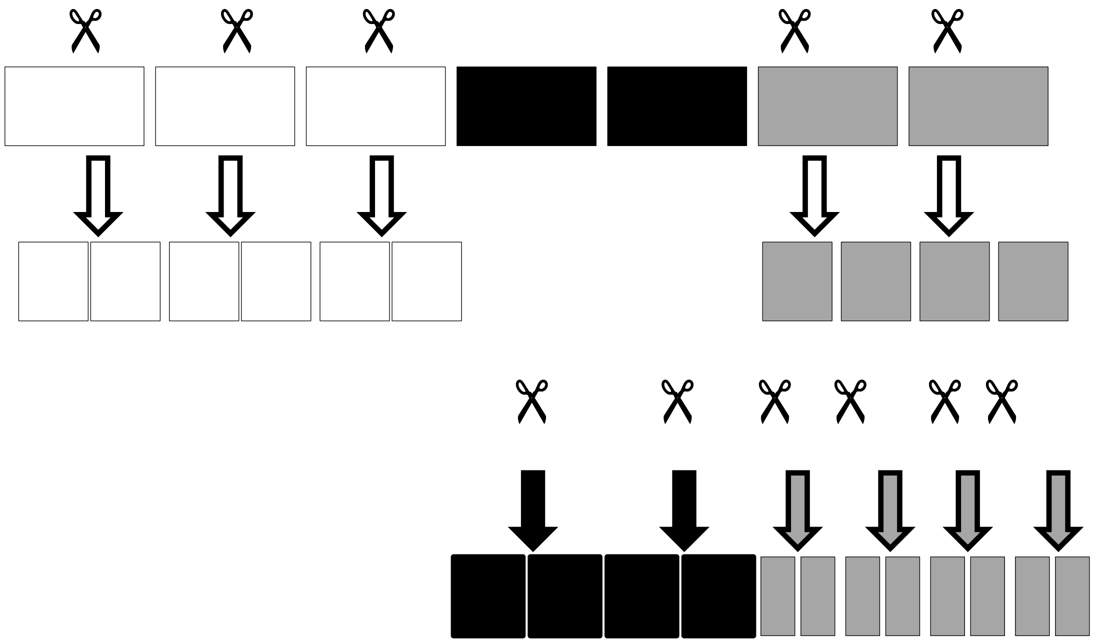
12. Du bildest zweistellige Zahlen mit den Ziffern 2, 0, 1 oder 8. Diese müssen größer als 10 und kleiner als 25 sein.
Jede Zahl besteht aus zwei verschiedenen Ziffern.
Wie viele verschiedene Zahlen erhältst du?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Folgende zweistellige Zahlen können mit diesen Ziffern gebildet werden:

20 ~~02~~ 12 ~~82~~
21 ~~01~~ ~~10~~ ~~80~~
~~28~~ ~~08~~ 18 ~~81~~

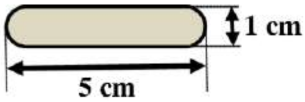
Die durchgestrichenen Zahlen sind nicht erlaubt. 4 Zahlen bleiben über.

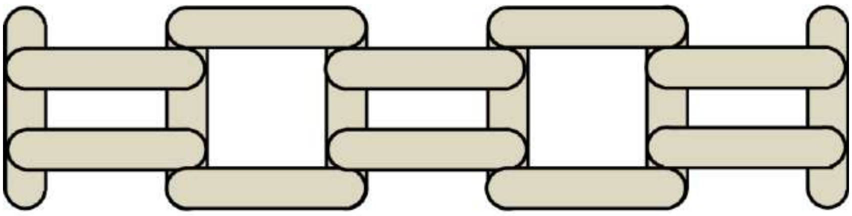
13. Alice hat 3 weiße, 2 schwarze und 2 graue Zettel. Zuerst schneidet sie jeden Zettel, der nicht schwarz ist, in zwei Teile. Dann halbiert sie jeden Zettel, der nicht weiß ist.
Wie viele Papierstücke erhält sie insgesamt?
(A) 14 (B) 16 (C) 17 **(D) 18** (E) 20



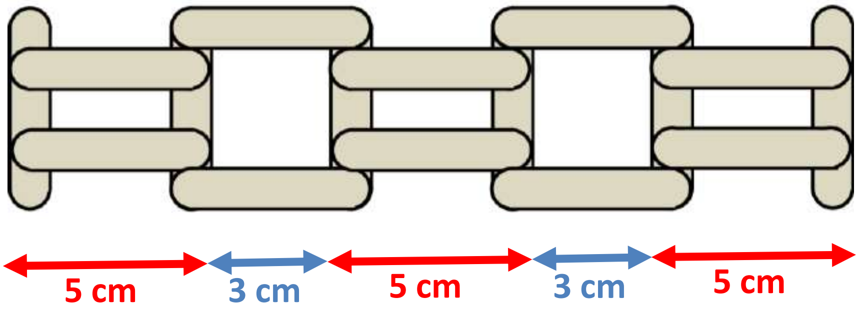
Alice erhält 6 weiße Zettel, 4 schwarze Zettel und 8 graue Zettel. Sie hat insgesamt 18 Zettel.

14. Susi legt mit Eisstäbchen dieses Muster. Jedes Stäbchen ist 5 cm lang und 1 cm breit.
Wie lange ist Susis Muster?



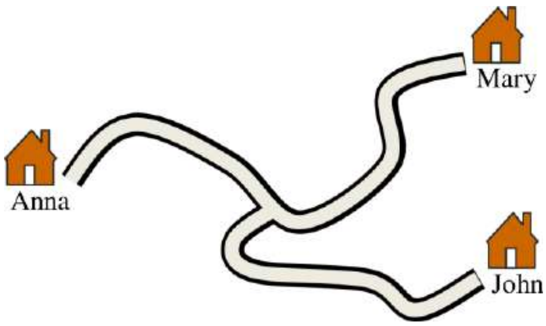


(A) 20 cm (B) 21 cm (C) 22 cm (D) 23 cm (E) 25 cm



5 + 3 + 5 + 3 +5 = 21 cm

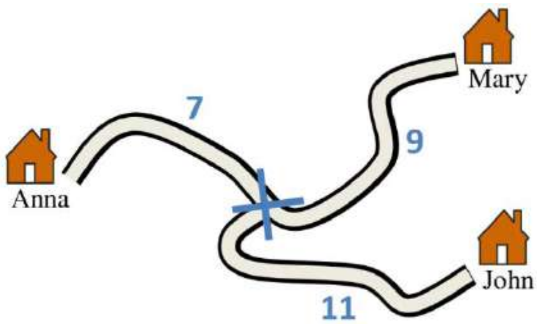
15. Die Straße von Annas zu Marys Haus ist 16 km lang. Die Straße von Marys zu Johns Haus ist 20 km lang.
Die Straße von der Kreuzung zu Marys Haus ist 9 km lang.
Wie lange ist die Straße von Annas zu Johns Haus?



(A) 7 km (B) 9 km (C) 11 km (D) 16 km (E) 18 km

16 – 9 = 7
20 – 9 = 11

11 + 7 = 18



Die Straße von Annas zu Johns Haus ist 18 km lang.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Kategorie: Ecolier, Schulstufe: 3 – 4

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.

jede richtige Antwort Beispiel	1. – 8.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel	9. – 16.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel	17. – 24.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:		0 Punkte

jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

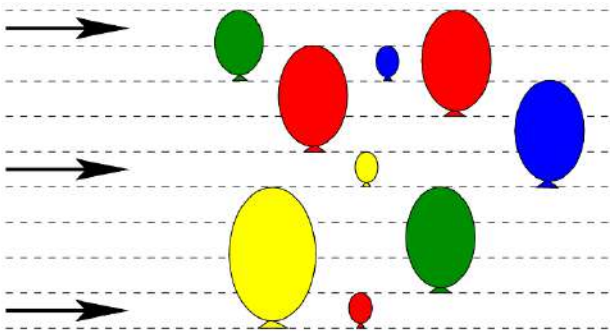
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018

- 3 Punkte Beispiele -

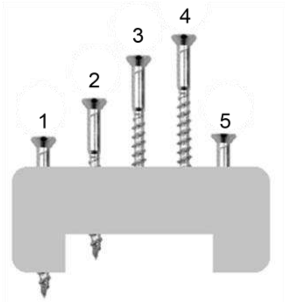
1. Im Bild siehst du 3 Pfeile, die auf 9 fixierte Luftballons fliegen. Wenn ein Pfeil einen Ballon trifft, platzt dieser, und der Pfeil fliegt in derselben Richtung weiter. Wie viele Luftballons werden von den Pfeilen getroffen?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

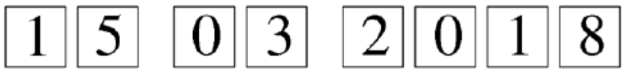
2. Susanne ist 6 Jahre alt. Ihre Schwester Lisa ist 2 Jahre jünger. Bruder Max ist 2 Jahre älter als Susanne. Wie alt sind die 3 Geschwister zusammen?
(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

3. Im Bild siehst du einen Holzblock mit 5 Schrauben. 4 davon sind gleich lang, eine Schraube ist kürzer.
Welche ist die kürzere Schraube?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Leonie hat für die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 je einen Stempel.
Sie stempelt damit das Datum des Känguru-Bewerbes.
Wie viele dieser Stempel verwendet Leonie dafür?



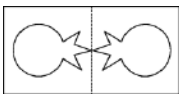
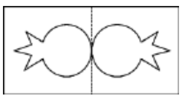
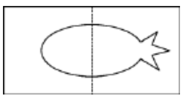
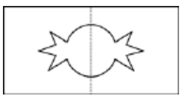
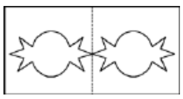
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9 (E) 10

5. Rechts siehst du ein Bild vom Marienkäfer Sophie.
Sophie dreht sich.
Welches der unten gezeigten Bilder ist nicht Sophie?

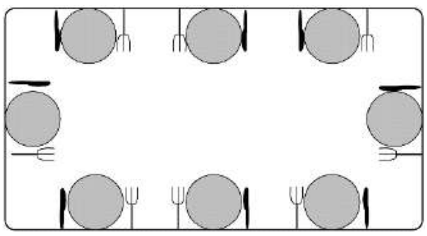
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Lucy faltet ein Blatt Papier genau in der Mitte zusammen und schneidet dann eine Figur heraus:

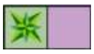
Danach faltet sie das Papier wieder auf.
Welches der fünf Bilder sieht sie?

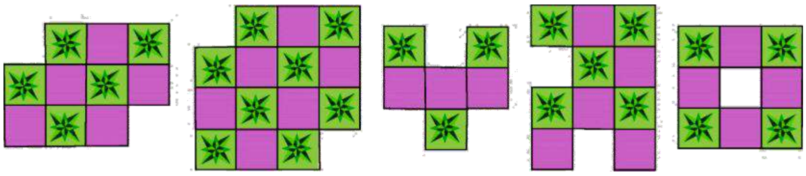
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Mike deckt den Tisch für 8 Personen: Die Gabel muss links und das Messer rechts vom Teller liegen.



Für wie viele Personen ist das Besteck richtig aufgedeckt?
(A) 5 (B) 4 (C) 6 (D) 2 (E) 3

8. Robert legt mit diesen Fliesen  verschiedene Muster.
Wie viele der unten gezeigten Muster kann er legen?

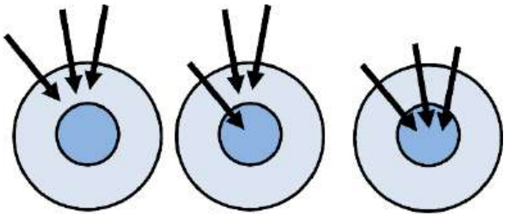


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Punkte Beispiele -

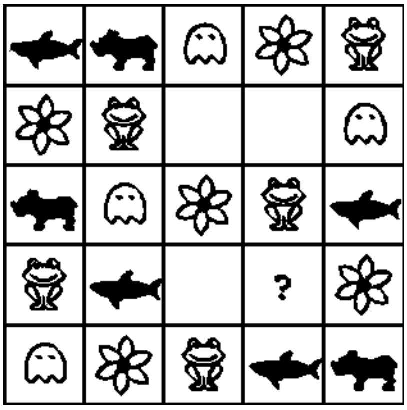
9. Diana schießt dreimal 3 Pfeile auf eine Scheibe mit zwei Feldern.
Beim ersten Mal erreicht sie 12 Punkte, beim zweiten Mal 15.
Die Anzahl der Punkte hängt davon ab, welches Feld sie getroffen hat.

Wie viele Punkte erreicht sie beim dritten Mal?
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22



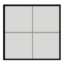
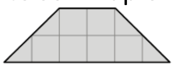
12 Punkte **15 Punkte** **?**

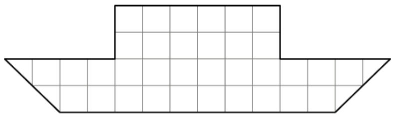
10.



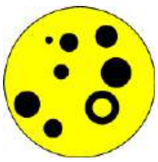
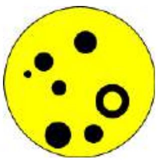
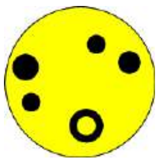
Albert legt diese 5 Figuren  auf das 5x5-Feld.
Jede Figur darf pro Spalte und je Zeile nur genau einmal vorkommen.

Welche Figur muss Albert auf das Feld mit dem Fragezeichen legen?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Tom möchte sein Papierboot mit den Figuren
 und  vollständig auslegen.
Welche ist die kleinste Anzahl an Figuren, die er dafür braucht?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9



12. Die beiden Farben dieses Bildes werden vertauscht.
Dann wird das Bild gedreht.
Welches der untenstehenden Bilder erhält man?

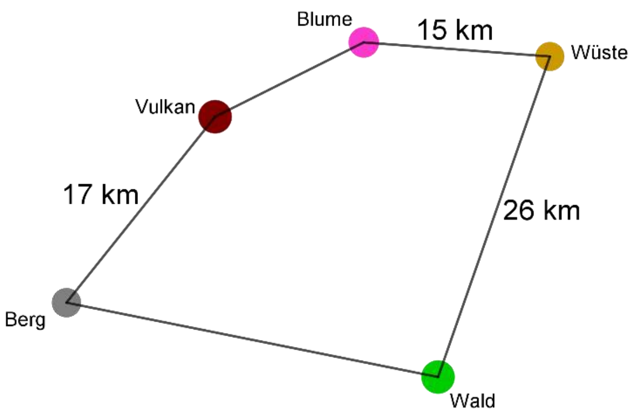
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13.

Der Hase Felix hat 20 Möhren. Jeden Tag frisst er 2 davon.
Die 12. Karotte hat er an einem Mittwoch gefressen.
An welchem Wochentag hat er mit dem Fressen der Möhren begonnen?
(A) Montag (B) Dienstag (C) Mittwoch (D) Donnerstag (E) Freitag

14. Ein Rosenstrauch hat 8 Blüten, auf denen Schmetterlinge und Libellen sitzen.
Auf jeder Blüte sitzt höchstens ein Insekt. Mehr als die Hälfte der Blüten ist besetzt.
Die Anzahl der Schmetterlinge ist doppelt so groß wie die Anzahl der Libellen.
Wie viele Schmetterlinge sitzen auf den Rosenblüten?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

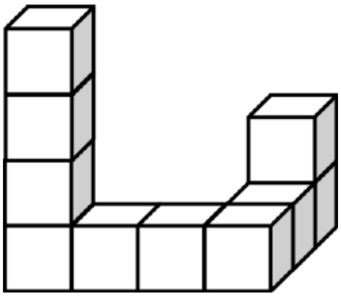
15.



Die Karte zeigt die Rundreise, die Kapitän Blaubär bei seiner Reise zurücklegt. Drei Entfernungen sind in der Karte angegeben.
Er segelt von Insel zu Insel und startet bei der Insel Berg. Insgesamt legt er 100 km zurück. Die Entfernung zwischen den Inseln Wüste und Wald ist gleich der Entfernung zwischen den Inseln Berg und Blume über Vulkan.
Wie groß ist die Entfernung zwischen Berg und Wald?

(A) 17 km (B) 23 km (C) 26 km (D) 33 km (E) 35 km

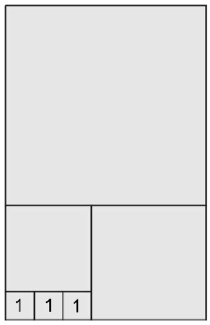
16. Tobias klebt 10 Würfel so zusammen, dass folgendes Bauwerk entsteht:
Er malt es vollständig an, auch die Unterseite.
Von wie vielen Würfeln sind dann genau 4 Seitenflächen angemalt?



(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

- 5 Punkte Beispiele -

17. Das große Rechteck besteht aus lauter Quadraten verschiedener Größe.
Jedes der drei kleinsten Quadrate hat die Fläche 1.
Wie groß ist die Fläche des gegebenen Rechtecks?



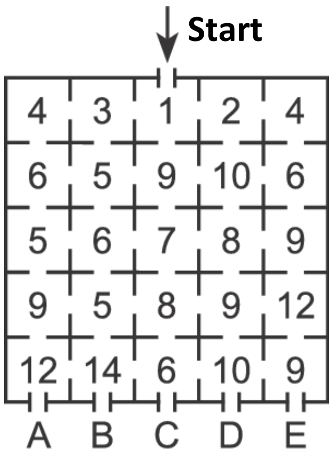
(A) 65 (B) 71 (C) 77 (D) 87 (E) 98

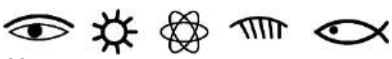
18. Um einen Drachen zu töten, muss Mathias alle seine Köpfe abschneiden. Sobald er 3 Köpfe abgeschnitten hat, wächst sofort ein neuer nach. Nachdem Mathias 13 Köpfe abgeschnitten hat, ist der Drache tot.
Wie viele Köpfe hatte der Drache ursprünglich?

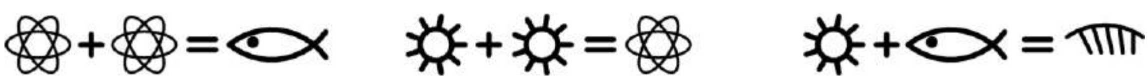
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

19. Die Zimmer in Kangas Haus sind nummeriert. Eva betritt das Haus durch den Haupteingang. Eva muss dabei so durch die Räume gehen, dass jeder Raum, den sie betritt, eine höhere Nummer hat als der vorherige.
Durch welche Tür verlässt Eva das Haus?

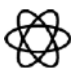
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E



20. Die Symbole  stehen für eine der Ziffern 1, 2, 3, 4 oder 5.
Man weiß, dass



Welches Symbol steht für die Ziffer 3?

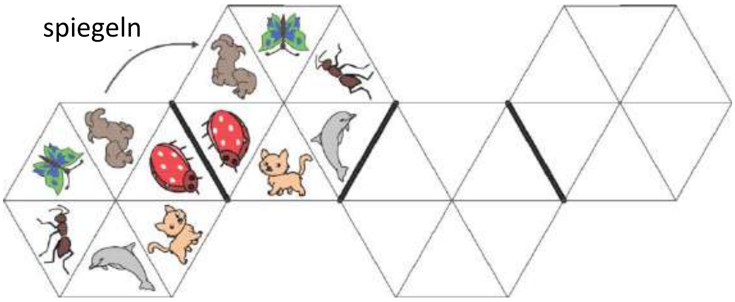
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

21. Ein Gürtel kann auf 5 verschiedene Arten zusammengesteckt werden.

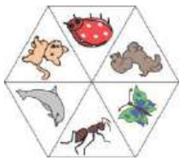
Um wie viel cm ist der Gürtel weiter, wenn man ihn nur im ersten Loch schließt, als wenn er in allen 5 Löchern befestigt wird?

(A) 4 cm (B) 8 cm (C) 10 cm (D) 16 cm (E) 20 cm

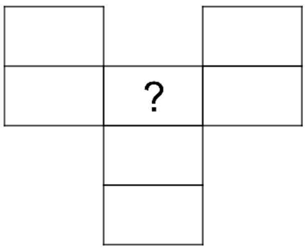
22. Eine bemalte Glasfliese wird jeweils an den fett gedruckten Kanten gespiegelt. Die erste Spiegelung ist abgebildet.



Wie sieht die Fliese ganz rechts nach der dritten Spiegelung aus?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

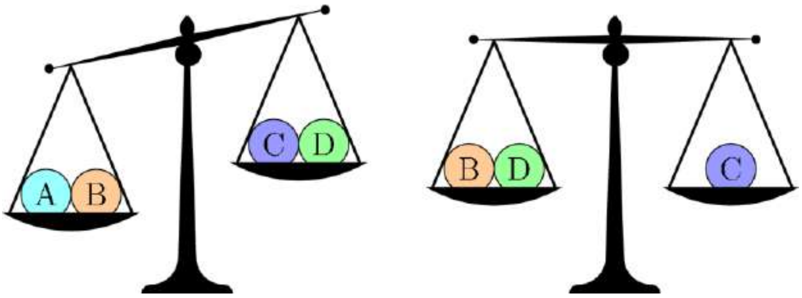
23. Lea soll die Zahlen von 1 bis 7 in die Felder der gegebenen Figur schreiben. In jedem Feld darf nur eine Zahl stehen.
Zwei aufeinander folgende Zahlen dürfen nicht in benachbarten Feldern stehen. Zwei Felder sind benachbart, wenn sie eine Seite oder eine Ecke gemeinsam haben.



Welche Zahlen kann sie in das Feld mit dem Fragezeichen schreiben?

(A) alle 7 Zahlen (B) nur ungerade Zahlen (C) nur gerade Zahlen (D) die Zahl 4 (E) die Zahlen 1 oder 7

24. Jeder der vier Bälle wiegt entweder 10 oder 20 oder 30 oder 40 Gramm.
Welcher Ball wiegt 30 Gramm?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) Es kann A oder B sein.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Level: Ecolier, Grade: 3 – 4

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
Each correct answer to questions 1. – 8.: 3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.: 4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.: 5 Points
Each question left unanswered: 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for this question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

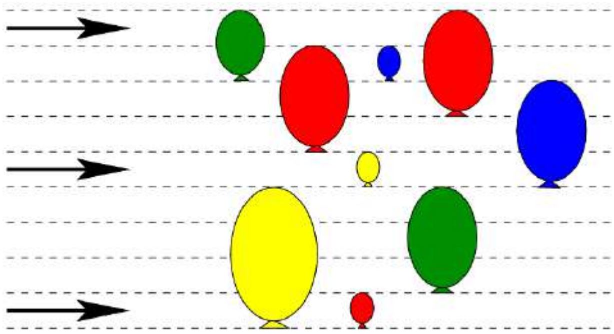
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2018
Level Ecolier (Grade 3 and 4)
Austria – 15. 3. 2018

- 3 Point Examples -

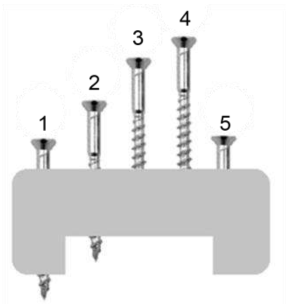
1. As seen in the diagram, 3 darts are flying towards 9 fixed balloons. If a balloon is hit by a dart, it bursts and the dart continues in the same direction it had beforehand.
How many balloons are hit by the darts?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

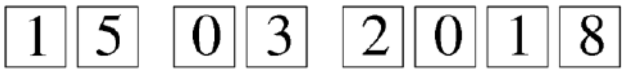
2. Susanne is 6 years old. Her sister Lisa is 2 years younger. Brother Max is 2 years older than Susanne.
How old are the 3 siblings altogether?
(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

3. The diagram shows a wooden block with 5 screws. 4 of which are equally long, one screw is shorter.
Which is the shorter screw?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Leonie has one stamp for each of the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Using them, she stamps the date of the kangaroo-competition.
How many of the stamps does Leonie use to do that?

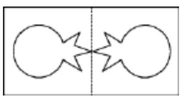
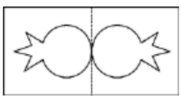
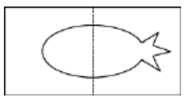
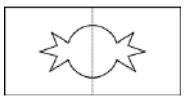
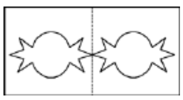


(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9 (E) 10

5. On the right you can see a picture of ladybird Sophie.
Sophie turns.
Which of the pictures below is not Sophie?

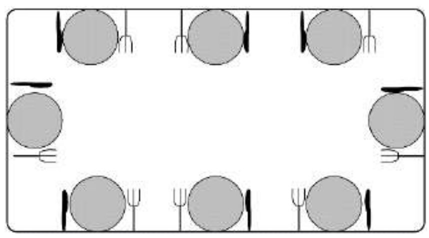
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Lucy folds a piece of paper exactly half way and then cuts out a figure:
Then she unfolds the paper again.
Which of the five pictures can she see?

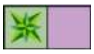
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

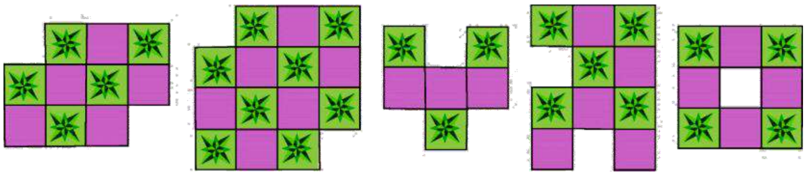
7. Mike sets the table for 8 people: The fork has to lie to the left and the knife to the right of the plate.

For how many people is the cutlery set correctly?



(A) 5 (B) 4 (C) 6 (D) 2 (E) 3

8. Using these tiles  Robert makes different patterns.
How many of the patterns shown below can he make?

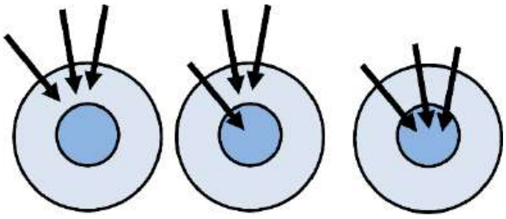


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Point Examples -

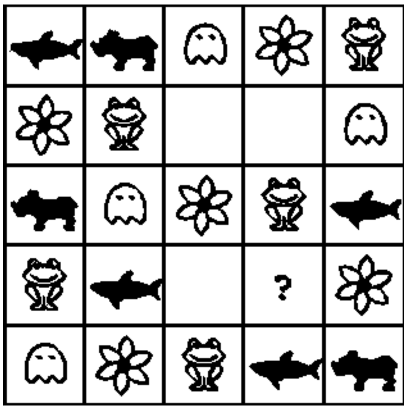
9. Diana shoots 3 darts, three times at a target board with two fields.
The first time she scores 12 points, the second time 15.
The number of points depends on which field she has hit.

How many points does she score the third time?
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22



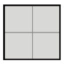
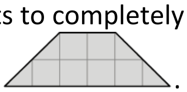
12 Points **15 Points** **?**

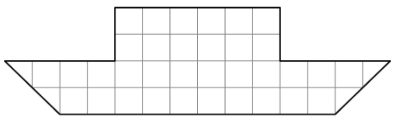
10.



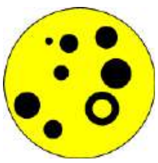
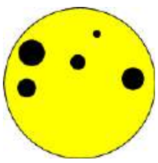
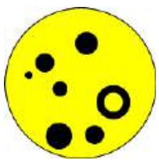
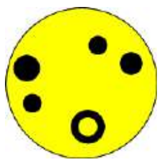
Albert places these 5 figures  on a 5x5-grid.
Each figure is only allowed to appear once in every column and in every row.

Which figure does Albert have to place on the field with the question mark?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Tom wants to completely cover his paper boat using the shapes
 and .
What is the smallest number of shapes he needs for that?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9



12. The two colours of this picture are swapped.
Then the picture is turned.
Which of the pictures below is obtained?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. 

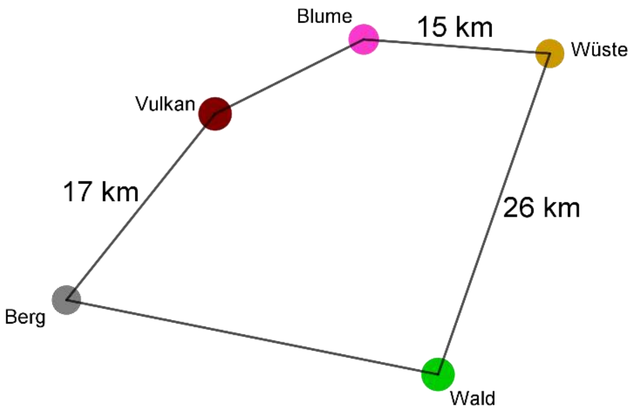
Felix the rabbit has 20 carrots. Every day he eats 2 of them.
He has eaten the 12th carrot on a Wednesday.
On which day of the week did he start eating the carrots?
(A) Monday (B) Tuesday (C) Wednesday (D) Thursday (E) Friday

14. A rose bush has 8 flowers on which butterflies and dragonflies are sitting.
On every flower there is at most one insect sitting on it. More than half of the flowers are occupied.

The number of butterflies is twice as big as the number of dragonflies.
How many butterflies are sitting on the rose blossoms?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

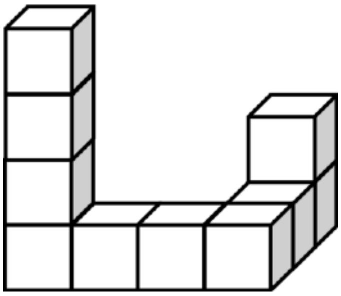
15.



The map shows the roundtrip that Captain Bluebear covers during his journey. Three distances are given on the map.
He sails from island to island and starts at the island Berg. In total he covers a distance of 100 km. The distances between the islands Wüste and Wald is equal to the distance between the islands Berg and Blume via Vulkan.
How big is the distance between Berg and Wald?

(A) 17 km (B) 23 km (C) 26 km (D) 33 km (E) 35 km

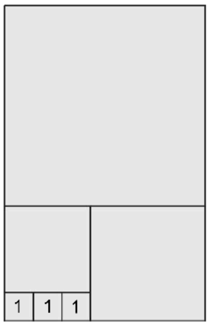
16. Tobias glues 10 cubes together so that the following object is formed:
He paints all of it, even the bottom.
How many cubes then have exactly 4 faces coloured in?



(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

- 5 Point Examples -

17. The big rectangle consists of various squares of different sizes.
Each of the three smallest squares has area 1.
How big is the area of the big rectangle?

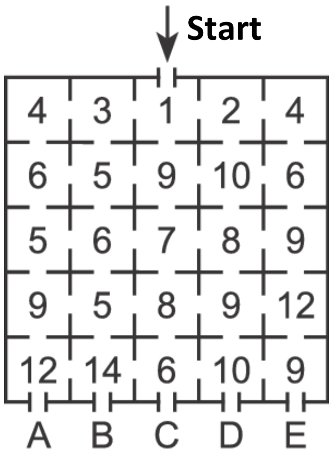


(A) 65 (B) 71 (C) 77 (D) 87 (E) 98

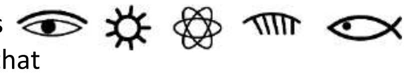
18. In order to slay a dragon, Mathias has to cut off all of its heads. As soon as he has cut off 3 heads, a new one grows back immediately. After Mathias has cut off 13 heads the dragon is dead.
How many heads did the dragon have initially?

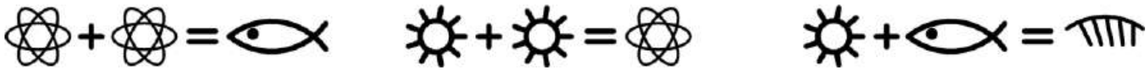
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

19. The rooms in Kanga's house are numbered. Eva enters the house through the main entrance. Eva has to walk through the rooms in such a way that each room that she enters has a number higher than the previous one.
Through which door does Eva leave the house?

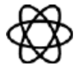


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

20. The symbols  stand for one of the digits 1, 2, 3, 4 or 5.
It is known that



Which symbol stands for the digit 3?

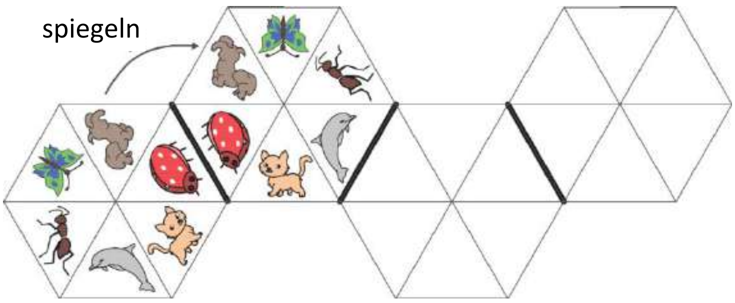
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

21. A belt can be joined together in 5 different ways.

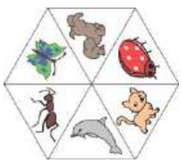
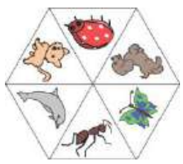
How many cm is the belt longer if it is only closed in the first hole instead of in all 5 holes?

(A) 4 cm (B) 8 cm (C) 10 cm (D) 16 cm (E) 20 cm

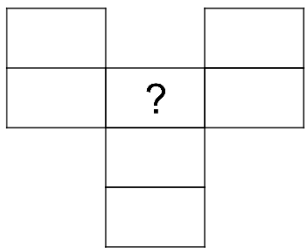
22. A decorated glass tile is mirrored several times along the boldly printed edge. The first mirror image is shown.



What does the tile on the far right look like after the third reflection?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

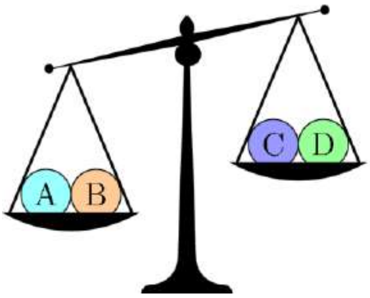
23. Lea should write the numbers 1 to 7 in the fields of the given figure. There is only one number allowed in every field.
Two consecutive numbers are not allowed to be in adjacent fields. Two fields are adjacent if they have one edge or one corner in common.

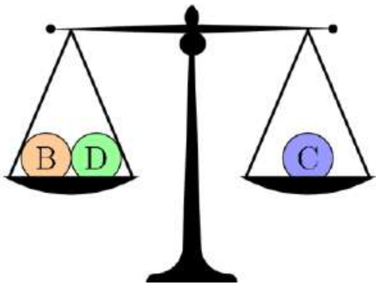


Which numbers can she write into the field with the question mark?

(A) all 7 numbers (B) only odd numbers (C) only even numbers (D) the number 4 (E) the numbers 1 or 7

24. Each of the four balls weighs either 10 or 20 or 30 or 40 grams.
Which ball weighs 30 grams?





(A) A (B) B (C) C (D) D (E) It can be A or B.

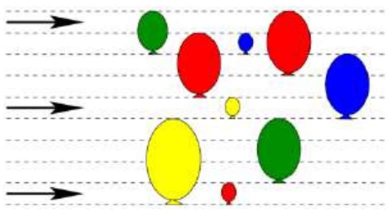
Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E	D	E	B	D	D	A	D	D	A	B	E	E	C	D	C	C	B	D	A	B	B	E	C

– 3 Punkte Beispiele –

1. Im Bild siehst du 3 Pfeile, die auf 9 fixierte Luftballons fliegen. Wenn ein Pfeil einen Ballon trifft, platzt dieser, und der Pfeil fliegt in derselben Richtung weiter.
Wie viele Luftballons werden von den Pfeilen getroffen?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 **(E) 6**

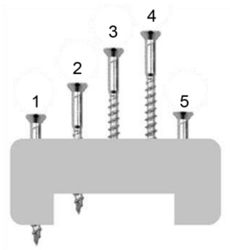
Die Pfeile fliegen entlang der eingezeichneten Zeilen, jeder Pfeil trifft zwei Ballons. 3 • 2 = 6.

2. Susanne ist 6 Jahre alt. Ihre Schwester Lisa ist 2 Jahre jünger. Bruder Max ist 2 Jahre älter als Susanne.
Wie alt sind die 3 Geschwister zusammen?

(A) 15 (B) 16 (C) 17 **(D) 18** (E) 19

Susanne ist 6 Jahre alt. 6 – 2 = 4, Lisa ist somit 4 Jahre;
6 + 2 = 8, Max ist somit 8 Jahre alt.
6 + 4 + 8 = 18.

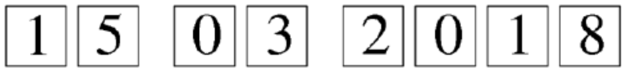
3. Im Bild siehst du einen Holzblock mit 5 Schrauben. 4 davon sind gleich lang, eine Schraube ist kürzer.
Welche ist die kürzere Schraube?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 **(E) 5**

4 Schrauben sind gleich lang. Das untere Ende der Schraube 2 ist gleich weit vom unteren Ende der Schraube 1 entfernt wie die oberen Enden. Die beiden Schrauben sind also gleich lang. Schrauben 1 und 5 stehen gleich weit oben aus dem Block heraus, aber nicht unten. Schraube 5 ist also die kürzere Schraube.

4. Leonie hat für die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 je einen Stempel.
Sie stempelt damit das Datum des Känguru-Bewerbes.
Wie viele dieser Stempel verwendet Leonie dafür?



(A) 5 **(B) 6** (C) 7 (D) 9 (E) 10

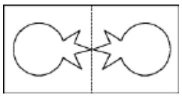
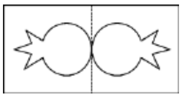
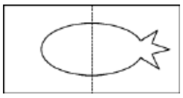
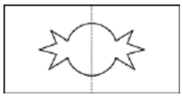
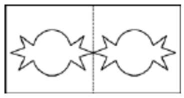
Es gibt nur einen Stempel pro Ziffer.
Das Datum 15. 03. 2018 hat 6 verschiedene Ziffern: 0, 1, 2, 3, 5, 8

5. Rechts siehst du ein Bild vom Marienkäfer Sophie.
Sophie dreht sich.
Welches der unten gezeigten Bilder ist nicht Sophie?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Durch Drehen des Käfers erhält man Bild A, B, C und E. Bei Bild D sind die Punkte auf den falschen Flügelhälften.

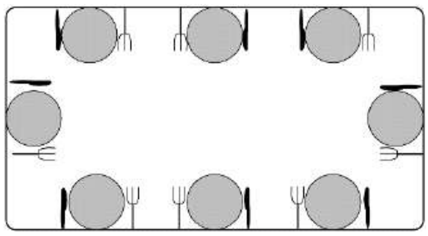
6. Lucy faltet ein Blatt Papier genau in der Mitte zusammen und schneidet dann eine Figur heraus:
Danach faltet sie das Papier wieder auf.
Welches der fünf Bilder sieht sie?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Beim Auseinanderfalten des Papiers sieht man dann auf der linken Seite das gespiegelte Bild der Figur wie in Bild D. Man kann dies durch eigenes Ausprobieren überprüfen.

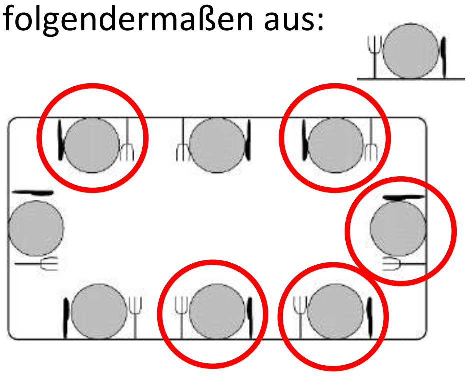
7. Mike deckt den Tisch für 8 Personen: Die Gabel muss links und das Messer rechts vom Teller liegen.

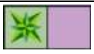
Für wie viele Personen ist das Besteck richtig aufgedeckt?

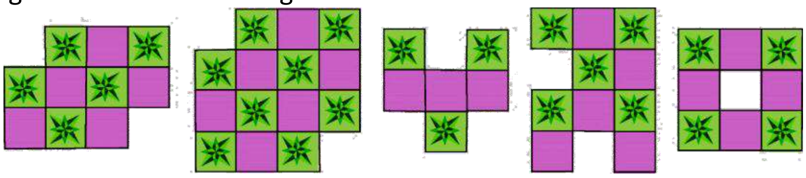


(A) 5 (B) 4 (C) 6 (D) 2 (E) 3

Die richtige Anordnung schaut folgendermaßen aus:



8. Robert legt mit diesen Fliesen  verschiedene Muster.
Wie viele der unten gezeigten Muster kann er legen?



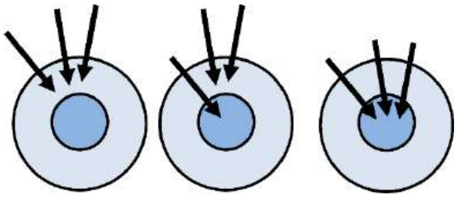
(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D) 4** (E) 5

Die Fliese besteht aus 1 Stern und 1 farbigen Teil. Die gelegten Muster müssen also aus gleich vielen Sternen und farbigen Teilen bestehen. Bei vier Mustern ist das der Fall.

4 Punkte Beispiele

9. Diana schießt dreimal 3 Pfeile auf eine Scheibe mit zwei Feldern. Beim ersten Mal erreicht sie 12 Punkte, beim zweiten Mal 15.
Die Anzahl der Punkte hängt davon ab, welches Feld sie getroffen hat.

Wie viele Punkte erreicht sie beim dritten Mal?



12 Punkte **15 Punkte** **?**

(A) 18 (B) 19 (C) 20 **(D) 21** (E) 22

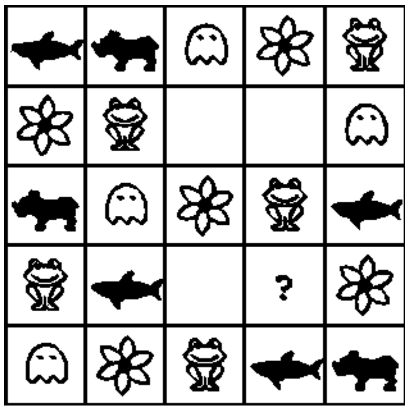
Beim ersten Mal trifft sie mit den 3 Pfeilen in den gleichen Bereich. 12 : 3 = 4, der äußere Bereich ist also 4 Punkte wert.
Beim zweiten Mal trifft sie zwei Mal den äußeren Bereich und erhält dadurch 8 Punkte.
Da sie insgesamt 15 Punkte bekommt, ist der innere Bereich 15 – 8 = 7 Punkte wert.
In der dritten Runde trifft sie drei Mal den inneren Bereich. 3 • 7 = 21

10.

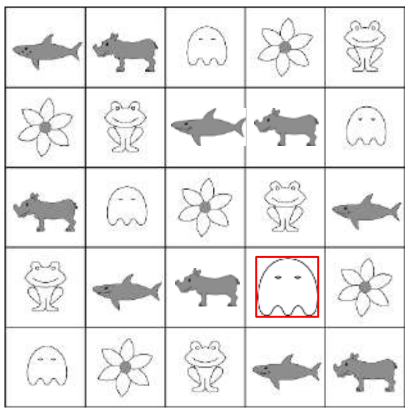
Albert legt diese 5 Figuren  auf das 5x5-Feld.
Jede Figur darf pro Spalte und je Zeile nur genau einmal vorkommen.

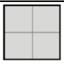
Welche Figur muss Albert auf das Feld mit dem Fragezeichen legen?

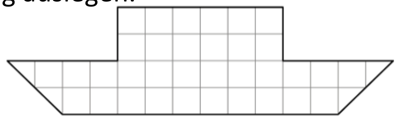
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 



Auffüllen des Feldes:

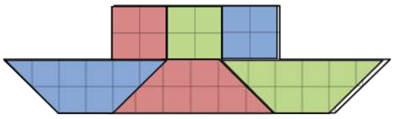


11. Tom möchte sein Papierboot mit den Figuren  und  vollständig auslegen.
Welche ist die kleinste Anzahl an Figuren, die er dafür braucht?



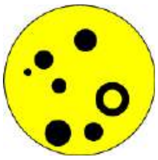
(A) 5 **(B) 6** (C) 7 (D) 8 (E) 9

Er braucht 6 Figuren:



12. Die beiden Farben dieses Bildes werden vertauscht.
Dann wird das Bild gedreht.

Welches der untenstehenden Bilder erhält man?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Bei Bild A, B und D ist die Anzahl der schwarzen Punkte nicht gleich der Anzahl der gelben Punkte im ursprünglichen Bild. Im Bild C stimmen die Abstände nicht.

13. Der Hase Felix hat 20 Möhren. Jeden Tag frisst er 2 davon.
Die 12. Karotte hat er an einem Mittwoch gefressen.
An welchem Wochentag hat er mit dem Fressen der Möhren begonnen?

(A) Montag (B) Dienstag (C) Mittwoch (D) Donnerstag **(E) Freitag**

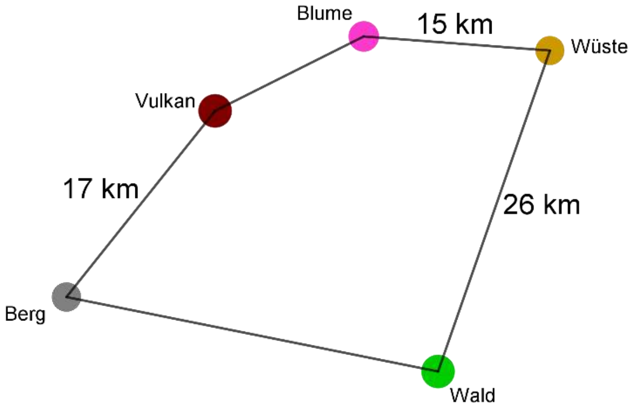
12. Karotte = Mittwoch, 10. Karotte = Dienstag, 8.Karotte = Montag,
6. Karotte = Sonntag, 4. Karotte = Samstag, 2. und 1. Karotte = Freitag

14. Ein Rosenstrauch hat 8 Blüten, auf denen Schmetterlinge und Libellen sitzen.
Auf jeder Blüte sitzt höchstens ein Insekt. Mehr als die Hälfte der Blüten ist besetzt.
Die Anzahl der Schmetterlinge ist doppelt so groß wie die Anzahl der Libellen.
Wie viele Schmetterlinge sitzen auf den Rosenblüten?

(A) 2 (B) 3 **(C) 4** (D) 5 (E) 6

Da auf jeder Blüte nur höchstens 1 Insekt sitzt, kann es insgesamt höchstens 8 Insekten geben. Es gibt doppelt so viele Schmetterlinge wie Libellen, das ergibt zwei Möglichkeiten für die Insekten: 1 + 2 = 3 Insekten und 2 + 4 = 6 Insekten; 3 + 6 = 9 Insekten geht nicht mehr, da es höchstens 8 Insekten gibt. Da man weiß, dass es insgesamt mehr als 4 Insekten gibt, muss es 4 Schmetterlinge und 2 Libellen geben.

15.

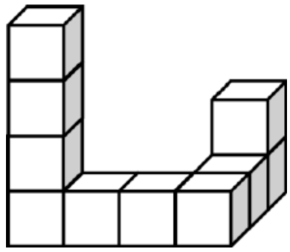


Die Karte zeigt die Rundreise, die Kapitän Blaubär bei seiner Reise zurücklegt. Drei Entfernungen sind in der Karte angegeben.
Er segelt von Insel zu Insel und startet bei der Insel Berg. Insgesamt legt er 100 km zurück. Die Entfernung zwischen den Inseln Wüste und Wald ist gleich der Entfernung zwischen den Inseln Berg und Blume über Vulkan.
Wie groß ist die Entfernung zwischen Berg und Wald?

(A) 17 km (B) 23 km (C) 26 km **(D) 33 km** (E) 35 km

Da der Weg Berg – Vulkan – Blume gleich lang ist wie Wald – Wüste, ist der Weg Vulkan – Blume gleich 26 – 17 = 9 km. Der gesamte Rundweg ist 100 km lang.
Die Strecke Berg – Wald ist somit 100 – 9 – 17 – 26 – 15 = 33 km lang.

16. Tobias klebt 10 Würfel so zusammen, dass folgendes Bauwerk entsteht:
Er malt es vollständig an, auch die Unterseite.



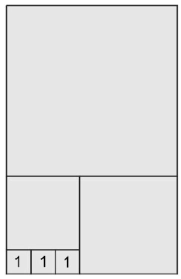
Von wie vielen Würfeln sind dann genau 4 Seitenflächen angemalt?

(A) 6 (B) 7 **(C) 8** (D) 9 (E) 10

Nur die beiden Würfel an den Enden des Bauwerks sind an 1 Seite angeklebt und werden daher an 5 Seiten bemalt.
Alle anderen Würfel sind an zwei Seiten beklebt und daher auf 4 Seiten bemalt.

– 5 Punkte Beispiele –

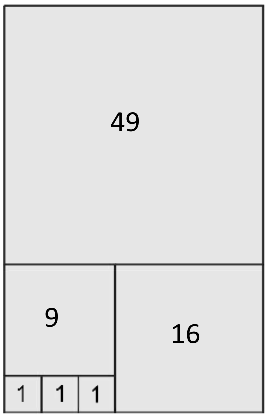
17. Das große Rechteck besteht aus lauter Quadraten verschiedener Größe.
Jedes der drei kleinsten Quadrate hat die Fläche 1.



Wie groß ist die Fläche des gegebenen Rechtecks?

(A) 65 (B) 71 **(C) 77** (D) 87 (E) 98

Die kleinsten Quadrate haben die Seitenlänge 1.
Das nächstgrößere Quadrat hat die Seitenlänge 3 und die Fläche 3 • 3 = 9.
Das nächstgrößere Quadrat hat die Seitenlänge 4 und die Fläche 4 • 4 = 16.
Das größte Quadrat hat die Seitenlänge 3 + 4 = 7 und die Fläche 7 • 7 = 49.
Die Gesamtfläche ist 1 + 1 + 1 + 9 + 16 + 49 = 77.

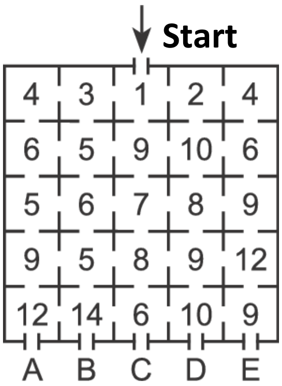


18. Um einen Drachen zu töten, muss Mathias alle seine Köpfe abschneiden. Sobald er 3 Köpfe abgeschnitten hat, wächst sofort ein neuer nach. Nachdem Mathias 13 Köpfe abgeschnitten hat, ist der Drache tot.
Wie viele Köpfe hatte der Drache ursprünglich?

(A) 8 **(B) 9** (C) 10 (D) 11 (E) 12

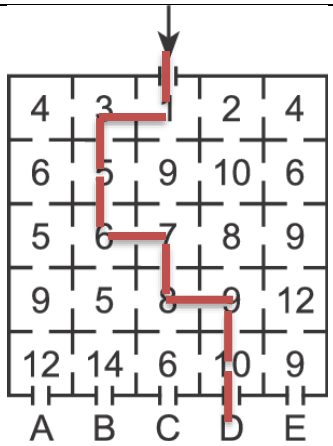
Angenommen, der Drache hat 9 Köpfe: Schneidet man Kopf 1 bis 3 ab, wächst Kopf 10 nach. Schneidet man Kopf 4 bis 6 ab, wächst Kopf 11 nach. Schneidet man Kopf 7 bis 9 ab, wächst Kopf 12 nach. Nun gibt es noch die drei Köpfe 10, 11, 12. Schneidet man diese ab, wächst Kopf 13 nach. Das ist nun der einzige Kopf, den der Drache noch hat. Wenn man diesen abschneidet, wächst kein Kopf nach und der Drache ist tot.

19. Die Zimmer in Kangas Haus sind nummeriert. Eva betritt das Haus durch den Haupteingang. Eva muss dabei so durch die Räume gehen, dass jeder Raum, den sie betritt, eine höhere Nummer hat als der vorherige.

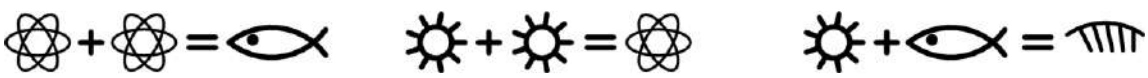


Durch welche Tür verlässt Eva das Haus?

(A) A (B) B (C) C **(D) D** (E) E



20. Die Symbole stehen für eine der Ziffern 1, 2, 3, 4 oder 5.
Man weiß, dass



Welches Symbol steht für die Ziffer 3?

(A) (B) (C) (D) (E)

Im Bereich 1 bis 5 gibt es zwei Möglichkeiten, um aus zwei gleichen Ziffern eine zweite zu berechnen: 1 + 1 = 2 und 2 + 2 = 4. ist kleiner als und ist kleiner als ,
somit muss = 1; = 2 und = 4 sein.
Aus der dritten Rechnung folgt 1 + 4 = 5 und = 5. Das fehlende Symbol ist = 3.

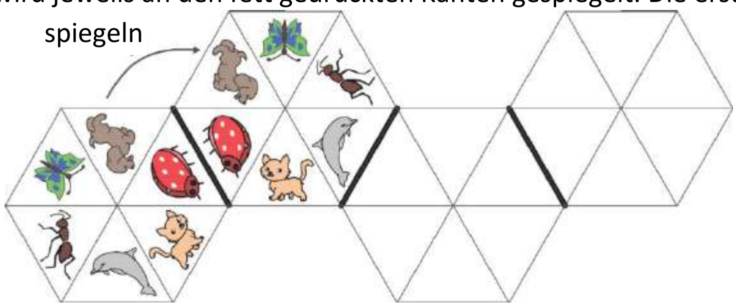
21. Ein Gürtel kann auf 5 verschiedene Arten zusammengesteckt werden.

Um wie viel cm ist der Gürtel weiter, wenn man ihn nur im ersten Loch schließt, als wenn er in allen 5 Löchern befestigt wird?

(A) 4 cm **(B) 8 cm** (C) 10 cm (D) 16 cm (E) 20 cm

Der Abstand zwischen zwei Löchern beträgt 2 cm. Ist der Gürtel in allen Löchern geschlossen, gibt es 4 Lochabstände und der Gürtel ist 4 • 2 = 8 cm weit. Ist der Gürtel im ersten Loch geschlossen, gibt es (wie im Bild gezeigt) 8 Lochabstände. Der Gürtel ist 8 • 2 = 16 cm weit. Der Gürtel ist also um 8 cm weiter.

22. Eine bemalte Glasfliese wird jeweils an den fett gedruckten Kanten gespiegelt. Die erste Spiegelung ist abgebildet.

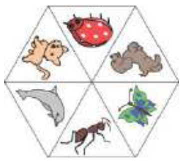


Wie sieht die Fliese ganz rechts nach der dritten Spiegelung aus?


(A)

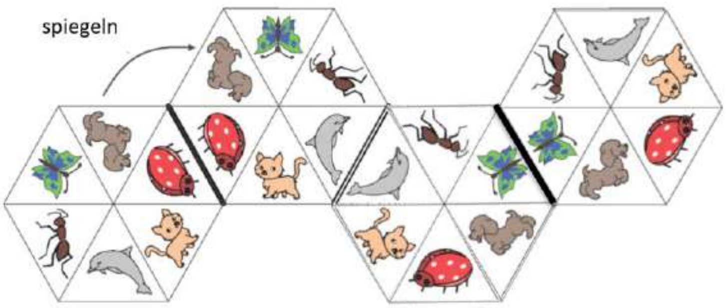

(B)


(C)

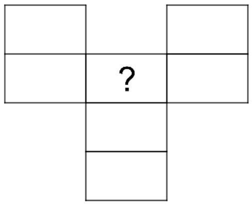

(D)


(E)

Durch Spiegeln erhält man



23. Lea soll die Zahlen von 1 bis 7 in die Felder der gegebenen Figur schreiben. In jedem Feld darf nur eine Zahl stehen.
Zwei aufeinander folgende Zahlen dürfen nicht in benachbarten Feldern stehen.
Zwei Felder sind benachbart, wenn sie eine Seite oder eine Ecke gemeinsam haben.

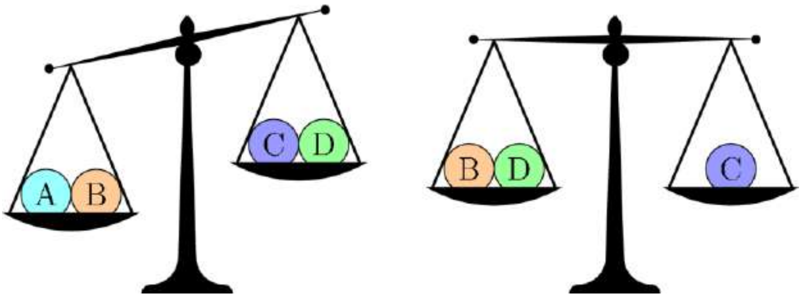


Welche Zahlen kann sie in das Feld mit dem Fragezeichen schreiben?

(A) alle 7 Zahlen (B) nur ungerade Zahlen (C) nur gerade Zahlen (D) die Zahl 4 **(E) die Zahlen 1 oder 7**

Das Feld mit dem ? hat 5 angrenzende Felder und nur 1 Feld, das nicht direkt angrenzt. In angrenzende Felder dürfen keine aufeinander folgenden Zahlen geschrieben werden. In das Feld mit dem ? kann also nur eine Zahl geschrieben werden, die nur einen Nachbarn hat. Die Zahlen 2, 3, 4, 5 und 6 haben zwei Nachbarn. Nur die Zahl 1 hat einen Nachbar, nämlich 2, und die Zahl 7 hat einen Nachbar, nämlich 6. Somit kann in dem Feld mit dem Fragezeichen nur 1 oder 7 stehen.

24. Jeder der vier Bälle wiegt entweder 10 oder 20 oder 30 oder 40 Gramm.
Welcher Ball wiegt 30 Gramm?



(A) A (B) B **(C) C** (D) D (E) Es kann A oder B sein.

Es gibt zwei Möglichkeiten, dass die Summe aus zwei Bällen das Gewicht eines dritten Balls ergibt: Der Ball C kann entweder 30 = 10 + 20 oder 40 = 30 + 10 Gramm wiegen.
Würde Ball C 40 Gramm wiegen, ist auf der linken Waage das kleinstmögliche Gewicht für C + D = 40 + 10 = 50 und A + B wäre 20 + 30 = 50 Gramm.
A + B muss aber größer sein als C + D (wie die linke Waage zeigt).
Also ist C = 40 Gramm nicht möglich.
Bei allen anderen Möglichkeiten ist C + D schwerer als A + B, was ebenfalls nicht zur Abbildung passt.
Ball C muss also 30 Gramm wiegen.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5 – 6

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. – 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. – 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

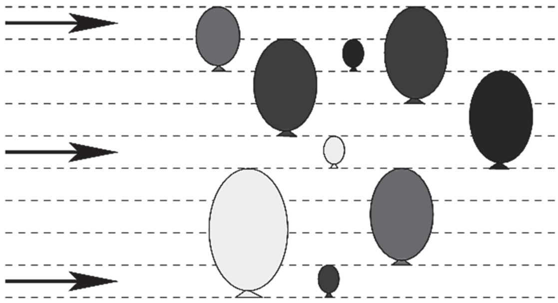
9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

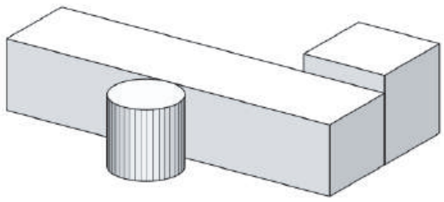
Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018

- 3 Punkte Beispiele -

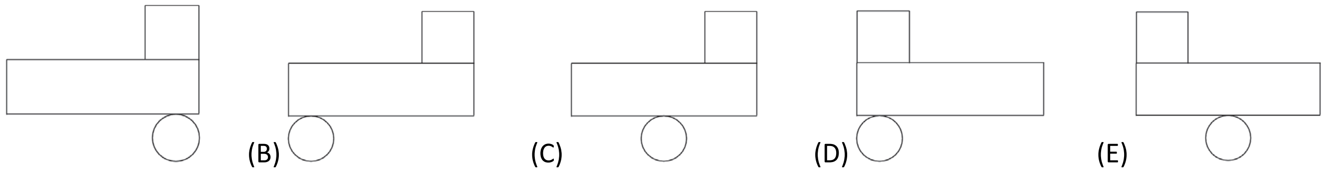


1. Wie in der Abbildung zu sehen, werden drei Pfeile auf neun fixierte Luftballons geschossen. Wird ein Luftballon getroffen, platzt er, und der Pfeil fliegt in gleicher Richtung weiter. Wie viele Luftballons werden *nicht* von den Pfeilen getroffen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

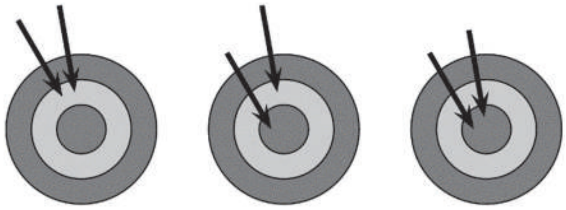


2. Peter legt drei Bausteine wie abgebildet auf den Tisch. Was sieht er, wenn er sie von oben betrachtet?



(A) (B) (C) (D) (E)

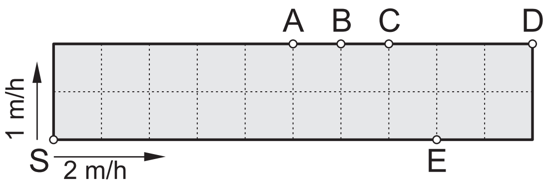
3. Trifft man mit einem Pfeil eine Zielscheibe, erhält man Punkte. Die Anzahl der Punkte hängt davon ab, welchen der drei Bereiche man getroffen hat. Diana schießt dreimal zwei Pfeile auf diese Zielscheibe. Beim ersten Versuch erreicht sie 14 Punkte, beim zweiten Versuch erreicht sie 16 Punkte.
Wie viele Punkte erreicht sie beim dritten Versuch?



14 Punkte ***16 Punkte*** ***???***

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 22

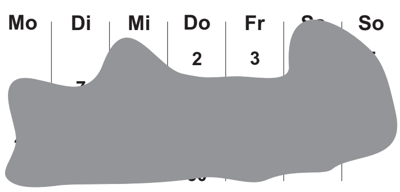
4. Ein Garten wird in gleich große quadratische Parzellen geteilt. Eine schnelle und eine langsame Schnecke kriechen in verschiedene Richtungen am Rand des Gartens entlang. Beide starten gleichzeitig an der Ecke S. Die langsame Schnecke kriecht in einer Stunde 1 m weit, die schnelle kriecht in einer Stunde 2 m weit. An welcher Stelle werden sich die beiden Schnecken zum ersten Mal treffen?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

5. Ein Stern besteht aus einem Quadrat und vier Dreiecken. Alle Seiten der Dreiecke sind gleich lang. Der Umfang des Quadrats beträgt 36 cm. Welchen Umfang hat der Stern?

(A) 144 cm (B) 120 cm (C) 104 cm (D) 90 cm (E) 72 cm

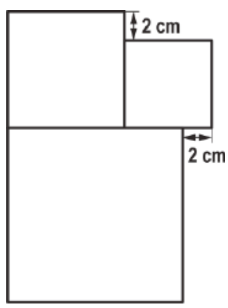


6. Ein großer Tintenfleck bedeckt einen Großteil des Kalenderblatts eines bestimmten Monats.
Auf welchen Wochentag fällt der 25. Tag dieses Monats?

(A) Montag (B) Mittwoch (C) Donnerstag (D) Samstag (E) Sonntag

7. Wie oft muss ein gewöhnlicher Spielwürfel geworfen werden, damit man sicher sein kann, dass mindestens eine Augenzahl zweimal gewürfelt wird?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 12 (E) 18



8. Eine Figur setzt sich aus drei Quadraten zusammen. Die Seitenlänge des kleinsten Quadrats beträgt 6 cm. Wie lang ist eine Seite des größten Quadrats?

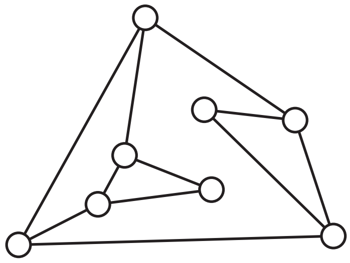
(A) 8 cm (B) 10 cm (C) 12 cm (D) 14 cm (E) 16 cm

- 4 Punkte Beispiele -

9. Alice subtrahiert eine zweistellige Zahl von einer anderen zweistelligen Zahl. Danach übermalt sie zwei Ziffern in der Rechnung.
Wie groß ist die Summe der beiden übermalten Ziffern?

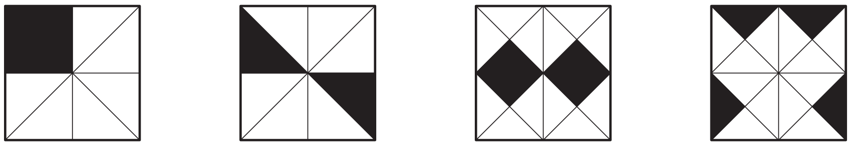
(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13 (E) 15

10. In der Abbildung stellen die Kreise Glühbirnen dar, die mit einigen anderen Glühbirnen verbunden sind. Zu Beginn sind alle Glühbirnen ausgeschaltet. Wenn man eine Glühbirne berührt, schalten sich diese Glühbirne und alle direkt benachbarten Glühbirnen ein. Wie viele Glühbirnen muss man mindestens berühren, um alle Glühbirnen einzuschalten?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

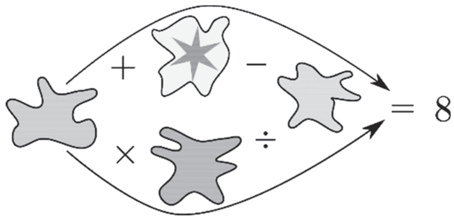
11. Vier gleich große Quadrate werden teilweise schwarz eingefärbt.
In welchem der vier Quadrate ist die Gesamtfläche der schwarzen Teile am größten?



A B C D

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) Die schwarze Gesamtfläche ist überall gleich groß.

12. Die vier Flecken verdecken vier der fünf Zahlen 1, 2, 3, 4, 5. Die Rechnungen entlang der beiden Pfeile stimmen.
Welche Zahl verbirgt sich hinter dem Fleck mit dem Stern?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

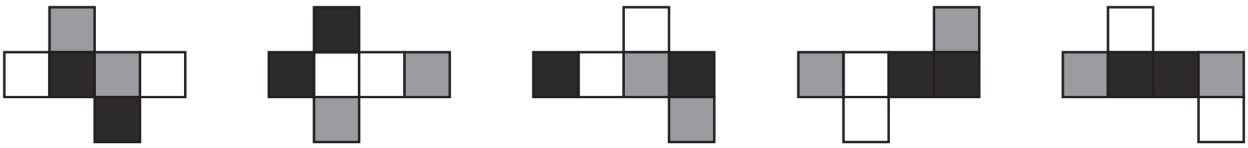
13. Ein Löwe versteckt sich in einem von drei Zimmern. Auf der Tür zu Zimmer 1 steht: „Der Löwe ist nicht hier". Auf der Tür zu Zimmer 2 steht: „Der Löwe ist hier". Auf der Tür zu Zimmer 3 steht „ 2 + 3 = 5". Genau eine der drei Aufschriften ist wahr. In welchem Zimmer befindet sich der Löwe?

(A) Zimmer 1 (B) Zimmer 2 (C) Zimmer 3
(D) Er kann in jedem Zimmer sein. (E) Er ist entweder in Zimmer 1 oder Zimmer 2.

14. Die beiden Mädchen Eva und Olga und die drei Buben Adam, Isaac und Urban spielen gemeinsam mit einem Ball. Wenn ein Mädchen den Ball hat, wirft sie ihn entweder zum zweiten Mädchen oder zu einem Buben. Jeder Bub wirft den Ball nur zu einem weiteren Buben, jedoch nicht zu jenem, von dem er den Ball gerade bekommen hat. Den ersten Wurf macht Eva zu Adam. Wer macht den 5. Wurf?

(A) Adam (B) Eva (C) Isaac (D) Olga (E) Urban

15. Die Flächen eines Würfels sind entweder weiß, grau oder schwarz. Gegenüberliegende Flächen haben immer verschiedene Farben. Welches der folgenden Netze gehört nicht zu einem solchen Würfel?

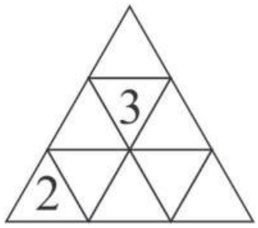


(A) (B) (C) (D) (E)

16. Aus einer Liste mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 wählt Monika 3 verschiedene Zahlen, deren Summe 8 beträgt. Aus derselben Liste wählt Daniel 3 verschiedene Zahlen, deren Summe 7 beträgt. Wie viele der Zahlen wurden sowohl von Monika als auch von Daniel gewählt?

(A) keine (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Es kann nicht bestimmt werden.

- 5 Punkte Beispiele -



17. Emily möchte gerne in jedes der freien kleinen Dreiecke eine Zahl schreiben. Die Summe der Zahlen in zwei Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite soll immer gleich groß sein. Zwei Zahlen hat sie bereits eingetragen. Wie groß ist die Summe aller Zahlen in der Figur?

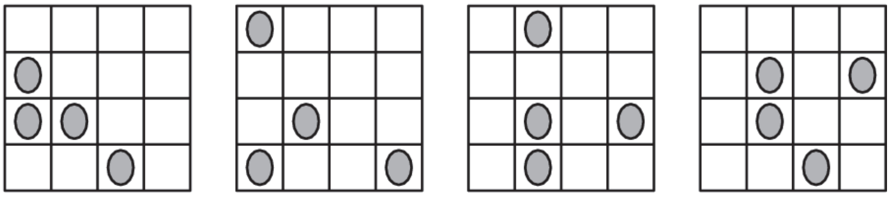
(A) 18 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) kann nicht errechnet werden

18. Hannes verwendet in einer Rechnung anstatt Ziffern die Buchstaben A, B, C und D. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern. Für welche Ziffer steht der Buchstabe B?

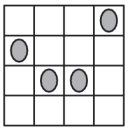
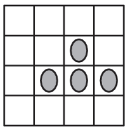
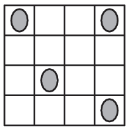
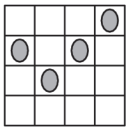
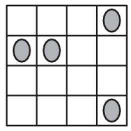
$$\begin{array}{r} ABC \\ +\,CBA \\ \hline DDDD \end{array}$$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

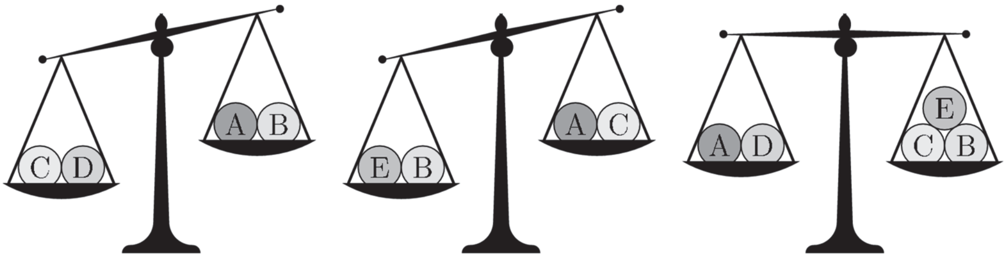
19. Vier Marienkäfer sitzen auf verschiedenen Zellen eines 4 x 4 Rasters. Einer schläft und bewegt sich nicht. Wenn man pfeift, krabbeln die anderen drei in eine benachbarte freie Zelle.
Sie können aufwärts, abwärts, nach rechts oder nach links krabbeln, dürfen aber auf keinen Fall zurück in die Zelle, von der sie gerade gekommen sind.
Wo könnten sich die Marienkäfer nach dem vierten Pfiff befinden?



Ausgangs-stellung ***Nach dem ersten Pfiff*** ***Nach dem zweiten Pfiff*** ***Nach dem dritten Pfiff***

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

20. Die fünf Bälle wiegen 30 g, 50 g, 50 g, 50 g und 80 g. Welcher der Bälle wiegt 30 g?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

21. Drei verschiedene Ziffern A, B und C werden ausgewählt. Danach wird die größtmögliche sechsstellige Zahl gebildet, in der die Ziffer A 3-mal, die Ziffer B 2-mal und die Ziffer C 1-mal auftritt.
Welche Darstellung ist für diese Zahl keinesfalls möglich?

(A) AAABBC (B) CAAABB (C) BBAAAC (D) AAABCB (E) AAACBB

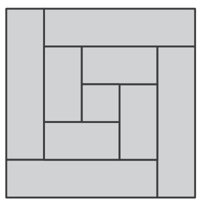
22. Die Summe aus Kathis Alter und dem Alter ihrer Mutter beträgt 36. Die Summe aus dem Alter ihrer Mutter und dem Alter ihrer Großmutter beträgt 81. Wie alt war Kathis Großmutter, als Kathi geboren wurde?

(A) 28 (B) 38 (C) 45 (D) 53 (E) 56

23. Nick möchte die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 in einige Gruppen so aufteilen, dass die Summe der Zahlen in jeder Gruppe gleich groß ist. Was ist die größte Anzahl an Gruppen, die er so bilden kann?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) eine andere Zahl

24. Die rechts abgebildete Figur besteht aus einem quadratischen und acht rechteckigen Teilen. Jeder Teil ist 8 cm breit. Peter fügt alle Teile zu einem langen, 8 cm breiten Rechteck zusammen. Wie lang ist dieses Rechteck?



(A) 150 cm (B) 168 cm (C) 196 cm (D) 200 cm (E) 232 cm

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Level: Benjamin, Grade: 5 – 6

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
Each correct answer to questions 1. – 8.: 3 Points
Each correct answer to questions 9. – 16.: 4 Points
Each correct answer to questions 17. – 24.: 5 Points
Each question left unanswered: 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for this question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

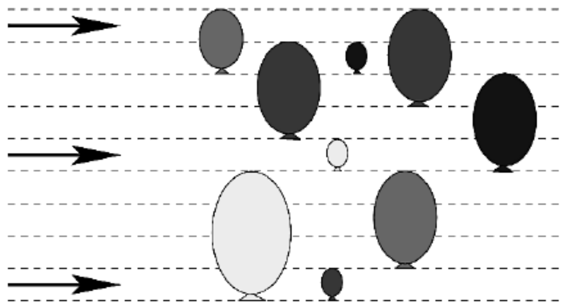
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO/

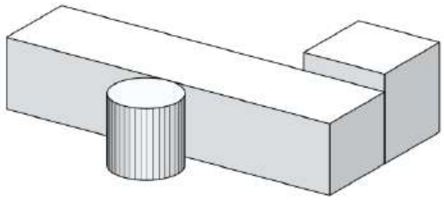
Känguru der Mathematik 2018
Group Benjamin (Grade 5 and 6)
Austria – 15. 3. 2018

- 3 Points Examples -

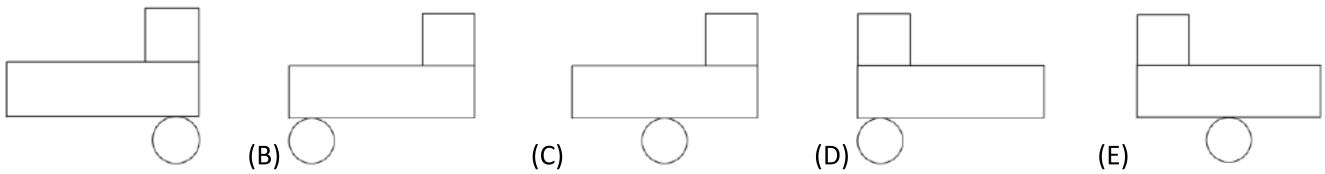
1. As seen in the diagram, three darts are thrown at nine fixed balloons. If a balloon is hit it will burst and the dart continues in the same direction it had beforehand. How many balloons will not be hit by a dart?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

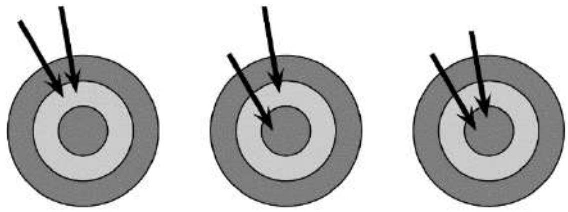


2. Peter places three building blocks on a table, as shown.
What does he see when he is looking at them from above?



(A) (B) (C) (D) (E)

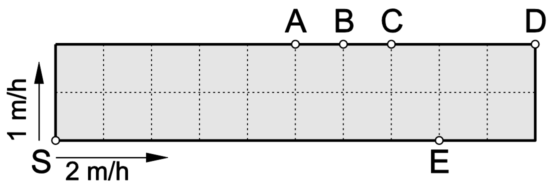
3. If you hit the target board, you score points.
The number of points depends on which one of the three areas you hit. Diana throws two darts, three times at the target board. On the first attempt she scores 14 points and on the second 16 points.
How many points does she score on the third attempt?



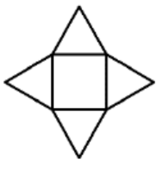
14 Points ***16 Points*** ***???***

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 22

4. A garden is split into equally sized square-shaped lots. A fast and a slow snail crawl in different directions along the outside edge of the garden. Both start at the corner S. The slow snail crawls 1 m in one hour and the fast one crawls 2 m in one hour. In which position will the two snails meet for the first time?



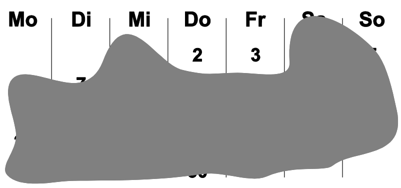
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E



5. A star consist of a square and four triangles. All sides of the triangles are equally long. The perimeter of the square is 36 cm. What is the perimeter of the star?

(A) 144 cm (B) 120 cm (C) 104 cm (D) 90 cm (E) 72 cm

6. A big spot of ink covers most of a calendar page of a certain month.
Which day of the week does the 25th day of that month fall on?

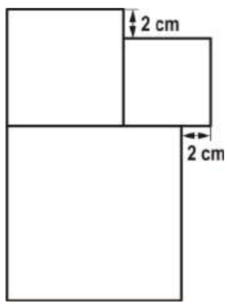


(A) Monday (B) Wednesday (C) Thursday (D) Saturday (E) Sunday

7. How many times do you have to roll an ordinary die in order to be certain that at least one number is rolled twice?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 12 (E) 18

8. A figure is made up of three squares. The side length of the smallest square is 6 cm. How long is the side length of the biggest square?



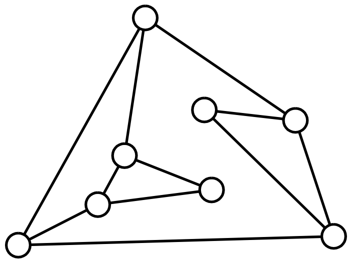
(A) 8 cm (B) 10 cm (C) 12 cm (D) 14 cm (E) 16 cm

- 4 Point Examples -

9. Alice subtracts one two-digit number from another two-digit number. Afterwards she paints over two digits in the calculation.
How big is the sum of the two painted digits?

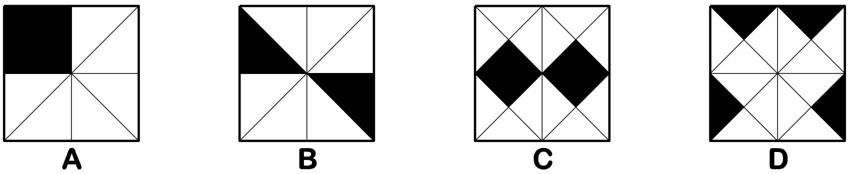
(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13 (E) 15

10. In the diagram the circles represent light bulbs which are connected to some other light bulbs. Initially all light bulbs are switched off. If you touch a light bulb then that light bulb and all directly adjacent light bulbs switch themselves on. What is the minimum number of light bulbs you have to touch in order to switch on all the light bulbs?



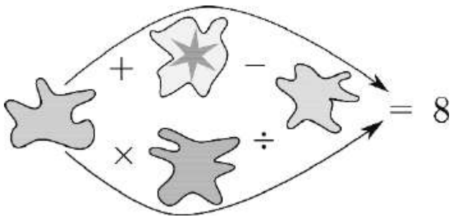
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Four equally big squares are partially coloured in black.
In which of the four squares is the total area of the black parts biggest?



(A) A (B) B (C) C (D)
D (E) The total area of the black parts is always equally big.

12. The four smudges hide four of the numbers 1, 2, 3, 4, 5. The calculations along the two arrows are correct.
Which number hides behind the smudge with the star?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

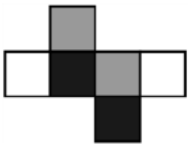
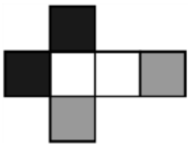
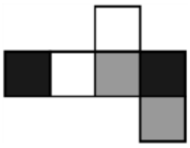
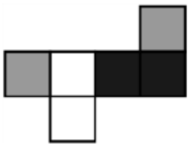
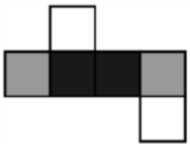
13. A lion hides in one of three rooms. On the door to room number 1 a note reads: „The lion is not here“. On the door to room number 2 a note reads: „The lion is here“. On the door to room number 3 a note reads: „2 + 3 = 5“. Exactly one of the three notes is true. In which room is the lion?

(A) Room 1 (B) Room 2 (C) Room 3
(D) It can be in any room. (E) It is either in room 1 or room 2.

14. The two girls Eva and Olga and the three boys Adam, Isaac and Urban play together with a ball. If a girl has the ball she throws it either to the second girl or to a boy. Every boy only throws the ball to another boy, however not to the one where the ball has just come from. The first throw is made by Eva to Adam. Who makes the 5th throw?

(A) Adam (B) Eva (C) Isaac (D) Olga (E) Urban

15. The faces of a die are either white, grey or black. Opposite faces are always a different colour. Which of the following nets does not belong to such a die?

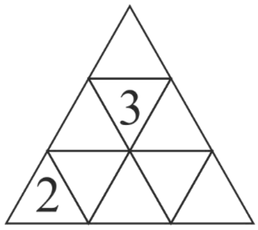

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

16. From a list with the numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Monika chooses 3 different numbers whose sum is 8. From the same list Daniel chooses 3 different numbers whose sum is 7. How many of the numbers were chosen by both Monika and Daniel?

(A) none (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) It cannot be determined.

- 5 Point Examples -

17. Emily wants to write a number into every free small triangle. The sum of the numbers in two triangles with a common side should always be the same. Two numbers are already given. How big is the sum of all numbers in the figure?



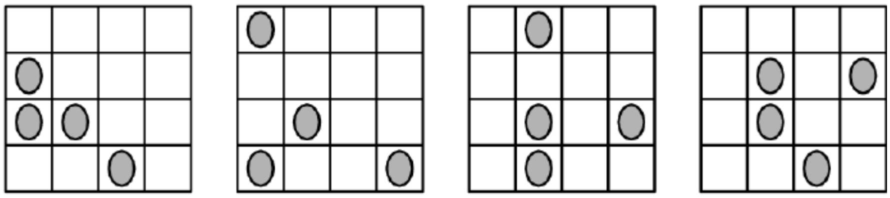
(A) 18 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) it cannot be calculated

18. Instead of digits Hannes uses the letters A, B, C and D in a calculation. Different letters stand for different digits. Which digit does the letter B stand for?

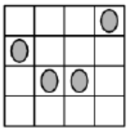
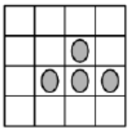
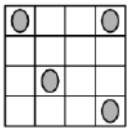
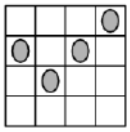
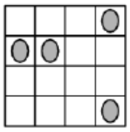
$$\begin{array}{r} A\,B\,C \\ +\,C\,B\,A \\ \hline D\,D\,D\,D \end{array}$$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

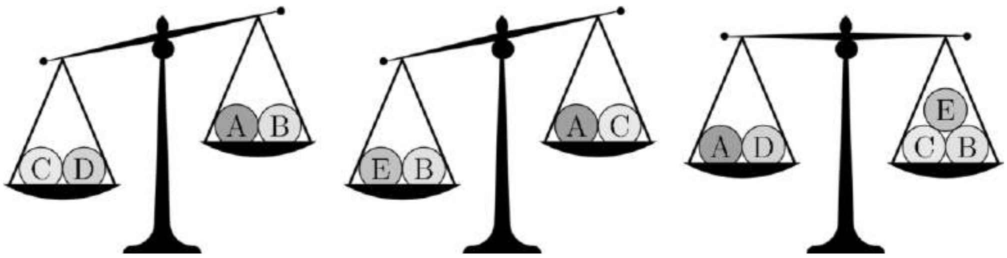
19. Four ladybirds each sit on a different cell of a 4 x 4 grid. One is asleep and does not move. On a whistle the other three each move to an adjacent free cell.
They can crawl up, down, to the right or to the left but are not allowed on any account to move back to the cell that they have just come from.
Where could the ladybirds be after the fourth whistle?



Initial position *After the first whistle* *After the second whistle* *After the third whistle*

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

20. The five balls weigh 30 g, 50 g, 50 g, 50 g and 80 g. Which of the balls weighs 30 g?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

21. Three different digits A, B and C are chosen. Then the biggest possible six-digit number is built where the digit A appears 3 times, the digit B 2 times and the digit C 1 time.
Which representation is definitely not possible for this number?

(A) AAABBC (B) CAAABB (C) BBAAAC (D) AAABCB (E) AAACBB

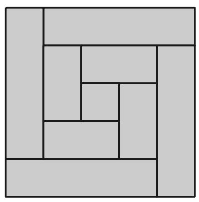
22. The sum of Kathi's age and the age of her mother is 36. The sum of the age of her mother and the age of her grandmother is 81. How old was Kathi's grandmother when Kathi was born?

(A) 28 (B) 38 (C) 45 (D) 53 (E) 56

23. Nick wants to split the numbers 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 into some groups so that the sum of the numbers in each group is equally big. What is the biggest number of groups he can build this way?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) another number

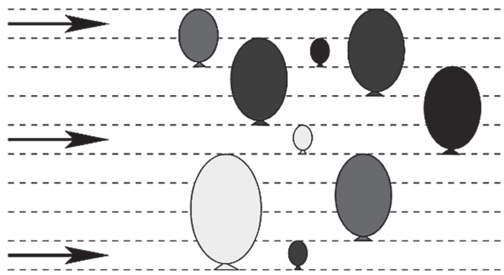
24. The figure shown on the right consists of one square part and eight rectangular parts. Each part is 8 cm wide. Peter assembles all parts to form one long, 8 cm wide rectangle. How long is this rectangle?



(A) 150 cm (B) 168 cm (C) 196 cm (D) 200 cm (E) 232 cm

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018 – Lösungen

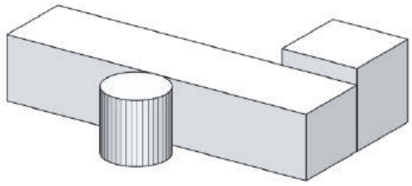
- 3 Punkte Beispiele -



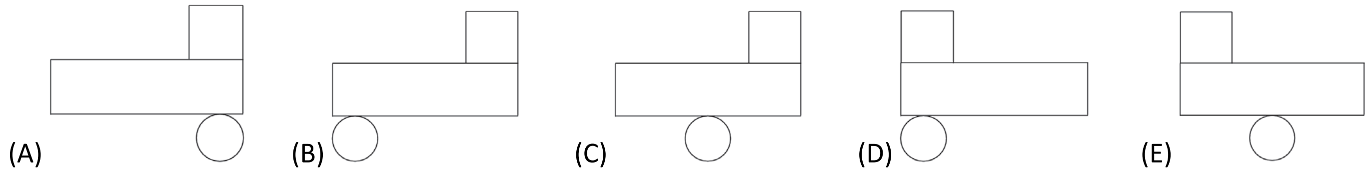
1. Wie in der Abbildung zu sehen, werden drei Pfeile auf neun fixierte Luftballons geschossen. Wird ein Luftballon getroffen, platzt er, und der Pfeil fliegt in gleicher Richtung weiter. Wie viele Luftballons werden *nicht* von den Pfeilen getroffen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung B
6 Luftballons werden getroffen, also bleiben 3 übrig.

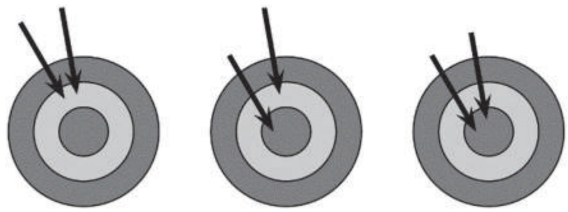


2. Peter legt drei Bausteine wie abgebildet auf den Tisch.
Was sieht er, wenn er sie von oben betrachtet?



Lösung C
Bei den Antwortmöglichkeiten A, B und D ist der Kreis nicht richtig platziert. Bei Antwortmöglichkeit E befindet sich das Quadrat an der falschen Stelle.

3. Trifft man mit einem Pfeil eine Zielscheibe, erhält man Punkte. Die Anzahl der Punkte hängt davon ab, welchen der drei Bereiche man getroffen hat. Diana schießt dreimal zwei Pfeile auf diese Zielscheibe. Beim ersten Versuch erreicht sie 14 Punkte, beim zweiten Versuch erreicht sie 16 Punkte. Wie viele Punkte erreicht sie beim dritten Versuch?

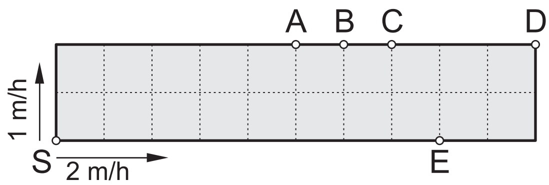


14 Punkte ***16 Punkte*** ***???*** .

(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 22

Lösung B
Trifft sie den hellgrauen Kreisring, so erhält sie 7 Punkte. Trifft sie die Kreisfläche, so bekommt sie 9 Punkte.

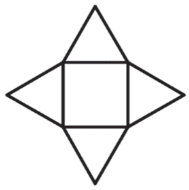
4. Ein Garten wird in gleich große quadratische Parzellen geteilt. Eine schnelle und eine langsame Schnecke kriechen in verschiedene Richtungen am Rand des Gartens entlang. Beide starten gleichzeitig an der Ecke S. Die langsame Schnecke kriecht in einer Stunde 1 m weit, die schnelle kriecht in einer Stunde 2 m weit. An welcher Stelle werden sich die beiden Schnecken zum ersten Mal treffen?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Lösung B
Die langsame Schnecke legt 8 m, die schnelle Schnecke legt 16 m zurück.

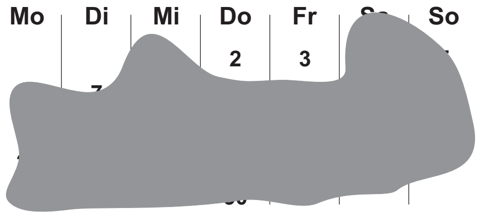
5. Ein Stern besteht aus einem Quadrat und vier Dreiecken. Alle Seiten der Dreiecke sind gleich lang. Der Umfang des Quadrats beträgt 36 cm. Welchen Umfang hat der Stern?



(A) 144 cm (B) 120 cm (C) 104 cm (D) 90 cm (E) 72 cm

Lösung E
Die Seitenlänge des Sterns beträgt 9 cm. Da der Stern 8 Seiten hat, ergibt sich $8 \cdot 9 = 72$.

6. Ein großer Tintenfleck bedeckt einen Großteil des Kalenderblatts eines bestimmten Monats. Auf welchen Wochentag fällt der 25. Tag dieses Monats?



(A) Montag (B) Mittwoch (C) Donnerstag (D) Samstag (E) Sonntag

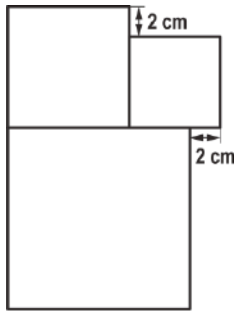
Lösung D
Der 4. Tag des Monats ist ein Samstag. 21 Tage (3 Wochen) später ist dann wieder ein Samstag, nämlich der 25. Tag des Monats.

7. Wie oft muss ein gewöhnlicher Spielwürfel geworfen werden, damit man sicher sein kann, dass mindestens eine Augenzahl zweimal gewürfelt wird?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 12 (E) 18

Lösung C
Im ungünstigsten Fall würfelt man bei den ersten sechs Versuchen immer eine andere der sechs Augenzahlen. Spätestens beim siebenten Versuch muss sich dann eine Augenzahl wiederholen.

8. Eine Figur setzt sich aus drei Quadraten zusammen. Die Seitenlänge des kleinsten Quadrats beträgt 6 cm. Wie lang ist eine Seite des größten Quadrats?



(A) 8 cm (B) 10 cm (C) 12 cm (D) 14 cm (E) 16 cm

Lösung C
Die Seitenlänge des mittleren Quadrats misst 8 cm. Die Seitenlänge des größten Quadrats ist um 2 cm kürzer als die Summe der Seitenlängen der beiden kleineren Quadrate, also $8 + 6 - 2 = 12$ cm.

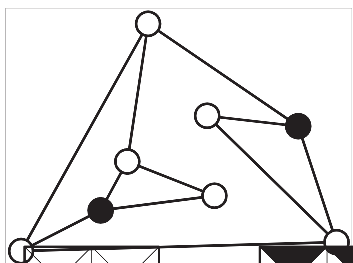
- 4 Punkte Beispiele -

9. Alice subtrahiert eine zweistellige Zahl von einer anderen zweistelligen Zahl. Danach übermalt sie zwei Ziffern in der Rechnung. Wie groß ist die Summe der beiden übermalten Ziffern?

(A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 13 (E) 15

Lösung D
$53 - 28 = 25$ und daher $5 + 8 = 13$

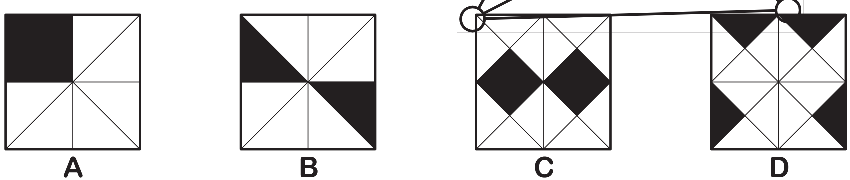
10. In der Abbildung stellen die Kreise Glühbirnen dar, die mit einigen anderen Glühbirnen verbunden sind. Zu Beginn sind alle Glühbirnen ausgeschaltet. Wenn man eine Glühbirne berührt, schalten sich diese Glühbirne und alle direkt benachbarten Glühbirnen ein. Wie viele Glühbirnen muss man mindestens berühren, um alle Glühbirnen einzuschalten?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung A
Siehe die gefärbten Glühbirnen in der Zeichnung.

11. Vier gleich große Quadrate werden

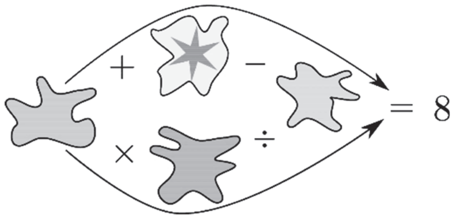


teilweise schwarz eingefärbt. In welchem der vier Quadrate ist die Gesamtfläche der schwarzen Teile am größten?

(A) A (B) B (C) C
(D) D (E) Die schwarze Gesamtfläche ist überall gleich groß.

Lösung E
In jedem Quadrat lassen sich die schwarzen Flächen zu einem kleinen schwarzen Quadrat wie in Abbildung A zusammensetzen. Es ist also immer ein Viertel des Quadrats gefärbt.

12. Die vier Flecken verdecken vier der fünf Zahlen 1, 2, 3, 4, 5. Die Rechnungen entlang der beiden Pfeile stimmen. Welche Zahl verbirgt sich hinter dem Fleck mit dem Stern?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung E
Oben: $4 + 5 - 1 = 8$
Unten: $4 \cdot 2 : 1 = 8$

13. Ein Löwe versteckt sich in einem von drei Zimmern. Auf der Tür zu Zimmer 1 steht: „Der Löwe ist nicht hier“. Auf der Tür zu Zimmer 2 steht: „Der Löwe ist hier“. Auf der Tür zu Zimmer 3 steht „ 2 + 3 = 5“. Genau eine der drei Aufschriften ist wahr. In welchem Zimmer befindet sich der Löwe?

(A) Zimmer 1 (B) Zimmer 2 (C) Zimmer 3
(D) Er kann in jedem Zimmer sein. (E) Er ist entweder in Zimmer 1 oder Zimmer 2.

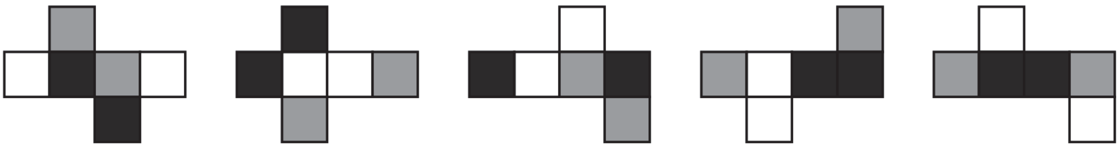
Lösung A
Die Aufschrift auf Zimmer 3 ist wahr, daher sind die anderen Aussagen falsch. Da die Aufschrift „Der Löwe ist nicht hier“ somit falsch ist, muss sich der Löwe im Zimmer 1 befinden.

14. Die beiden Mädchen Eva und Olga und die drei Buben Adam, Isaac und Urban spielen gemeinsam mit einem Ball. Wenn ein Mädchen den Ball hat, wirft sie ihn entweder zum zweiten Mädchen oder zu einem Buben. Jeder Bub wirft den Ball nur zu einem weiteren Buben, jedoch nicht zu jenem, von dem er den Ball gerade bekommen hat. Den ersten Wurf macht Eva zu Adam. Wer macht den 5. Wurf?

(A) Adam (B) Eva (C) Isaac (D) Olga (E) Urban

Lösung A
Da Eva den Ball beim ersten Wurf zu einem Buben schießt, wechselt der Ball ab nun nur noch zwischen den Buben.
Es gibt zwei Möglichkeiten:
Eva – Adam – Isaac – Urban – Adam
Eva – Adam – Urban – Isaac – Adam

15. Die Flächen eines Würfels sind entweder weiß, grau oder schwarz. Gegenüberliegende Flächen haben immer verschiedene Farben. Welches der folgenden Netze gehört nicht zu einem solchen Würfel?



(A) (B) (C) (D) (E)

Lösung E
Faltet man den Würfel so, dass die grauen und schwarzen Flächen die Seitenflächen des Würfels ergeben, sind die weißen Flächen die Grund- bzw. Deckfläche. Die weißen Flächen liegen einander gegenüber.

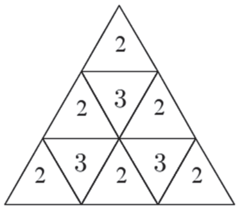
16. Aus einer Liste mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 wählt Monika 3 verschiedene Zahlen, deren Summe 8 beträgt. Aus derselben Liste wählt Daniel 3 verschiedene Zahlen, deren Summe 7 beträgt. Wie viele der Zahlen wurden sowohl von Monika als auch von Daniel gewählt?

(A) keine (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Es kann nicht bestimmt werden.

Lösung C
Die Zahlenkombinationen, die Monika wählen kann, sind {1; 2; 5} und {1; 3; 4}. Für Daniel kommt nur die Zahlenkombinationen {1; 2; 4} infrage. Egal, welche der beiden Kombinationen Monika wählt, es werden immer zwei Zahlen von Daniel auch gewählt.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Emily möchte gerne in jedes der freien kleinen Dreiecke eine Zahl schreiben. Die Summe der Zahlen in zwei Dreiecken mit einer gemeinsamen Seite soll immer gleich groß sein. Zwei Zahlen hat sie bereits eingetragen. Wie groß ist die Summe aller Zahlen in der Figur?



(A) 18 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) kann nicht errechnet werden

Lösung C
Die Zahlen werden wie in der Abbildung eingetragen. Die Summe der Zahlen ergibt 21.

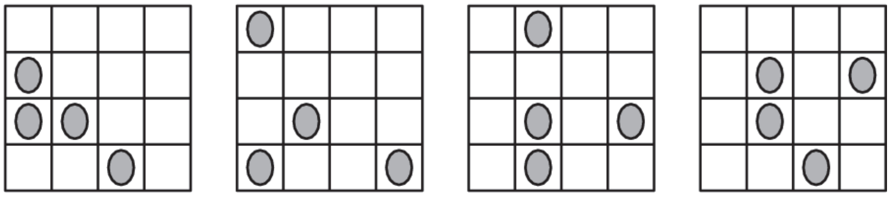
18. Hannes verwendet in einer Rechnung anstatt Ziffern die Buchstaben A, B, C und D. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern. Für welche Ziffer steht der Buchstabe B?

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\,CBA \\ \hline DDDD \end{array}$$

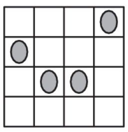
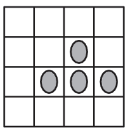
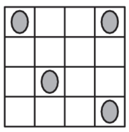
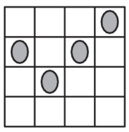
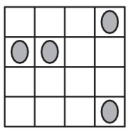
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung A
Es muss gelten A+C=DD und C+A=DD. Also muss B+B=0 mit B=0 sein, denn wäre B=5, so ergäbe sich ein Überhang auf die Hunderterstelle.

19. Vier Marienkäfer sitzen auf verschiedenen Zellen eines 4 x 4 Rasters. Einer schläft und bewegt sich nicht. Wenn man pfeift, krabbeln die anderen drei in eine benachbarte freie Zelle.
Sie können aufwärts, abwärts, nach rechts oder nach links krabbeln, dürfen aber auf keinen Fall zurück in die Zelle, von der sie gerade gekommen sind.
Wo könnten sich die Marienkäfer nach dem vierten Pfiff befinden?

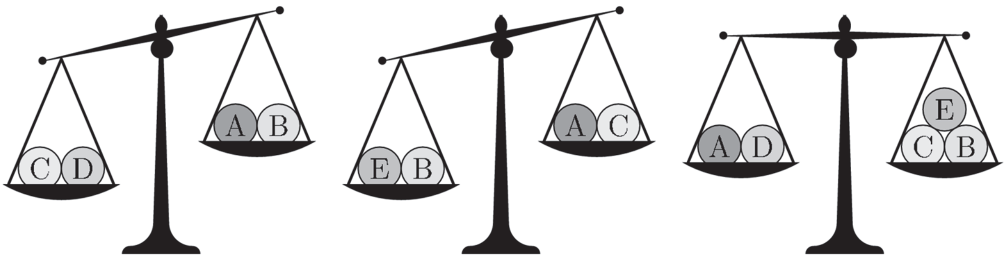


Ausgangs-stellung ***Nach dem ersten Pfiff*** ***Nach dem zweiten Pfiff*** ***Nach dem dritten Pfiff***

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung A
B stimmt nicht, da der Käfer in der 4. Spalte auf seine Ausgangsposition zurückkrabbelte.
C stimmt nicht, da der nicht schlafende Käfer in der 2. Spalte sich diagonal bewegte.
D stimmt nicht, da der Käfer in der 3. Spalte zwei Zellen nach oben krabbelte.
E stimmt nicht, da der schlafende die Position wechselte.

20. Die fünf Bälle wiegen 30 g, 50 g, 50 g, 50 g und 80 g.
Welcher der Bälle wiegt 30 g?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Lösung C
3. Waage: A+D=50+80 und B+C+E=30+50+50.
1. Waage: D=80 und A=50, denn andernfalls wäre C+D immer kleiner als A+B.
2. Waage: C=30, damit E+B größer ist als A+C.

21. Drei verschiedene Ziffern A, B und C werden ausgewählt. Danach wird die größtmögliche sechsstellige Zahl gebildet, in der die Ziffer A 3-mal, die Ziffer B 2-mal und die Ziffer C 1-mal auftritt.
Welche Darstellung ist für diese Zahl keinesfalls möglich?

(A) AAABBC (B) CAAABB (C) BBAAAC (D) AAABCB (E) AAACBB

Lösung D
Die Zahl AAABCB ist möglich, denn wäre C>B, so wäre AAACBB die größtmögliche Zahl. Wäre C<B, so wäre AAABBC die größtmögliche Zahl.

22. Die Summe aus Kathis Alter und dem Alter ihrer Mutter beträgt 36. Die Summe aus dem Alter ihrer Mutter und dem Alter ihrer Großmutter beträgt 81. Wie alt war Kathis Großmutter, als Kathi geboren wurde?

(A) 28 (B) 38 (C) 45 (D) 53 (E) 56

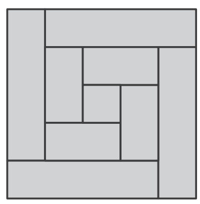
Lösung C
K+M=36 und G+M=81. Zieht man von der zweiten Gleichung die erste Gleichung ab, so erhält man für G-M, also das Alter der Großmutter bei Kathis Geburt, 45.

23. Nick möchte die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 in einige Gruppen so aufteilen, dass die Summe der Zahlen in jeder Gruppe gleich groß ist. Was ist die größte Anzahl an Gruppen, die er so bilden kann?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) eine andere Zahl

Lösung B
Es gilt $2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$. Die Summe der Zahlen der Gruppen muss ein Teiler von 54 sein. Die Teiler von 54 sind 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 und 56. Die Teiler 1, 2, 3, 6 und 9 fallen weg, da sie kleiner sind als die Zahl 10, die Nick addieren möchte. Für die Summe 18 ergeben sich drei Gruppen:
$2+7+9=18, 3+4+5+6=18$ und $8+10=18$.
Die Teiler 27 und 56 als Summen der Zahlen der Gruppen würde eine kleinere Gruppenanzahl bedeuten.

24. Die rechts abgebildete Figur besteht aus einem quadratischen und acht rechteckigen Teilen. Jeder Teil ist 8 cm breit. Peter fügt alle Teile zu einem langen, 8 cm breiten Rechteck zusammen. Wie lang ist dieses Rechteck?



(A) 150 cm (B) 168 cm (C) 196 cm (D) 200 cm (E) 232 cm

Lösung D
Es gibt ein Quadrat mit Seitenlänge 8 cm, vier Rechtecke mit Länge 16 cm und vier Rechtecke mit Länge 32 cm. Es ergibt sich $1\cdot 8+4\cdot 16+4\cdot 32=200$ cm.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018

15. 3. 2018

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7 – 8

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.

jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.:	3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.:	4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.:	5 Punkte
jede Frage ohne Antwort:	0 Punkte
jede falsche Antwort:	Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte

dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welches Ergebnis liefert die Rechnung $(20 + 18) : (20 - 18)$?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 34 (E) 36

2. Werden die Buchstaben des Wortes MAMA untereinander geschrieben, dann besitzt das Wort eine senkrechte Symmetrieachse. Für welches der folgenden Wörter gilt dasselbe?

(A) ADAM (B) BAUM (C) BOOT (D) LOGO (E) TOTO

3. Ein Dreieck ABC hat die Seitenlängen 6 cm, 10 cm und 11 cm. Ein gleichseitiges Dreieck XYZ besitzt den gleichen Umfang wie das Dreieck ABC. Welche Seitenlänge hat das Dreieck XYZ?

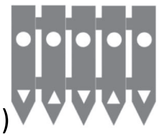
(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 27 cm

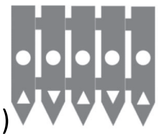
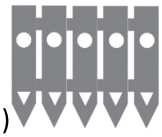
4. Welche Zahl muss man in der Gleichung für ☆ einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

$$\boxed{2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot ☆ \cdot 7}$$

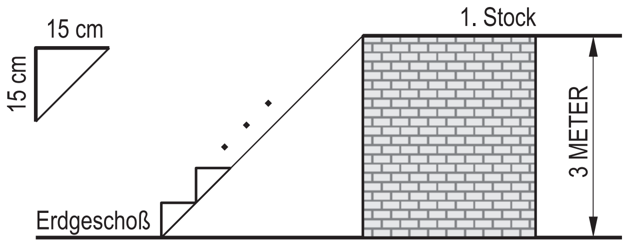
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

5. Der rechts abgebildete Zaun hat viele Löcher. Eines Morgens fällt der Zaun um und liegt auf dem Boden. Welches der folgenden Bilder zeigt den umgefallenen Zaun?

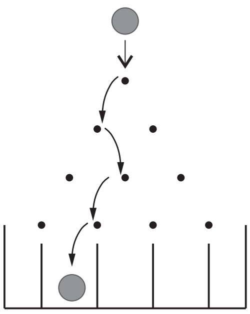

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

6. Bernd stellt für den Bau einer Stiege Stufen her, die 15 cm hoch und 15 cm tief sind (siehe Abbildung). Die Stiege soll vom Erdgeschoß bis in den ersten Stock reichen, welcher 3 m höher liegt. Wie viele Stufen muss Bernd herstellen?

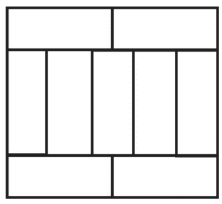


(A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25



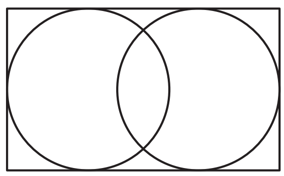
7. Bei einem Glücksspiel wird eine fallende Kugel von eingeschlagenen Nägeln jeweils entweder zum unmittelbar rechts oder links darunterliegenden Nagel abgelenkt. Ein möglicher Weg ist in der Abbildung dargestellt. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann der Ball in das zweite Fach von links gelangen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



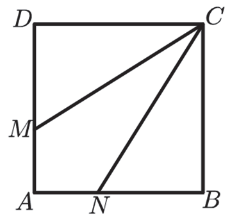
8. Ein großes Rechteck wird aus 9 gleich großen Rechtecken gebildet. Die längere Seite jedes kleinen Rechtecks ist 10 cm lang. Welchen Umfang besitzt das große Rechteck?

(A) 40 cm (B) 48 cm (C) 76 cm (D) 81 cm (E) 90 cm



9. In einem 11 cm langen und 7 cm breiten Rechteck werden zwei Kreise so eingezeichnet, dass sie jeweils drei Seiten des Rechtecks berühren. Wie groß ist der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise?

(A) 1 cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) 4 cm (E) 5 cm



10. Das Quadrat ABCD hat eine Seitenlänge von 3 cm. Die Punkte M und N, die auf den Seiten AD bzw. AB liegen, werden mit der Ecke C verbunden. Dadurch wird das Quadrat in drei Teile mit gleichem Flächeninhalt geteilt. Wie lang ist die Strecke DM?

(A) 0,5 cm (B) 1 cm (C) 1,5 cm (D) 2 cm (E) 2,5 cm

- 4 Punkte Beispiele -

11. Martina multipliziert zwei zweistellige Zahlen und übermalt danach einige Ziffern. Wie groß ist die Summe der drei Ziffern, die Martina übermalt hat?

(A) 5 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 14

12. Ein Rechteck wird in 40 gleich große Quadrate geteilt. Das Rechteck besteht aus mehr als einer Reihe von Quadraten. Andreas bemalt alle Quadrate der mittleren Reihe. Wie viele Quadrate hat er nicht bemalt?

(A) 20 (B) 30 (C) 32 (D) 35 (E) 39

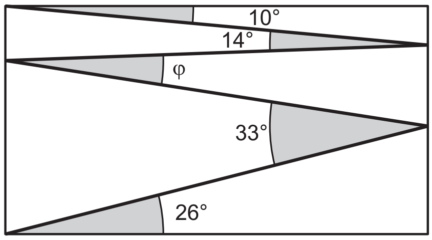
13. Philipp möchte auf ein halbes Gramm genau wissen, wie viel ein Buch wiegt. Seine Waage zeigt jedoch nur auf 10 g genau an, und darum wiegt er mehrere identische Bücher gemeinsam. Wie viele der identischen Bücher muss er mindestens auf die Waage legen, um sein Vorhaben zu erreichen?

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 50

14. Ein Löwe versteckt sich in einem von drei Zimmern. Auf der Tür zu Zimmer 1 steht: „Der Löwe ist hier“. Auf der Tür zu Zimmer 2 steht: „Der Löwe ist nicht hier“. Auf der Tür zu Zimmer 3 steht „2 + 3 = 2 x 3“. Genau eine der drei Aufschriften ist wahr. In welchem Zimmer befindet sich der Löwe?

(A) Zimmer 1 (B) Zimmer 2 (C) Zimmer 3
(D) Er kann in jedem Zimmer sein. (E) Er ist entweder in Zimmer 1 oder Zimmer 2.

15. Valentin zeichnet in einem Rechteck eine Zick-Zack-Linie wie im Bild. Er verwendet dabei die Winkel 10°, 14°, 33° und 26°. Wie groß ist der Winkel φ?



(A) 11° (B) 12° (C) 16° (D) 17° (E) 33°

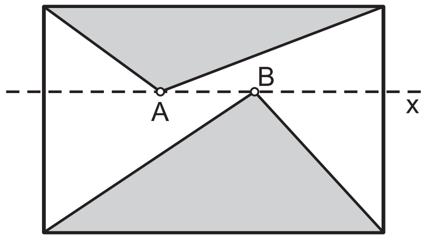
16. Alice schreibt drei Primzahlen auf, die alle kleiner als 100 sind. Dabei verwendet sie nur die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5, und zwar jede dieser Ziffern genau einmal. Welche der folgenden Primzahlen hat Alice ganz sicher aufgeschrieben?

(A) 2 (B) 5 (C) 31 (D) 41 (E) 53

17. Ein Hotel in der Karibik wirbt zurecht mit dem Slogan: „350 Sonnentage in jedem Jahr!” Wie viele Tage muss Herr Fröhlich in einem Jahr mit 365 Tagen in diesem Hotel verbringen, um sicher zwei aufeinanderfolgende Sonnentage genießen zu können?

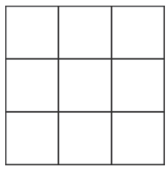
(A) 17 (B) 21 (C) 31 (D) 32 (E) 35

18. Die Abbildung zeigt ein Rechteck und eine Gerade x, die parallel zu einer Rechteckseite ist. Auf x liegen zwei Punkte A und B innerhalb des Rechtecks. Die Summe der Flächeninhalte der beiden grau gefärbten Dreiecke beträgt 10 cm². Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?



(A) 18 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 22 cm^2 (D) 24 cm^2 (E) Es hängt von der Lage der Punkte A und B ab.

19. Jakob schreibt in jedes Feld einer 3x3-Tabelle eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9. Dann berechnet er die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte. Fünf seiner Ergebnisse lauten 12, 13, 15, 16 und 17. Wie lautet die sechste Summe?



(A) 17 (B) 16 (C) 15 (D) 14 (E) 13

20. Auf einer geraden Linie werden von links nach rechts 11 Punkte markiert und ihre Abstände festgehalten. Die Summe der Abstände des ersten Punktes zu jedem der anderen Punkte beträgt 2018. Die Summe aller Abstände zwischen dem zweiten Punkt und allen anderen, inklusive des ersten Punktes, beträgt 2000. Welchen Abstand besitzen der erste und der zweite Punkt?

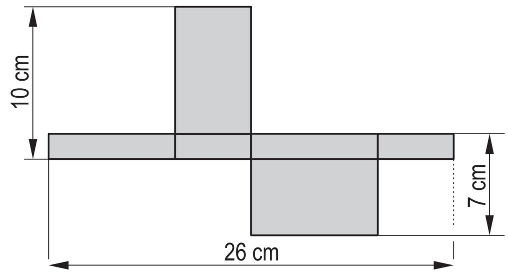
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 5 Punkte Beispiele -

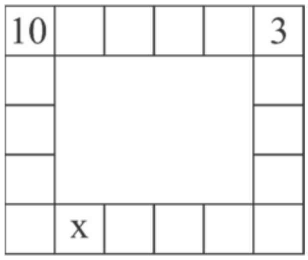
21. Bei einer Schulsprecherwahl gibt es drei Kandidaten. Es haben 130 Schüler gewählt. Die Wahl gewinnt jener Kandidat, der die meisten Stimmen bekommt. Derzeit haben Samuel 24, Kevin 29 und Alfred 37 Stimmen. Wie viele der noch nicht ausgezählten Stimmen muss Alfred mindestens bekommen, um die Wahl sicher zu gewinnen?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

22. In der Abbildung siehst du das aus Rechtecken bestehende Netz einer Schachtel. Wie groß ist das Volumen der Schachtel?

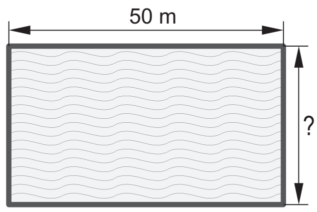


(A) 43 cm^3 (B) 70 cm^3 (C) 80 cm^3 (D) 100 cm^3 (E) 1820 cm^3



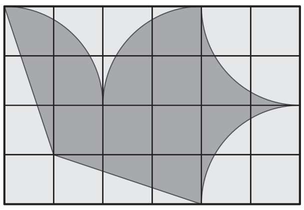
23. Rita möchte in jedes Quadrat der abgebildeten Figur eine Zahl schreiben. Jede Zahl soll dabei gleich der Summe der Zahlen sein, die in den benachbarten Quadraten stehen. Quadrate sind benachbart, wenn sie eine Seite gemeinsam haben. Zwei Zahlen hat sie bereits eingetragen. Welche Zahl wird sie in das Quadrat schreiben, das mit x bezeichnet ist?

(A) 10 (B) 7 (C) 13 (D) −13 (E) −3



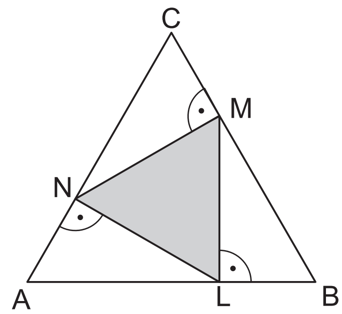
24. Simon läuft entlang des Randes rund um einen 50 m langen rechteckigen Swimmingpool, während Jan gleichzeitig Längen des Pools schwimmt. Simon läuft dreimal so schnell, wie Jan schwimmt. Während Jan 6 Längen schwimmt, schafft Simon 5 Runden um den Pool. Wie breit ist der Swimmingpool?

(A) 25 m (B) 40 m (C) 50 m (D) 80 m (E) 180 m



25. Lisas Flugverein gestaltet eine Fahne mit einer fliegenden „Taube“ auf einem 4x6-Raster. Die Fläche der „Taube“ beträgt 192 cm^2. Der Umfang der „Taube“ ist aus geraden Strecken und Kreisbögen zusammengesetzt. Welche Maße hat die Fahne?

(A) 6 cm x 4 cm (B) 12 cm x 8 cm (C) 20 cm x 12 cm
(D) 24 cm x 16 cm (E) 30 cm x 20 cm



26. Die Punkte N, M und L liegen auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC so, dass NM $\perp$ BC, ML $\perp$ AB und LN $\perp$ AC gilt. Die Fläche des Dreiecks ABC beträgt 36 cm^2. Welche Fläche besitzt das Dreieck LMN?

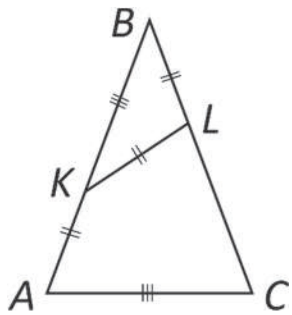
(A) 9 cm² (B) 12 cm² (C) 15 cm² (D) 16 cm² (E) 18 cm²

27. Anna, Bettina und Claudia gehen einkaufen. Bettina gibt um 85% weniger aus als Claudia. Anna gibt um 60% mehr aus als Claudia. Zusammen kaufen sie um 55 € ein. Wie viel Geld gibt Anna aus?

(A) 3 € (B) 20 € (C) 25 € (D) 26 € (E) 32 €

28. Viola übt Weitspringen. Im Mittel sprang sie bisher 3,80 m. Beim nächsten Sprung erreicht sie 3,99 m und so steigt ihr Mittel auf 3,81 m. Welche Weite muss sie beim nächsten Sprung erreichen, damit ihr Mittel auf 3,82 m steigt?

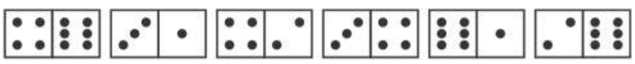
(A) 3,97 m (B) 4,00 m (C) 4,01 m (D) 4,03 m (E) 4,04 m



29. Im gleichschenkeligen Dreieck ABC (mit Basis AC) werden die Punkte K und L auf den Seiten AB bzw. BC so eingezeichnet, dass AK = KL = LB und KB = AC gilt. Wie groß ist der Winkel $\angle$ ABC?

(A) 30° (B) 35° (C) 36° (D) 40° (E) 44°

30. Beim Domino müssen die Spielsteine immer so gelegt werden, dass die aneinander liegenden Hälften von zwei benachbarten Dominosteinen die gleiche Augenzahl zeigen. Paul hat sechs Dominosteine vor sich liegen (siehe Abbildung).



Paul will in mehreren Schritten eine korrekte Anordnung herstellen. In jedem Schritt darf er entweder zwei beliebige Dominosteine miteinander vertauschen oder einen Dominostein um 180° drehen. Wie viele Schritte benötigt er mindestens, um die Dominosteine richtig anzuordnen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Das ist unmöglich.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Level: Kadett, Grade: 7 – 8

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered: 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2018
Level Kadett (Grade 7 and 8)
Austria – 15. 3. 2018

- 3 Point Examples -

1. Which result is obtained by the calculation $(20 + 18) : (20 - 18)$?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 34 (E) 36

2. If the letters of the Word MAMA are written underneath each other then the word has a vertical axis of symmetry. For which of these words does that also hold true?

(A) ADAM (B) BAUM (C) BOOT (D) LOGO (E) TOTO

3. A triangle ABC has side lengths 6 cm, 10 cm and 11 cm. An equilateral triangle XYZ has the same perimeter as the triangle ABC. What are the side lengths of the triangle XYZ?

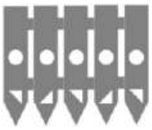
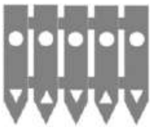
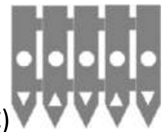
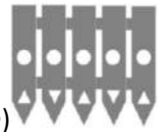
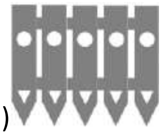
(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 27 cm

4. Which number has to replace the ☆ in the calculation so that it is true?

$$2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot ☆ \cdot 7$$

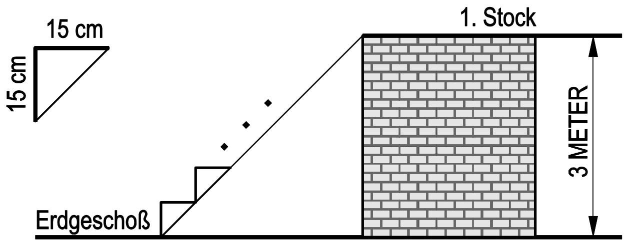
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

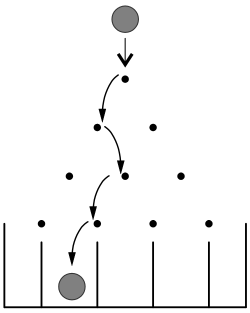
5. The fence on the right has many holes. One morning the fence falls over and lies on the floor. Which of the following pictures shows the fallen down fence?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Bernd produces steps for a staircase which are 15 cm high and 15 cm deep (see diagram). The staircase should reach from the ground floor to the first floor which is 3 m higher. How many steps does Bernd have to produce?

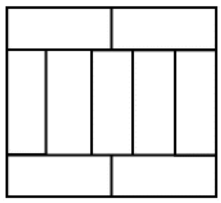
(A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25





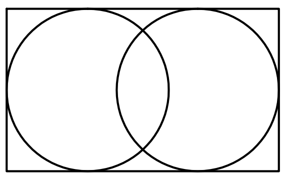
7. In a game of luck, A ball rolls downwards towards hammered nails and is diverted either to the right or the left by a nail immediately below it. One possible path is shown in the diagram. How many different ways are there for the ball to reach the second compartment from the left?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



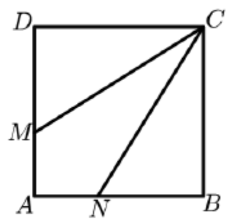
8. A large rectangle is made up of 9 equally big rectangles. The longer side of each small rectangle is 10 cm long. What is the perimeter of the large rectangle?

(A) 40 cm (B) 48 cm (C) 76 cm (D) 81 cm (E) 90 cm



9. Two circles are inscribed into an 11 cm long and 7 cm wide rectangle so that they each touch three sides of the rectangle. How big is the distance between the centres of the two circles?

(A) 1 cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) 4 cm (E) 5 cm



10. The square ABCD has side length 3 cm. The points M and N, which lie on the sides AD and AB respectively, are joined to the corner C. That way the square is split up into three parts with equal area. How long is the line segment DM?

(A) 0.5 cm (B) 1 cm (C) 1.5 cm (D) 2 cm (E) 2.5 cm

- 4 Point Examples -

11. Martina multiplies two, two-digit numbers and then paints over some of the digits. How big is the sum of the three digits that Martina has painted over?

(A) 5 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 14

12. A rectangle is split up into 40 equally big squares. The rectangle consists of more than one row of squares. Andreas colours in all squares of the middle row. How many squares did he not colour in?

(A) 20 (B) 30 (C) 32 (D) 35 (E) 39

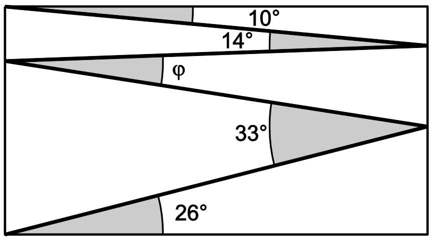
13. Philipp wants to know how much his book weighs correct to half a gram. However, his scale only shows correct to 10 g and therefore he weighs several identical books all together. What is the minimum number of identical books he has to put on the scale in order to reach his aim?

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 50

14. A lion hides in one of three rooms. On the door to room number 1 a note reads: „The lion is here“. On the door to room number 2 a note reads: „The lion is not here“. On the door to room number 3 a note reads: „2 + 3 = 2 x 3“. Exactly one of the three notes is true. Which room is the lion in?

(A) Room 1 (B) Room 2 (C) Room 3
(D) It can be in any room. (E) It is either in room 1 or room 2.

15. Valentin draws a zig-zag line inside a rectangle as shown in the diagram. For that he uses the angles 10°, 14°, 33° and 26°. How big is angle φ?



(A) 11° (B) 12° (C) 16° (D) 17° (E) 33°

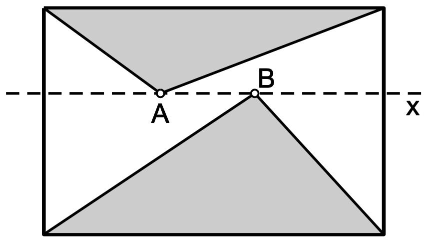
16. Alice writes down three prime numbers that are all less than 100. She only uses the digits 1, 2, 3, 4 and 5, in fact she uses each digit exactly once. Which of the following prime numbers did she definitely write down?

(A) 2 (B) 5 (C) 31 (D) 41 (E) 53

17. A hotel in the carribean correctly advertises using the slogan: „350 days of sun in the year!" How many days does Mr. Happy have to spend in the hotel in a year with 365 days to be guaranteed to have two consecutive days of sunshine to enjoy?

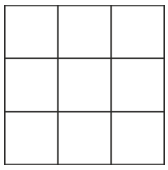
(A) 17 (B) 21 (C) 31 (D) 32 (E) 35

18. The diagram shows a rectangle and a straight line x, which is parallel to one of the sides of the rectangle. There are two points A and B on x inside the rectangle. The sum of the areas of the two triangles shaded in grey is 10 cm². How big is the area of the rectangle?



(A) 18 cm^2 (B) 20 cm^2 (C) 22 cm^2 (D) 24 cm^2 (E) It depends on the position of the points A and B.

19. Jakob writes one of the natural numbers 1 to 9 into each cell of the 3x3-table. Then he works out the sum of the numbers in each row and in each column. Five of his results are 12, 13, 15, 16 and 17. What is the sixth sum?



(A) 17 (B) 16 (C) 15 (D) 14 (E) 13

20. 11 points are marked left to right on a straight line and their distances recorded. The sum of the distances from the first point to every other point is 2018. The sum of all distances from the second point to every other point, including the first point, is 2000. What is the distance between the first and the second point?

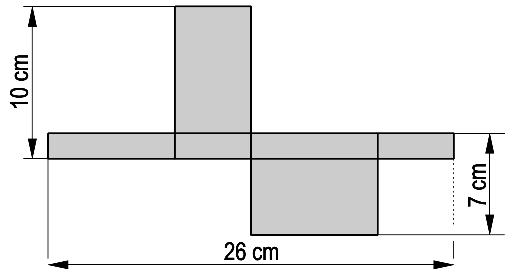
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 5 Point Examples -

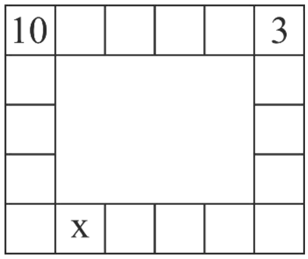
21. At an election for student representatives there are three candidates. 130 students have voted. The candidate that has the most votes wins. Currently Samuel has 24, Kevin 29 and Alfred 37 votes. How many of the currently not yet counted votes does Alfred need to get in order to definitely win the election?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

22. The diagram shows the net of a box consisting only of rectangles. How big is the volume of the box?



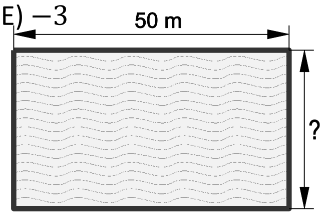
(A) 43 cm³ (B) 70 cm³ (C) 80 cm³ (D) 100 cm³ (E) 1820 cm³



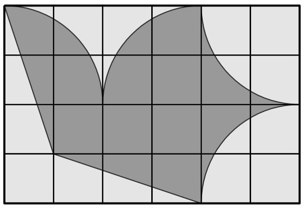
23. Rita wants to write a number into every square of the diagram shown. Every number should be equal to the sum of the two numbers from the adjacent squares. Squares are adjacent if they share one edge. Two numbers are already given. Which number is she going to write into the square marked with x?

(A) 10 (B) 7 (C) 13 (D) -13 (E) -3

24. Simon runs along the edge round a 50 m long rectangular swimming pool, while at the same time Jan swims lengths in the pool. Simon runs three times as fast as Jan swims. While Jan swims 6 lengths, Simon manages 5 rounds around the pool. How wide is the swimming pool?



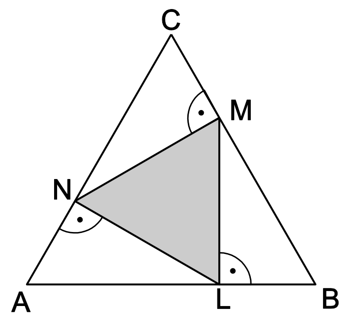
(A) 25 m (B) 40 m (C) 50 m (D) 80 m (E) 180 m



25. Lisas aviation club designs a flag with a flying „dove“ on a 4x6-grid. The area of the „dove“ is 192 cm². The perimeter of the „dove“ is made up of straight lines and circular arcs. What measurements does the flag have?

(A) 6 cm x 4 cm (B) 12 cm x 8 cm (C) 20 cm x 12 cm
(D) 24 cm x 16 cm (E) 30 cm x 20 cm

26. The points N, M and L lie on the sides of an equilateral triangle ABC so that NM ⊥ BC, ML ⊥ AB and LN ⊥ AC holds true. The area of the triangle ABC is 36 cm². What is the area of the triangle LMN?



(A) 9 cm² (B) 12 cm² (C) 15 cm² (D) 16 cm² (E) 18 cm²

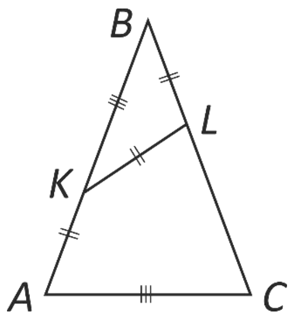
27. Anna, Bettina and Claudia go shopping. Bettina spends 85% less than Claudia. Anna spends 60% more than Claudia. Together they spend 55 €. How much money does Anna spend?

(A) 3 € (B) 20 € (C) 25 € (D) 26 € (E) 32 €

28. Viola practices long-jumping. On average she has jumped 3.80 m so far. On the next jump she reaches 3.99 m and thus the mean increases to 3.81 m. How far does she have to jump on her next attempt in order to increase her mean to 3.82 m?

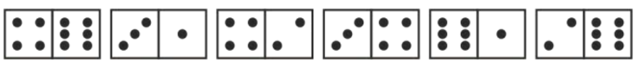
(A) 3.97 m (B) 4.00 m (C) 4.01 m (D) 4.03 m (E) 4.04 m

29. In the isosceles triangle ABC (with base AC) the points K and L are added on the sides AB and BC respectively so that AK = KL = LB and KB = AC. How big is the angle ∠ ABC?



(A) 30° (B) 35° (C) 36° (D) 40° (E) 44°

30. In a game of dominoes the tiles always have to be placed so that the touching halves of two adjacent domino tiles show the same number of dots. Paul has six domino tiles in front of him (see diagram).



In several steps Paul tries to arrange them in a correct order. In each step he is either allowed to swap any two domino tiles or he is allowed to turn one domino tile 180° around. What is the minimum number of steps he needs in order to arrange the domino tiles correctly?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) This is impossible.

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2018 – Lösungen

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welches Ergebnis liefert die Rechnung $(20 + 18) : (20 - 18)$?

(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 34 (E) 36

Lösung: $(20 + 18) : (20 - 18) = 38 : 2 = 19$ **Lösung B**

2. Werden die Buchstaben des Wortes MAMA untereinander geschrieben, dann besitzt das Wort eine senkrechte Symmetrieachse. Für welches der folgenden Wörter gilt dasselbe?

(A) ADAM (B) BAUM (C) BOOT (D) LOGO (E) TOTO

Lösung: Eine senkrechte Symmetrieachse gibt es nur dann, wenn jeder einzelne Buchstabe eine senkrechte Symmetrieachse hat. Die Buchstaben D, B, L und G haben keine, also hat nur das Wort TOTO eine senkrechte Symmetrieachse, wenn man die Buchstaben untereinander schreibt. **Lösung E**

3. Ein Dreieck ABC hat die Seitenlängen 6 cm, 10 cm und 11 cm. Ein gleichseitiges Dreieck XYZ besitzt den gleichen Umfang wie das Dreieck ABC. Welche Seitenlänge hat das Dreieck XYZ?

(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 10 cm (D) 11 cm (E) 27 cm

Lösung: Das Dreieck ABC hat wie das gleichseitige Dreieck XYZ den Umfang $6 + 10 + 11 = 27$ (in cm). Wegen $27 : 3 = 9$ hat das Dreieck XYZ die Seitenlänge 9 cm. **Lösung B**

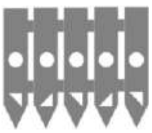
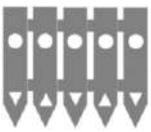
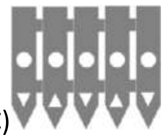
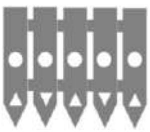
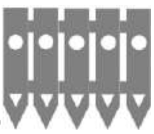
4. Welche Zahl muss man in der Gleichung für ☆ einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

$$\boxed{2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot ☆ \cdot 7}$$

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 15

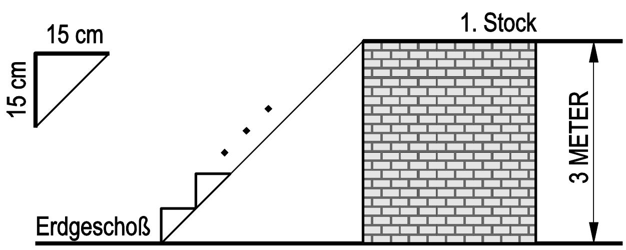
Lösung: ☆ $= \frac{2 \cdot 18 \cdot 14}{6 \cdot 7} = 12$ **Lösung D**

5. Der rechts abgebildete Zaun hat viele Löcher. Eines Morgens fällt der Zaun um und liegt auf dem Boden. Welches der folgenden Bilder zeigt den umgefallenen Zaun?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

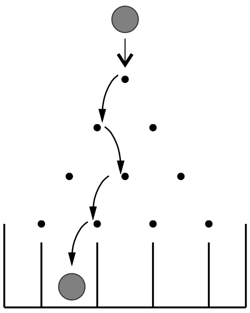
Lösung: Im 1., 3. und 5. Brett zeigen des Zauns zeigen die dreieckigen Löcher nach oben, also zu den Spitzen der Bretter, im 2. Und 4. Brett nach unten. Die runden Löcher sind dem oberen Querbrett/den Spitzen des Zauns näher als dem unteren Querbrett. **Lösung C**

6. Bernd stellt für den Bau einer Stiege Stufen her, die 15 cm hoch und 15 cm tief sind (siehe Abbildung). Die Stiege soll vom Erdgeschoß bis in den ersten Stock reichen, welcher 3 m höher liegt. Wie viele Stufen muss Bernd herstellen?



(A) 8 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25

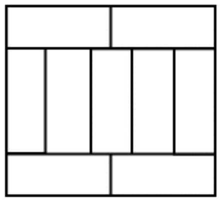
Lösung: Jede Stufe ist 15 cm hoch. Weil die Stiege einen Höhenunterschied von 3 m = 300 cm überwinden muss, werden $300 : 15 = 20$ Stufen benötigt. **Lösung D**



7. Bei einem Glücksspiel wird eine fallende Kugel von eingeschlagenen Nägeln jeweils entweder zum unmittelbar rechts oder links darunterliegenden Nagel abgelenkt. Ein möglicher Weg ist in der Abbildung dargestellt. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann der Ball in das zweite Fach von links gelangen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

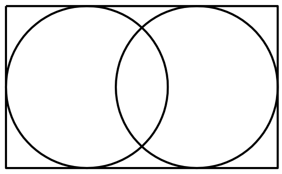
Lösung: Um in das zweite Fach von links zu gelangen, muss die Kugel genau dreimal nach links und einmal nach rechts abgelenkt werden. Diese eine Ablenkung nach rechts kann am obersten Nagel oder in der zweiten, dritten oder vierten Nagelreihe geschehen. Daher gibt es 4 verschiedene Wege. **Lösung C**



8. Ein großes Rechteck wird aus 9 gleich großen Rechtecken gebildet. Die längere Seite jedes kleinen Rechtecks ist 10 cm lang. Welchen Umfang besitzt das große Rechteck?

(A) 40 cm (B) 48 cm (C) 76 cm (D) 81 cm (E) 90 cm

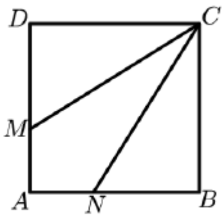
Lösung: Die Länge des großen Rechtecks ist doppelt so groß wie die Länge eines kleinen Rechtecks, beträgt also 20 cm. Weil diese Länge gleichzeitig fünfmal so groß wie die Breite eines kleinen Rechtecks ist, ist jedes kleine Rechteck 4 cm breit. Daher beträgt die Breite des großen Rechtecks $2 \cdot 4 + 10 = 18$ cm, der Umfang des Rechtecks ist also $2 \cdot (20 + 18) = 76$ cm. **Lösung C**



9. In einem 11 cm langen und 7 cm breiten Rechteck werden zwei Kreise so eingezeichnet, dass sie jeweils drei Seiten des Rechtecks berühren. Wie groß ist der Abstand der Mittelpunkte der beiden Kreise?

(A) 1 cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) 4 cm (E) 5 cm

Lösung: Weil beide Kreise die obere und untere Seite des Rechtecks berühren, ist ihr Radius halb so groß wie die Breite des Rechtecks, beträgt also 3,5 cm. Somit sind ihre Mittelpunkte 3,5 cm von der linken beziehungsweise 3,5 cm von der rechten Seite des Rechtecks entfernt. Daher ist der Abstand ihrer Mittelpunkte $11 - 2 \cdot 3{,}5 = 4$ cm. **Lösung D**



10. Das Quadrat ABCD hat eine Seitenlänge von 3 cm. Die Punkte M und N, die auf den Seiten AD bzw. AB liegen, werden mit der Ecke C verbunden. Dadurch wird das Quadrat in drei Teile mit gleichem Flächeninhalt geteilt. Wie lang ist die Strecke DM?

(A) 0,5 cm (B) 1 cm (C) 1,5 cm (D) 2 cm (E) 2,5 cm

Lösung: Weil die rechtwinkligen Dreiecke NBC und MCD denselben Flächeninhalt haben und wegen $\overline{BC} = \overline{CD}$ gilt auch $\overline{NB} = \overline{MD}$ und $\overline{AN} = \overline{AM}$. Daher ist das Viereck ANCM ein Deltoid mit Symmetrieachse AC. Dieses Deltoid hat denselben Flächeninhalt wie das Dreieck NBC und das Dreieck MCD, wenn die Fläche des Dreiecks ACM halb so groß ist wie die des Dreiecks MCD. Weil die „Höhe" des Punktes C (über AM bzw. MD) in beiden Dreiecken dieselbe ist, muss also DM doppelt so lang wie AM sein. Wegen AD = 3 cm gilt AM = 1 cm und DM = 2 cm.

Anders kann man auch folgendermaßen argumentieren: Das Quadrat hat einen Flächeninhalt von 9cm², daher hat jeder der drei gleich großen Teile einen Inhalt von 3cm². Das Dreieck CDM hat die Höhe DC = 3cm. Wegen "Fläche = Grundlinie mal Höhe Drittel" muss die Grundlinie DM genau 2cm lang sein. **Lösung D**

- 4 Punkte Beispiele -

11. Martina multipliziert zwei zweistellige Zahlen und übermalt danach einige Ziffern. Wie groß ist die Summe der drei Ziffern, die Martina übermalt hat?

(A) 5 (B) 6 (C) 9 (D) 12 (E) 14

Lösung: Die Einerziffer des zweiten Faktors ergibt – multipliziert mit der Einerziffer 3 des ersten Faktors – ein Produkt, das auf 2 endet. Das ist nur möglich, wenn der zweite Faktor auf 4 endet. Daher ist der zweite Faktor gleich

24. Weil das Produkt kleiner als 400 ist, muss der erste Faktor kleiner als 20 sein. Daher hat Martina das Produkt von 13 und 24 berechnet, wegen $13 \cdot 24 = 312$ sind 1, 4 und 1 die übermalten Ziffern; $1 + 4 + 1 = 6$. **Lösung B**

12. Ein Rechteck wird in 40 gleich große Quadrate geteilt. Das Rechteck besteht aus mehr als einer Reihe von Quadraten. Andreas bemalt alle Quadrate der mittleren Reihe. Wie viele Quadrate hat er nicht bemalt?

(A) 20 (B) 30 (C) 32 (D) 35 (E) 39

Lösung: Eine eindeutige mittlere Reihe gibt es nur dann, wenn die Anzahl aller Reihen ungerade ist. Die Anzahl der Reihen muss darüber hinaus ein Teiler von 40 größer als 1 sein, also besteht das Rechteck aus 5 Reihen, und die mittlere Reihe besteht aus 8 Quadraten. Daher hat Andreas 32 Quadrate nicht bemalt. **Lösung C**

13. Philipp möchte auf ein halbes Gramm genau wissen, wie viel ein Buch wiegt. Seine Waage zeigt jedoch nur auf 10 g genau an, und darum wiegt er mehrere identische Bücher gemeinsam. Wie viele der identischen Bücher muss er mindestens auf die Waage legen, um sein Vorhaben zu erreichen?

(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 50

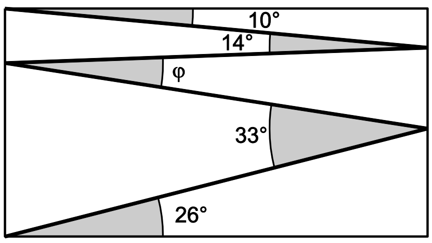
Lösung: Es genügt sicher, 20 Bücher auf die Waage zu legen: Wiegt ein Buch x Gramm, so wiegen 20 Bücher 20x Gramm. Diese Masse kann man auf 10 Gramm genau ablesen, damit kann man die Masse eines Buchs auf 0,5 Gramm genau bestimmen.
Es genügt nicht, 15 Bücher abzuwiegen: Nehmen wir an, ein Buch wiegt x Gramm, dann zeigt die Waage für 15 Bücher einen Wert zwischen 15x - 10 Gramm und 15x + 10 Gramm an. Dividiert man durch 15, erhält man daher einen Wert zwischen x - 0.67 Gramm und x + 0.67 Gramm; im schlimmsten Fall liegt man also um bis zu 0.67 Gramm daneben. (Anmerkung: Es lässt sich zeigen, dass dasselbe Problem auch noch bei 19 Büchern auf der Waage auftritt.)
Lösung D

14. Ein Löwe versteckt sich in einem von drei Zimmern. Auf der Tür zu Zimmer 1 steht: „Der Löwe ist hier“. Auf der Tür zu Zimmer 2 steht: „Der Löwe ist nicht hier“. Auf der Tür zu Zimmer 3 steht „2 + 3 = 2 x 3“. Genau eine der drei Aufschriften ist wahr. In welchem Zimmer befindet sich der Löwe?

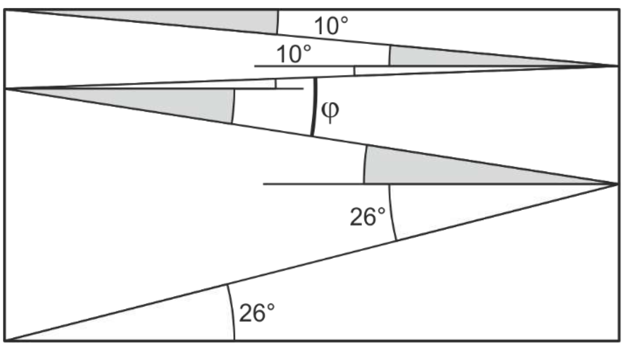
(A) Zimmer 1 (B) Zimmer 2 (C) Zimmer 3
(D) Er kann in jedem Zimmer sein. (E) Er ist entweder in Zimmer 1 oder Zimmer 2.

Lösung: Die Aufschrift „2 + 3 = 2 x 3“ auf der Tür zu Zimmer 3 ist offensichtlich falsch, also ist entweder die Aufschrift auf Tür 1 oder die Aufschrift auf Tür 2 die einzige wahre.
Auf Tür 1 steht die Wahrheit genau dann, wenn sich der Löwe in Zimmer 1 befindet. Dann ist er nicht in Zimmer 2, also steht auch auf Tür 2 die Wahrheit im Widerspruch dazu, dass genau eine Aufschrift wahr ist.
Daher steht die Wahrheit nur auf Tür 2, der Löwe befindet sich also sicher nicht in Zimmer 2. Wäre er in Zimmer 1, dann wäre auch die Aufschrift auf Tür 1 wahr.
Somit befindet sich der Löwe in Zimmer 3. **Lösung C**

15. Valentin zeichnet in einem Rechteck eine Zick-Zack-Linie wie im Bild. Er verwendet dabei die Winkel 10°, 14°, 33° und 26°. Wie groß ist der Winkel φ ?



(A) 11° (B) 12° (C) 16° (D) 17° (E) 33°



Lösung: Die Summe der drei Winkel auf der linken Seite stimmt mit der Summe auf der rechten Seite überein: Zeichnet man Parallele zu den „waagrechten“ Rechteckseiten durch die Scheitel aller markierten Winkel ein, so gibt es zu jedem entstehenden Teilwinkel auf der rechten Seite genau einen gleich großen Parallelwinkel auf der linken Seite. Daher ist die Summe aller Winkel auf der linken Seite gleich der Summe aller Winkel auf der rechten Seite und es gilt
$\varphi + 10° + 26° = 14° + 33°$, also $\varphi = 11°$. **Lösung A**

16. Alice schreibt drei Primzahlen auf, die alle kleiner als 100 sind. Dabei verwendet sie nur die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5, und zwar jede dieser Ziffern genau einmal. Welche der folgenden Primzahlen hat Alice ganz sicher aufgeschrieben?

(A) 2 (B) 5 (C) 31 (D) 41 (E) 53

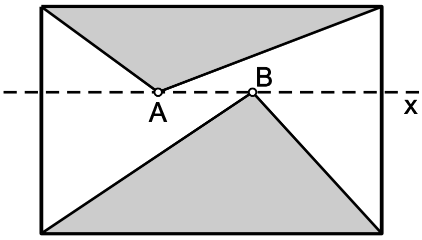
Lösung: Weil keine Zahl mit Einerziffer 4 eine Primzahl ist, kann Alice die Ziffer 4 nur als Zehnerziffer einer Primzahl verwendet haben. Weil 42 und 45 keine Primzahlen sind, hat sie also sicher entweder 41 oder 43 aufgeschrieben. Angenommen, sie hat 43 aufgeschrieben. 1 ist keine Primzahl, also müsste sie eine Primzahl entweder aus den Ziffern 1 und 2 oder aus den Ziffern 1 und 5 gebildet haben. Das ist nicht möglich, weil keine der in Frage kommenden Zahlen 12, 15, 21, 51 eine Primzahl ist. Also hat sie sicher die Primzahl 41 aufgeschrieben. Insgesamt hat sie entweder 5, 23, 41 oder 2, 41, 53 aufgeschrieben. (Beachte: Die Zahl 43 kann auch dadurch ausgeschlossen werden, dass sie unter den Antwortmöglichkeiten nicht vorkommt.) **Lösung D**

17. Ein Hotel in der Karibik wirbt zurecht mit dem Slogan: „350 Sonnentage in jedem Jahr!" Wie viele Tage muss Herr Fröhlich in einem Jahr mit 365 Tagen in diesem Hotel verbringen, um sicher zwei aufeinanderfolgende Sonnentage genießen zu können?

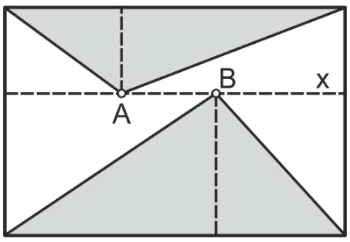
(A) 17 (B) 21 (C) 31 (D) 32 (E) 35

Lösung: Wenn tatsächlich 350 von 365 Tagen sicher Sonnentage sind, dann muss Herr Fröhlich mit höchstens 15 Tagen ohne Sonnenschein rechnen. Wenn er nur 31 Tage im Hotel verbringt, dann könnten sich, beginnend mit einem Sonnentag, Sonnentage und Tage ohne Sonnenschein abwechseln, und er hätte keine Garantie für zwei auf einander folgende Sonnentage. Mit 32 Tagen kann er aber garantiert zwei aufeinanderfolgende Sonnentage während des Aufenthalts genießen. **Lösung D**

18. Die Abbildung zeigt ein Rechteck und eine Gerade x, die parallel zu einer Rechteckseite ist. Auf x liegen zwei Punkte A und B innerhalb des Rechtecks. Die Summe der Flächeninhalte der beiden grau gefärbten Dreiecke beträgt 10 cm². Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?



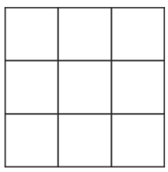
(A) 18 cm² (B) 20 cm² (C) 22 cm² (D) 24 cm²
(E) Es hängt von der Lage der Punkte A und B ab.



Lösung 1: Unterteilt man das untere graue Dreieck durch eine Strecke durch B normal zu x, das obere graue Dreieck durch eine Strecke durch A normal zu x jeweils in zwei rechtwinklige Dreiecke, so erkennt man, dass jedes der vier entstehenden rechtwinkligen Dreiecks halb so groß ist wie eines der vier durch x und eine der Normalen begrenzten Teilrechte des großen Rechtecks. Daher nehmen die grauen Dreiecke zusammen die halbe Rechtecksfläche ein.
Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt somit 2·10 cm² = 20 cm².

Lösung 2: Die Flächeninhalte der grauen Dreiecke sind unabhängig von der Lage der Punkte A und B auf x, weil die Gerade x parallel zu zwei Seiten des Rechtecks ist. Daher können A und B jeweils auf eine der beiden senkrechten Seiten verschoben werden, und es ist klar, dass das untere Dreieck den halben Flächeninhalt des unter x liegenden Teils des Rechtecks, das obere Dreieck den halben Flächeninhalt des über x liegenden Teils des Rechtecks hat. Daher ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie die Summe der beiden Dreiecksflächen, beträgt also 20 cm². **Lösung B**

19. Jakob schreibt in jedes Feld einer 3x3 Tabelle eine der natürlichen Zahlen von 1 bis 9. Dann berechnet er die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte. Fünf seiner Ergebnisse lauten 12, 13, 15, 16 und 17. Wie lautet die sechste Summe?



(A) 17 (B) 16 (C) 15 (D) 14 (E) 13

Lösung: Die Summe der natürlichen Zahlen 1 bis 9 ist 45. In der Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte kommt jede dieser Zahlen genau zweimal vor, damit ist Summe aller 6 möglichen Ergebnisse $2 \cdot 45 = 90$. Die sechste Summe ist also gleich $90 - (12 + 13 + 15 + 16 + 17) = 17$.
Eine mögliche Anordnung, die diese Bedingungen erfüllt ist 9 – 2 – 6 in der ersten Zeile, 7 – 5 – 4 in der zweiten und 1 – 8 – 3 in der dritten. **Lösung A**

20. Auf einer geraden Linie werden von links nach rechts 11 Punkte markiert und ihre Abstände festgehalten. Die Summe der Abstände des ersten Punktes zu jedem der anderen Punkte beträgt 2018. Die Summe aller Abstände zwischen dem zweiten Punkt und allen anderen, inklusive des ersten Punktes, beträgt 2000. Welchen Abstand besitzen der erste und der zweite Punkt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Es sei x der Abstand zwischen erstem und zweitem Punkt. Dann ist die Summe der Abstände vom ersten Punkt zu allen anderen Punkten einerseits gleich 2018, andererseits gleich $2000 + 9x$: In der ersten Summe ist der Abstand zwischen erstem und zweitem Punkt schon berücksichtigt; jeder Abstand eines der neun weiter rechts liegenden Punkte (3., 4., 5., … , 11. Punkt) vom ersten Punkt ist um x größer als der entsprechende Abstand vom zweiten Punkt. Aus $2000 + 9x = 2018$ folgt unmittelbar $x = 2$. **Lösung B**

- 5 Punkte Beispiele -

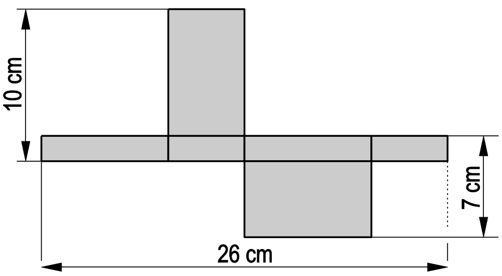
21. Bei einer Schulsprecherwahl gibt es drei Kandidaten. Es haben 130 Schüler gewählt. Die Wahl gewinnt jener Kandidat, der die meisten Stimmen bekommt. Derzeit haben Samuel 24, Kevin 29 und Alfred 37 Stimmen. Wie viele der noch nicht ausgezählten Stimmen muss Alfred mindestens bekommen, um die Wahl sicher zu gewinnen?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

Lösung: Falls Kevin zu seinen aktuell 29 Stimmen keine weiteren mehr erhält, fällt die Entscheidung der Wahl zwischen Alfred und Samuel, und Alfred braucht für den sicheren Wahlsieg mehr als die Hälfte der nicht auf Kevin entfallenen Stimmen, also mehr als die Hälfte von 130 – 29 = 101 Stimmen und somit mindestens 51. Dazu müsste er noch 14 Stimmen mehr bekommen.
Falls Samuel zu seinen aktuell 24 Stimmen keine weiteren mehr erhält, fällt die Entscheidung der Wahl zwischen Alfred und Kevin, und Alfred braucht für den sicheren Wahlsieg mehr als die Hälfte der nicht auf Samuel entfallenen Stimmen, also mehr als die Hälfte von 130 – 24 = 106 Stimmen und somit mindestens 54. Dazu benötigt er noch 17 weitere Stimmen.
Somit ist ihm mit 17 mindestens weiteren Stimmen jedenfalls der Wahlsieg sicher. **Lösung E**

22. In der Abbildung siehst du das aus Rechtecken bestehende Netz einer Schachtel. Wie groß ist das Volumen der Schachtel?

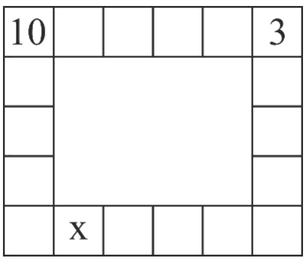
(A) 43 cm³ (B) 70 cm³ (C) 80 cm³ (D) 100 cm³ (E) 1820 cm³



Lösung: Bezeichnet man Länge, Breite und Höhe der Schachtel mit a, b und h, so ergeben sich aus der Abbildung die Gleichungen

$$2 \cdot (a + b) = 26, \qquad a + h = 10, \qquad b + h = 7.$$

Wegen der zweiten und dritten Gleichung ist die Länge a um 3cm größer als die Breite b. Weil die Summe von Länge und Breite aufgrund der ersten Gleichung gleich 13 cm ist, erhalten wir als Länge der Schachtel a = 8 cm und als Breite der Schachtel b = 5 cm. Aus der zweiten oder dritten Gleichung folgt dann h = 2cm. Wegen $8 \cdot 5 \cdot 2 = 80$ hat die Schachtel ein Volumen von 80 cm³. **Lösung C**

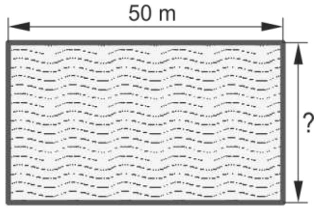


23. Rita möchte in jedes Quadrat der abgebildeten Figur eine Zahl schreiben. Jede Zahl soll dabei gleich der Summe der Zahlen sein, die in den benachbarten Quadraten stehen. Quadrate sind benachbart, wenn sie eine Seite gemeinsam haben. Zwei Zahlen hat sie bereits eingetragen. Welche Zahl wird sie in das Quadrat schreiben, das mit x bezeichnet ist?

(A) 10 (B) 7 (C) 13 (D) -13 (E) -3

Lösung: Steht rechts von 10 die Zahl a, dann stehen in den weiteren Quadraten am oberen Rand der Reihe nach die Zahlen a-10, -10, -a und 3. Daraus folgt a = 7, also stehen am oberen Rand der Figur von links nach rechts die Zahlen 10, 7, -3, -10, -7, 3.
Unterhalb von 10 stehen daher der Reihe nach 3, -7, -10 und (in der linken unteren Ecke) -3. Folglich steht im mit x markierten Quadrat die Zahl 7. **Lösung B**

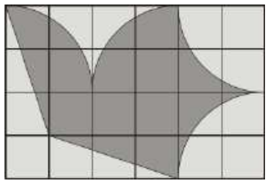
24. Simon läuft entlang des Randes rund um einen 50 m langen rechteckigen Swimmingpool, während Jan gleichzeitig Längen des Pools schwimmt. Simon läuft dreimal so schnell, wie Jan schwimmt. Während Jan 6 Längen schwimmt, schafft Simon 5 Runden um den Pool. Wie breit ist der Swimmingpool?



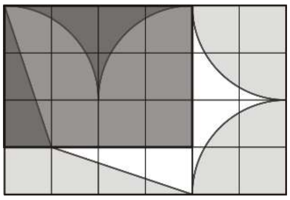
(A) 25 m (B) 40 m (C) 50 m (D) 80 m (E) 180 m

Lösung: Mit der dreifachen Geschwindigkeit von Jan würde Simon in der Zeit, in der Jan 6 Längen schwimmt, 18 Längen laufen. Tatsächlich läuft er 5 Runden um den Pool, als 10 Längen und 10 Breiten. Daher sind 8 Längen gleich lang wie 10 Breiten. Bei einer Länge von 50 m ist der Pool somit 40 m breit. **Lösung B**

25. Lisas Flugverein gestaltet eine Fahne mit einer fliegenden „Taube“ auf einem 4x6 Raster. Die Fläche der „Taube“ beträgt 192 cm². Der Umfang der „Taube“ ist aus geraden Strecken und Kreisbögen zusammengesetzt. Welche Maße hat die Fahne?

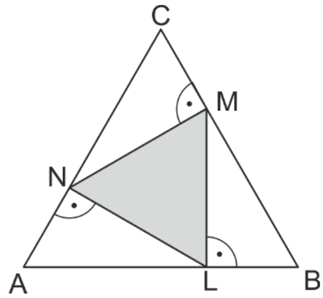


(A) 6 cm x 4 cm (B) 12 cm x 8 cm (C) 20 cm x 12 cm
(D) 24 cm x 16 cm (E) 30 cm x 20 cm



Lösung: Durch geschicktes Zerlegen und Neuanordnen der Teile, die die Taube darstellen, erkennt man, dass die Fläche der Taube der Gesamtfläche von 12 (quadratischen) Rasterfeldern entspricht. Somit beträgt die Fläche eines Rasterquadrats 16 cm², und jedes Rasterquadrat hat eine Seitenlänge von 4 cm. Daher hat die Fahne die Maße 24 cm x 16 cm. **Lösung D**

26. Die Punkte N, M und L liegen auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC so, dass $NM \perp BC$, $ML \perp AB$ und $LN \perp AC$ gilt. Die Fläche des Dreiecks ABC beträgt 36 cm². Welche Fläche besitzt das Dreieck LMN?



(A) 9 cm² (B) 12 cm² (C) 15 cm² (D) 16 cm² (E) 18 cm²

Lösung: Wegen $NM \perp BC$ und $LN \perp AC$ ist $\angle LNM$ ein Normalwinkel von $\angle ACB$ und misst daher 60°. Ebenso sind auch die zwei anderen Winkel im Dreieck LMN 60°-Winkel, also Ist LMN ein gleichseitiges Dreieck, und es gilt LM = MN = NL.
Daher sind die Dreiecke ALN, BML und CNM deckungsgleiche rechtwinklige Dreiecke, und weil ihre Winkel genau 30°, 60° und 90° betragen, entstehen sie durch Zerschneiden eines gleichseitigen Dreiecks längs einer Symmetrieachse. Somit sind ihre (gleich langen) kürzeren Katheten (AN = BL = CM) halb so lang wie ihre Hypotenusen (AL = BM = CN). Daher gilt AL : LB = BM : NC = CN : NA = 2 : 1 und AL : AB = BM : BC = CN : CA = 2 : 3.
Fügen wir zwei dieser rechtwinkligen Dreiecke geeignet an einander, so erhalten wir also ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge sich zu der des Dreiecks ABC wie 2 : 3 verhält. Daher ist das Verhältnis ihrer Flächeninhalte gleich $2^2 : 3^2 = 4 : 9$. Folglich verhält sich die Fläche eines der rechtwinkligen Dreieck zur Fläche von ABC wie 2 : 9, die Summe der Flächen der drei rechtwinkligen Dreiecke zur Fläche von ABC also wie 6 : 9 bzw. 2 : 3.
Die Fläche von LMN verhält sich somit zur Fläche von ABC wie 1 : 3, beträgt also 12 cm². **Lösung B**

27. Anna, Bettina und Claudia gehen einkaufen. Bettina gibt um 85% weniger aus als Claudia. Anna gibt um 60% mehr aus als Claudia. Zusammen kaufen sie um 55 € ein. Wie viel Geld gibt Anna aus?

(A) 3 € (B) 20 € (C) 25 € (D) 26 € (E) 32 €

Lösung: Angenommen, Claudia gibt x € aus. Dann sind die Beträge, die Bettina beziehungsweise Anna (in €) ausgeben, $0{,}15 \cdot x$ beziehungsweise $1{,}6 \cdot x$. Daher erhalten wir für ihre Gesamtausgaben

$$0{,}15 \cdot x + x + 1{,}6 \cdot x = 55$$

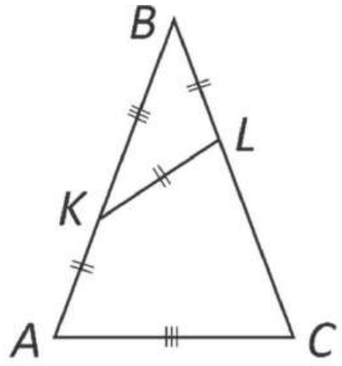
und damit $2{,}75 \cdot x = 55, \quad x = 20.$
Claudia gibt also 20 € aus; Anna gibt um 60% mehr als Claudia aus, also um 12 € mehr, das sind 32 €. **Lösung E**

28. Viola übt Weitspringen. Im Mittel sprang sie bisher 3,80 m. Beim nächsten Sprung erreicht sie 3,99 m und so steigt ihr Mittel auf 3,81 m. Welche Weite muss sie beim nächsten Sprung erreichen, damit ihr Mittel auf 3,82 m steigt?

(A) 3,97 m (B) 4,00 m (C) 4,01 m (D) 4,03 m (E) 4,04 m

Lösung: Der tolle Sprung von 3,99 m ist 18 cm besser als der neue Mittelwert von 3,81 m. Da der alte Mittelwert um 1 cm niedriger war, hat dieser Supersprung 18 „schlechtere" Sprünge ausgeglichen.
Um von 3,81 m auf 3,82 m im Mittel zu kommen, müssen nun 19 Sprünge, die im Mittel um 1 cm zu klein sind, durch einen neuerlichen noch weiteren Supersprung ausgeglichen werden. Dieser muss um 19 cm besser als der neue Mittelwert sein.
Viola muss also 3,82 m + 19 cm = 4,01 m springen. **Lösung C**

29. Im gleichschenkeligen Dreieck ABC (mit Basis AC) werden die Punkte K und L auf den Seiten AB bzw. BC so eingezeichnet, dass AK = KL = LB und KB = AC gilt. Wie groß ist der Winkel ∠ ABC?



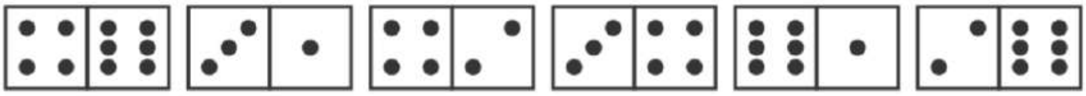
(A) 30° (B) 35° (C) 36° (D) 40° (E) 44°

Lösung:
Wegen AK = KL ist das Dreieck ALK gleichschenklig mit Basis AL.
Wegen AB = CB und AK = LB gilt außerdem KB = AB – AK = CB – LB = CL.
Da laut Angabe KB = AC gilt, erhalten wir AC = LC, und LAC ist gleichschenkelig mit Basis AL.
Somit ist KC gemeinsame Symmetrieachse der Dreiecke ALK und ALC, also ist KACL ein Deltoid mit Symmetrieachse KC. Folglich gilt ∠CAK = ∠KLC.
Weil nach Angabe das Dreieck ACB gleichschenklig ist (AB = CB), gilt auch ∠CAK = ∠CAB = ∠BCA = ∠LCA, insgesamt also ∠CAK =∠KLC = ∠LCA = α.
Der Winkel ∠KLC ist Außenwinkel des (wegen KL = LB) gleichschenkligen Dreiecks BKL. Somit ist jeder der beiden Innenwinkel an der Basis BK des Dreiecks BKL halb so groß wie der Außenwinkel ∠KLC = α, d.h. $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$.
Unter Berücksichtigung der Winkelsumme im Dreieck ACB erhalten wir schließlich

$$2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 180°, \qquad \frac{5\alpha}{2} = 180°, \qquad \alpha = 72°.$$

Damit gilt $\angle ABC = \frac{\alpha}{2} = 36°$. **Lösung C**

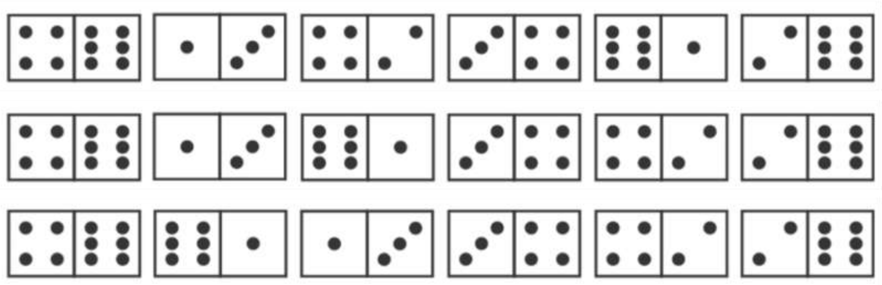
30. Beim Domino müssen die Spielsteine immer so gelegt werden, dass die aneinander liegenden Hälften von zwei benachbarten Dominosteinen die gleiche Augenzahl zeigen. Paul hat sechs Dominosteine vor sich liegen (siehe Abbildung).



Paul will in mehreren Schritten eine korrekte Anordnung herstellen. In jedem Schritt darf er entweder zwei beliebige Dominosteine miteinander vertauschen oder einen Dominostein um 180° drehen. Wie viele Schritte benötigt er mindestens, um die Dominosteine richtig anzuordnen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Das ist unmöglich.

Lösung: Auf den sechs verwendeten Dominosteinen kommen 1 Auge, 2 Augen und 3 Augen jeweils zweimal, 4 Augen und 6 Augen jeweils dreimal vor. Weil innerhalb einer richtig geordneten Reihe jeweils die aneinander liegenden Hälften von zwei benachbarten Dominosteinen die gleiche Augenzahl zeigen, liegen an den Enden der Reihe 4 Augen beziehungsweise 6 Augen. Daher ist es naheliegend, den ersten und den letzten Stein nicht zu bewegen.
In den verbleibenden 10 Dominosteinhälften liegen 2 Augen, 4 Augen und 6 Augen je einmal in der linken und der rechten Hälfte des Stein, während 1 Auge zweimal rechts, 3 Augen zweimal links liegen. Daher muss (wenigstens) der zweite Stein (mit 1 Auge und 3 Augen) um 180° gedreht werden.
Eine weitere Vertauschung liefert noch keine richtige Anordnung. Vertauscht man aber zunächst den dritten mit dem fünften Stein (von links), dann stimmt die Anordnung in der rechten Hälfte der Reihe.
Vertauscht man in einem weiteren Schritt noch den (schon gedrehten) zweiten Stein mit dem jetzt an dritter, anfangs an fünfter Stelle liegenden Stein (mit 6 Augen bzw. 1 Auge), so sind die Steine richtig angeordnet.
Insgesamt benötigt man also mindestens drei Schritte.



Lösung C

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9 – 10

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2018“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

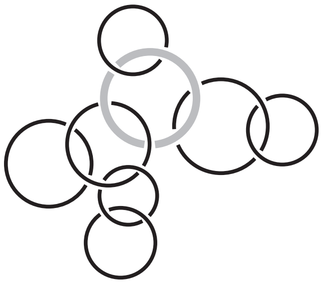
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Junior (9./10. Schulstufe)
Österreich – 15.3.2018

- 3 Punkte Beispiele -

1. In meiner Familie hat jedes Kind mindestens zwei Brüder und mindestens eine Schwester. Wie viele Kinder gibt es mindestens in meiner Familie?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



2. Die abgebildeten Ringe sind teilweise miteinander verkettet. Wie lang ist die längste so gebildete Kette, der auch der dicke helle Ring angehört?

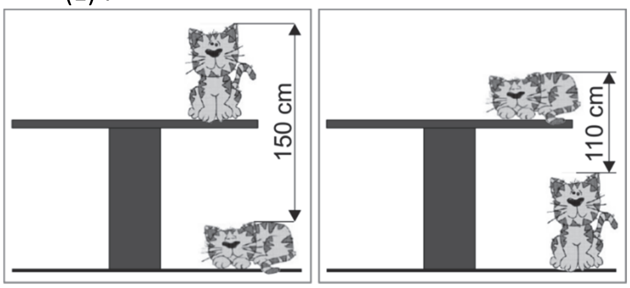
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

3. In einem Dreieck hat eine Seite die Länge 5 und eine zweite Seite die Länge 2. Die Länge der dritten Seite ist eine ungerade ganze Zahl. Bestimme die Länge der dritten Seite.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

4. Der Abstand vom oberen Rand der auf dem Tisch sitzenden Katze zum oberen Rand der am Boden schlafenden Katze beträgt 150 cm. Der Abstand vom oberen Rand der auf dem Tisch schlafenden Katze zum oberen Rand der am Boden sitzenden Katze beträgt 110 cm. Wie hoch ist der Tisch?

(A) 110 cm (B) 120 cm (C) 130 cm (D) 140 cm (E) 150 cm



5. Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen beträgt 10^{2018}. Wie lautet die mittlere dieser Zahlen?

(A) 10^{2013} (B) 5^{2017} (C) 10^{2017} (D) 2^{2018} (E) $2 \cdot 10^{2017}$

6. In den drei abgebildeten kongruenten regelmäßigen Sechsecken bezeichnen wir mit X, Y und Z der Reihe nach die Flächen der grau gefärbten Bereiche. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) $X = Y = Z$ (B) $Y = Z \neq X$ (C) $Z = X \neq Y$ (D) $X = Y \neq Z$ (E) Jede der Flächen hat einen anderen Wert.

7. Maria möchte 42 Äpfel, 60 Pfirsiche und 90 Kirschen unter ihren Freunden gerecht aufteilen. Dazu teilt sie das gesamte Obst auf Körbe auf, mit jeweils der gleichen Zusammenstellung an Äpfeln, Pfirsichen und Kirschen, um jedem Freund einen solchen Obstkorb zu geben. Wie viele Obstkörbe kann sie auf diese Weise höchstens befüllen?

(A) 3 (B) 6 (C) 10 (D) 14 (E) 42

8. In der abgebildeten (richtigen) Rechnung wurden einige Ziffern durch die Buchstaben P, Q, R und S ersetzt. Wie groß ist der Wert von P + Q + R + S?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 24

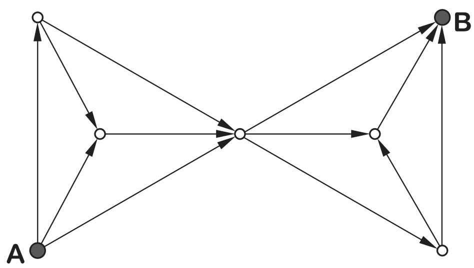
$$\begin{array}{r} P\ 4\ 5 \\ +\ Q\ R\ S \\ \hline 6\ 5\ 4 \end{array}$$

9. Wie groß ist die Summe von 25 % von 2018 und 2018 % von 25?

(A) 1009 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3027 (E) 5045

10. In der Figur soll man in Richtung der Pfeile von A nach B gehen. Wie viele verschiedene Wege gibt es, die diese Bedingung erfüllen?

(A) 20 (B) 16 (C) 12 (D) 9 (E) 6



- 4 Punkte Beispiele -

11. Die Eingänge zweier Studentenheime befinden sich auf einer geraden Straße in Abstand von 250 m zueinander. Im ersten wohnen 100 Studenten und im zweiten 150 Studenten. Wo sollte man eine Bushaltestelle einrichten, wenn die Gesamtsumme der Wege aller Studenten beider Heime zur Haltestelle so gering wie möglich sein soll?

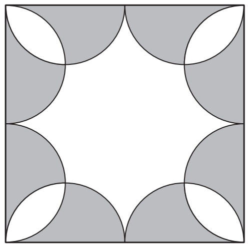
(A) direkt vor dem Eingang des ersten Heimes (B) 100 m vom Eingang des ersten Heimes entfernt
(C) 100 m vom Eingang des zweiten Heimes entfernt (D) direkt vor dem Eingang des zweiten Heimes
(E) an einer beliebigen Stelle zwischen den beiden Heimeingängen

12. In einer Reihe werden 105 Zahlen geschrieben: $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ Dabei wird jede Zahl n genau n-mal geschrieben. Wie viele dieser Zahlen sind durch 3 teilbar?

(A) 4 (B) 12 (C) 21 (D) 30 (E) 45

13. Im Inneren eines Quadrats mit der Seitenlänge 4 werden acht kongruente Halbkreise gezeichnet. Wie groß ist die Fläche des weißen Bereichs?

(A) 2π (B) 8 (C) $6 + \pi$ (D) $3\pi - 2$ (E) 3π



14. An einem bestimmten Tag fahren insgesamt 40 Züge von einer der Städte M, N, O, P und Q zu genau einer anderen dieser Städte. Entweder von oder nach M fahren 10 Züge. Entweder von oder nach N fahren 10 Züge. Entweder von oder nach O fahren 10 Züge. Entweder von oder nach P fahren 10 Züge. Wie viele Züge fahren entweder von oder nach Q?

(A) 0 (B) 10 (C) 20 (D) 30 (E) 40

15. An der Humanistischen Universität kann man Sprachen, Geschichte und Philosophie studieren. Einige Studenten studieren dort genau eine Sprache. (Niemand studiert mehrere Sprachen zugleich.) Unter diesen studieren 35 % Englisch. Unter allen Studenten der Universität studieren 13 % eine andere Sprache als Englisch. Welcher Prozentsatz der Studenten studiert eine Sprache?

(A) 13 % (B) 20 % (C) 22 % (D) 48 % (E) 65 %

16. Peter will ein Buch kaufen, hat aber kein Geld. Er kann das Buch nur mit Hilfe seines Vaters und seiner beiden Brüder kaufen. Sein Vater gibt ihm halb so viel Geld, wie ihm seine Brüder gemeinsam geben. Sein älterer Bruder gibt ihm ein Drittel jener Summe, die ihm die anderen beiden geben. Der jüngste Bruder gibt ihm 10 €. Wie teuer ist das Buch?

(A) 24 € (B) 26 € (C) 28 € (D) 30 € (E) 32 €

17. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es mit der Eigenschaft, dass die zweiziffrige Zahl, die man durch das Streichen der mittleren Ziffer erhält, genau ein Neuntel der ursprünglichen Zahl ist?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. Wie oft erscheint der Summand 2018^2 unter der Wurzel, wenn folgende Aussage richtig ist?

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + \ldots + 2018^2} = 2018^{10}$$

(A) 5 (B) 8 (C) 18 (D) 2018^8 (E) 2018^{18}

19. Wie viele Ziffern hat das Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$?

(A) 2017 (B) 2018 (C) 4035 (D) 4036 (E) 4037

20. In einem regelmäßigen 2018-Eck sind die Eckpunkte mit 1 bis 2018 durchnummeriert. Es werden zwei Diagonalen des Vielecks gezeichnet, wovon eine die Eckpunkte 18 und 1018 verbindet und die andere die Eckpunkte 1018 und 2000. Wie viele Eckpunkte haben die drei resultierenden Vielecke?

(A) 38, 983, 1001 (B) 37, 983, 1001 (C) 38, 982, 1001 (D) 37, 982, 1000 (E) 37, 983, 1002

- 5 Punkte Beispiele -

21. Auf einer Tafel werden einige ganze Zahlen geschrieben, darunter die Zahl 2018. Die Summe all dieser Zahlen ist 2018. Das Produkt dieser Zahlen ist ebenfalls 2018. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Zahlen auf der Tafel sein?

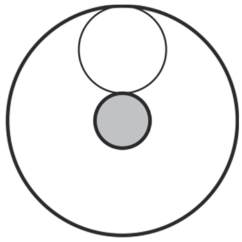
(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

22. Gegeben sind vier positive Zahlen. Man soll nun darunter drei auswählen, ihr arithmetisches Mittel bestimmen, und die vierte Zahl dazu zählen. Dies kann man auf vier Arten machen. Die erhaltenen Ergebnisse sind dann 17, 21, 23 und 29. Wie lautet die größte der vier gegebenen Zahlen?

(A) 12 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 29

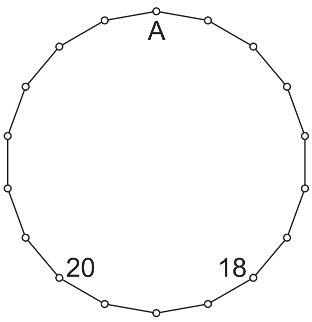
23. Die Punkte A_0, A_1, A_2, ... liegen auf einer Geraden. Es gilt $\overline{A_0\,A_1} = 1$, und A_n ist jeweils der Mittelpunkt der Strecke $A_{n+1}A_{n+2}$, für jeden nicht-negativen Index n. Wie lang ist die Strecke A_0A_{11}?

(A) 171 (B) 341 (C) 512 (D) 587 (E) 683



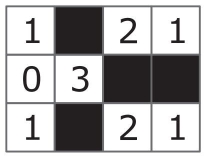
24. Zwei konzentrische Kreise mit den Radien 1 und 9 bilden einen Kreisring. Im Inneren dieses Rings werden n Kreise ohne Überlappung gezeichnet, wobei jeder von ihnen beide Kreise des Kreisrings berührt. (In der Abbildung sieht man ein Beispiel für n=1 und anderen Radien als gegeben.) Was ist der größtmögliche Wert von n?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



25. In jedem Eckpunkt des abgebildeten 18-Ecks soll eine Zahl geschrieben werden, die gleich der Summe der beiden Zahlen in den benachbarten Eckpunkten ist. Zwei dieser Zahlen sind vorgegeben. Welche Zahl steht beim Eckpunkt A?

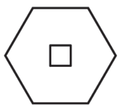
(A) 2018 (B) –20 (C) 18 (D) 38 (E) –38



26. Diana zeichnet auf einem karierten Blatt ein Rechteck aus zwölf Quadraten. Einige der Quadrate sind schwarz gefärbt. In jedes weiße Quadrat schreibt sie die Anzahl der benachbarten schwarzen Felder. Die Abbildung zeigt ein Beispiel für ein solches Rechteck. Nun macht sie dasselbe mit einem Rechteck, das aus 2018 Quadraten besteht. Was ist die höchste Zahl, die sie als Summe aller Zahlen in den weißen Quadraten erhalten kann?

(A) 1262 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3025 (E) 3027

27. Aus einem 3 x 3 x 3 Würfel sind sieben kleine Würfel entfernt worden, wie im Bild zu sehen ist. Diese verbleibende (rundum symmetrische) Figur wird mit einer Ebene durch den Mittelpunkt und normal zu einer der vier Raumdiagonalen geschnitten. Wie sieht der Querschnitt aus?

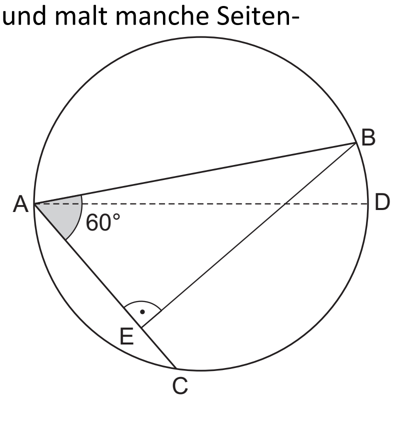
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

28. Jede Zahl der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6} wird in genau ein Feld einer 2 x 3 Tabelle geschrieben. Auf wie viele Arten kann man dies machen, sodass die Summe der Zahlen in jeder Spalte und jeder Zeile durch 3 teilbar ist?

(A) 36 (B) 42 (C) 45 (D) 48 (E) eine andere Zahl

29. Ed macht aus mehreren identischen kleinen weißen Würfeln einen großen Würfel und malt manche Seitenflächen des großen Würfels rot an. Seine Schwester Nicole lässt den Würfel fallen und er zerbricht wieder in die ursprünglichen kleinen Würfel. Davon haben 45 keine rote Seitenfläche. Wie viele Seitenflächen des großen Würfels hat Ed rot bemalt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



30. Im Kreis mit Durchmesser AD werden zwei Sehnen AB und AC gezeichnet. Es gilt $\angle\, BAC = 60°$, $\overline{AB} = 24$ cm, E liegt auf AC, sodass $\overline{EC} = 3$ cm, und BE ist normal zu AC. Wie lang ist die Sehne BD?

(A) $\sqrt{3}$ cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) $2\sqrt{3}$ cm (E) $3\sqrt{2}$ cm

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Level: Junior, Grade: 9 – 10

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered: 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2018“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

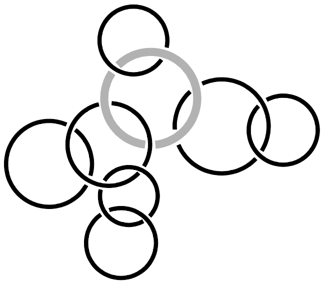
Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2018
Level Junior (Grade 9 and 10)
Austria – 15.3.2018

- 3 Point Examples -



1. Every child in my family has at least two brothers and at least one sister. What is the minimum number of children in my family?

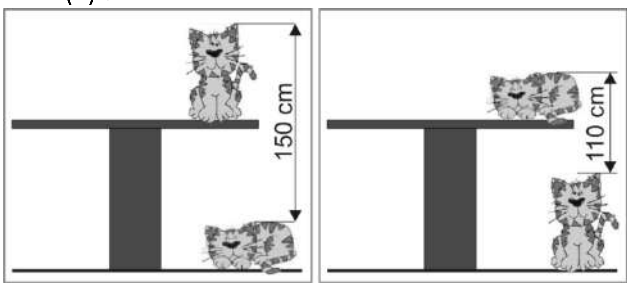
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

2. The rings shown are partially interlinked. How long is the longest chain built this way which also contains the thick light ring?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

3. In a triangle one side has length 5 and another side has length 2. The length of the third side is an odd whole number. Determine the length of the third side.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



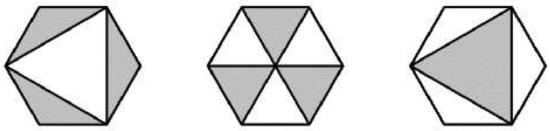
4. The distance between the top of the cat that is sitting on the table to the top of the cat that is sleeping on the floor is 150 cm. The distance from the top of the cat that is sleeping on the table to the top of the cat that is sitting on the floor is 110 cm. How high is the table?

(A) 110 cm (B) 120 cm (C) 130 cm (D) 140 cm (E) 150 cm

5. The sum of 5 consecutive whole numbers is 10^{2018}. What is the middle number of those numbers?

(A) 10^{2013} (B) 5^{2017} (C) 10^{2017} (D) 2^{2018} (E) $2 \cdot 10^{2017}$

6. In the three regular hexagons shown, X, Y and Z describe in this order the areas of the grey shaded parts. Which of the following statements is true?



(A) $X = Y = Z$ (B) $Y = Z \neq X$ (C) $Z = X \neq Y$ (D) $X = Y \neq Z$ (E) Each of the areas has a different value.

7. Maria wants to divide 42 apples, 60 peaches and 90 cherries fairly amongst her friends. In order to do so she divides the entire fruit into baskets, each with the same amount of apples, peaches and cherries, to then give each of her friends one such basket with fruit. At most, how many baskets of fruit can she fill this way?

(A) 3 (B) 6 (C) 10 (D) 14 (E) 42

8. In the (correct) calculation shown, some of the digits were replaced by the letters P, Q, R and S. What is the value of P + Q + R + S?

$$\begin{array}{r} P\,4\,5 \\ +\,Q\,R\,S \\ \hline 6\,5\,4 \end{array}$$

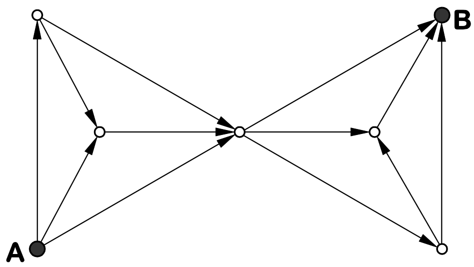
(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 24

9. How big is the sum of 25 % of 2018 and 2018 % of 25?

(A) 1009 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3027 (E) 5045

10. In the diagram shown, you should follow the arrows to get from A to B. How many different ways are there that fulfill this condition?

(A) 20 (B) 16 (C) 12 (D) 9 (E) 6



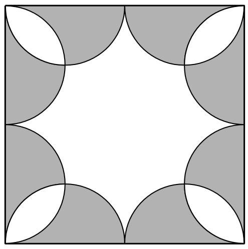
- 4 Point Examples -

11. The entrances of two student halls lie in a plain street 250 m apart from each other. There are 100 students in the first one and 150 students in the second one. Where should a bus stop be built if the total sum of the distances that each student of both halls has to cover to get to the bus stop should be a minimum?

(A) directly in front of the first hall (B) 100 m away from the entrance of the first hall
(C) 100 m away from the entrance of the second hall (D) directly in front of the second hall
(E) in any place between the two hall entrances

12. 105 numbers are written in a row: $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$ Where each number n is written exactly n-times. How many of those numbers are divisible by 3?

(A) 4 (B) 12 (C) 21 (D) 30 (E) 45



13. Eight congruent semi-circles are drawn inside a square with side length 4. How big is the area of the white part?

(A) 2π (B) 8 (C) $6 + \pi$ (D) $3\pi - 2$ (E) 3π

14. On one particular day there are a total of 40 trains from one of the towns M, N, O, P and Q to exactly one other of those towns. There are 10 trains either from or to M. There are 10 trains either from or to N. There are 10 trains either from or to O. There are 10 trains either from or to P. How many trains are there either from or to Q?

(A) 0 (B) 10 (C) 20 (D) 30 (E) 40

15. At a humanistic university you can study languages, history and philosophy. Some of the students there study exactly one language. (Nobody studies several languages at the same time.) Amongst those, 35 % study English. Amongst all students of the university 13 % study a language other than English. Which percentage of the students studies a language?

(A) 13 % (B) 20 % (C) 22 % (D) 48 % (E) 65 %

16. Peter wants to buy a book but has no money. He can only buy this book with his father's and his two brother's help. His father gives him half as much money as his brothers give him jointly. His older brother gives him a third of the sum that the two others give him. The youngest brother gives him 10 €. How expensive is the book?

(A) 24 € (B) 26 € (C) 28 € (D) 30 € (E) 32 €

17. How many three-digit numbers are there with the property that the two-digit number obtained by deleting the middle number is exactly a ninth of the original number?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. How often does the summand 2018^2 appear under the root, if the following statement is correct?

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + \ldots + 2018^2} = 2018^{10}$$

(A) 5 (B) 8 (C) 18 (D) 2018^8 (E) 2018^{18}

19. How many digits has the final result of the calculation $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$?

(A) 2017 (B) 2018 (C) 4035 (D) 4036 (E) 4037

20. In a regular 2018-sided shape the vertices are numbered 1 to 2018 in order. Two diagonals of the polygon are drawn in, where one of them connects the vertices 18 and 1018 and the other one the vertices 1018 and 2000. How many vertices do the three resulting polygons have?

(A) 38, 983, 1001 (B) 37, 983, 1001 (C) 38, 982, 1001 (D) 37, 982, 1000 (E) 37, 983, 1002

- 5 Point Examples -

21. Some whole numbers are written on a board, amongst them the number 2018. The sum of all these number is 2018. The product of all these number is also 2018. Which of the following numbers could be the amount of numbers on the board?

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

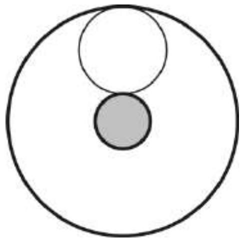
22. Given are four positive numbers. Take three of them, work out their mean and then add the fourth number. This can be done in four different ways. The results obtained this way are 17, 21, 23 and 29. Which number is the biggest of the four numbers?

(A) 12 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 29

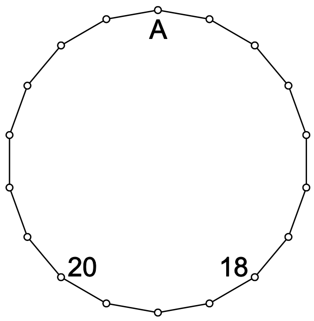
23. The points A_0, A_1, A_2, ... all lie on a straight line. It is true that $\overline{A_0\,A_1} = 1$ and A_n is the midpoint of every line segment $A_{n+1}A_{n+2}$, for every non-negative index n. How long is the line segment A_0A_{11}?

(A) 171 (B) 341 (C) 512 (D) 587 (E) 683

24. Two concentric circles with radii 1 and 9 form an annulus. n circles without overlap are drawn inside this annulus, where every circle touches both circles of the annulus. (The diagram shows an example for n=1 and the other radii as given.) What is the biggest possible value of n?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



25. A number is to be written into every vertex of the 18-sided shape so that it is equal to the sum of the two numbers from the adjacent vertices. Two of these numbers are given. Which number is written in vertex A?

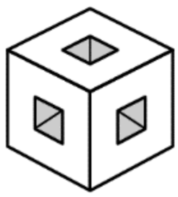
(A) 2018 (B) –20 (C) 18 (D) 38 (E) –38

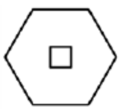
26. Diana draws a rectangle made up of twelve squares onto a piece of squared paper. Some of the squares are coloured in black. She writes the number of adjacent black squares into every white square. The diagram shows an example of such a rectangle. Now she does the same with a rectangle made up of 2018 squares. What is the biggest number that she can obtain as the sum of all numbers in the white squares?

1		2	1
0	3		
1		2	1

(A) 1262 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3025 (E) 3027

27. Seven little dice were removed from a 3 x 3 x 3 die, as can be seen in the diagram. The remaining (completely symmetrical) figure is cut along a plane through the centre and perpendicular to one of the four space diagonals. What does the cross-section look like?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

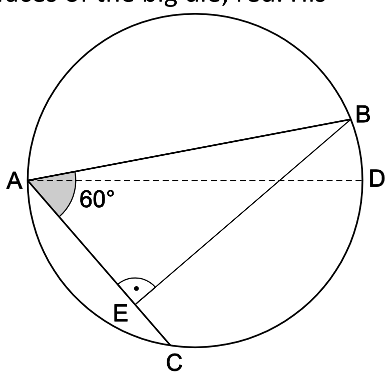
28. Every number of the set {1, 2, 3, 4, 5, 6} is written into exactly one cell of a 2 x 3 table. In how many ways can this be done so that the sum of the numbers in every column and every row is divisible by 3?

(A) 36 (B) 42 (C) 45 (D) 48 (E) another number

29. Ed forms a big die using several identical small white dice and colours some of the faces of the big die, red. His sister Nicole drops the die and it again breaks into the original small dice. 45 of which do not have a red face. How many faces of the big die did Ed colour in red?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

30. Two chords AB and AC are drawn into a circle with diameter AD. $\angle BAC = 60°$, $\overline{AB} = 24$ cm, E lies on AC so that $\overline{EC} = 3$ cm, and BE is perpendicular to AC. How long is the chord BD?



(A) $\sqrt{3}$ cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) $2\sqrt{3}$ cm (E) $3\sqrt{2}$ cm

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Junior (9./10. Schulstufe)
Österreich – 15.3.2018

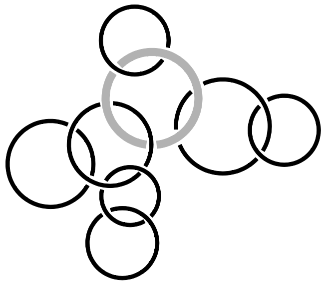
- 3 Punkte Beispiele -

1. In meiner Familie hat jedes Kind mindestens zwei Brüder und mindestens eine Schwester. Wie viele Kinder gibt es mindestens in meiner Familie?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Da jedes Kind mindestens zwei Brüder hat, hat auch jeder Sohn mindestens zwei Brüder. Es gibt somit mindestens drei Söhne. Ebenso hat jede Tochter mindestens eine Schwester und es gibt daher mindestens zwei Töchter. Insgesamt gibt es in der Familie mindestens 5 Kinder.

2. Die abgebildeten Ringe sind teilweise miteinander verkettet. Wie lang ist die längste so gebildete Kette, der auch der dicke helle Ring angehört?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

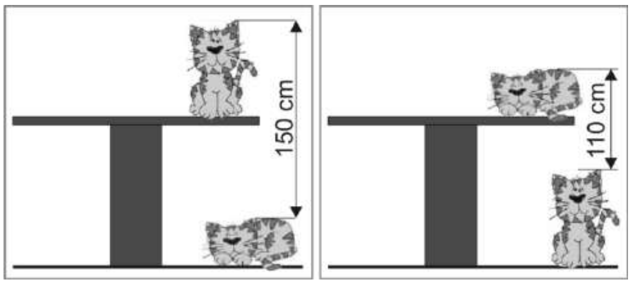
Lösung: Der linke Ring ist in keiner Kette. Die beiden rechten Ringe bilden gemeinsam eine kurze Kette. Die restlichen fünf Ringe bilden ebenfalls gemeinsam eine Kette.

3. In einem Dreieck hat eine Seite die Länge 5 und eine zweite Seite die Länge 2. Die Länge der dritten Seite ist eine ungerade ganze Zahl. Bestimme die Länge der dritten Seite.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Die Längen 4 und 6 sind gerade Zahlen und scheiden daher aus. Die Längen 3 und 7 scheiden aus, da in einem Dreieck die Summe von je zwei Seitenlängen größer sein muss als die Länge der dritten Seite ($2 + 3 \ngtr 5$ und $2 + 5 \ngtr 7$). Die Länge der dritten Seite ist daher 5.

4. Der Abstand vom oberen Rand der auf dem Tisch sitzenden Katze zum oberen Rand der am Boden schlafenden Katze beträgt 150 cm. Der Abstand vom oberen Rand der auf dem Tisch schlafenden Katze zum oberen Rand der am Boden sitzenden Katze beträgt 110 cm. Wie hoch ist der Tisch?



(A) 110 cm (B) 120 cm (C) 130 cm (D) 140 cm (E) 150 cm

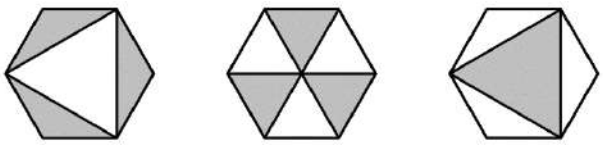
Lösung: Wir bezeichnen mit x die Höhe des Tisches, mit y die Höhe der sitzenden Katze und mit z die Höhe der schlafenden Katze. Dann gilt $x + y - z = 150$ und $x - y + z = 110$. Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich $2x = 260$ und daher $x = 130$. Der Tisch ist somit 130 cm hoch.

5. Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen beträgt 10^{2018}. Wie lautet die mittlere dieser Zahlen?

(A) 10^{2013} (B) 5^{2017} (C) 10^{2017} (D) 2^{2018} (E) $2 \cdot 10^{2017}$

Lösung: Die Summe aus 5 aufeinanderfolgenden Zahlen ist genau 5 Mal so groß wie die mittlere dieser Zahlen. Die mittlere Zahl ist in diesem Fall daher $\frac{10^{2018}}{5} = \frac{10}{5} \cdot 10^{2017} = 2 \cdot 10^{2017}$.

6. In den drei abgebildeten kongruenten regelmäßigen Sechsecken bezeichnen wir mit X, Y und Z der Reihe nach die Flächen der grau gefärbten Bereiche. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?



(A) $X = Y = Z$ (B) $Y = Z \neq X$ (C) $Z = X \neq Y$ (D) $X = Y \neq Z$ (E) Jede der Flächen hat einen anderen Wert.

Lösung: Wenn wir im ersten Sechseck in das weiße Dreieck die Verbindungen der Eckpunkte zum Mittelpunkt einzeichnen, so werden drei grau-weiße Rauten mit eingezeichneten Diagonalen sichtbar. Die Diagonalen teilen die

Rauten jeweils in zwei gleich große Flächen (eine graue und eine weiße). Da also in jeder Raute die weiße Fläche gleich groß ist wie die graue, ist auch im Sechseck X genau die Hälfte der gesamten Fläche. Gleiches gilt Z im dritten Sechseck. Auch im zweiten Sechseck ist die graue Fläche genau so groß wie die weiße.

Es gilt also $X = Y = Z$.

7. Maria möchte 42 Äpfel, 60 Pfirsiche und 90 Kirschen unter ihren Freunden gerecht aufteilen. Dazu teilt sie das gesamte Obst auf Körbe auf, mit jeweils der gleichen Zusammenstellung an Äpfeln, Pfirsichen und Kirschen, um jedem Freund einen solchen Obstkorb zu geben. Wie viele Obstkörbe kann sie auf diese Weise höchstens befüllen?

(A) 3 (B) 6 (C) 10 (D) 14 (E) 42

Lösung: Maria kann ihr Obst nur auf solche Anzahlen an Obstkörben gerecht aufteilen, die ein Teiler von jeweils 42, 60 und 90 (also ein gemeinsamer Teiler) sind. Die höchste solche Anzahl ist also der größte gemeinsame Teiler (ggT). Der ggT von 42, 60 und 90 ist 6. Maria kann also 6 Obstkörbe befüllen.

8. In der abgebildeten (richtigen) Rechnung wurden einige Ziffern durch die Buchstaben P, Q, R und S ersetzt. Wie groß ist der Wert von P + Q + R + S?

$$\begin{array}{r} P\,4\,5 \\ +\,Q\,R\,S \\ \hline 6\,5\,4 \end{array}$$

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 24

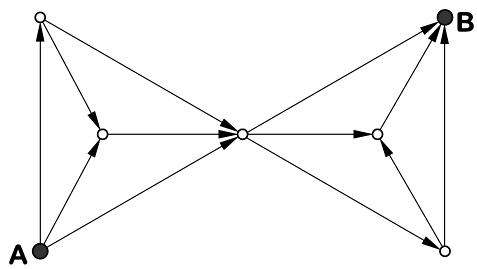
Lösung: Wir betrachten zuerst die Einerstelle. Da $5 + S \geq 5 > 4$, ist $5 + S = 14$ und daher $S = 9$. In der Zehnerstelle haben wir einen Übertrag von 1. Die Rechnung an der Zehnerstelle lautet also $4 + R + 1 = 5$ und daher $R = 0$. An der Hunderterstelle haben wir keinen Übertrag und es gilt daher $P + Q = 6$. Insgesamt ergibt sich $P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$.

9. Wie groß ist die Summe von 25 % von 2018 und 2018 % von 25?

(A) 1009 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3027 (E) 5045

Lösung: Die Summe ist $\frac{25}{100} \cdot 2018 + \frac{2018}{100} \cdot 25 = \frac{25 \cdot 2018}{100} + \frac{2018 \cdot 25}{100} = 2 \cdot \frac{25 \cdot 2018}{100} = \frac{2018}{2} = 1009$.

10. In der Figur soll man in Richtung der Pfeile von A nach B gehen. Wie viele verschiedene Wege gibt es, die diese Bedingung erfüllen?



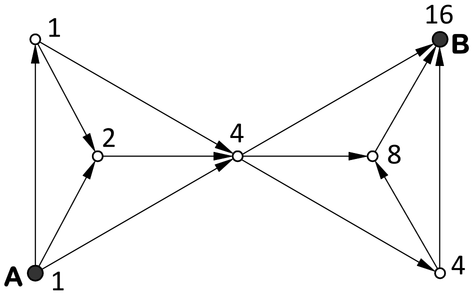
(A) 20 (B) 16 (C) 12 (D) 9 (E) 6

Lösung: Einen Punkt, von dem ein Pfeil zu einem Punkt P zeigt, bezeichnen wir als Vorgänger von P.

Für die Wege von A zu einem Punkt P gilt: Die Anzahl der Wege von A nach P ist genau so groß wie die Summe der Anzahlen der Wege von A zu allen Vorgängern von P.

Wir beschriften die Punkte in der Figur von A ausgehend jeweils mit der Anzahl an Wegen, die von A zu diesem Punkt führen.

Wir starten in A und beschriften mit 1. Wir können nun der Reihe nach jene Punkte beschriften, wo alle Vorgänger bereits beschriftet sind.



Von A nach B führen also 16 Wege.

- 4 Punkte Beispiele -

11. Die Eingänge zweier Studentenheime befinden sich auf einer geraden Straße in Abstand von 250 m zueinander. Im ersten wohnen 100 Studenten und im zweiten 150 Studenten. Wo sollte man eine Bushaltestelle einrichten, wenn die Gesamtsumme der Wege aller Studenten beider Heime zur Haltestelle so gering wie möglich sein soll?

(A) direkt vor dem ersten Heim (B) 100 m vom ersten Heim (C) 100 m vom zweiten Heim

(D) direkt vor dem zweiten Heim (E) an einer beliebigen Stelle zwischen den beiden Heimen

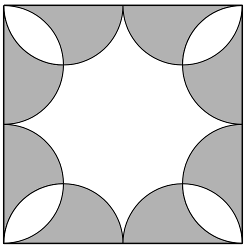
Lösung: Wenn die Haltestelle x Meter vom ersten Heim entfernt ist (mit $0 \leq x \leq 250$), so ist die Gesamtsumme der Wege $100x + 150(250 - x)$. Der Faktor der mit 150 multipliziert wird soll also möglichst gering sein. Für $x = 250$ ist der Faktor 0 und damit die Gesamtsumme am geringsten. Das entspricht einer Haltestelle direkt vor dem zweiten Heim.

12. In einer Reihe werden 105 Zahlen geschrieben: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ... Dabei wird jede Zahl n genau n Mal geschrieben. Wie viele dieser Zahlen sind durch 3 teilbar?

(A) 4 (B) 12 (C) 21 (D) 30 (E) 45

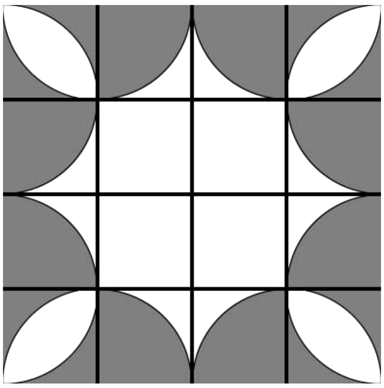
Lösung: Wir bezeichnen mit N die höchste der Zahlen. Da jede Zahl n genau n Mal steht, gilt $105 = \frac{N\cdot(N+1)}{2}$ und damit $N = 14$. Davon sind die Zahlen 3, 6, 9 und 12 durch 3 teilbar. Diese stehen 3, 6, 9 bzw. 12 Mal in der Reihe. Insgesamt sind in der Reihe also $3 + 6 + 9 + 12 = 30$ Zahlen durch 3 teilbar.

13. Im Inneren eines Quadrats mit der Seitenlänge 4 werden acht kongruente Halbkreise gezeichnet. Wie groß ist die Fläche des weißen Bereichs?



(A) 2π (B) 8 (C) $6 + \pi$ (D) $3\pi - 2$ (E) 3π

Lösung: Wir teilen das Quadrat in kleine Quadrate mit Seitenlänge 1. In der Mitte sind dann 4 weiße Quadrate. In den Quadraten in den Ecken sind jeweils zwei graue Flächen. Diese acht grauen Flächen sind jeweils das Komplement auf einen Viertelkreis (in diesen Quadraten). In den restlichen acht Quadraten sind graue Viertelkreise, die weißen Flächen dort bilden wieder das Komplement. Diese acht weißen Komplemente tauschen wir mit den grauen Komplementen und haben dadurch acht graue und vier (weitere) weiße Quadrate. Der weiße Bereich ist insgesamt also genau die Hälfte von $4 \cdot 4$, also 8.



14. An einem bestimmten Tag fahren insgesamt 40 Züge von einer der Städte M, N, O, P und Q zu genau einer anderen dieser Städte. Entweder von oder nach M fahren 10 Züge. Entweder von oder nach N fahren 10 Züge. Entweder von oder nach O fahren 10 Züge. Entweder von oder nach P fahren 10 Züge. Wie viele Züge fahren entweder von oder nach Q?

(A) 0 (B) 10 (C) 20 (D) 30 (E) 40

Lösung: Da an diesem Tag 40 Züge von einer der Städte in eine andere fahren, fahren diese 40 Züge von einer Stadt weg und die 40 Züge fahren zu einer Stadt. Insgesamt gibt es also 80 Ankünfte plus Abfahrten. In M, N, O und P gibt es davon je 10, insgesamt in diesen Städten 40. Für Q bleiben damit die restlichen 40 Ankünfte plus Abfahrten.

15. An der Humanistischen Universität kann man Sprachen, Geschichte und Philosophie studieren. Einige Studenten studieren dort genau eine Sprache. (Niemand studiert mehrere Sprachen zugleich.) Unter diesen, studieren 35% Englisch. Unter allen Studenten der Universität studieren 13% eine andere Sprache als Englisch. Welcher Prozentsatz der Studenten studiert eine Sprache?

(A) 13 % (B) 20 % (C) 22 % (D) 48 % (E) 65 %

Lösung: Die 13 %, die eine andere Sprache als Englisch studieren, sind 65 % aller Sprachstudenten. Insgesamt studieren also $\frac{13}{65} = 0{,}2 = 20\ \%$ eine Sprache.

16. Peter will ein Buch kaufen, hat aber kein Geld. Er kann das Buch nur mit Hilfe seines Vaters und seiner beiden Brüder kaufen. Sein Vater gibt ihm halb so viel Geld wie seine Brüder. Sein älterer Bruder gibt ihm ein Drittel jener Summe, die ihm die anderen beiden geben. Der jüngste Bruder gibt ihm 10 €. Wie teuer ist das Buch?

(A) 24 € (B) 26 € (C) 28 € (D) 30 € (E) 32 €

Lösung: Die beiden Brüder geben doppelt so viel wie der Vater, der Vater gibt also ein Drittel der Gesamtsumme. Der jüngere Bruder und der Vater geben dreimal so viel wie der ältere Bruder. Der ältere Bruder gibt also ein Viertel der Gesamtsumme. Daher bleiben für den jüngeren Bruder noch $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ der Gesamtsumme. Das Buch kostet also $\frac{12}{5} \cdot 10\ € = 24\ €$.

17. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es mit der Eigenschaft, dass die zweiziffrige Zahl, die man durch das Streichen der mittleren Ziffer erhält, genau ein Neuntel der ursprünglichen Zahl ist?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Für drei Ziffern a, b und c ist $100a + 10b + c$ eine dreiziffrige Zahl (falls $a \neq 0$). Wir suchen nun die Ziffern so, dass gilt $100a + 10b + c = 9 \cdot (10a + c)$, also $10a + 10b = 8c$ bzw. $a + b = \frac{4c}{5}$. Da $a + b$ ganzzahlig ist, muss auch $\frac{4c}{5}$ ganzzahlig sein und somit c durch 5 teilbar sein. Falls $c = 0$ muss auch $a + b = 0$ und daher $a = b = c = 0$ sein. Das ergibt keine dreiziffrige Zahl. Also ist $c = 5$ und $a + b = 4$.

Die dreiziffrigen Zahlen sind 405, 315, 225 und 135. Dabei ist $\frac{405}{9} = 45$, $\frac{315}{9} = 35$, $\frac{225}{9} = 25$ und $\frac{135}{9} = 15$.

18. Wie oft erscheint der Summand 2018^2 unter der Wurzel, wenn folgende Aussage richtig ist?

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + \ldots + 2018^2} = 2018^{10}$$

(A) 5 (B) 8 (C) 18 (D) 2018^8 (E) 2018^{18}

Lösung: Es gilt $2018^{10} = \sqrt{2018^{20}} = \sqrt{2018^{18} \cdot 2018^2}$.

19. Wie viele Ziffern hat das Ergebnis der Rechnung $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$?

(A) 2017 (B) 2018 (C) 4035 (D) 4036 (E) 4037

Lösung: Der Faktor $(10^{2018} - 1)$ hat 2018 Stellen (also 2018 Mal die Ziffer 9). Dividiert durch 9 hat die Zahl immer noch 2018 Stellen (2018 Mal die Ziffer 1). Der Faktor 10^{2018} hängt daran noch 2018 Nullen. Das ergibt insgesamt 4036 Stellen.

20. In einem regelmäßigen 2018-eck sind die Eckpunkte mit 1 bis 2018 durchnummeriert. Es werden zwei Diagonalen des Vielecks gezeichnet, wovon eine die Eckpunkte 18 und 1018 verbindet und die andere die Eckpunkte 1018 und 2000. Wie viele Eckpunkte haben die drei resultierenden Vielecke?

(A) 38, 983, 1001 (B) 37, 983, 1001 (C) 38, 982, 1001 (D) 37, 982, 1000 (E) 37, 983, 1002

Lösung: Ein Vieleck hat die Ecken 18, 19, …, 1018. Ein weiteres die Eckpunkte 1, 2, 3, …, 18, 1018, 2000, 2001, 2002, … 2018 und das letzte die Eckpunkte 1018, 1019, 1020, …, 2000. Das sind 1001, 18+1+19=38 und 983 Ecken.

- 5 Punkte Beispiele -

21. Auf einer Tafel werden einige ganze Zahlen geschrieben, darunter die Zahl 2018. Die Summe all dieser Zahlen ist 2018. Das Produkt dieser Zahlen ist ebenfalls 2018. Welche der folgenden Zahlen könnte die Anzahl der Zahlen auf der Tafel sein?

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

Lösung: Da das Produkt 2018 ist, sind alle anderen Zahlen entweder -1 oder 1 und auf der Tafel gibt es eine gerade Anzahl an -1. Da die Summe 2018 ist, gibt es auf der Tafel gleich viele -1 wie 1. Da die Anzahl an -1 schon durch zwei teilbar ist, ist die Anzahl an -1 und 1 durch vier teilbar. Zusätzlich gibt es auf der Tafel noch die Zahl 2018.Die Anzahl aller Zahlen auf der Tafel muss bei Division durch vier also Rest 1 liefern. Das ist von den möglichen Antworten nur bei 2017 der Fall.

22. Gegeben sind vier positive Zahlen. Man soll nun darunter drei auswählen, ihr arithmetisches Mittel bestimmen, und die vierte Zahl dazu zählen. Dies kann man auf vier Arten machen. Die erhaltenen Ergebnisse sind dann 17, 21, 23 und 29. Wie lautet die größte der vier gegebenen Zahlen?

(A) 12 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 29

Lösung: Wir bezeichnen die vier Zahlen mit a, b, c und d mit $a \geq b \geq c \geq d$. Die Rechnungen sind dann:

$$\frac{a+b+c}{3}+d=17$$
$$\frac{a+b+d}{3}+c=21$$
$$\frac{a+c+d}{3}+b=23$$
$$\frac{b+c+d}{3}+a=29$$

Wir summieren die ersten drei Gleichungen und multiplizieren die vierte mit 5:

$$a+\frac{5}{3}(b+c+d)=17+21+23$$
$$5a+\frac{5}{3}(b+c+d)=145$$

Nun subtrahieren wir die obere Gleichung von der unteren:

$$4a=84$$
$$a=21$$

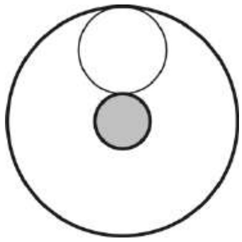
23. Die Punkte A_0, A_1, A_2, ... liegen auf einer Geraden. Es gilt $\overline{A_0\, A_1}=1$, und A_n ist jeweils der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}$, für jeden nicht-negativen Index n. Wie lang ist die Strecke $\overline{A_0 A_{11}}$?

(A) 171 (B) 341 (C) 512 (D) 587 (E) 683

Lösung: Die Punkte mit ungeradem Index liegen auf einer Seite von A_0, die Punkte mit geradem Index auf der anderen Seite.

Es gilt $\overline{A_n A_{n+1}}=2^n$ und daher $\overline{A_n A_{n+2}}=\overline{A_{n+1}A_{n+2}}-\overline{A_n A_{n+1}}=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$. Für $\overline{A_0 A_{11}}$ gilt $\overline{A_0 A_{11}}=\overline{A_0 A_1}+\overline{A_1 A_3}+\overline{A_3 A_5}+\overline{A_5 A_7}+\overline{A_7 A_9}+\overline{A_9 A_{11}}=1+2^1+2^3+2^5+2^7+2^9=1+2+8+32+128+512=683$.

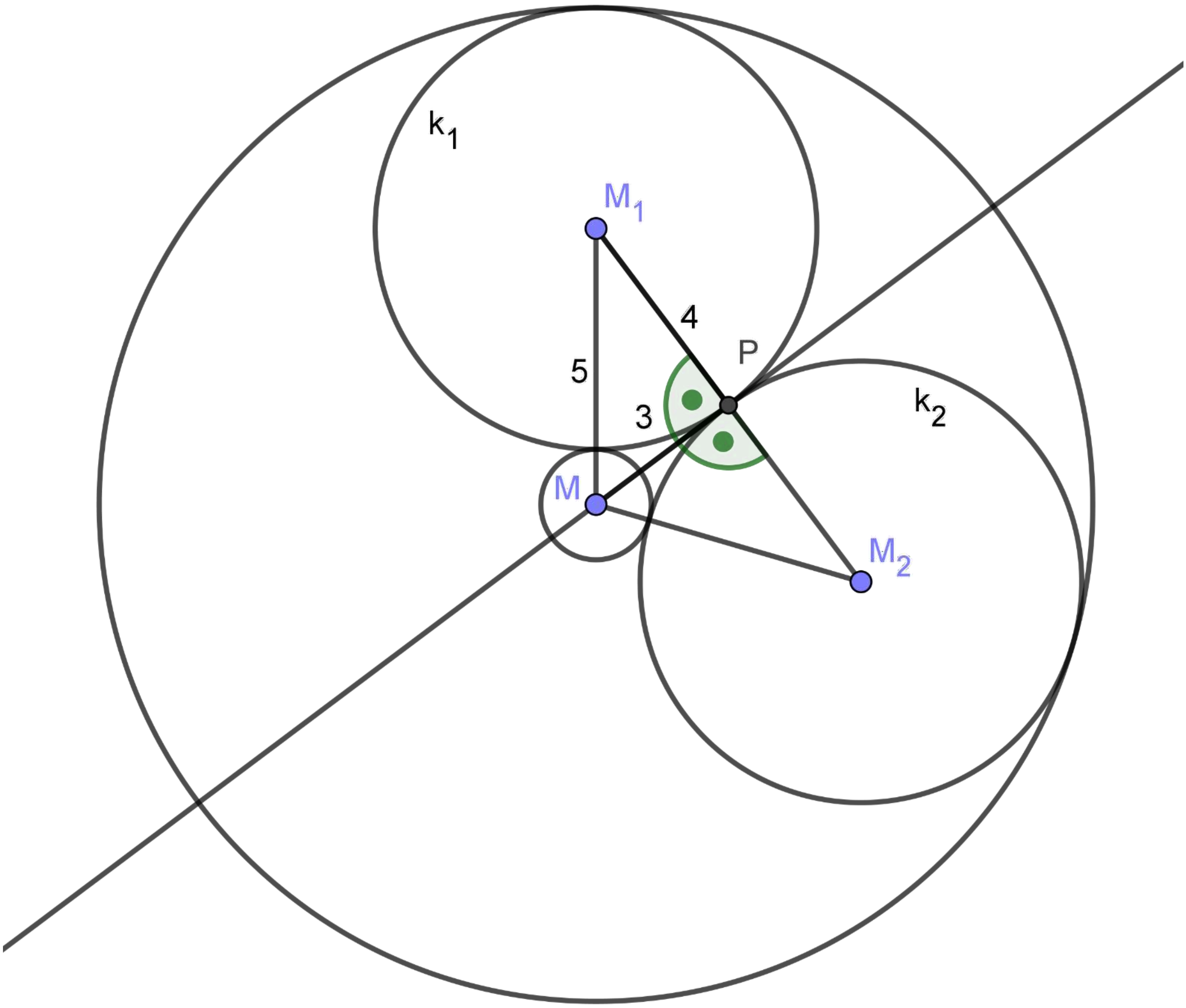
24. Zwei konzentrische Kreise mit den Radien 1 und 9 bilden einen Kreisring. Im Inneren dieses Rings werden n Kreise ohne Überlappung gezeichnet, wobei jeder von ihnen beide Kreise des Kreisrings berührt. (In der Abbildung sieht man ein Beispiel für n=1 und anderen Radien als gegeben.) Was ist der größtmögliche Wert von n?



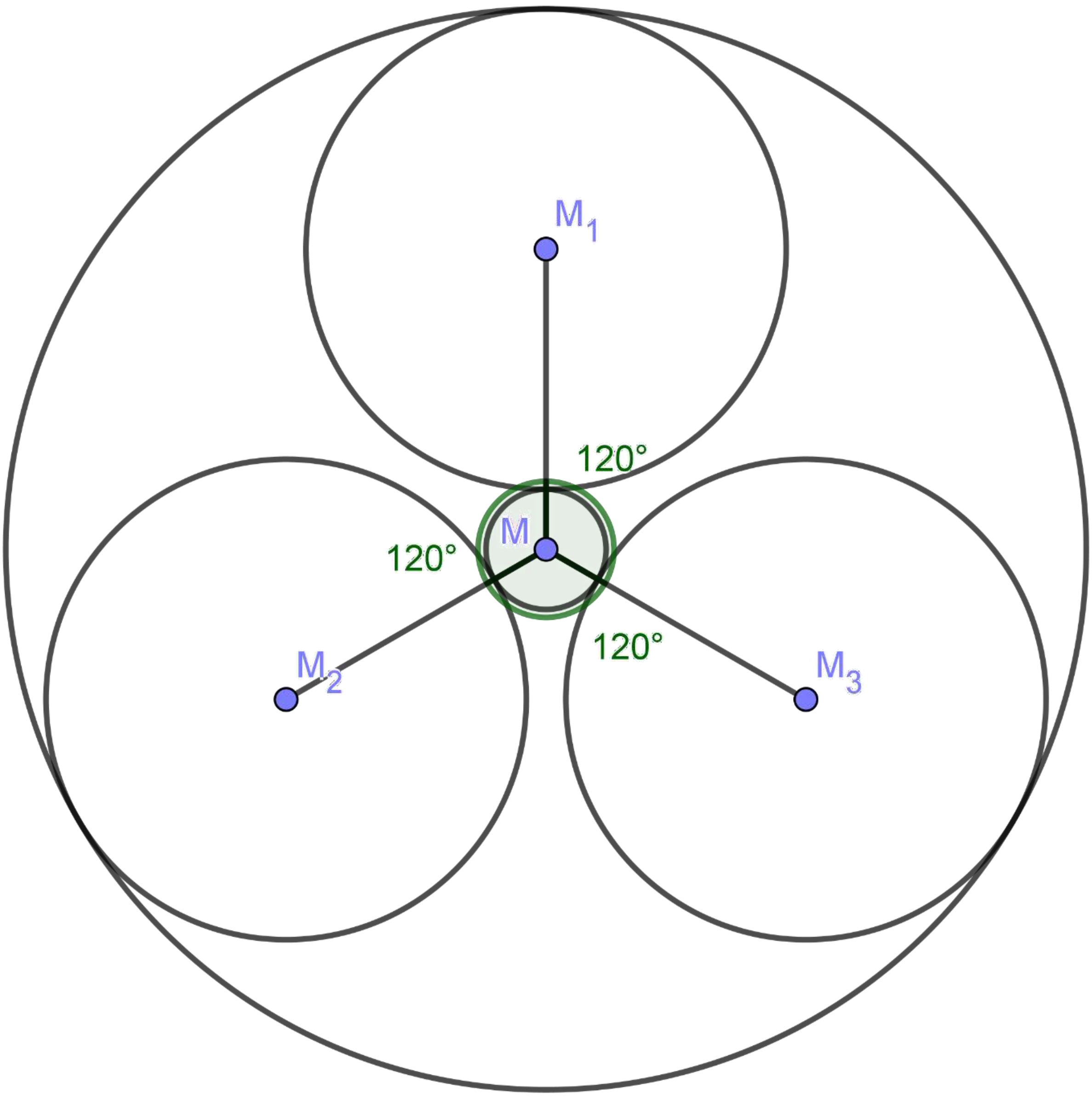
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Sei M der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Wir zeigen zuerst, dass sich nicht mehr als 3 Kreise ohne Überlappung ausgehen und danach eine Lösung mit 3 Kreisen.

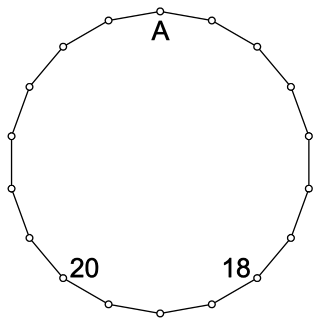
Wir zeichnen nach den Vorgaben einen Kreis k_1 mit Mittelpunkt M_1 und zeichnen einen weiteren Kreis k_2 mit Mittelpunkt M_2 so, dass er zusätzlich zu den beiden gegebenen Kreisen auch noch den Kreis k_1 berührt, den Berührpunkt nennen wir P. Da MP Tangente an k_1 und k_2 ist, gilt $M_1P \perp MP \perp M_2P$. Die Punkte M, M_1 und P bilden somit ein rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlängen 5, 4 und 3. Der Winkel $\angle M_1MP$ ist größer als $\frac{180°-90°}{2} = 45°$, da er der zweitgrößte Winkel im Dreieck MM_1P ist. Gleiches gilt für $\angle M_2MP$. Der Winkel M_1MM_2 ist größer als $90°$. Daher können weniger als $\frac{360}{90} = 4$ solche Kreise gezeichnet werden, ohne dass diese sich überlappen.



Zeichnen wir drei Kreise mit Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 so, dass jeweils $\angle M_i M M_j = 120°$ für $i \neq j$, so überlappen diese nicht (siehe Bild).

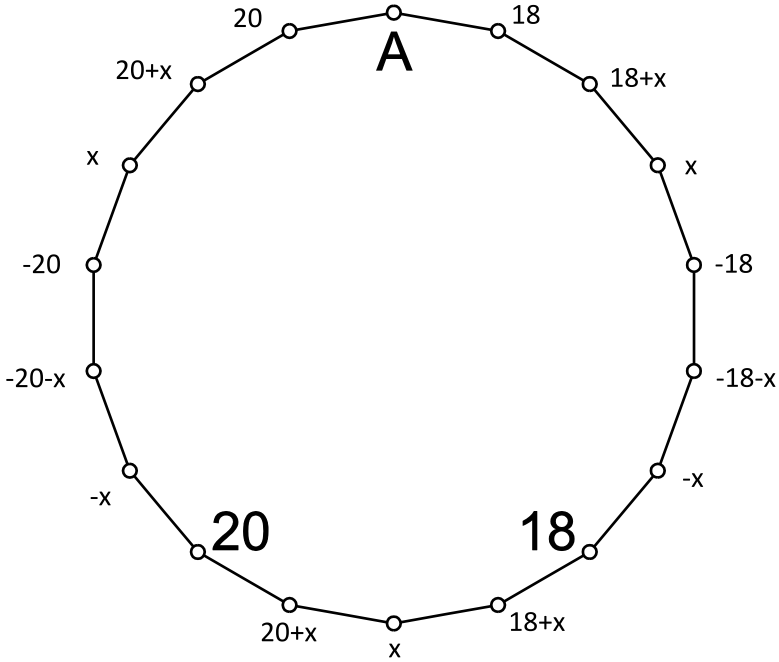


25. In jedem Eckpunkt des abgebildeten 18-ecks soll eine Zahl geschrieben werden, die gleich der Summe der beiden Zahlen in den benachbarten Eckpunkten ist. Zwei dieser Zahlen sind vorgegeben. Welche Zahl steht beim Eckpunkt A?



(A) 2018 (B) –20 (C) 18 (D) 38 (E) –38

Lösung: Die Zahl im untersten Eckpunkt bezeichnen wir mit x. Dann können wir davon ausgehend die Zahlen in den restlichen Punkten berechnen (siehe Grafik).



Für die Zahl beim Eckpunkt A ergibt sich also 38.

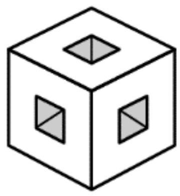
26. Diana zeichnet auf einem karierten Blatt ein Rechteck aus zwölf Quadraten. Einige der Quadrate sind schwarz gefärbt. In jedes weiße Quadrat schreibt sie die Anzahl der benachbarten schwarzen Felder. Die Abbildung zeigt ein Beispiel für ein solches Rechteck. Nun macht sie dasselbe mit einem Rechteck, das aus 2018 Quadraten besteht. Was ist die höchste Zahl, die sie als Summe aller Zahlen in den weißen Quadraten erhalten kann?

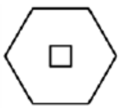
1		2	1
0	3		
1		2	1

(A) 1262 (B) 2016 (C) 2018 (D) 3025 (E) 3027

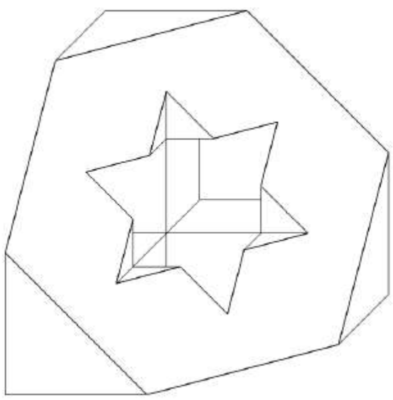
Lösung: Ein Rechteck mit 2018 Quadraten hat das Format 2×1009. Die größte Summe hat Diana, wenn die Quadrate abwechselnd (schachbrettartig) schwarz und weiß gefärbt sind. Sie hat dann in einer Reihe an den Enden je ein weißes Feld mit der Zahl 2. In der anderen Reihe sind die Enden schwarz. Alle weiteren weißen Felder sind mit 3 beschriftet. Insgesamt hat sie 1009 weiße Felder und hat als Summe $3 \cdot 1009 - 2 = 3025$.

27. Aus einem 3 x 3 x 3 Würfel sind sieben kleine Würfel entfernt worden, wie im Bild zu sehen ist. Diese verbleibende (rundum symmetrische) Figur wird mit einer Ebene durch den Mittelpunkt und normal zu einer der vier Raumdiagonalen geschnitten. Wie sieht der Querschnitt aus?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung:



28. Jede Zahl der Menge {1, 2, 3, 4, 5, 6} wird in genau ein Feld einer 2 x 3 Tabelle geschrieben. Auf wie viele Arten kann man dies machen, sodass die Summe der Zahlen in jeder Spalte und jeder Zeile durch 3 teilbar ist?

(A) 36 (B) 42 (C) 45 (D) 48 (E) eine andere Zahl

Lösung: Für die Spalten gibt es folgende Möglichkeiten:

$$\binom{1}{5}, \binom{2}{4}, \binom{3}{6}, \binom{4}{2}, \binom{5}{1}, \binom{6}{3}$$

Für die erste Spalte kann ich beliebig eine der sechs Spalten wählen, für die zweite gibt es nur mehr vier Möglichkeiten (nach der Spalte $\binom{1}{5}$ sind z.B. die Spalten $\binom{1}{5}$ und $\binom{5}{1}$ nicht mehr möglich). Für die letzte Spalte sind nur mehr zwei Spalten möglich. Insgesamt ergeben sich damit $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten.

29. Ed macht aus mehreren identischen kleinen weißen Würfeln einen großen Würfel und malt manche Seitenflächen des großen Würfels rot an. Seine Schwester Nicole lässt den Würfel fallen und er zerbricht wieder in die ursprünglichen kleinen Würfel. Davon haben 45 keine rote Seitenfläche. Wie viele Seitenflächen des großen Würfels hat Ed rot bemalt?

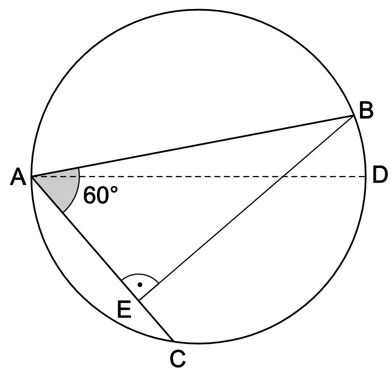
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Zumindest die Würfel im Inneren haben keine rote Seitenfläche. Bei einem $n \times n \times n$-Würfel, sind das $(n-2)^3$ kleine Würfel. Da nur 45 Würfel keine rote Seitenfläche haben, gilt $(n-2)^3 \leq 45$ und damit $n \leq 5$. Der Würfel besteht aus mindestens 45 Würfeln. Daraus folgt $n^3 \geq 45$ und damit $n \geq 4$.

Möglichkeit 1: n=4. Der Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln. Davon haben 64-45=19 Würfel eine rote Seite. Durch das Bemalen einer einzelnen Seitenfläche des großen Würfels haben 16 kleine Würfel eine rote Seitenfläche, beim Bemalen von zwei zusammenstoßenden großen Seitenflächen 16+12=28. Beim Bemalen von zwei gegenüberliegenden Seitenflächen 16+16=32. Es ist in diesem Fall nicht möglich, genau 19 Würfel mit einer roten Seitenfläche zu erhalten.

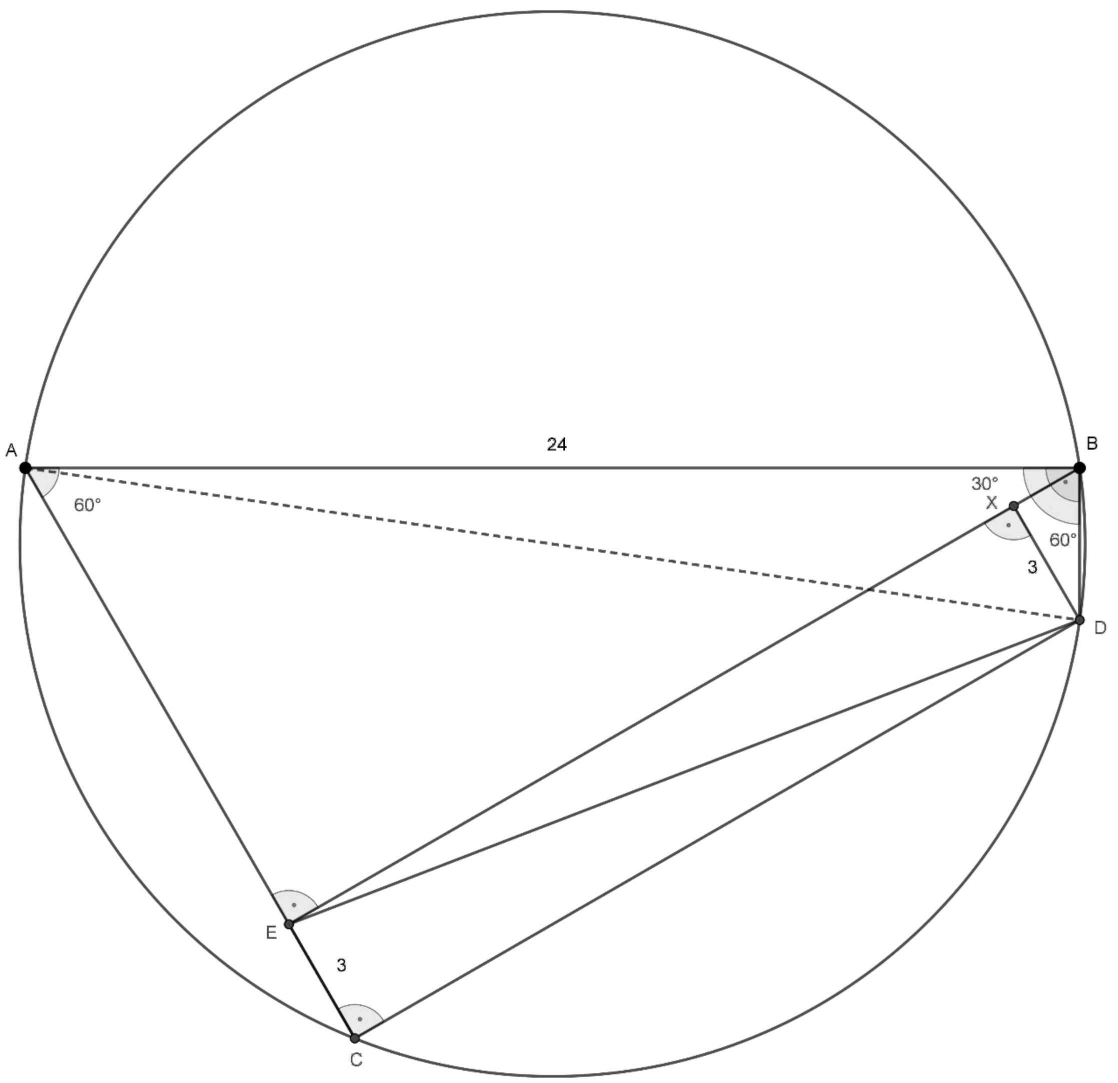
Möglichkeit 2: $n = 5$. Im Inneren sind 27 kleine Würfel. Weitere 18 Würfel haben keine rote Seitenfläche. Eine Möglichkeit ist, dass Ed nur zwei gegenüberliegende Seiten des großen Würfels nicht rot bemalt hat. Dann haben an diesen Seiten dennoch alle Würfel, die entlang einer Kante sind, mindestens eine rote Seite. Von den 25 Würfeln einer Seite sind das 16. Die restlichen 9 haben keine rote Seite. Insgesamt haben damit 27+9+9=45 Würfel keine rote Seite. Ed hat vier Seitenflächen rot bemalt.

30. Im Kreis mit Durchmesser AD werden zwei Sehnen AB und AC gezeichnet. Es gilt $\angle BAC = 60°$, $AB = 24$ cm, $EC = 3$ cm, und BE ist normal zu AC. Wie lang ist die Sehne BD?



(A) $\sqrt{3}$ cm (B) 2 cm (C) 3 cm (D) $2\sqrt{3}$ cm (E) $3\sqrt{2}$ cm

Lösung: Es gilt $\angle ABE = 180° - 90° - 60° = 30°$ und wegen des Satzes von Thales $\angle ABD = \angle ACD = 90°$. Weiters gilt $\angle EBD = \angle ABD - \angle ABE = 60°$. Sei X der Höhenfußpunkt der Höhe durch D im Dreieck $\triangle EBD$. Da $EXDC$ ein Rechteck ist, gilt $XD = EC = 3\ cm$ und $\triangle BXD$ ist rechtwinklig mit rechtem Winkel in X und $\angle XBD = 60°$. Daher ist $BX = \frac{BD}{2}$ und es gilt $BD^2 = 3^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2$. Daraus ergibt sich $BD = 2 \cdot \sqrt{3}$.



24
A
B
30°
X
60°
60°
3
D
E
3
C

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Kategorie: Student, Schulstufe: 11 – 13

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2018“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

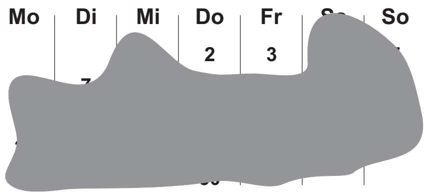
Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2018
Gruppe Student (ab 11. Schulstufe)
Österreich - 15. 3. 2018

- 3 Punkte Beispiele -

1. Im Bild sehen wir das Kalenderblatt eines bestimmten Monats. Leider ist Tinte über einen Teil des Blatts geronnen. An welchem Wochentag war der 27. dieses Monats?

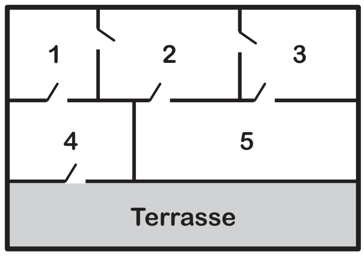


(A) Montag (B) Mittwoch (C) Donnerstag (D) Samstag (E) Sonntag

2. Welcher der folgenden Ausdrücke hat den größten Wert?

(A) $2 - 0 \cdot 1 + 8$ (B) $2 + 0 \cdot 1 \cdot 8$ (C) $2 \cdot 0 + 1 \cdot 8$ (D) $2 \cdot (0 + 1 + 8)$ (E) $2 \cdot 0 + 1 + 8$

3. In der Zeichnung sehen wir den Grundriss von Renates Haus. Renate betritt ihr Haus von der Terrasse und geht durch jede Tür des Hauses genau ein Mal. In welchem Zimmer befindet sie sich dann?

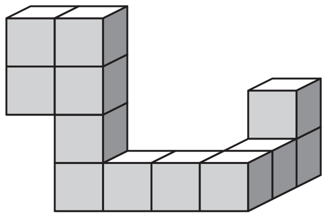


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Thor hat sieben Steine und einen Hammer. Schlägt er mit dem Hammer auf einen Stein, zerbricht dieser in fünf kleine Steine. Er macht dies einige Male. Welche der folgenden kann die Anzahl der Steine sein, die er danach hat?

(A) 17 (B) 20 (C) 21 (D) 23 (E) 25

5. In der Zeichnung sehen wir ein Objekt, das aus 12 miteinander verklebten Würfeln besteht. Das Objekt wird in Farbe getaucht, sodass es außen vollständig neu gefärbt wird. Wie viele kleine Würfel haben danach genau vier gefärbte Seitenflächen?

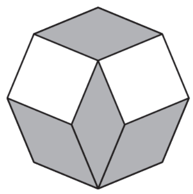


(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

6. Die folgenden beiden Aussagen sind wahr: Einige Aliens sind grün und alle anderen sind lila. Grüne Aliens leben nur auf dem Mars. Welcher der folgenden logischen Schlüsse lässt sich daraus ziehen?

(A) Alle Aliens leben auf dem Mars. (B) Auf dem Mars leben nur grüne Aliens.
(C) Einige lila Aliens leben auf der Venus. (D) Alle lila Aliens leben auf der Venus.
(E) Auf der Venus leben keine grünen Aliens.

7. Vier identische Rhomben (Rauten) und zwei Quadrate werden wie abgebildet zu einem regelmäßigen Achteck zusammengefügt. Wie groß sind die stumpfen Innenwinkel in den Rhomben?

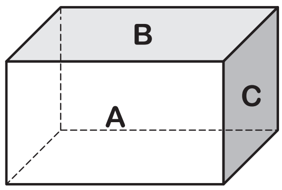


(A) 135° (B) 140° (C) 144° (D) 145° (E) 150°

8. In einer Schachtel befinden sich 65 Kugeln. Davon sind 8 weiß und die restlichen schwarz. In einem Zug können bis zu 5 Kugeln auf einmal aus der Schachtel entnommen werden. Es ist nicht erlaubt, Kugeln in die Schachtel zurückzulegen. Wie viele Züge müssen mindestens durchgeführt werden um zu garantieren, dass mindestens eine weiße Kugel aus der Schachtel entnommen wird?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

9. Die Seitenflächen des abgebildeten Ziegelsteins haben, wie abgebildet, die Flächeninhalte A, B und C. Wie groß ist das Volumen des Ziegelsteins?



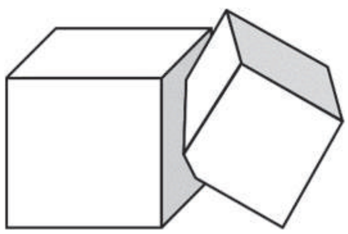
(A) ABC (B) $\sqrt{ABC}$ (C) $\sqrt{AB + BC + CA}$ (D) $\sqrt[3]{ABC}$ (E) $2(A + B + C)$

10. Auf wie viele Arten kann die Zahl 1001 als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden?

(A) auf keine Art (B) auf eine Art (C) auf zwei Arten (D) auf drei Arten (E) auf mehr als drei Arten

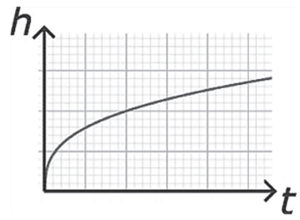
- 4 Punkte Beispiele -

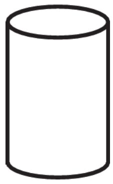
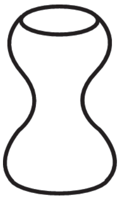
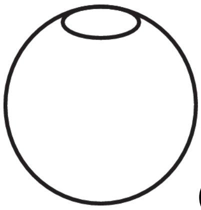
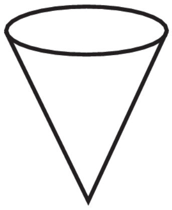
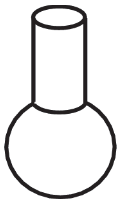
11. Zwei Würfel mit den Volumina V und W schneiden einander wie abgebildet. 90% des Volumens des Würfels mit Volumen V gehört nicht zu beiden Würfeln. 85% des Volumens des Würfels mit Volumen W gehört nicht zu beiden Würfeln. In welcher Beziehung stehen die Volumina der beiden Würfel zueinander?



(A) $V = \frac{2}{3} W$ (B) $V = \frac{3}{2} W$ (C) $V = \frac{85}{90} W$ (D) $V = \frac{90}{85} W$ (E) $V = W$

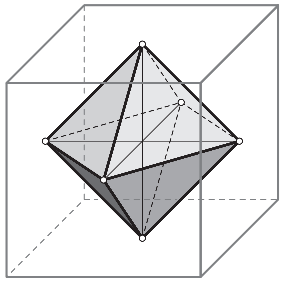
12. Die fünf abgebildeten Vasen werden mit Wasser gefüllt. Die Füllgeschwindigkeit ist konstant. Für welche der fünf Vasen zeigt der abgebildete Graph die Wasserhöhe h als Funktion der Zeit t?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

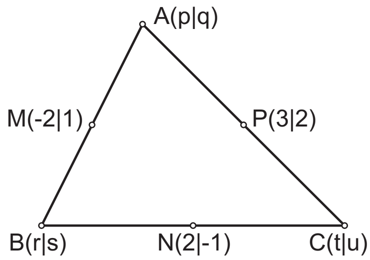
13. $|\sqrt{17}-5|+|\sqrt{17}+5| =$

(A) 10 (B) $2\sqrt{17}$ (C) $\sqrt{34}-10$ (D) $10-\sqrt{34}$ (E) 0



14. Ein Oktaeder wird einem Würfel mit der Kantenlänge 1 eingeschrieben. Die Eckpunkte des Oktaeders sind jeweils die Mittelpunkte der Würfelseitenflächen. Wie groß ist das Volumen des Oktaeders?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{8}$



15. Die Eckpunkte A, B, C eines Dreiecks haben wie abgebildet die Koordinaten A(p|q), B(r|s) und C(t|u). Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten sind die Punkte M(−2|1), N(2|−1) und P(3|2). Bestimme den Wert des Ausdrucks
$p+q+r+s+t+u$.

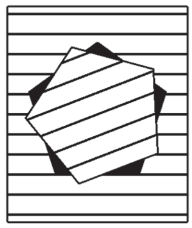
(A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 3 (D) 5 (E) ein anderer Wert

16. Vor dem Fußballspiel Real Madrid gegen Manchester United wurden folgende fünf Prognosen erstellt:

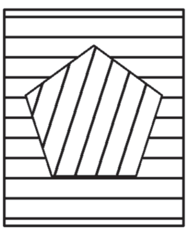
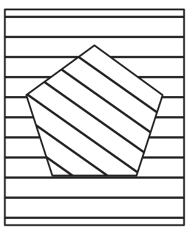
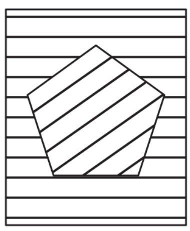
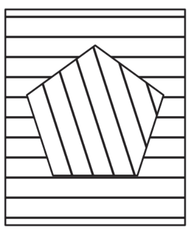
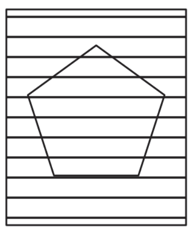
i) Das Spiel wird nicht unentschieden ausgehen.
ii) Real Madrid wird mindestens ein Tor schießen.
iii) Real Madrid wird nicht verlieren.
iv) Real Madrid wird gewinnen.
v) Es werden genau drei Tore im Spiel erzielt.

Es stellt sich heraus, dass genau drei dieser Prognosen auch eintreffen. Wie viele Tore erzielt Real Madrid?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Dies lässt sich nicht eindeutig bestimmen.

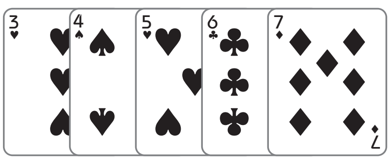


17. Aus einem linierten Blatt Papier wird ein regelmäßiges Fünfeck ausgeschnitten. In jedem Schritt wird dann das Fünfeck um seinen Mittelpunkt gegen den Uhrzeigersinn um 21° gedreht. Das Ergebnis nach dem ersten Schritt ist in der Abbildung zu sehen. Welches der Bilder zeigt die Situation, in der das Fünfeck zum ersten Mal das Loch wieder vollständig füllt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

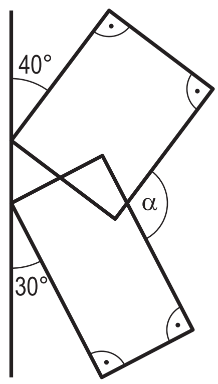
18. Welche der folgenden Zahlen ist kein Teiler von $18^{2017}+18^{2018}$?

(A) 8 (B) 18 (C) 28 (D) 38 (E) 48



19. Drei der abgebildeten Karten werden an Nadia verteilt, und die restlichen an Riny. Nadia multipliziert die 3 Werte ihrer Karten und Riny multipliziert die 2 Werte seiner Karten. Es stellt sich heraus, dass die Summe dieser beiden Produkte eine Primzahl ist. Bestimme die Summe der Werte der Karten von Nadia.

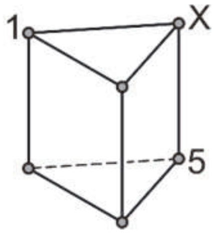
(A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 17 (E) 18



20. Zwei Rechtecke schließen mit der senkrechten Linie die Winkel 40° bzw. 30° ein (siehe Figur). Wie groß ist der Winkel α?

(A) 105° (B) 120° (C) 130° (D) 135° (E) ein anderer Wert

- 5 Punkte Beispiele -



21. Das abgebildete Prisma besitzt zwei Dreiecke und drei Quadrate als Seitenflächen. Die sechs Eckpunkte werden mit den Zahlen von 1 bis 6 nummeriert. Danach ist die Summe der vier Zahlen in den Eckpunkten aller drei Quadrate jeweils gleich. Die Zahlen 1 und 5 sind in der Abbildung vorgegeben. Welche Zahl steht im Eckpunkt X?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) Diese Situation ist unmöglich.

22. m und n sind die Lösungen der Gleichung $x^2 - x - 2018 = 0$. Welchen Wert hat der Ausdruck $n^2 + m$?

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

23. Vier Brüder mit den klingenden Namen *A*, *B*, *C* und *D* sind jeweils verschieden groß. Sie behaupten folgendes:

A: Ich bin weder der Größte noch der Kleinste. *B*: Ich bin nicht der Kleinste.
C: Ich bin der Größte. *D*: Ich bin der Kleinste.

Genau einer von ihnen lügt. Wer ist der größte Bruder?

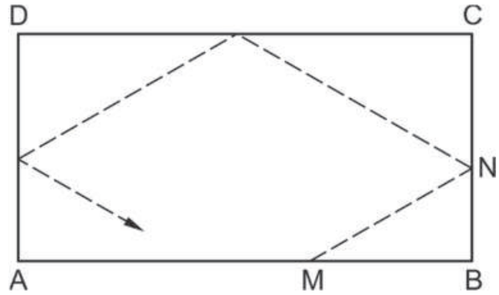
(A) *A* (B) *B* (C) *C* (D) *D* (E) Es ist nicht genug Information gegeben um eindeutig zu entscheiden.

24. Eine Funktion f hat die Eigenschaft, dass $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle ganzen Zahlen x und y gilt. Weiters gilt $f(1) = 1/2$. Bestimme den Wert des Ausdrucks $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$.

(A) 1/8 (B) 3/2 (C) 5/2 (D) 15/8 (E) 6

25. Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = x^2 + px + q$ schneidet die x-Achse und die y-Achse in drei verschiedenen Punkten. Der Kreis durch diese drei Punkte schneidet den Graph der Funktion *f* in einem vierten Punkt. Wie lauten die Koordinaten dieses vierten Schnittpunkts?

(A) $(0|-q)$ (B) $(p|q)$ (C) $(-p|q)$ (D) $\left(-\frac{q}{p}\middle|\frac{q^2}{p^2}\right)$ (E) $(1|p+q+1)$

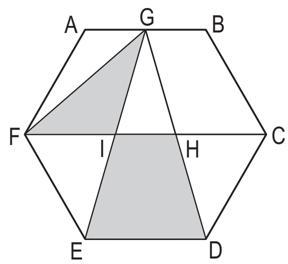


26. Auf einem idealisierten rechteckigen Billardtisch mit den Seitenlängen 3 m und 2 m wird ein (punktförmiger) Ball vom Punkt M auf der langen Seite AB weggeschossen. Er reflektiert wie abgebildet an jeder anderen Seite genau ein Mal. In welchem Abstand vom Eckpunkt A wird der Ball wieder auf diese Seite auftreffen, wenn $BM = 1{,}2\,m$ und $BN = 0{,}8\,m$ gilt?

(A) $2\,m$ (B) $1{,}5\,m$ (C) $1{,}2\,m$ (D) $2{,}8\,m$ (E) $1{,}8\,m$

27. Wie viele reelle Lösungen hat die Gleichung $\big||4^x - 3| - 2\big| = 1$?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



28. Wie in der Abbildung zu sehen, ist ABCDEF ein regelmäßiges Sechseck. G ist der Mittelpunkt von AB. H und I sind die Schnittpunkte der Strecken GD bzw. GE mit FC. Wie groß ist das Verhältnis der Flächen des Dreiecks GIF und des Trapez IHDE?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

29. In einer Schulklasse befinden sich um 40 % mehr Mädchen als Burschen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte zweiköpfige Schülerabordnung aus dieser Klasse aus genau einem Mädchen und einem Burschen besteht, ist genau $\frac{1}{2}$. Wie viele Kinder gibt es in der Klasse?

(A) 20 (B) 24 (C) 36 (D) 38 (E) Diese Situation ist nicht möglich.

30. Archimedes hat 15! berechnet. Das Ergebnis steht auf der Tafel. Leider kann man zwei der Ziffern, nämlich die zweite und die zehnte, nicht lesen. Um welche beiden Ziffern handelt es sich?
(Hinweis: Es gilt 15! = 15·14·13·…·2·1)

1■0767436■000

(A) 2 und 0 (B) 4 und 8 (C) 7 und 4 (D) 9 und 2 (E) 3 und 8

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2018
15. 3. 2018

Level: Student, Grade: 11 – 13

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
Each correct answer to questions 1. – 10.: 3 Points
Each correct answer to questions 11. – 20.: 4 Points
Each correct answer to questions 21. – 30.: 5 Points
Each question left unanswered: 0 Points
Each incorrect answer: ¼ of the points for the question are subtracted

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Ich melde mich zur Teilnahme zum österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik 2018“ an.
Ich stimme zu, dass meine personenbezogenen Daten, nämlich Vor- und Zuname, Geschlecht, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart
1.) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen verwendet werden.

JA □ NEIN □

2.) zum Zweck der landes- sowie österreichweiten Reihungen, der Veröffentlichung der Ergebnisse jener Schülerinnen und Schüler, die in ihrer Kategorie zumindest 50 % der zu vergebenden Punkte erreicht haben sowie des Ermöglichens von Vergleichen mit eigenen Leistungen aus vorherigen Wettbewerbsperioden auf www.kaenguru.at verwendet werden.

JA □ NEIN □

Die Zustimmung zu Punkt 2) kann nur bei einer bejahenden Zustimmung zu Punkt 1) gegeben werden. Nur Teilnehmer mit Zustimmung zu Punkt 2) werden für landes- bzw. österreichweite Siegerehrungen in Betracht gezogen.
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember 2019 gestattet. Diese Zustimmung kann ich gemäß § 8 Abs. 1 Z 2 DSG 2000 ohne Begründung jederzeit schriftlich bei webmaster@kaenguru.at widerrufen, unter Angabe folgender Informationen zur Identifizierung:

- Vor- und Zuname des Teilnehmers
- Schulstufe und Schule des Teilnehmers (genaue Adresse)
- Jahr des Wettbewerbs

Nach dem 31. Dezember 2019 werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei das zuletzt genannte Datum durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art pseudonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage von § 46 Abs. 1 Z 3 DSG 2000 erlaubt. DVR-Nummer: 300 37 06

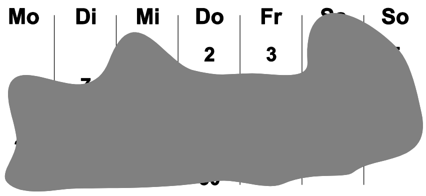
Unterschrift:

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.math.aau.at/OeMO

Känguru der Mathematik 2018
Level Student (Grade 11 onwards)
Austria - 15. 3. 2018

- 3 Points Examples -

1. In the diagram you can see the calendar page of a certain month. Unfortunately ink has run across parts of the page. Which day of the week does the 27th of that month fall on?

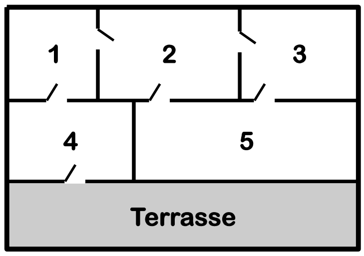


(A) Monday (B) Wednesday (C) Thursday (D) Saturday (E) Sunday

2. Which of the following expressions has the biggest value?

(A) $2 - 0 \cdot 1 + 8$ (B) $2 + 0 \cdot 1 \cdot 8$ (C) $2 \cdot 0 + 1 \cdot 8$ (D) $2 \cdot (0 + 1 + 8)$ (E) $2 \cdot 0 + 1 + 8$

3. The diagram shows the floor plan of Renate's house. Renate enters her house from the terrace (Terrasse) and walks through every door of the house exactly once. Which room does she end up in?

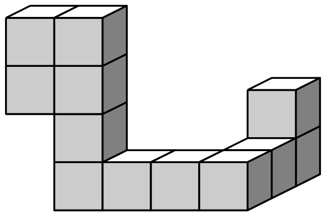


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Thor has seven stones and a hammer. With his hammer he hits a stone and it breaks into five small stones. He does that a few times. Which of these numbers could be the number of stones he ends up with?

(A) 17 (B) 20 (C) 21 (D) 23 (E) 25

5. The diagram shows an object made up of 12 dice glued-together. The object is dipped into some colour so that the entire outside is coloured in this new colour. How many of the small dice will have exactly four faces coloured in?

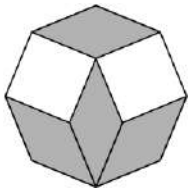


(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

6. The following two statements are true: Some aliens are green and all others are purple. Green aliens live on Mars only. Which one of the following logical conclusions can be made?

(A) All aliens live on Mars. (B) There are only green aliens on Mars.
(C) Some purple aliens live on Venus (D) All purple aliens live on Venus.
(E) There are no green aliens on Venus.

7. Four identical rhombuses (diamonds) and two squares are fitted together to form a regular octagon as shown. How big are the obtuse interior angles in the rhombuses?

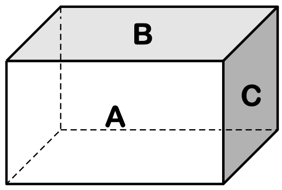


(A) 135° (B) 140° (C) 144° (D) 145° (E) 150°

8. There are 65 balls in a box, 8 of which are white, the rest are black. Up to 5 balls can be taken out of the box in one draw. It is not allowed to put any balls back into the box. What is the minimum number of draws which have to be made to be certain that at least one white ball is drawn from the box?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

9. The faces of the brick have the areas A, B and C as shown. How big is the volume of the brick?



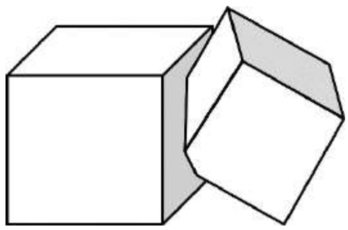
(A) ABC (B) $\sqrt{ABC}$ (C) $\sqrt{AB + BC + CA}$ (D) $\sqrt[3]{ABC}$ (E) $2(A + B + C)$

10. How many ways are there to write the number 1001 as the sum of two prime numbers?

(A) no way (B) one way (C) two ways (D) three ways (E) more than three ways

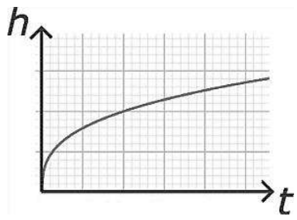
- 4 Point Examples-

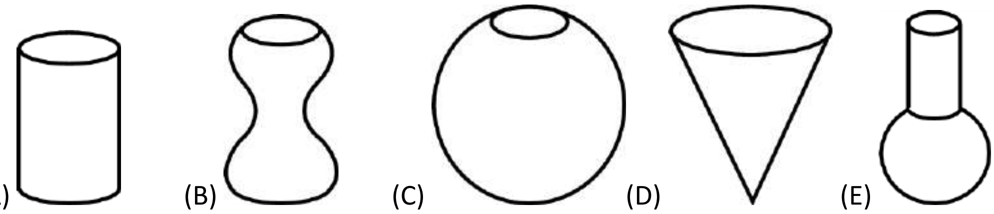
11. Two dice with volumes V and W intersect each other as shown.
90% of the volume of the die with volume V does not belong to both dice.
85% of the volume of the die with volume W does not belong to both dice.
What is the relationship between the volumes of the two dice?



(A) $V = \frac{2}{3} W$ (B) $V = \frac{3}{2} W$ (C) $V = \frac{85}{90} W$ (D) $V = \frac{90}{85} W$ (E) $V = W$

12. The five vases shown are filled with water. The filling rate is constant. For which of the five vases does the graph shown describe the height of the water h as a function of the time t?

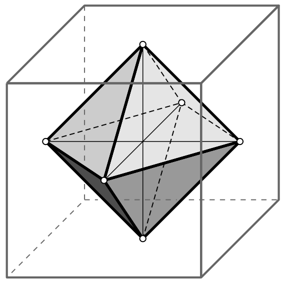




(A) (B) (C) (D) (E)

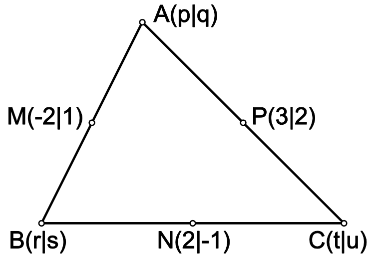
13. $|\sqrt{17}-5|+|\sqrt{17}+5|=$

(A) 10 (B) $2\sqrt{17}$ (C) $\sqrt{34}-10$ (D) $10-\sqrt{34}$ (E) 0



14. An octahedron is inscribed into a die with side length 1. The vertices of the octahedron are the midpoints of the faces of the die. How big is the volume of the octahedron?

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{8}$



15. The vertices of a triangle have the co-ordinates A(p|q), B(r|s) and C(t|u) as shown. The midpoints of the sides of the triangle are the points M(−2|1), N(2|−1) and P(3|2). Determine the value of the expression $p+q+r+s+t+u$

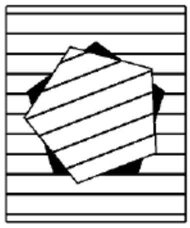
(A) 2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 3 (D) 5 (E) another value

16. Before the football game, Real Madrid vs. Manchester United, the following five predictions were made:

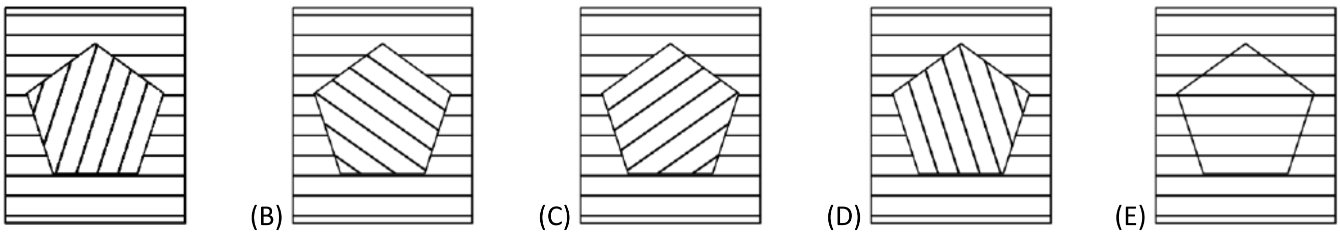
i) The game will not end in a draw.
ii) Real Madrid will score at least one goal.
iii) Real Madrid will not lose.
iv) Real Madrid will win.
v) Exactly three goals will be scored.

It turns out that exactly three of these predictions then come true. How many goals did Real Madrid score?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) This cannot be determined for certain.



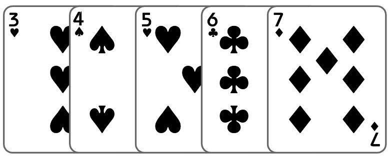
17. A regular pentagon is cut out of a page of lined paper. Step by step this pentagon is then rotated 21° counter clockwise about its midpoint. The result after step one is shown in the diagram. Which of the diagrams shows the situation when the pentagon fills the hole entirely again for the first time?



(A) (B) (C) (D) (E)

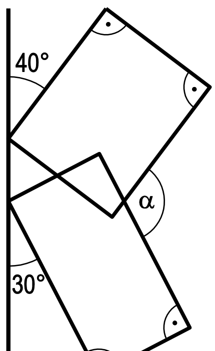
18. Which of the following numbers is not a factor of $18^{2017}+18^{2018}$?

(A) 8 (B) 18 (C) 28 (D) 38 (E) 48



19. Three of the cards shown will be dealt to Nadia, the rest to Riny. Nadia multiplies the three values of her cards and Riny multiplies the two values of his cards. It turns out that the sum of those two products is a prime number. Determine the sum of the values of Nadia's cards.

(A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 17 (E) 18

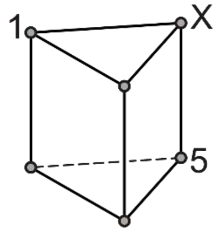


20. Two rectangles form the angles 40° and 30° respectively, with a straight line (see diagram). How big is angle α?

(A) $105°$ (B) $120°$ (C) $130°$ (D) $135°$ (E) another value

- 5 Point Examples -

21. The faces of the prism shown, are made up of two triangles and three squares. The six vertices are labelled using the numbers 1 to 6. The sum of the four numbers around each square is always the same. The numbers 1 and 5 are given in the diagram. Which number is written at vertex X?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) This situation is impossible.

22. m and n are the solutions of the equation $x^2 - x - 2018 = 0$. What is the value of the expression $n^2 + m$?

(A) 2016 (B) 2017 (C) 2018 (D) 2019 (E) 2020

23. Fours brothers with the harmonious names *A*, *B*, *C* and *D* are all of different heights. They make the following claims:

A: I am neither the tallest nor the smallest. *B*: I am not the smallest.
C: I am the tallest. D: I am the smallest.

Exactly one of them lies. Who is the tallest brother?

(A) *A* (B) *B* (C) *C* (D) *D* (E) Not enough information is given to be able to make a definite decision.

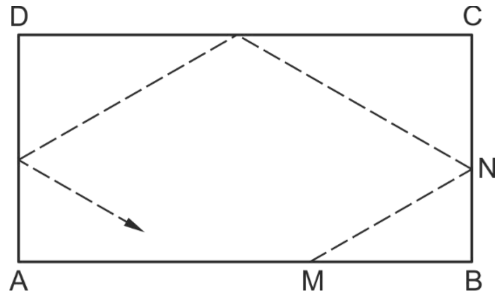
24. A function f fulfills the property $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ for all whole numbers x and y. Furthermore $f(1) = 1/2$. Determine the value of the expression $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$.

(A) 1/8 (B) 3/2 (C) 5/2 (D) 15/8 (E) 6

25. A quadratic function of the form $f(x) = x^2 + px + q$ intersects the x-axis and the y-axis in three different points. The circle through these three points intersects the graph of the function *f* in a fourth point. What are the co-ordinates of this fourth point of intersection?

(A) $(0|-q)$ (B) $(p|q)$ (C) $(-p|q)$ (D) $\left(-\frac{q}{p}\middle|\frac{q^2}{p^2}\right)$ (E) $(1|p+q+1)$

26. On an idealised rectangular billiard table with side lengths 3 m and 2 m a ball (point-shaped) is pushed away from point M on the long side AB. It is reflected exactly once on each of the other sides as shown. at which distance from the vertex A will the ball hit this side again if $BM = 1{,}2\ m$ and $BN = 0{,}8\ m$?

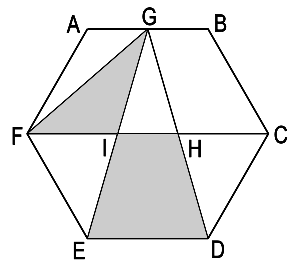


(A) $2\ m$ (B) $1{,}5\ m$ (C) $1{,}2\ m$ (D) $2{,}8\ m$ (E) $1{,}8\ m$

27. How many real solutions does the equation $\left||4^x - 3| - 2\right| = 1$ have?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

28. ABCDEF is a regular hexagon, as shown in the diagram. G is the midpoint of AB. H and I are the intercepts of the line segments GD and GE respectively, with the line segment FC. How big is the ratio of the areas of the triangle GIF and the trapezium IHDE?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

29. In a class there are 40% more girls than boys. The probability that a student representative team of two students randomly selected from this class is made up of exactly one girl and one boy is exactly $\frac{1}{2}$. How many children are there in this class?

(A) 20 (B) 24 (C) 36 (D) 38 (E) This situation is not possible.

30. Archimedes has calculated 15! . The result is on the board.
Unfortunately two of the digits, the second and the tenth, cannot be read.
What are the two missing digits?
(Remark: 15! = 15·14·13·…·2·1)

1■0767436■000

(A) 2 and 0 (B) 4 and 8 (C) 7 and 4 (D) 9 and 2 (E) 3 and 8

Känguru 2018 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Da der 2. Tag ein Donnerstag ist, müssen auch der 9., 16. und 23. ein Donnerstag sein. (Mathematisch gesprochen: Alle Tage mit Rest 2 bei Division durch 7, also „kongruent 2 modulo 7“.) Dann ist der 24. ein Freitag, 25. Samstag, 26. Sonntag und **27. ein Montag**.

2.
$$
\begin{aligned}
&2 - 0 \cdot 1 + 8 = 2 - 0 + 8 = 10\\
&2 + 0 \cdot 1 \cdot 8 = 2 + 0 = 2\\
&2 \cdot 0 + 1 \cdot 8 = 0 + 8 = 8\\
&\mathbf{2 \cdot (0 + 1 + 8) = 2 \cdot 9 = 18}\\
&2 \cdot 0 + 1 + 8 = 0 + 1 + 8 = 9
\end{aligned}
$$

3. Von der Terrasse kann sie nur nach Raum 4 gehen, von dort nur nach Raum 1, und von dort wieder nur nach Raum 2. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, wobei noch 3 Türen zu durchschreiten sind. Entweder sie geht nach 5, 3 und kommt wieder zurück nach 2, und hat nun alle Türen genau ein Mal durchquert. Oder sie geht in der umgekehrten Richtung nach 3, 5 und kommt ebenfalls wieder zurück nach **2**.

4. Mit jedem Schlag werden 4 Steine mehr: Der zerschlagene Stein fällt weg, und stattdessen gibt es fünf neue Steine. Ganz egal, auf welchen Stein Thor schlägt, gibt es nach dem ersten Schlag also 11 Steine, nach dem zweiten Schlag 15 Steine, nach dem dritten Schlag 19 Steine und nach dem vierten Schlag **23 Steine**. (Mathematisch gesprochen: Die Anzahl der Steine bleibt immer kongruent 3 modulo 4.)

5. Etwas leichter, als die gefärbten Seiten zu zählen, ist es, diejenigen zu zählen, die an einem anderen Würfel kleben. Wir suchen also Würfel, die an genau zwei Seiten verklebt sind. Der erste Würfel ganz rechts hat nur einen Nachbarn. Dann folgen 7 Würfel, die schlangenartig aneinandergeklebt sind, also immer zwei Nachbarn haben. Der nächste Würfel (das ist von links gesehen derjenige in der zweiten Reihe und zweiten Spalte) hat drei Nachbarn. Die restlichen drei links oben haben ebenfalls jeweils zwei Nachbarn. Somit gibt es **10 Würfel**, die jeweils 4 farbige Seitenflächen haben werden.

6.
   - (A) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass einige lila Aliens auf der Venus oder Beteigeuze leben.
   - (B) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass auf dem Mars zusätzlich auch lila Aliens leben.
   - (C) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass die Venus unbewohnt ist und die lila Aliens irgendwo anders leben.
   - (D) könnte zwar stimmen, es könnte aber auch sein, dass lila Aliens auch woanders leben, oder dass die Venus sogar unbewohnt ist und alle lila Aliens woanders leben.
   - **(E) muss stimmen**, da grüne Aliens nur am Mars und nirgendwo anders leben können, insbesondere eben auch nicht auf der Venus.

7. Jeder Innenwinkel eines Achtecks beträgt 135°. (Dies kann man sich auch ausrechnen: Es gibt 8 gleiche Außenwinkel, die zusammen 360° ergeben müssen, also hat jeder Außenwinkel $360^\circ : 8 = 45^\circ$, und der entsprechende Innenwinkel also $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.) Unten links sehen wir, dass der stumpfe Winkel einer Raute genau so einem Innenwinkel von 135° entspricht.

   Alternativ kann man, wenn man den Innenwinkel eines Achtecks nicht kennt, auch noch so argumentieren: Wir bezeichnen den spitzen Winkel der Raute mit α. Oben links entspricht ein Innenwinkel einem Quadratwinkel und einem spitzen Winkel einer Raute, unten dagegen setzt derselbe Innenwinkel sich aus drei spitzen Rautenwinkeln zusammen. Also gilt $90^\circ + \alpha = 3\alpha$. Daraus folgt sofort $\alpha = 45^\circ$, und für den anderen Winkel der Raute gilt dann $180^\circ - 45^\circ =$ **135°**.

8. Es gibt also $65 - 8 = 57$ schwarze Kugeln. Im schlimmsten Fall erwischt man mit den ersten 11 Zügen immer nur schwarze Kugeln, bis man 55 schwarze Kugeln heraußen liegen hat. Spätestens beim **12. Zug** muss man aber eine weiße Kugel erwischen, da es sonst ja mindestens 60 schwarze Kugeln gegeben haben müsste.

9. Seien x, y und z die Seitenlängen des Würfels. Es gilt also $xy = A$, $yz = B$ und $zx = C$. Das Volumen, das wir berechnen möchten, entspricht xyz. Wir sehen, dass sich dies zusammensetzen lässt als $xyz = \sqrt{x^2y^2z^2} = \sqrt{xy \cdot yz \cdot zx} = \mathbf{\sqrt{ABC}}$.

   In diesem Fall kann man viele der Antwortmöglichkeiten aber auch schon durch Betrachtung der physikalischen Größeneinheit ausschließen: Die Flächen haben jeweils m^2 als Einheit, die gesuchte Einheit des Volumens ist m^3.

   - Für (A) ergibt sich als Einheit $ABC = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{m}^6$.
   - Für (C) ergibt sich $\sqrt{AB + BC + CA} = \sqrt{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2} = \sqrt{\mathrm{m}^4 + \mathrm{m}^4 + \mathrm{m}^4} = \sqrt{\mathrm{m}^4} = \mathrm{m}^2$.
   - Für (D) ergibt sich $\sqrt[3]{ABC} = \sqrt[3]{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot m^2} = \sqrt[3]{\mathrm{m}^6} = \mathrm{m}^2$.
   - Und für (E) erhalten wir $2(A + B + C) = 2(\mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2 + \mathrm{m}^2) = \mathrm{m}^2$.
   - Lediglich bei (B) gilt wie gewünscht $\sqrt{ABC} = \sqrt{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^2 \cdot m^2} = \sqrt{\mathrm{m}^6} = \mathrm{m}^3$.

10. Wie wir wissen, ist 2 die einzige gerade Primzahl. 1001 kann nicht die Summe zweier ungerader Primzahlen sein, da eine Summe zweier ungerader Zahlen gerade wäre. Also ist eine der beiden Primzahlen gleich 2. Es bleibt also nur die Möglichkeit $1001 = 2 + 999$, aber 999 ist keine Primzahl. Es ist daher **auf keine Art** möglich, 1001 als Summe zweier Primzahlen darzustellen.

11. Sei X das Volumen des Teils, der in beiden Würfeln enthalten ist. Es gilt laut Angabe, dass X 10% von V und 15% von W ausmacht, also $X = \frac{10}{100}V = \frac{15}{100}W$. Wir multiplizieren beide Seiten mit 100 und erhalten $10V = 15W$. Dividieren wir noch durch 10, so haben wir $\mathbf{V} = \frac{15}{10}W = \mathbf{\frac{3}{2}W}$.

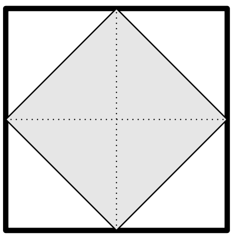
12. Je schmäler die Vase an einer Stelle ist, umso schneller steigt der Wasserstand (da weniger Wasser benötigt wird, um die Stelle zu füllen). Wir überlegen für jede Vase, wie die Wasserhöhe sich bei konstanter Füllgeschwindigkeit ändern würde.

   - Bei (A) steigt die Höhe linear an.
   - Bei (B) steigt die Höhe zuerst langsam, dann in der Mitte schnell, und am Ende wieder langsam.
   - Bei (C) steigt die Höhe zuerst sehr schnell, dann bis zur Mitte immer langsamer, und dann bis oben wieder immer schneller.
   - Bei (D) steigt die Höhe am Anfang sehr schnell und dann immer langsamer.
   - Bei (E) steigt die Höhe zuerst schnell, dann bis zur Mitte der Kugel immer langsamer, dann bis zum oberen Ende der Kugel wieder schneller, und zuletzt im Zylinder mit konstanter Geschwindigkeit.

   Der abgebildete Graph entspricht daher am ehesten **Vase (D)**.

13. Die Zahl $\sqrt{17}$ liegt zwischen 4 und 5 (wegen $4^2 = 16 < 17 < 25 = 5^2$). (Der Taschenrechner verrät $\sqrt{17} \approx 4{,}123$.) Also ist der Inhalt des ersten Betrags negativ, der des zweiten (logischerweise als Summe zweier positiver Zahlen) positiv. Wir rechnen aus: $|\sqrt{17} - 5| + |\sqrt{17} + 5| = 5 - \sqrt{17} + \sqrt{17} + 5 = \mathbf{10}$.

14. Wenn man das gesamte Gebilde auf halber Höhe durchschneidet, sieht man, dass der Oktaeder sich aus zwei identischen Pyramiden zusammensetzt. Das Volumen einer Pyramide wiederum berechnet sich als „Grundfläche mal Höhe Drittel“. Die Grundfläche macht genau die Hälfte einer Würfelseitenfläche aus, also die Hälfte von 1, wie man bei Betrachtung gerade von oben leicht sieht:

   Die Höhe ist ebenfalls gleich der Hälfte einer Seitenlänge, also $\frac{1}{2}$.

   Somit gilt Volumen Pyramide $= \frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{12}$. Der Oktaeder, der sich aus zwei solchen Pyramiden zusammensetzt, hat das doppelte Volumen, also $2 \cdot \frac{1}{12} = \mathbf{\frac{1}{6}}$.

15. Die Koordinaten eines Streckenmittelpunktes berechnen sich, indem man die Koordinaten der Endpunkte addiert und die Summe halbiert, was sich zum Beispiel für die x-Koordinate von N so berechnet: $2 = \frac{r+t}{2}$.

    Für die gesamte Summe gilt daher, wenn man sie geschickt anders anschreibt (wobei wir uns zu Nutze machen, dass $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$):

$$p+q+r+s+t+u = \frac{p+r}{2} + \frac{r+t}{2} + \frac{t+p}{2} + \frac{q+s}{2} + \frac{s+u}{2} + \frac{u+q}{2} = -2+2+3+1-1+2 = \mathbf{5}.$$

16. Der „Trick“ hier besteht darin, die Fallunterscheidung mit der richtigen Annahme zu beginnen, dann ist sie schnell erledigt. Nehmen wir an, „iv) Real Madrid wird gewinnen“ ist wahr. Dann gilt auch „i) Das Spiel wird nicht unentschieden ausgehen“, „ii) Real Madrid wird mindestens ein Tor schießen“ und „iii) Real Madrid wird nicht verlieren“, also hätten wir schon eine wahre Aussage mehr, als wir haben dürfen. Daher ist iv) sicher falsch, Real Madrid hat nicht gewonnen.

    Nehmen wir an, Real Madrid hat unentschieden gespielt. Damit ist „i) Das Spiel wird nicht unentschieden ausgehen“ falsch und iv) laut voriger Überlegung ebenso, also müssen alle anderen Prognosen richtig sein. Aber „v) Es werden genau drei Tore im Spiel erzielt“ kann bei einem Spiel, das unentschieden ausgegangen ist, nicht eintreten.

    Also hat Real Madrid verloren. Damit sind Aussagen „iii) Real Madrid wird nicht verlieren“ und „iv) Real Madrid wird gewinnen“ falsch, die anderen drei folglich wahr. Damit sind laut v) genau 3 Tore gefallen. Laut ii) hat Real Madrid mindestens eines dieser Tore gemacht. Mehr können es nicht gewesen sein, da sie sonst ja gewonnen hätten.

    Somit hat Real Madrid **genau 1 Tor** geschossen.

17. Eine fünftel Drehung entspricht 72°. Damit das Fünfeck das Loch wieder vollständig füllt, muss die Drehung in Summe genau ein Vielfaches einer fünftel Drehung ausmachen. Wenn x die Anzahl der Schritte bezeichnet, suchen wir also die kleinste ganze Zahl x (≥ 0), sodass $x \cdot 21°$ ein Vielfaches von 72° ist, also $x \cdot 21° = y \cdot 72°$ mit einer ganzen Zahl y.

    Für die weitere Berechnung lassen wir das °-Zeichen weg. Zunächst dividieren wir beide Seiten durch 3 und erhalten $7x = 24y$. Anders ausgedrückt suchen wir das kleinste x, sodass $y = \frac{7x}{24}$ eine ganze Zahl ist. Das gilt spätestens bei $x = 24$, also könnten wir die ersten 24 Züge auch durchprobieren.

    Etwas geschickter ist es, die möglichen ganzzahligen Werte für y zu betrachten: Für 7 gibt es eine Lösung (nämlich das schon erwähnte $x = 24$), daher brauchen wir hier nur 6 Werte durchprobieren und sehen, dass für $y = 1, 2, \ldots, 6$ keine ganzzahligen Werte von y herauskommen.

    Mit etwas mathematischem Wissen geht all das auch viel leichter: Damit der Bruch $\frac{7x}{24}$ eine ganze Zahl sein kann, müssen alle Primfaktoren aus dem Zähler (also von $24 = 2^3 \cdot 3$) auch im Nenner vorkommen. Der 7er enthält keine davon, also muss x alle enthalten. Das kleinste solche x ist nun einmal 24 selbst.

    Das hätte auch schon ohne das vorherige Kürzen funktioniert: Hätten wir im ungekürzten Bruch gefordert, dass $\frac{21x}{72}$ eine ganze Zahl sein muss, hätten wir benötigt, dass alle Primfaktoren von $72 = 3^2 \cdot 2^3$ in $3 \cdot 7 \cdot x$ enthalten sein müssen. Hier hätte $3 \cdot 7$ uns den einen 3er erledigt, und die restlichen Primfaktoren hätten in x enthalten sein müssen, wobei auch hier $2^3 \cdot 3 = 24$ das kleinste solche x wäre.

    Ein weiterer Ansatz ist der folgende: Der kleinstmögliche Wert, den beide Seiten von $x \cdot 21° = y \cdot 72°$ gleichzeitig annehmen können, muss gleichzeitig ein Vielfaches von 21° sein (da er gleich $x \cdot 21°$ ist) und ein Vielfaches von 72° (da er gleich $y \cdot 72°$ ist). Wie der Name schon sagt, suchen wir also das kleinste gemeinsame Vielfache von 21 und 72. Die Berechnungsvorschrift dafür lautet, dass wir zunächst die Primfaktorisierung beider Zahlen betrachten, also $21 = 3 \cdot 7$ und $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Nun nehmen wir jeden Primfaktor so oft, wie er auf der Seite, die ihn öfter benötigt, vorkommt, und erhalten das kleinste gemeinsame Vielfache $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, woraus sich sofort $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 : 21 = 24$ und $y = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 : 72 = 7$ ergibt.

    Wofür wir uns bei all diesen Überlegungen eigentlich interessieren, ist aber nur der Wert von y, der gemäß aller obiger Überlegungen 7 beträgt. Nach sieben fünftel Drehungen (also einer ganzen und zwei fünftel Drehungen) erhalten wir Bild **(B)**.

18. Wir heben heraus und erhalten $18^{2017} + 18^{2018} = 18^{2017}(1+18) = 18^{2017} \cdot 19 = \left(2 \cdot 3^2\right)^{2017} \cdot 19 = 2^{2017} \cdot 3^{4034} \cdot 19$. Daraus folgt, dass $8 = 2^3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $38 = 2 \cdot 19$ und $48 = 2^4 \cdot 3$ alle darin enthalten sind. Die Zahl enthält aber keinen einzigen Primfaktor 7 und ist damit auch kein Vielfaches von $\mathbf{28} = 2^2 \cdot 7$.

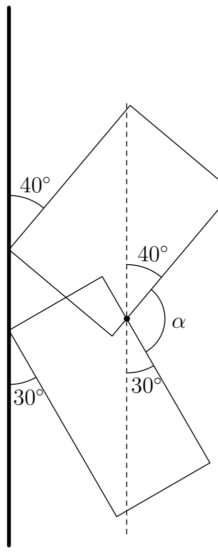
19. Falls die Produkte von Nadia und Riny einen gemeinsamen Teiler haben, so hat auch deren Summe diesen Teiler, ist also keine Primzahl. Hätte also zum Beispiel eine der beiden Personen den 4er und die andere Person den 6er erhalten, wären beide Produkte durch 2 teilbar, und somit auch deren Summe. Also müssen

die Karten 4 und 6 an dieselbe Person gegangen sein. Ebenso müssen die Karten 3 und 6, die beide durch 3 teilbar sind, an dieselbe Person gegangen sein.

Folglich hat Nadia die Karten 3, 4 und 6 erhalten, und Riny 5 und 7. Wir überprüfen sicherheitshalber, ob die Summe der Produkte auch tatsächlich eine Primzahl ist: $3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 72 + 35 = 107$ ist tatsächlich prim.

Die Summe von Nadias Karten ist $3 + 4 + 6 = \mathbf{13}$.

20. Wenn man die senkrechte Linie parallelverschiebt, findet man die beiden Winkel mit 30° und 40° wegen der Parallelität der Rechteckseiten rechts wieder:



Für α ergibt sich damit $\alpha = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = \mathbf{110^\circ}$.

21. Zuerst finden wir heraus, wie hoch diese Summe bei jedem Quadrat ist. Addiert man die drei Summen der drei Quadrate, so hat man jede Zahl von 1 bis 6 genau zwei Mal gezählt (da jede Zahl Teil von genau 2 Quadraten ist). Das Dreifache der Summe in einem Quadrat ist also gleich $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$, entsprechend ist die Summe in jedem Quadrat gleich 14.

    Würden die drei Zahlen 4, 5 und 6 im selben Quadrat vorkommen, wäre dessen Summe schon mindestens 15, also zu hoch. Wenn zwei dieser drei Zahlen auf derselben senkrechten Prismakante vorkommen würden, gäbe es keine Art, die dritte Zahl so zu platzieren, dass sie nicht im selben Quadrat wie diese beiden wäre. Daher enthält jede der drei senkrechten Prismakanten genau eine der drei Zahlen 4, 5 und 6.

    Für x kommen somit nur noch die Zahlen 2 oder 3 in Frage.

    Wäre $x = 3$, müsste die vierte Ecke des Quadrats, von dem wir schon drei Werte kennen, gleich $14 - 1 - 3 - 5 = 5$ sein, aber 5 ist bereits vergeben.

    Eine mögliche Anordnung dagegen besteht sicher darin, auf einer senkrechten Kante 1 und 6, auf einer weiteren 2 und 5, und auf einer dritten 3 und 4 zu platzieren. Die Summe jeder senkrechten Kante wäre dann 7, und die Summe jedes Quadrats, das aus genau zwei solchen Kanten besteht, gleich 14 wie gefordert. Somit ist $x = 2$ **möglich und eindeutig**.

22. Die elegante Methode besteht im Einsatz des Satzes von Vieta: Für die beiden Lösungen m und n gilt demnach $m + n = 1$ und $mn = -2018$. Da es eben Lösungen der Gleichung sind, gilt aber natürlich auch $n^2 - n - 2018 = 0$, also $n^2 = 2018 + n$. Folglich erhalten wir für den gesuchten Ausdruck $n^2 + m = 2018 + n + m = 2018 + 1 = \mathbf{2019}$.

    Man kann es aber auch mit brutaler Gewalt durchrechnen (wobei wir am Ende $n^2 + m$ und $m^2 + n$ beide ausrechnen um sicherzugehen, dass das Ergebnis unabhängig davon ist, welche der Lösungen man als n

wählt):

$$
\begin{aligned}
\{m,n\} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2018} \\
&= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+4\cdot 2018}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
\{m^2,n^2\} &= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{8073}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \pm 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{8073}}{2} + \frac{8073}{4} \\
&= \frac{8074}{4} \pm \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
n^2+m &= \frac{8074}{4} - \frac{\sqrt{8073}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
&= \frac{8074+2}{4} = 2019 \\
m^2+n &= \frac{8074}{4} + \frac{\sqrt{8073}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{8073}}{2} \\
&= \frac{8074+2}{4} = 2019
\end{aligned}
$$

23. Auch hier muss man in möglichst geschickter Reihenfolge Fälle unterscheiden. Nehmen wir als erstes an, D wäre der Lügner, wäre also entgegen seiner Aussage nicht der Kleinste. Dann müssen A, B und C die Wahrheit sagen, aber alle drei behaupten ebenfalls, nicht der Kleinste zu sein, es gäbe also gar keinen Kleinsten. Das ist nicht möglich. Somit kann D nicht der Lügner sein, ist also sicher der Kleinste. Daraus folgt sofort, dass auch B die Wahrheit sagt wenn er behauptet, nicht der Kleinste zu sein.

    Würde C die Wahrheit sagen, wäre C der Größte und D der Kleinste, und somit hätte auch A die Wahrheit gesagt, dann gibt es gar keinen Lügner. Das ist ebenfalls nicht möglich.

    Daher ist C der Lügner und kann somit nicht der Größte sein. A sagt die Wahrheit und ist entsprechend ebenfalls nicht der Größte. Damit kann nur noch **B der Größte** sein. Mögliche Anordnungen sind $B > A > C > D$ oder $B > C > A > D$.

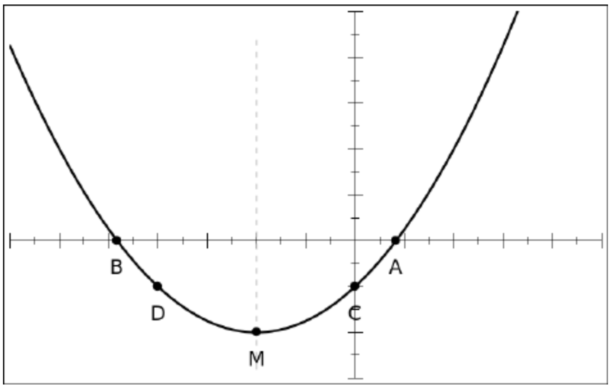
24. Durch Einsetzen geschickter Werte von x und y erhalten wir $f(2)$ und $f(3)$:

$$
\begin{aligned}
x=1, y=1: &\qquad f(2) = f(1+1) = f(1)\cdot f(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
x=1, y=2: &\qquad f(3) = f(1+2) = f(1)\cdot f(2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

    Um $f(0)$ zu erhalten, setzen wir $x = 1$ und $y = 0$ ein und sehen $f(1) = f(1+0) = f(1)\cdot f(0)$. Dividieren wir beide Seiten durch $f(1)$ (was gleich $\frac{1}{2}$, also ungleich 0 ist), so bleibt $1 = f(0)$.

    Nun brauchen wir nur noch zu addieren: $f(0)+f(1)+f(2)+f(3) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = \frac{8}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8} = \mathbf{\frac{15}{8}}$.

25. Wir machen uns einige der Symmetrieeigenschaften in der Parabel zunutze:



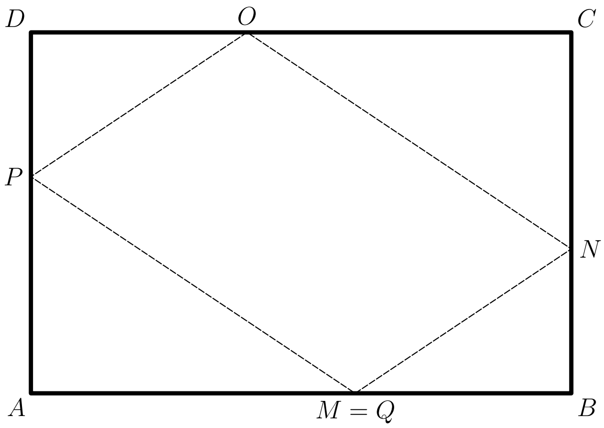
Die beiden Schnittpunkt mit der x-Achse sind die beiden Nullstellen, also die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, und haben somit Koordinaten $A = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p}{4} - q}, 0\right)$ und $B = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p}{4} - q}, 0\right)$. Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man, indem man einfach den dort geltenden Wert $x = 0$ einsetzt und Punkt $C = (0, q)$ findet. All diese Überlegungen gelten für alle möglichen Lagen der Parabel (nach oben oder unten offen, Minimum/Maximum links oder rechts oder genau auf der y-Achse).

Die Symmetrieachse der Parabel geht durch deren Minimum/Maximum, das bei $x = -\frac{p}{2}$ liegt. Das erhält man, indem man entweder den Mittelpunkt zwischen A und B ausrechnet (als $\frac{A+B}{2}$), oder die Ableitung $f'(x) = 2x + p$ der Parabelfunktion bildet und nullsetzt.

Auch der Kreis muss symmetrisch bezüglich dieser Symmetrieachse sein. (Wenn man den Umkreismittelpunkt von ABC konstruiert, muss dieser unter anderem auf der Streckensymmetrale von AB liegen, die genau der Symmetrieachse entspricht.)

Daraus folgt, dass auch der gesuchte Punkt D symmetrisch zu C bezüglich der Symmetrieachse $x = -\frac{p}{2}$ liegen muss. Für den x-Wert folgt, da der x-Wert von C gleich 0 ist, sofort, dass dieser doppelt so weit von der y-Achse entfernt sein muss wie die Symmetrieachse, also $x = -\frac{p}{2} \cdot 2 = -p$. Der y-Wert ist gleich dem von C, da die Symmetrieachse parallel zur y-Achse ist, also $y = q$. Wir erhalten daher den Punkt $D = (\mathbf{-p, q})$.

26. Wir bezeichnen die Punkte, wo der Ball auf die Seiten auftrifft, der Reihe nach mit M, N, O, P und Q. Durch Zufall ergibt es sich, dass der Ball genau an derselben Stelle wieder auftrifft:



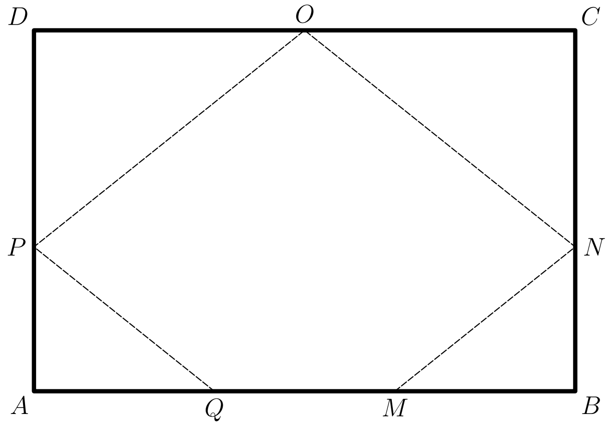
Um das auszurechnen, benötigen wir die Beobachtung, dass die Dreiecke MBN, OCN, ODP und MAP alle zueinander ähnlich sind. In MBN gilt $BM : BN = 1{,}2 : 0{,}8 = 3 : 2$.

Für CN bleibt $CN = BC - BN = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$. Wegen $CO : CN = 3 : 2$ muss CO eineinhalb Mal so lang sein, also $CO = 1{,}8$.

Die Länge DO beträgt $DO = CD - CO = 3 - 1{,}8 = 1{,}2$. Wegen $DO : DP = 3 : 2$ beträgt DP zwei Drittel davon, also $DP = 0{,}8$.

Schließlich bleibt für AP noch $AP = AD - DP = 2 - 0{,}8 = 1{,}2$ übrig. Wegen $AQ : AP = 3 : 2$ beträgt AQ das Eineinhalbfache, also $AQ = \mathbf{1{,}8}$.

Es ist wichtig anzumerken, dass das Zusammentreffen von M und Q reiner Zufall ist. Würden wir zum Beispiel mit $BM = 1$ und $BN = 0{,}8$ beginnen, so hätten wir ein Verhältnis von $5 : 4$. Für die weiteren Seiten würde sich mit derselben Rechnung wie oben ergeben $CN = 1{,}2$, dann $CO = 1{,}5$, daher $DO = 1{,}5$ und somit $DP = 1{,}2$, und schließlich $AP = 0{,}8$ und $AQ = 1$:



27. Damit der äußere Betrag gleich 1 ist, muss dessen Inhalt entweder gleich 1 oder gleich -1 sein.
   - *Fall* $|4^x - 3| - 2 = 1$*:* Wir bringen den 2er auf die andere Seite und haben $|4^x - 3| = 3$ zu lösen. Auch hier haben wir noch einmal zwei Unterfälle: Entweder, der Inhalt dieses zweiten Betrags ist gleich 3 oder gleich -3.
     - *Fall* $4^x - 3 = 3$*:* Das ist äquivalent zu $4^x = 6$, und ist lösbar. (Die genaue Lösung zu finden ist nicht erforderlich. Der Taschenrechner verrät aber, dass $x = \frac{\ln(6)}{\ln(4)} \approx 1{,}29$.)
     - *Fall* $4^x - 3 = -3$*:* Hier müsste, nach Addition von 3 auf beiden Seiten, $4^x = 0$ gelten. Ein solches reelles x gibt es nicht.
   - *Fall* $|4^x - 3| - 2 = -1$*:* Wir addieren auf beiden Seiten 2 und erhalten $|4^x - 3| = 1$. Ein letztes Mal unterscheiden wir Fälle, da dies wiederum genau dann erfüllt ist, wenn der Inhalt des Betrages gleich 1 oder gleich -1 ist:
     - *Fall* $4^x - 3 = 1$*:* Das ist äquivalent zu $4^x = 4$, also $x = 1$.
     - *Fall* $4^x - 3 = -1$*:* Nach Addition von 3 erhalten wir $4^x = 2$, was für $x = \frac{1}{2}$ gilt.

   Insgesamt haben wir daher **3 verschiedene reelle Lösungen** gefunden.

28. Sei s die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks. Das Dreieck IGH ist genau halb so groß wie das Dreieck EGD (da die Seiten zueinander paarweise parallel sind und die Höhe genau halb so groß ist), daher ist auch IH genau halb so lang wie ED, beträgt also $\frac{s}{2}$.

   Die Länge FC beträgt $2s$, wie man leicht sieht, wenn man das Sechseck aus 6 identischen gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge s zusammensetzt. Da FI und HC wegen der Symmetrie gleich lang sind, gilt $FI = \frac{FI+HC}{2} = \frac{FC-IH}{2} = \frac{2s-\frac{s}{2}}{2} = \frac{3}{4}s$.

   Wir vergleichen nun beide gesuchten Flächen zur Fläche X von IHG. Wir wissen, das IHG genau ein Viertel der Fläche von EDG hat (da die Höhe und die Grundlinie jeweils halb so groß sind), also ist die Fläche von $IHDE$ drei Mal so groß wie X. Die Dreiecke IHG und GIF dagegen teilen dieselbe Höhe, aber die Grundlinie FI von GIF ist eineinhalb Mal so lang ist wie die Grundlinie IH von IHG, daher ist die Fläche von GIF eineinhalb Mal so groß wie X. Daraus ergibt sich, dass $IHDE$ genau doppelt so groß ist wie GIF, also $GIF : IHDE =$ **$1 : 2$**.

   Wenn man dieser eher verbalen Argumentation nicht traut, kann man es auch ausrechnen:

   Sei h die halbe Höhe des Sechsecks (die wir ausrechnen könnten als $h = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, was die weiteren Rechnungen aber nur unnötig länger macht).

   Die Fläche des Dreiecks GIF, berechnet mit der Grundlinie FI, beträgt $[GIF] = \frac{3}{4}s \cdot h \cdot \frac{1}{2} = sh \cdot \frac{3}{8}$.

   Die Fläche von $IHDE$ beträgt $[IHDE] = [EDG] - [IHG] = s \cdot 2h \cdot \frac{1}{2} - \frac{s}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{2} = sh \cdot (1 - \frac{1}{4}) = sh \cdot \frac{3}{4}$.

   Also ergibt sich $[GIF] : [IHDE] = sh \cdot \frac{3}{8} : sh \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} : \frac{3}{4} =$ **$1 : 2$**.

29. Sei m die Anzahl der Mädchen und b die Anzahl der Burschen. Laut Angabe gilt $m = 1{,}4 \cdot b$. Wir multiplizieren beide Seiten mit 5, um die Kommazahl loszuwerden, und erhalten $5m = 7b$.

Die Anzahl der Schülerdelegationen mit genau einem Mädchen und einem Burschen beträgt $m \cdot b$, die Anzahl aller möglichen Schülerdelegationen beträgt $\binom{m+b}{2} = \frac{(m+b)(m+b-1)}{2}$. Damit die Wahrscheinlichkeit genau $\frac{1}{2}$ ist, muss gelten $\frac{(m+b)(m+b-1)}{2} = 2 \cdot m \cdot b$. Multiplizieren wir beide Seiten mit 2 und multiplizieren die Klammern links aus, so erhalten wir $m^2 + 2mb + b^2 - m - b = 4bm$, also weiters $m^2 - 2bm + b^2 = m + b$ und schließlich $(m - b)^2 = m + b$.

Jetzt ersetzen wir alle b durch $\frac{5}{7}m$ und bekommen

$$\begin{aligned}
\left(m - \frac{5}{7}m\right)^2 &= m + \frac{5}{7}m \\
\left(\frac{2}{7}m\right)^2 &= \frac{12}{7}m \\
\frac{4}{49}m^2 &= \frac{12}{7}m && \Big| : m \neq 0 \\
\frac{4}{49}m &= \frac{12}{7} && \Big| \cdot \frac{49}{4} \\
m &= \frac{12 \cdot 49}{7 \cdot 4} = 21
\end{aligned}$$

woraus sich weiters ergibt $b = \frac{5}{7}m = 15$. Die Klasse hat daher $21 + 15 =$ **36 Kinder**.

Bei dieser Aufgabe kann man alternativ auch sehr schnell die angebotenen Lösungsmöglichkeiten ausprobieren. Die Schülerzahl s der Klasse muss wegen $s = m + b = m + \frac{5}{7}m = \frac{12}{7}m$ und folglich $m = \frac{7}{12}s$ durch 12 teilbar sein. Antwort (A) mit $s = 20$ scheidet daher sofort aus. Es bleiben Optionen (B) 14 Mädchen, 10 Burschen, (C) 21 Mädchen, 15 Burschen und (D) 28 Mädchen, 20 Burschen. Für jede davon ist $m \cdot b$ (Anzahl Schülerdelegationen mit genau einem Mädchen und einem Burschen) und $\frac{s \cdot (s-1)}{2}$ (Anzahl Schülerdelegationen insgesamt) schnell ausgerechnet.

Anmerkung: Bei allen obigen Überlegungen rechnen wir „Anzahl günstige durch Anzahl mögliche“. Alternativ kann man auch die Wahrscheinlichkeit ausrechnen, beim ersten Zug ein Mädchen und beim zweiten einen Burschen auszuwählen, oder umgekehrt. Diese beträgt $\frac{m}{m+b} \cdot \frac{b}{m+b-1} \cdot 2$ (wobei die Multiplikation mit 2 daher kommt, dass zuerst einen Burschen und dann ein Mädchen auszuwählen dieselbe Wahrscheinlichkeit hat). Der dabei entstehende Quotient ist genau derselbe wie zuvor.

30. Mit einem Taschenrechner hätten wir ganz schnell ausgerechnet, dass $15! = 1307674368000$, also 3 und 8 die fehlenden Zahlen sind.

Da wir so einen Taschenrechner beim Bewerb nicht zur Verfügung haben, behelfen wir uns mit einigen Tricks. Zunächst dividieren wir durch 1000, um die drei Nullen hinten wegzubekommen. Es bleibt (wenn man 8 durch 8 dividiert und 5, 10, 15 jeweils durch 5)

$$\frac{15!}{1000} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 3$$

übrig. Davon rechnen wir die Einerstelle aus, indem wir modulo 10 rechnen, das heißt, nach jeder Multiplikation werfen wir alles links der Einerstelle einfach weg. So erhalten wir, dass die Einerstelle gleich 8 ist.

Außerdem ist 15! durch 9 teilbar, daher auch die Ziffernsumme. Die Summe der bisher bekannten Ziffern ist 42. Wenn wir noch genau eine Ziffer hinzufügen dürfen, und die Summe danach durch 9 teilbar sein muss, muss diese Ziffer gleich 3 sein. (Die nächstgrößere Möglichkeit wäre 12, das ist aber keine einzelne Ziffer mehr.)

Es fehlen daher die Zahlen **3 und 8**.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Kategorie: Felix, 1. – 2. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

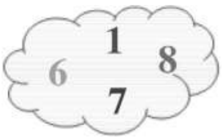
11	12	13	14	15

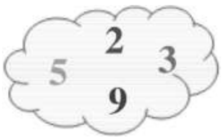
Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

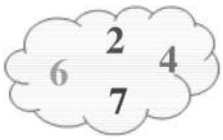
Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welche dieser Wolken beinhaltet nur Ziffern, die kleiner als 7 sind?

(A) 

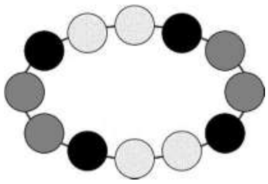
(B) 

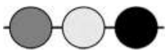
(C) 

(D) 

(E) 

2. Welches der 5 Bilder zeigt einen Teil der Kette?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. Mutter Känguru und ihr Sohn Max wiegen zusammen 60 kg (Kilogramm).
Die Mutter allein wiegt 52 kg.
Wie schwer ist Max?

(A) 4 kg (B) 8 kg (C) 30 kg (D) 56 kg (E) 112 kg

4. Vor einem Zoo stehen 12 Kinder. Susi ist die 7. von vorne und Kim der 2. von hinten.

Wie viele Kinder stehen zwischen Susi und Kim?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

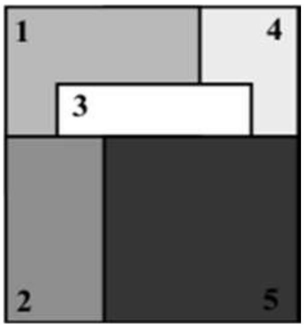
5. Jörg sortiert seine Socken paarweise. Zwei Socken mit der gleichen Nummer sind ein Paar.

Wie viele Paare kann er finden?

(A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

- 4 Punkte Beispiele -

6. Fünf gleich große quadratische Karten werden auf einem Tisch übereinandergelegt. Dadurch entsteht dieses Bild.



Die Karten werden von oben nach unten eingesammelt.

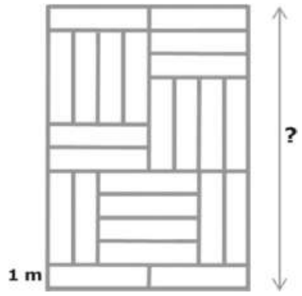
In welcher Reihenfolge geschieht dies?

(A) 5-4-3-2-1 (B) 5-2-3-4-1 (C) 5-4-2-3-1 (D) 5-3-2-1-4 (E) 5-2-3-1-4

7. Es gibt zwei Arten von Kamelen: Trampeltiere haben 2 Höcker, Dromedare haben 1 Höcker.
In einem Zoo leben genau 10 Kamele. Zusammen haben sie 14 Höcker.
Wie viele Trampeltiere leben im Zoo?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

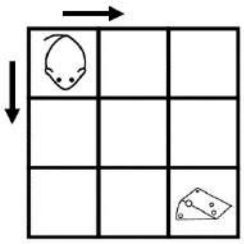
8. Der Boden eines Raumes wird mit gleich großen rechteckigen Platten ausgelegt (siehe Bild).



Wie lang ist der Raum?

(A) 6m (B) 8m (C) 10 m (D) 11 m (E) 12 m

9. Im Bild siehst du eine Maus und ein Stück Käse.
Die Maus darf nur in Richtung der Pfeile auf Nachbarfelder springen.
Wie viele Wege führen von der Maus zum Käse?



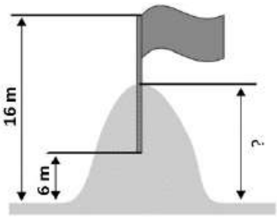
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

10. Welche der Figuren kann in diese 3 Teile zerschnitten werden?

(A) (B) (C) (D) (E)

- 5 Punkte Beispiele -

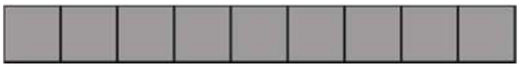
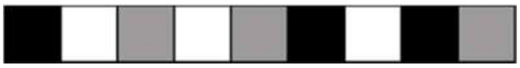
11. Die Riesen Tim und Tom machen einen Sandberg und schmücken ihn mit einer Fahne. Sie stecken den halben Fahnenmast in den höchsten Punkt des Sandberges. Der höchste Punkt des Mastes ist nun 16 m über dem Boden, der tiefste 6 m (siehe Bild). Wie hoch ist der Sandberg?



(A) 11 m (B) 12 m (C) 13 m (D) 14 m (E) 15 m

12. Es gibt weiße, graue und schwarze Quadrate. Drei Kinder legen damit dieses Muster.

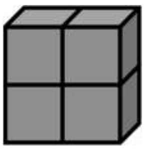
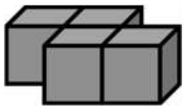
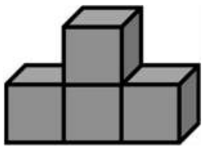
Dann ersetzt Anni alle schwarzen Quadrate durch weiße Quadrate.
Danach ersetzt Bob alle grauen Quadrate durch schwarze Quadrate.
Zum Schluss ersetzt Chris alle weißen Quadrate durch graue Quadrate.
Welches Bild liegt nun vor den drei Kindern?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

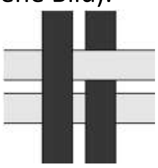
13. Die drei Eichhörnchen Anni, Asia und Elli haben zusammen 10 Nüsse. Jedes von ihnen hat verschieden viele Nüsse, aber mindestens 2 Nüsse.
Anni hat die wenigsten Nüsse. Asia hat die meisten Nüsse.
Wie viele Nüsse hat Elli?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

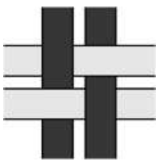
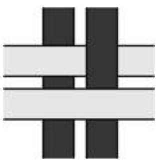
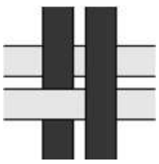
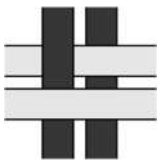
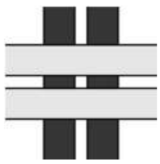
14. Jede Form wird aus 4 gleich großen Würfeln gebaut und angemalt.
Für welche Figur benötigt man am wenigsten Farbe?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

15. Aus vier Papierstreifen wird ein Muster gelegt (siehe Bild).



Was siehst du, wenn du es von der Rückseite betrachtest?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Level: Felix, Grade: 1 – 2

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
15 starting points
each correct answer to questions 1. – 5.: 3 points
each correct answer to questions 6. – 10.: 4 points
each correct answer to questions 11. – 15.: 5 points
each question left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 15). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

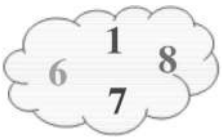
11	12	13	14	15

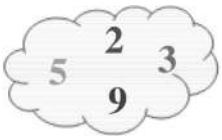
Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

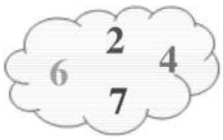
Känguru der Mathematik 2019
Level Felix (Grade 1 and 2)
Austria – 21. 3. 2019

- 3 Point Examples -

1. Which of these clouds contain only numbers that are smaller than 7?

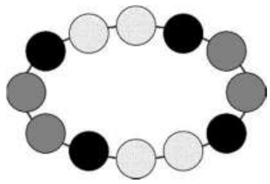
(A) 

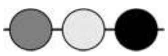
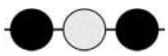
(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

2. Which of the 5 pictures shows a part of this chain? 

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

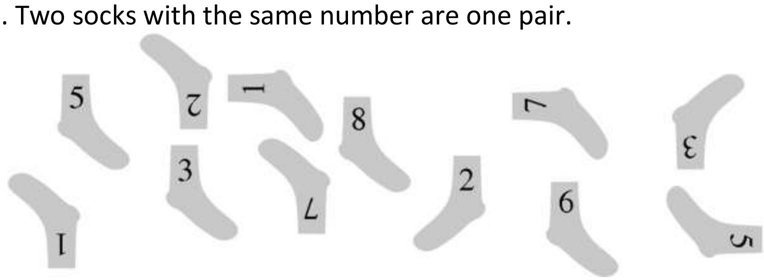
3. Mother kangaroo and her son Max together weigh 60 kg (kilograms).
The mother on her own weighs 52 kg.
How heavy is Max?
(A) 4 kg (B) 8 kg (C) 30 kg (D) 56 kg (E) 112 kg

4. There are 12 children in front of a zoo. Susi is the 7th from the front and Kim the 2nd from the back.

How many children are there between Susi and Kim?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

5. Jörg is sorting his socks. Two socks with the same number are one pair.

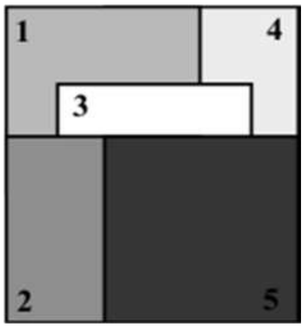


How many pairs can he find?

(A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

- 4 Point Examples -

6. Five equally big square pieces of card are placed on a table on top of each other. The picture on the side is created this way.



The cards are collected up from top to bottom.

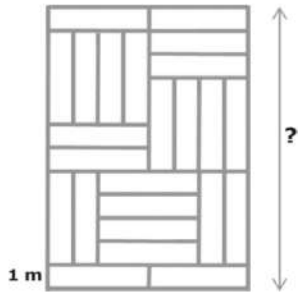
In which order are they collected?

(A) 5-4-3-2-1 (B) 5-2-3-4-1 (C) 5-4-2-3-1 (D) 5-3-2-1-4 (E) 5-2-3-1-4

7. There are two kinds of camels: bactrian camels that have 2 humps, dromedaries that have 1 hump. Exactly 10 camels live in a certain zoo. Together they have 14 humps. How many bactrian camels are there in this zoo?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

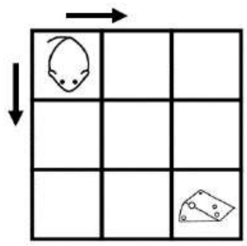
8. The floor of a room is covered with equally big rectangular tiles (see picture).



How long is the room?

(A) 6 m (B) 8 m (C) 10 m (D) 11 m (E) 12 m

9. The picture shows a mouse and a piece of cheese. The mouse is only allowed to move to the neighbouring fields in the direction of the arrows. How many paths are there from the mouse to the cheese?



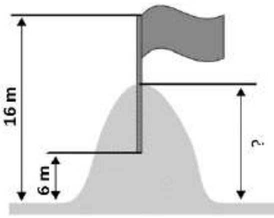
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

10. Which of the figures can be cut into these 3 pieces?

(A) (B) (C) (D) (E)

- 5 Point Examples -

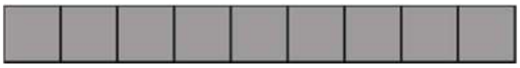
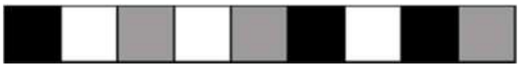
11. The giants Tim and Tom build a sandcastle and decorate it with a flag.
They insert half the flagpole into the highest point of the sandcastle.
The highest point of the flagpole is now 16 m above the floor, the lowest 6 m (see diagram).
How high is the sandcastle?



(A) 11 m (B) 12 m (C) 13 m (D) 14 m (E) 15 m

12. There are white, grey and black squares. Three children use these to make this pattern.

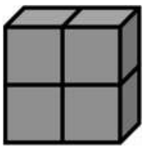
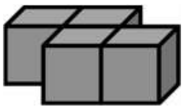
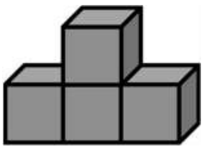
First Anni replaces all black squares with white squares.
Then Bob replaces all grey squares with black squares.
Finally Chris replaces all white squares with grey squares.
Which picture have the three children now created?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

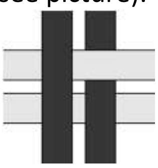
13. Together the three squirrels Anni, Asia and Elli have 10 nuts. Each one has a different number of nuts but at least 2 nuts.
Anni has the least number of nuts. Asia has the most nuts.
How many nuts does Elli have?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

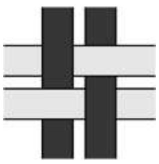
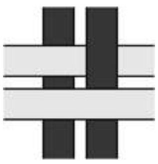
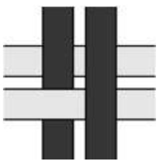
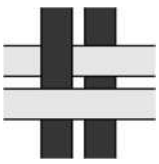
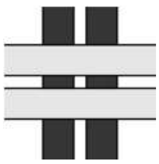
14. Each figure is made up of 4 equally big cubes and coloured in.
Which figure needs the least amount of colour?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

15. Four strips of paper are used to make a pattern (see picture).



What do you see when you look at it from behind?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 15. 3. 2019

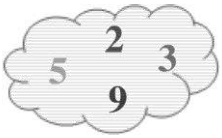
– Lösungsvektor –

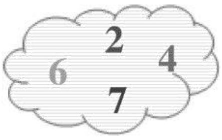
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	C	B	B	C	E	D	E	E	C	A	A	C	B	D

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welche dieser Wolken beinhaltet nur Ziffern, die kleiner als 7 sind?

(A) 

(B) 

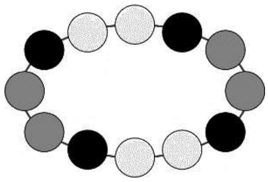
(C) 

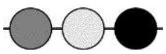
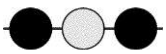
(D) 

(E) 

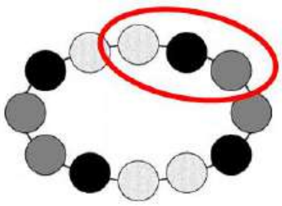
(D) Die Wolke beinhaltet die Ziffern 1, 2, 3 und 5. Diese Ziffern sind alle kleiner als 7.

2. Welches der 5 Bilder zeigt einen Teil der Kette?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

(C) Der Teil besteht aus einer weißen, einer schwarzen und einer grauen Perle. Diesen Teil der Kette findest du auf dem Bild rechts oben.



3. Mutter Känguru und ihr Sohn Max wiegen zusammen 60 kg (Kilogramm).
Die Mutter allein wiegt 52 kg.
Wie schwer ist Max?

(A) 4 kg (B) 8 kg (C) 30 kg (D) 56 kg (E) 112 kg

(B) Um von 52 kg auf 60 kg zu kommen, musst du 8 kg addieren. So schwer ist Max.

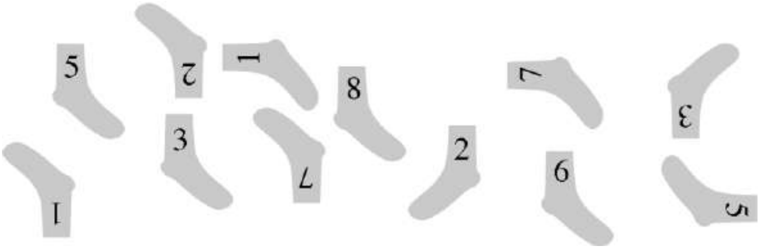
4. Vor einem Zoo stehen 12 Kinder. Susi ist die 7. von vorne und Kim der 2. von hinten.

Wie viele Kinder stehen zwischen Susi und Kim?

(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

(B) Susi ist die 7. Person von links und Kim der zweite von rechts. Zwischen ihnen stehen noch drei Kinder.

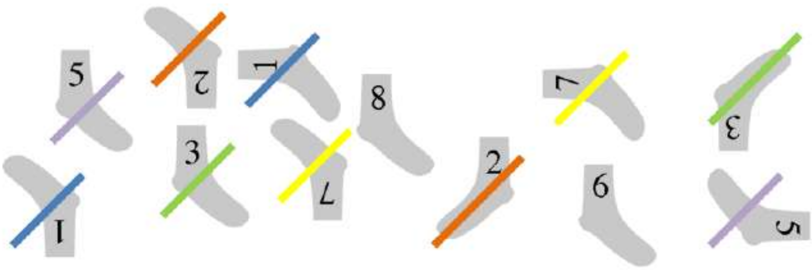
5. Jörg sortiert seine Socken paarweise. Zwei Socken mit der gleichen Nummer sind ein Paar.



Wie viele Paare kann er finden?

(A) 8 (B) 6 **(C)** 5 (D) 4 (E) 3

(C) Streiche die Socken durch, die die gleiche Nummer haben. Die 1 kommt zwei Mal vor, die 2 kommt zwei Mal vor, die 3 kommt zwei Mal vor, die 5 kommt zwei Mal vor und die 7 kommt zwei Mal vor. 6 und 8 gibt es nur ein Mal. Somit gibt es insgesamt 5 Paare.



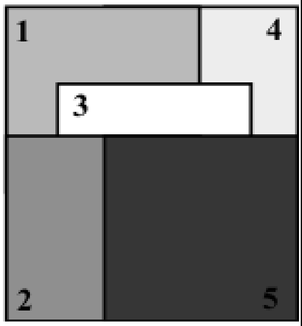
4 Punkte Beispiele

6. Fünf gleich große quadratische Karten werden auf einem Tisch übereinandergelegt. Dadurch entsteht dieses Bild.

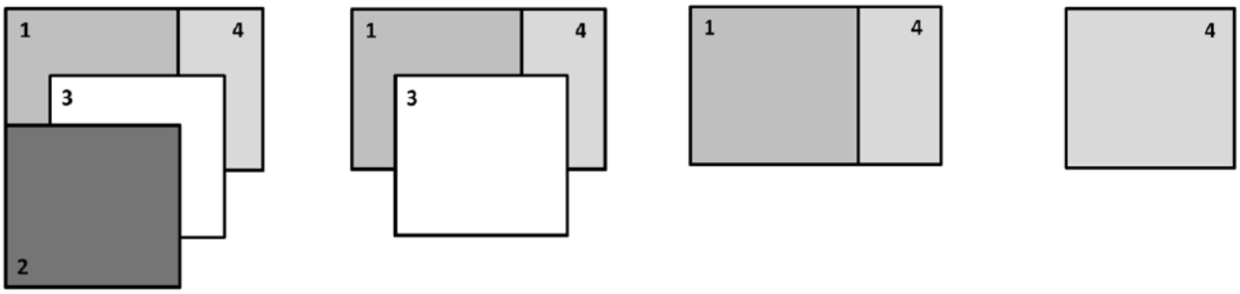
Die Karten werden von oben nach unten eingesammelt.

In welcher Reihenfolge geschieht dies?

(A) 5-4-3-2-1 (B) 5-2-3-4-1 (C) 5-4-2-3-1 (D) 5-3-2-1-4 **(E)** 5-2-3-1-4



(C) 5 ist ganz oben und wird zuerst abgehoben. Danach liegt die 2 oben. Wenn du diese abhebst, ist die 3 oben. Wenn du diese Karte abhebst, liegt die 1 oben und die letzte Karte ist 4.



7. Es gibt zwei Arten von Kamelen: Trampeltiere haben 2 Höcker, Dromedare haben 1 Höcker.
In einem Zoo leben genau 10 Kamele. Zusammen haben sie 14 Höcker.
Wie viele Trampeltiere leben im Zoo?

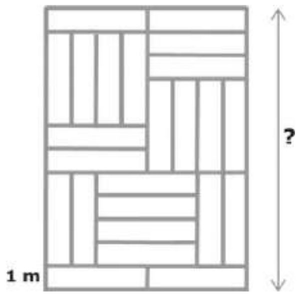
(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 4 (E) 5

(D) 4 Trampeltiere haben insgesamt **8** Höcker.
Wenn es 10 Kamele gibt und 4 davon Trampeltiere sind, gibt es 6 Dromedare. Diese haben insgesamt **6** Höcker.
Somit sind es insgesamt **8 + 6 = 14** Höcker.

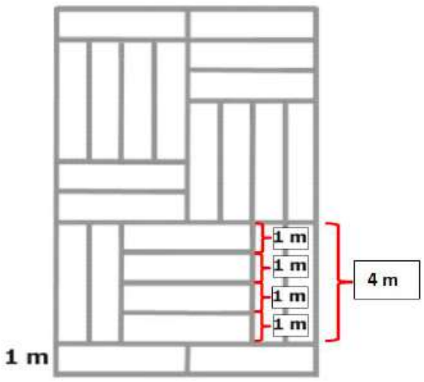
8. Der Boden eines Raumes wird mit gleich großen rechteckigen Platten ausgelegt (siehe Bild).

Wie lang ist der Raum?

(A) 6m (B) 8m (C) 10 m (D) 11 m **(E)** 12 m



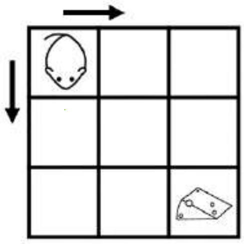
(E) Berechne zuerst die zweite Seite einer Platte. Diese beträgt 4 m.

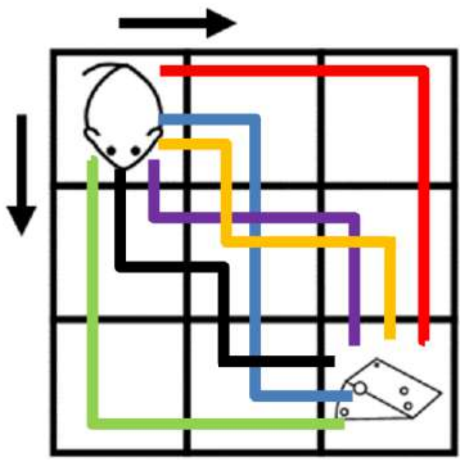


Somit erhältst du für den Raum 1 m + 1 m + 1 m + 4 m + 4 m + 1 m = **12 m**.

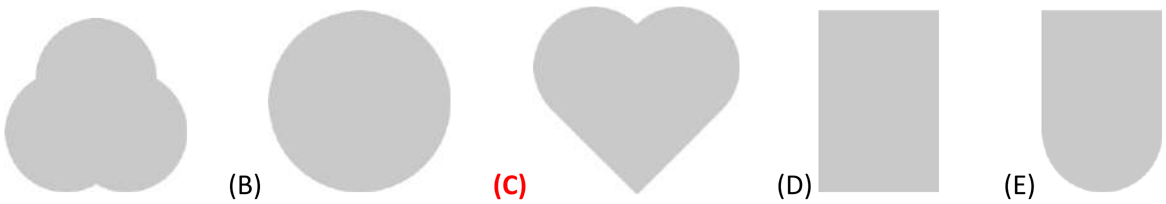
9. Im Bild siehst du eine Maus und ein Stück Käse.
Die Maus darf nur in Richtung der Pfeile auf Nachbarfelder springen.
Wie viele Wege führen von der Maus zum Käse?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 **(E) 6**





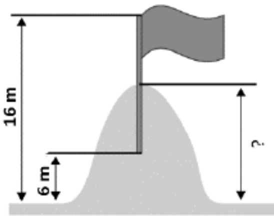
10. Welche der Figuren kann in diese 3 Teile zerschnitten werden?



(A) (B) **(C)** (D) (E)

5 Punkte Beispiele

11. Die Riesen Tim und Tom machen einen Sandberg und schmücken ihn mit einer Fahne.
Sie stecken den halben Fahnenmast in den höchsten Punkt des Sandberges.
Der höchste Punkt des Mastes ist nun 16 m über dem Boden, der tiefste 6 m (siehe Bild).
Wie hoch ist der Sandberg?



(A) 11 m (B) 12 m (C) 13 m (D) 14 m (E) 15 m

Der Fahnenmast ist 16 m – 6 m = 10 m lange.
Die halbe Länge beträgt somit 5 m.
6 m + 5 m = **11 m**

12. Es gibt weiße, graue und schwarze Quadrate. Drei Kinder legen damit dieses Muster.

Dann ersetzt Anni alle schwarzen Quadrate durch weiße Quadrate.
Danach ersetzt Bob alle grauen Quadrate durch schwarze Quadrate.
Zum Schluss ersetzt Chris alle weißen Quadrate durch graue Quadrate.
Welches Bild liegt nun vor den drei Kindern?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

Die Ausgangfigur ist 

Anni ersetzt alle schwarzen Quadrate durch weiße Quadrate. 

Bob ersetzt alle grauen Quadrate durch schwarze Quadrate. 

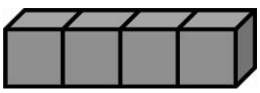
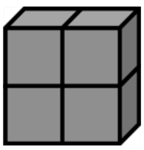
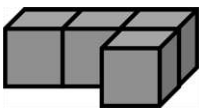
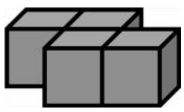
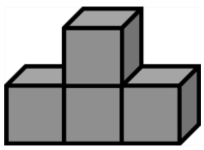
Chris ersetzt alle weißen Quadrate durch graue Quadrate. 

13. Die drei Eichhörnchen Anni, Asia und Elli haben zusammen 10 Nüsse. Jedes von ihnen hat verschieden viele Nüsse, aber mindestens 2 Nüsse.
Anni hat die wenigsten Nüsse. Asia hat die meisten Nüsse.
Wie viele Nüsse hat Elli?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Anni muss mindestens 2 Nüsse haben.
Elli muss deshalb mindestens 3 Nüsse haben.
Deshalb Asia darf höchstens 10 – 2 – 3 = 5 Nüsse haben.
2 + 3 + 5 = 10.
Deshalb hat Elli 3 Nüsse.

14. Jede Form wird aus 4 gleich großen Würfeln gebaut und angemalt.
Für welche Figur benötigt man am wenigsten Farbe?

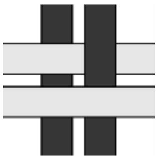
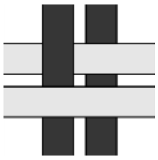
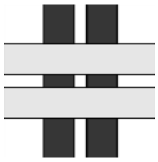
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Figur (B) hat	oben und unten	zusammen	4 Kästchen,
	vorne und hinten	zusammen	8 Kästchen,
	links und rechts	zusammen	4 Kästchen.
		zusammen	**16** Kästchen.

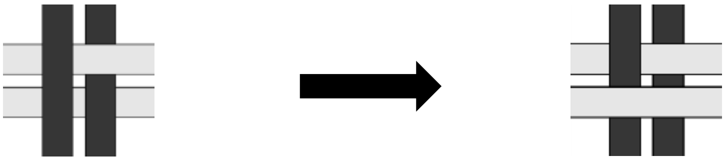
Bei allen anderen Figuren müssen mehr Kästchen angemalt werden.

15. Aus vier Papierstreifen wird ein Muster gelegt (siehe Bild).

Was siehst du, wenn du es von der Rückseite betrachtest?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Stell dir vor, dass du auf die andere Seite des Musters „gehst“. Nun liegt der untere weiße Streifen zur Gänze vor den schwarzen Streifen. Also bleiben die Lösungen (B), (D) und (E) zur Wahl.
Der rechte schwarze Streifen muss zur Gänze hinter den weißen Streifen liegen – also Lösung (D).



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Kategorie: Écolier, Schulstufe: 3. – 4.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

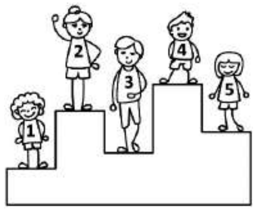
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2019
Gruppe École (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

- 3 Punkte Beispiele -

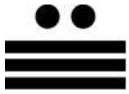
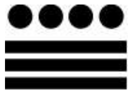
1. Je höher jemand auf der Siegertreppe steht, desto besser ist die Platzierung.



Welche Startnummer erreichte Rang 3?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

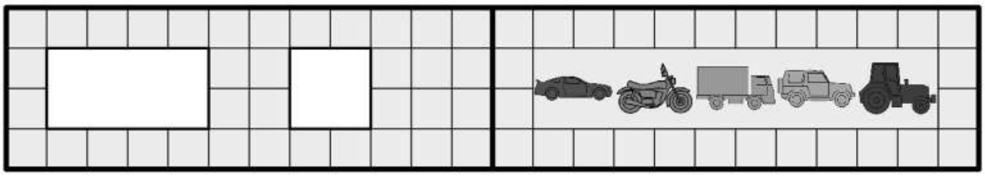
2. Das Bild  zeigt die Zahl 8. Ein Punkt steht für die Zahl 1 und ein Balken für die Zahl 5.
Welches Bild stellt die Zahl 12 dar?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

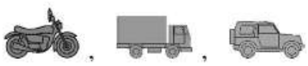
3. Gestern war Sonntag.
Welcher Tag ist dann morgen?

(A) Samstag (B) Donnerstag (C) Mittwoch (D) Dienstag (E) Montag

4. In einem Buchdeckel sind 2 Löcher. Das Buch liegt geöffnet auf dem Tisch (siehe Bild).

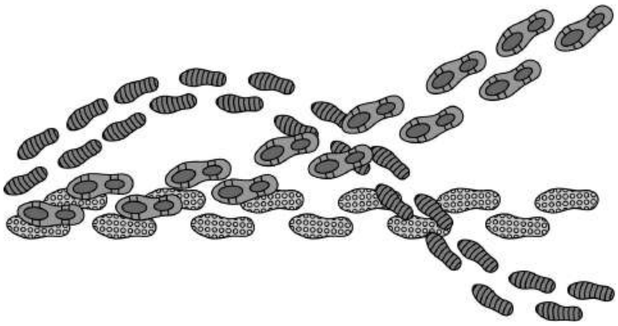


Welche Fahrzeuge kann Olaf sehen, nachdem er das Buch zugemacht hat?

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

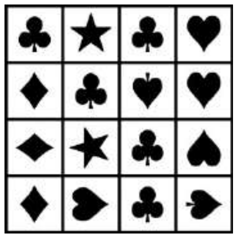
5. Drei Personen gingen mit ihren Winterschuhen durch den Schnee.

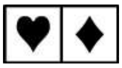
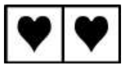


In welcher Reihenfolge gingen sie durch den Schnee?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

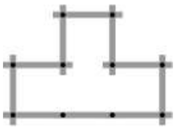
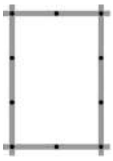
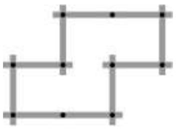
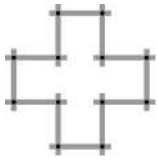
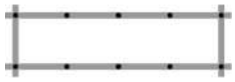
6. Karina schneidet aus dem Bild rechts ein Stück der Form  aus.
Welches der folgenden Stücke kann Karina ausschneiden?



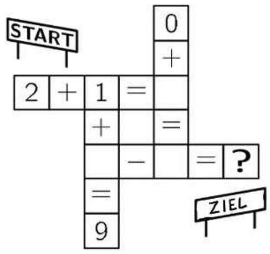
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Pia formt aus diesen zusammenhängenden Stäben verschiedene Figuren.

Welche Figur kann sie nicht legen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

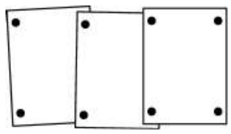
8. Welche Zahl muss in dem Feld mit dem Fragezeichen stehen, wenn alle Rechnungen richtig gelöst werden?



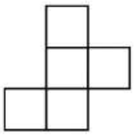
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

- 4 Punkte Beispiele -

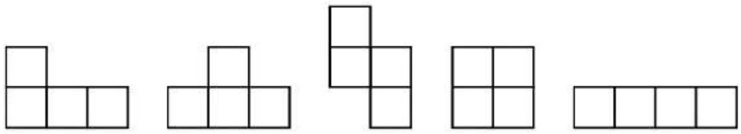
9. Linda befestigt 3 Fotos der Reihe nach auf ihrer Pinnwand. Sie verwendet dazu 8 Nadeln.
Peter möchte 7 Fotos auf die gleiche Weise anbringen.
Wie viele Nadeln benötigt er dazu?



(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 22 (E) 26

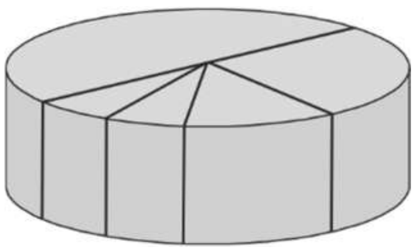
10. Dennis nimmt eines der Quadrate von der Figur  weg.

Wie viele der 5 Figuren kann er so erhalten?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

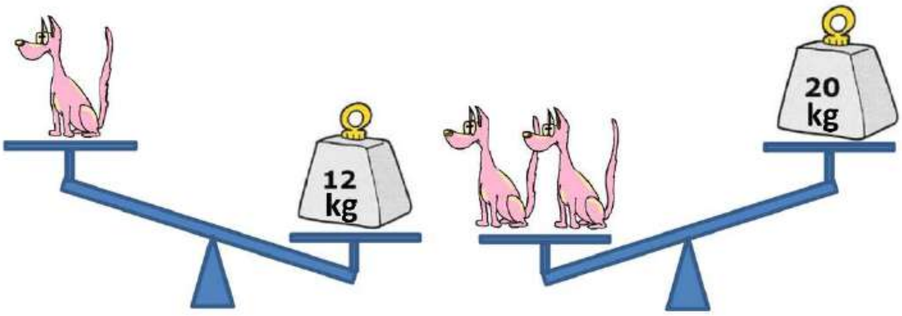
11. Mutter halbiert den Geburtstagskuchen. Eine Hälfte halbiert sie wieder.
Davon halbiert sie noch einmal eines der kleineren Stücke.
Von diesen kleineren Stücken halbiert sie eines erneut (siehe Abbildung).
Eines der beiden kleinsten Stücke wiegt 100 g.



Wie viel wiegt der ganze Kuchen?

(A) 600 g (B) 800 g (C) 1200 g (D) 1600 g (E) 2000 g

12. Alle Hunde sind gleich schwer.



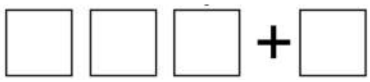
Wie schwer könnte 1 Hund sein?

(A) 7 kg (B) 8 kg (C) 9 kg (D) 10 kg (E) 11 kg

13.Sara hat 16 blaue Murmeln. Sie kann ihre Murmeln auf folgende Weise eintauschen:
Für 3 blaue Murmeln bekommt sie 1 rote Murmel.
Für 2 rote Murmeln bekommt sie 5 grüne Murmeln.
Wie viele grüne Murmeln kann sie höchstens erhalten?

(A) 5 (B) 10 (C) 13 (D) 15 (E) 20

14. Steven möchte jede der Ziffern 2, 0, 1 und 9 in die Kästchen dieser Addition hineinschreiben:



Er möchte das größtmögliche Ergebnis erhalten.
Welche Ziffer muss er für die einstellige Zahl einsetzen?

(A) entweder 0 oder 1 (B) entweder 0 oder 2 (C) nur 0 (D) nur 1 (E) nur 2

15. Ein volles Wasserglas wiegt 400 Gramm. Ein leeres Glas wiegt 100 Gramm.

Wie viel wiegt ein halbvolles Wasserglas?

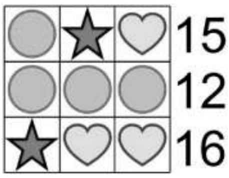
(A) 150 g (B) 200 g (C) 225 g (D) 250 g (E) 300 g

16. Die Bilder zeigen, wie viel 2 Obststücke zusammen kosten.

(A) 8 Taler (B) 9 Taler (C) 10 Taler (D) 11 Taler (E) 12 Taler

- 5 Punkte Beispiele -

17. Jede Figur steht für genau eine Ziffer.

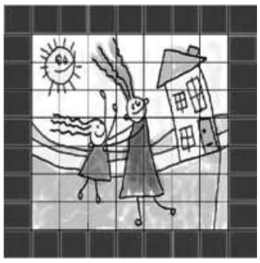


Die Summe der Ziffern jeder Reihe steht rechts daneben.

Für welche Ziffer steht der Stern? 

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. Anna verwendet 32 kleine graue Quadrate um ein 7 cm mal 7 cm großes Bild einzurahmen. Wie viele kleine graue Quadrate muss sie verwenden, um ein 10 cm mal 10 cm großes Bild einzurahmen?

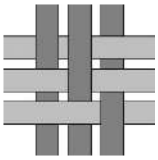


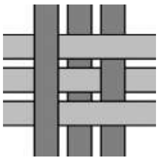
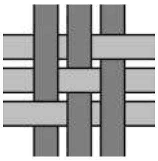
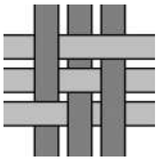
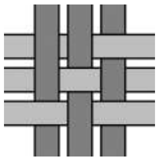
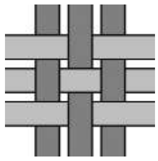
(A) 36 (B) 40 (C) 44 (D) 48 (E) 52

19. Die Seiten eines Buches wurden mit 1, 2, 3, 4, 5 und so weiter nummeriert.
Die Ziffer 5 tritt dabei genau 16 Mal auf.
Wie viele Seiten kann das Buch höchstens haben?

(A) 56 (B) 64 (C) 72 (D) 80 (E) 88

20. Sechs Papierstreifen werden zu einem Muster verflochten (siehe Bild).
Was siehst du, wenn du das Muster von der Rückseite betrachtest?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

21. Auf einer Farm leben genau 15 Tiere: Kühe, Katzen und Kängurus. Wir wissen, dass genau 10 Tiere keine Kühe und genau 8 Tiere keine Katzen sind.
Wie viele Kängurus leben auf der Farm?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 10 (E) 18

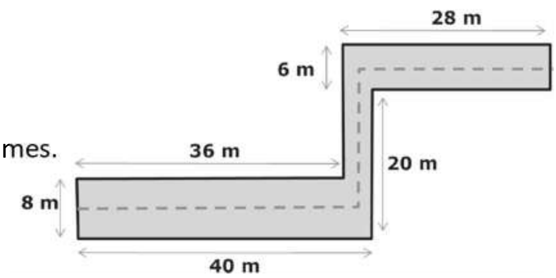
22. Marta klebt mehrere Dreiecke aufeinander und erhält so einen Stern.
Wie viele Dreiecke hat sie mindestens benutzt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

23. Eines der 5 Kinder Alex, Bartek, Cora, Dani und Emil hat einen Kuchen gegessen.
Alex sagt: „Ich habe keinen Kuchen gegessen."
Bartek sagt: „Ich habe einen Kuchen gegessen."
Cora sagt: „Emil hat keinen Kuchen gegessen."
Dani sagt: „Ich habe keinen Kuchen gegessen."
Emil sagt: „Alex hat einen Kuchen gegessen."
Eines der Kinder lügt.
Welches Kind hat einen Kuchen gegessen?

(A) Alex (B) Bartek (C) Cora (D) Dani (E) Emil

24. Der Gang einer Schule sieht von oben so aus wie im Bild.
Eine Katze geht entlang der eingezeichneten Linie in der Mitte des Raumes.
Wie viele Meter geht die Katze?



(A) 75 m (B) 77 m (C) 79 m (D) 81 m (E) 83 m

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Level: École, Grade: 3 - 4

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points

each correct answer to questions 1. – 8.:	3 points
each correct answer to questions 9. – 16.:	4 points
each correct answer to questions 17. – 24.:	5 points
each question left unanswered:	0 points
each incorrect answer:	minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

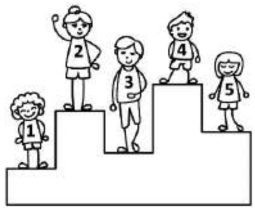
9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2019
Level École (Schulstufe 3 and 4)
Austria – 21. 3. 2019

- 3 Point Examples -

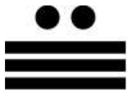
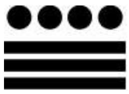


1. The higher someone stands on the podium, the better the ranking.

Which number got third place?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

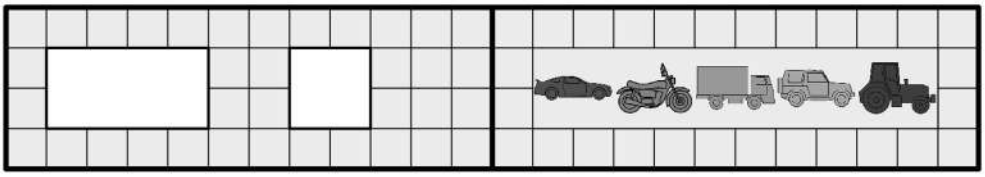
2. The diagram  shows the number 8. A dot stands for the number 1 and a line for the number 5. Which diagram represents the number 12?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

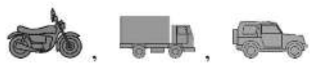
3. Yesterday it was Sunday.
Which day will it be tomorrow?

(A) Saturday (B) Thursday (C) Wednesday (D) Tuesday (E) Monday

4. There are two holes in the cover of a book. The book lies on the table opened up (see diagram).

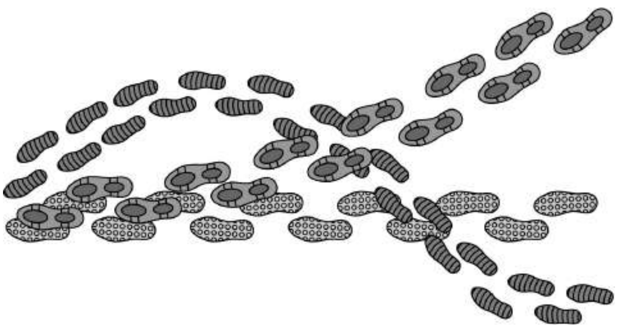


After closing up the book which vehicles can Olaf see?

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

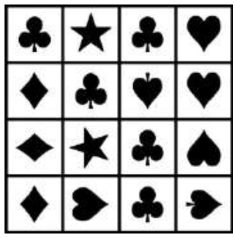
5. Three people walked through the snow in their winter boots.

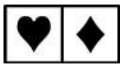
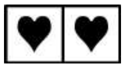


In which order did they walk through the snow?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

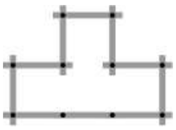
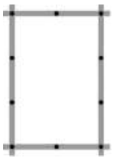
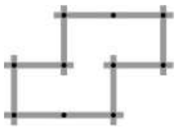
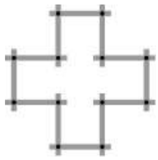
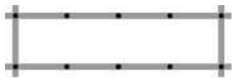
6. Karina cuts out a piece of this form  from the diagram on the right.
Which one of the following pieces can she cut out?



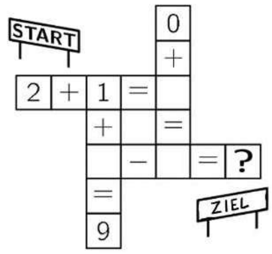
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Using the connected sticks shown, Pia forms different shapes.

Which shape can she not make?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

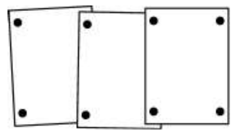
8. Which number goes into the field with the question mark, if all calculations are solved correctly?



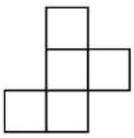
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

- 4 Point Examples -

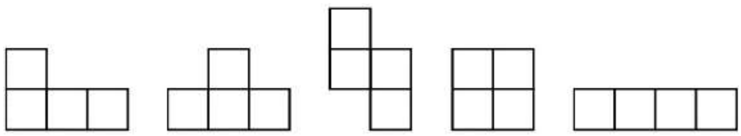
9. Linda fixes 3 photos on a pin board next to each other. She uses 8 pins to do so.
Peter wants to fix 7 photos in the same way.
How many pins does he need for that?



(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 22 (E) 26

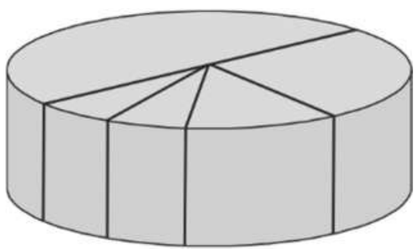
10. Dennis takes off one of the squares of this shape 

How many of these 5 shapes can he get?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

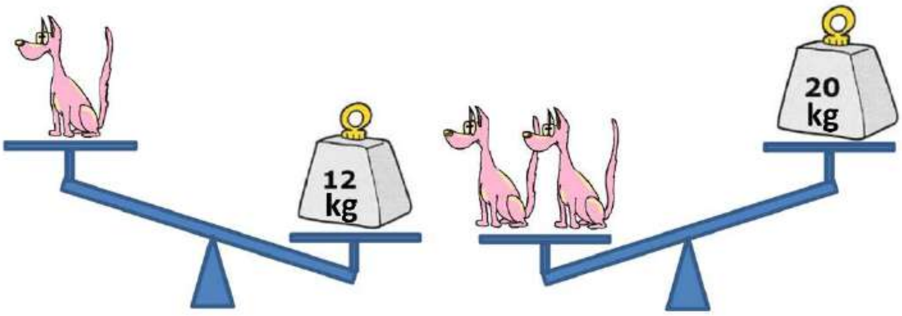
11. Mother halves the birthday cake. One half she then halves again.
Of that she again halves one of the smaller pieces.
Of these smaller pieces she once more halves one of them (see diagram).
One of the two smallest pieces weighs 100 g.



How much does the entire cake weigh?

(A) 600 g (B) 800 g (C) 1200 g (D) 1600 g (E) 2000 g

12. All dogs are equally heavy.



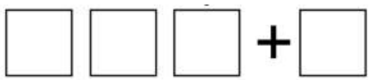
How much could one dog weigh?

(A) 7 kg (B) 8 kg (C) 9 kg (D) 10 kg (E) 11 kg

13.Sara has 16 blue marbles. She can swap her marbles in the following way:
For 3 blue marbles she gets 1 red marble.
For 2 red marbles she gets 5 green marbles.
What is the maximum number of green marbles she can get?

(A) 5 (B) 10 (C) 13 (D) 15 (E) 20

14. Steven wants to write each of the digits 2, 0, 1 and 9 into the boxes of this addition:



He wants to obtain the biggest result possible.
Which digit does he have to use for the single-digit number?

(A) either 0 or 1 (B) either 0 or 2 (C) only 0 (D) only 1 (E) only 2

15. A full glass of water weighs 400 grams. An empty glass weighs 100 grams.

How much does a half-full glass of water weigh?

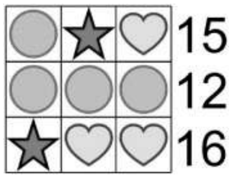
(A) 150 g (B) 200 g (C) 225 g (D) 250 g (E) 300 g

16. The pictures show how much 2 pieces of fruit cost altogether.

(A) 8 Taler (B) 9 Taler (C) 10 Taler (D) 11 Taler (E) 12 Taler

- 5 Point Examples -

17. Each shape represents exactly one digit.

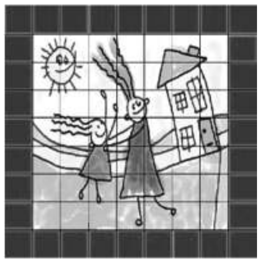


The sum of the digits in each row is stated on the right hand-side of each row.

Which digit does the star stand for? 

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

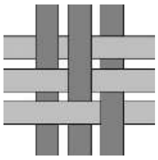
18. Anna uses 32 small grey squares to frame a 7 cm by 7 cm big picture.
How many small grey squares does she have to use to frame a 10 cm by 10 cm big picture?
(A) 36 (B) 40 (C) 44 (D) 48 (E) 52

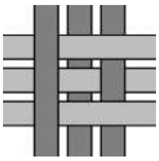
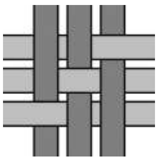
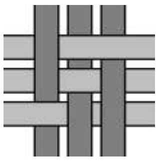
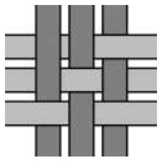
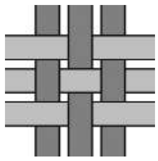


19. The pages of a book are numbered with 1, 2, 3, 4, 5 and so on.
The digit 5 appears exactly 16 times.
What is the maximum number of pages the book can have?

(A) 56 (B) 64 (C) 72 (D) 80 (E) 88

20. Six paper strips are used to weave a pattern (see diagram).
What do you see when you look at the pattern from behind?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

21. There live exactly 15 animals on a farm: cows, cats and kangaroos. We know that exactly 10 animals are not cows and exactly 8 animals are not cats.
How many kangaroos live on the farm?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 10 (E) 18

22. Marta sticks several triangles on top of each other and makes a star that way.
What is the minimum number of triangles she has used?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

23. One of the 5 children Alex, Bartek, Cora, Dani and Emil has eaten a cake.

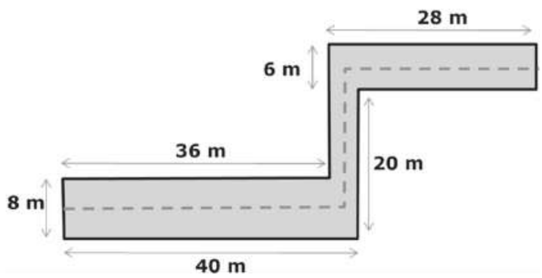
Alex says: „I did not eat a cake."
Bartek says: „I ate a cake."
Cora says: „Emil has not eaten a cake."
Dani says: „I did not eat a cake."
Emil says: „Alex has eaten a cake."

One of the children lies.
Which child has eaten a cake?

(A) Alex (B) Bartek (C) Cora (D) Dani (E) Emil

24. From above, the corridor of a school looks like in the diagram.
A cat walks along the dotted line drawn in the middle of the room.
How many meters does the cat walk?

(A) 75 m (B) 77 m (C) 79 m (D) 81 m (E) 83 m



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Kategorie: Écolier, Schulstufe: 3. – 4.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8
E	C	D	D	A	B	D	B

9	10	11	12	13	14	15	16
B	C	D	E	B	A	D	D

17	18	19	20	21	22	23	24
E	C	B	C	B	B	B	E

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Écolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

– Lösungsvektor –

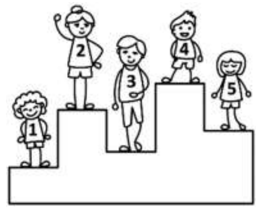
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E	C	D	D	A	B	D	B	B	C	D	E	B	A	D	D	E	C	B	C	B	B	B	E

- 3 Punkte Beispiele -

1. Je höher jemand auf der Siegertreppe steht, desto besser ist die Platzierung.

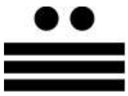
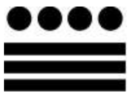
Welche Startnummer erreichte Rang 3?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 **(E) 5**



Man muss die Höhe der Stufen anschauen. Läufer Nr. 4 steht am höchsten, Läufer Nr. 2 steht auf der zweithöchsten Stufe, Läufer Nr. 5 steht auf der dritthöchsten Stufe. Läufer Nr. 5 wurde Dritter.

2. Das Bild  zeigt die Zahl 8. Ein Punkt steht für die Zahl 1 und ein Balken für die Zahl 5.
Welches Bild stellt die Zahl 12 dar?

(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

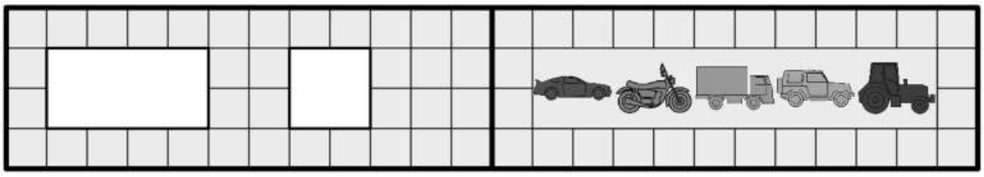
5 + 5 + 1 + 1 = 12, man braucht also 2 Balken für die zwei vorkommenden Fünfer und zwei Punkte für die beiden Einser. Figur C besteht aus 2 Balken und 2 Punkten. Die anderen Figuren zeigen: Figur A zeigt 5 + 1 =6, Figur B zeigt 5 + 5 + 1 = 11, Figur D zeigt 5 + 5 + 5 + 1 + 1 = 17, Figur E zeigt 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 = 19

3. Gestern war Sonntag.
Welcher Tag ist dann morgen?

(A) Samstag (B) Donnerstag (C) Mittwoch **(D) Dienstag** (E) Montag

Wenn gestern Sonntag war, ist heute Montag. Somit ist morgen Dienstag.

4. In einem Buchdeckel sind 2 Löcher. Das Buch liegt geöffnet auf dem Tisch (siehe Bild).



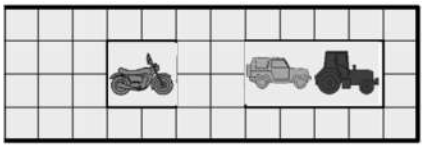
Welche Fahrzeuge kann Olaf sehen, nachdem er das Buch zugemacht hat?

(A)  (B)  (C) 

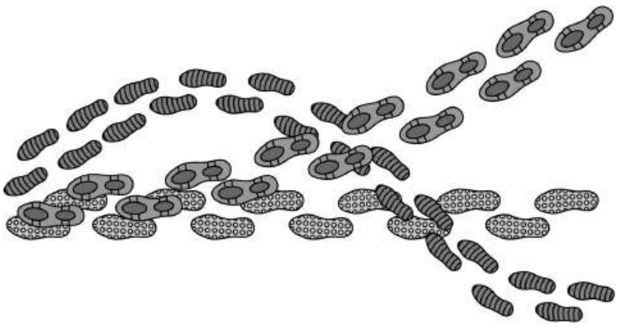
(D)  (E) 

Wenn man das Buch schließt, sieht man folgendes:

Das ist Lösung D.



5. Drei Personen gingen mit ihren Winterschuhen durch den Schnee.

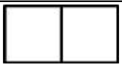


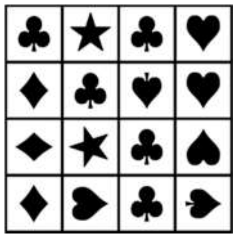
In welcher Reihenfolge gingen sie durch den Schnee?

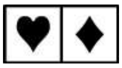
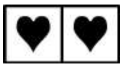
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Die Schuhabdrücke der ersten Person werden von den Schuhabdrücken der beiden anderen überlagert. Die Schuhabdrücke der zweiten Person werden nur von den Abdrücken der letzten Person überlagert.

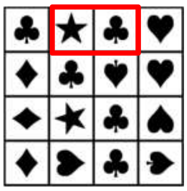
Die Abdrücke von  sind ganz unten, darüber sieht man  und die Abdrücke ganz oben sind .
Somit stimmt A.

6. Karina schneidet aus dem Bild rechts ein Stück der Form  aus.
Welches der folgenden Stücke kann Karina ausschneiden?

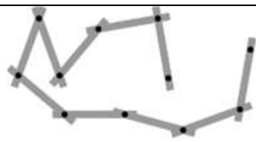


(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

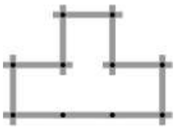
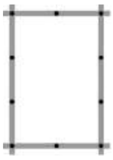
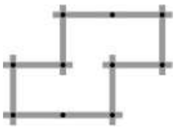
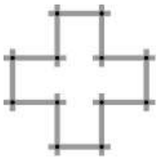
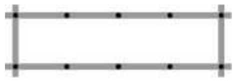
Wenn man in der Figur rechts nach den Stücken sucht, sieht man mittig oben die Figur der Antwort B.



7. Pia formt aus diesen zusammenhängenden Stäben verschiedene Figuren.



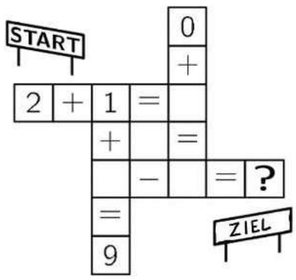
Welche Figur kann sie nicht legen?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

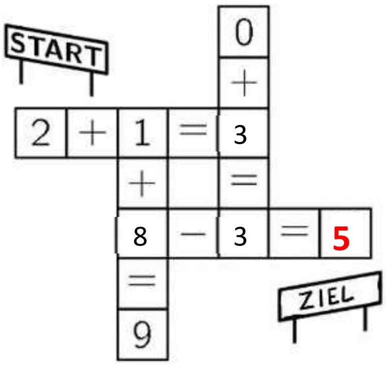
Es sind 10 zusammenhängende Stäbe. Zählt man die Stäbe der gezeigten Figuren, sieht man, dass Figur D aus 12 Stäben besteht. Pia hat aber nur 10 Stäbe. Figur D kann sie nicht legen.

8. Welche Zahl muss in dem Feld mit dem Fragezeichen stehen, wenn alle Rechnungen richtig gelöst werden?

(A) 4 **(B) 5** (C) 6 (D) 7 (E) 8

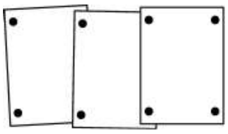


Nachrechnen, die Antwort ist 5:



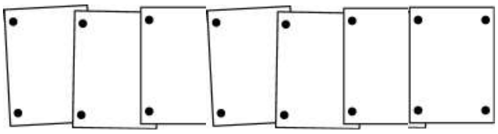
- 4 Punkte Beispiele -

9. Linda befestigt 3 Fotos der Reihe nach auf ihrer Pinnwand. Sie verwendet dazu 8 Nadeln. Peter möchte 7 Fotos auf die gleiche Weise anbringen.
Wie viele Nadeln benötigt er dazu?

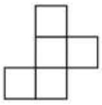


(A) 14 **(B) 16** (C) 18 (D) 22 (E) 26

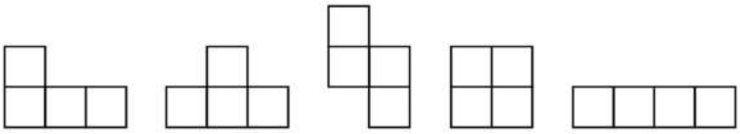
Man zeichnet sich 7 Fotos auf, die Peter auf seiner Pinnwand befestigt:



Peter braucht 16 Nadeln.

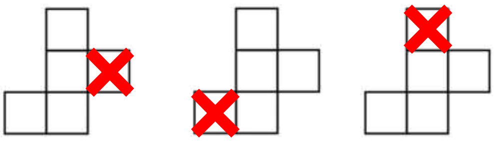
10. Dennis nimmt eines der Quadrate von der Figur  weg.

Wie viele der 5 Figuren kann er so erhalten?



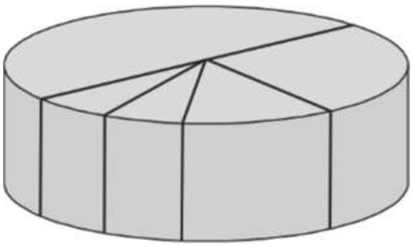
(A) 1 (B) 2 **(C) 3** (D) 4 (E) 5

Die ersten drei Figuren kann er durch Wegnehmen eines Quadrats erhalten:



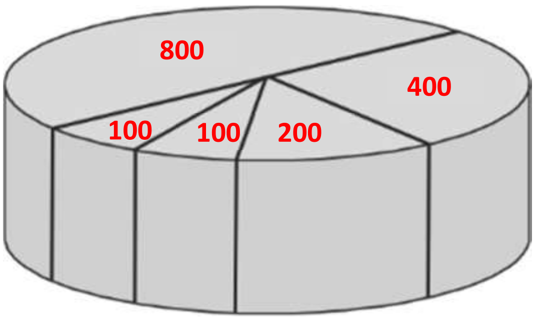
11. Mutter halbiert den Geburtstagskuchen. Eine Hälfte halbiert sie wieder. Davon halbiert sie noch einmal eines der kleineren Stücke.
Von diesen kleineren Stücken halbiert sie eines erneut (siehe Abbildung).
Eines der beiden kleinsten Stücke wiegt 100 g.

Wie viel wiegt der ganze Kuchen?

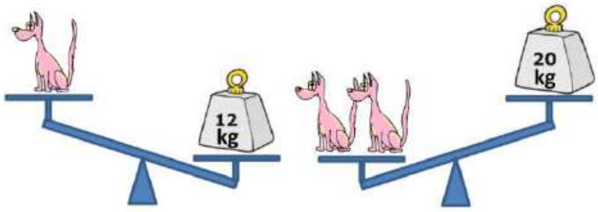


(A) 600 g (B) 800 g (C) 1200 g **(D) 1600 g** (E) 2000 g

Die beiden kleinsten Stücke wiegen 100 g. 100 +100 = 200. Das nächstgrößere Stück wiegt 200 g. Das nächstgrößere Stück wiegt 200 + 200 = 400 g. Das größte Stück wiegt somit 100 + 100 + 200 + 400 = 800 g. Der ganze Kuchen wiegt also 100 + 100 + 200 + 400 + 800 = 1600 g.



12. Alle Hund sind gleich schwer.



Wie schwer könnte 1 Hund sein?

(A) 7 kg (B) 8 kg (C) 9 kg (D) 10 kg **(E) 11 kg**

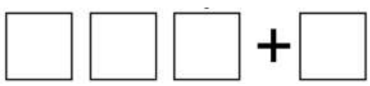
Bei der ersten Waage sieht man, dass 1 Hund leichter ist als 12 kg. Bei der zweiten Waage sieht man, dass 2 Hunde gemeinsam schwerer sind als das 20 kg Gewicht. Nur 11 + 11 = 22 kg ist schwerer als 20 kg.

13.Sara hat 16 blaue Murmeln. Sie kann ihre Murmeln auf folgende Weise eintauschen:
Für 3 blaue Murmeln bekommt sie 1 rote Murmel.
Für 2 rote Murmeln bekommt sie 5 grüne Murmeln.
Wie viele grüne Murmeln kann sie höchstens erhalten?

(A) 5 **(B) 10** (C) 13 (D) 15 (E) 20

Von ihren 16 blauen Murmeln kann Sara 15 Murmeln gegen rote Murmeln eintauschen. Dafür erhält sie 15 : 3 = 5 rote Murmeln. Von ihren 5 roten Murmeln kann Sarah 2 Mal jeweils 2 rote gegen 5 grüne Murmeln eintauschen, 5 + 5 = 10.

14.Steven möchte jede der Ziffern 2, 0, 1 und 9 in die Kästchen dieser Addition hineinschreiben:

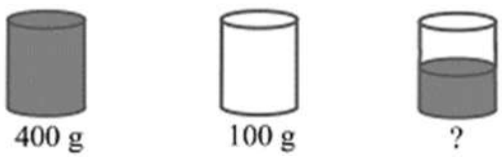


Er möchte das größtmögliche Ergebnis erhalten.
Welche Ziffer muss er für die einstellige Zahl einsetzen?

(A) entweder 0 oder 1 (B) entweder 0 oder 2 (C) nur 0 (D) nur 1 (E) nur 2

Um die größtmögliche Zahl zu erhalten, muss Steven die höchste Ziffer, 9, an die Hunderterstelle schreiben. Die zweitgrößte Ziffer, 2, muss er an die Zehnerstelle schreiben. Wenn er die 0 an die Einerstelle schreibt, lautet die Rechnung 920 + 1 = 921, wenn er die 1 an die Einerstelle schreibt, lautet die Rechnung 921 + 0 = 921. Beide Male erhält er das gleiche Ergebnis.

15. Ein volles Wasserglas wiegt 400 Gramm. Ein leeres Glas wiegt 100 Gramm.



Wie viel wiegt ein halbvolles Wasserglas?

(A) 150 g (B) 200 g (C) 225 g **(D) 250 g** (E) 300 g

Das leere Glas wiegt 100 Gramm, das volle 400. Das Wasser im Glas wiegt also 400 – 100 = 300 Gramm. Ein halbvolles Glas hat 300 : 2 = 150 Gramm Wasser. Zusammen mit dem leeren Glas wiegt alles 150 + 100 = 250 Gramm.

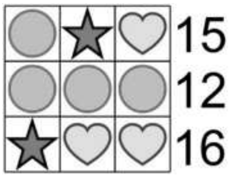
16. Die Bilder zeigen, wie viel 2 Obststücke zusammen kosten.

(A) 8 Taler (B) 9 Taler (C) 10 Taler **(D) 11 Taler** (E) 12 Taler

1 Apfel und 1 Birne kosten 5 Taler, 1 Apfel und 1 Banane kosten 7 Taler, 1 Birne und 1 Banane kosten 10 Taler. Man hat also insgesamt 2 Äpfel, 2 Birnen und 2 Bananen, die gemeinsam 22 Taler kosten. 1 Apfel, 1 Birne und 1 Banane kosten somit die Hälfte, 22 : 2 = 11 Taler.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Jede Figur steht für genau eine Ziffer. Die Summe der Ziffern jeder Reihe steht rechts daneben.



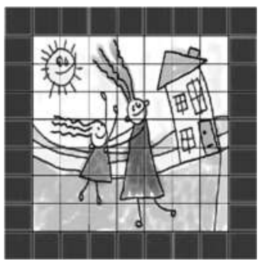
Für welche Ziffer steht der Stern? 

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 **(E) 6**

In der zweiten Zeile ergeben drei Kreise zusammen die Zahl 12. Somit steht ein Kreis für die Zahl 12 : 3 = 4. In der ersten Zeile steht der Kreis für die Zahl 4, das Stern und das Herz stehen somit gemeinsam für 15 – 4 = 11. In der dritten Zeile gibt es ebenfalls ein Herz und einen Stern, die wiederum gemeinsam für 11 stehen. In der dritten Zeile steht noch ein weiteres Herz, 16 – 11 = 5, das Herz steht also für die Zahl 5. Wenn das Herz für die Zahl 5 steht, steht der Stern für die Zahl 11 – 5 = 6.

18. Anna verwendet 32 kleine graue Quadrate um ein 7 cm mal 7 cm großes Bild einzurahmen.

Wie viele kleine graue Quadrate muss sie verwenden, um ein 10 cm mal 10 cm großes Bild einzurahmen?



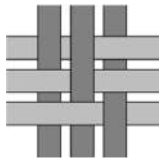
(A) 36 (B) 40 **(C) 44** (D) 48 (E) 52

Ein Quadrat hat eine Länge von 1 cm. Für ein 7 cm langes Bild verwendet man 4 * 7 = 28 Quadrate und 4 Quadrate an den Ecken. Somit verwendet man 32 Quadrate, wie auch in der Skizze zu sehen. Nun macht man das gleiche mit einem 10 cm mal 10 cm Bild. Man braucht 4 * 10 = 40 Quadrate für die 4 Längen und wieder 4 Quadrate an den Ecken. Man braucht also 44 Quadrate.

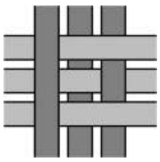
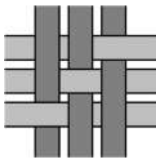
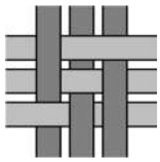
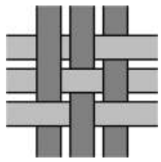
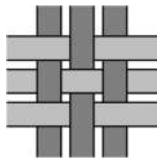
19.	Die Seiten eines Buches wurden mit 1, 2, 3, 4, 5 und so weiter nummeriert. Die Ziffer 5 tritt dabei genau 16 Mal auf. Wie viele Seiten kann das Buch höchstens haben? (A) 56 **(B) 64** (C) 72 (D) 80 (E) 88

Zählen wir die Anzahl der Ziffer 5: Die Ziffer 5 kommt vor in 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59. Die nächste 5 würde in der Zahl 65 vorkommen. Das Buch kann also höchstens 64 Seiten haben.

20. Sechs Papierstreifen werden zu einem Muster verflochten (siehe Bild).



Was siehst du, wenn du das Muster von der Rückseite betrachtest?

(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Wenn wir das Muster von der Rückseite betrachten, sehen wir jene Streifen, die in der Skizze von der Vorderseite verdeckt sind. Schauen wir uns die hellen Streifen von der Vorderseite an: Beim obersten hellen Streifen sehen wir auf der Rückseite also zwei verdeckte dunkle Streifen, beim mittleren hellen Streifen sehen wir den mittleren dunklen Streifen verdeckt, und beim untersten hellen Streifen sehen wir einen verdeckten dunklen Streifen. Lösung C entspricht dem was wir sehen.

21.	Auf einer Farm leben genau 15 Tiere: Kühe, Katzen und Kängurus. Wir wissen, dass genau 10 Tiere keine Kühe und genau 8 Tiere keine Katzen sind. Wie viele Kängurus leben auf der Farm? (A) 2 **(B) 3** (C) 4 (D) 10 (E) 18

Auf der Farm leben 15 Tiere. Wenn 10 Tiere keine Kühe sind, dann gibt es 15 – 10 = 5 Kühe. 8 Tiere sind keine Katzen, es gibt also 8 Kängurus und Kühe. Da wir wissen, dass es 5 Kühe gibt, muss es 8 – 5 =3 Kängurus geben.

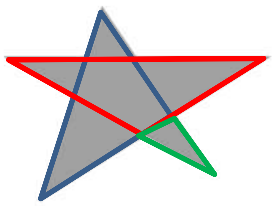
22. Marta klebt mehrere Dreiecke aufeinander und erhält so einen Stern.

Wie viele Dreiecke hat sie mindestens benutzt?

(A) 2   **(B) 3**   (C) 4   (D) 5   (E) 6

Man zeichnet Dreiecke über den Stern:

Man braucht 3 Dreiecke.



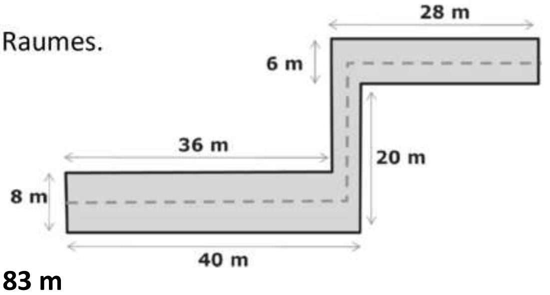
23. Eines der 5 Kinder Alex, Bartek, Cora, Dani und Emil hat einen Kuchen gegessen.
Alex sagt: „Ich habe keinen Kuchen gegessen."
Bartek sagt: „Ich habe einen Kuchen gegessen."
Cora sagt: „Emil hat keinen Kuchen gegessen."
Dani sagt: „Ich habe keinen Kuchen gegessen."
Emil sagt: „Alex hat einen Kuchen gegessen."

Eines der Kinder lügt.
Welches Kind hat einen Kuchen gegessen?

(A) Alex (B) **Bartek** (C) Cora (D) Dani (E) Emil

Alex sagt er, hat keinen Kuchen gegessen. Emil sagt, Alex hat einen Kuchen gegessen. Einer der beiden muss also lügen. Bartek sagt daher in jedem Fall die Wahrheit. Er hat also einen Kuchen gegessen.

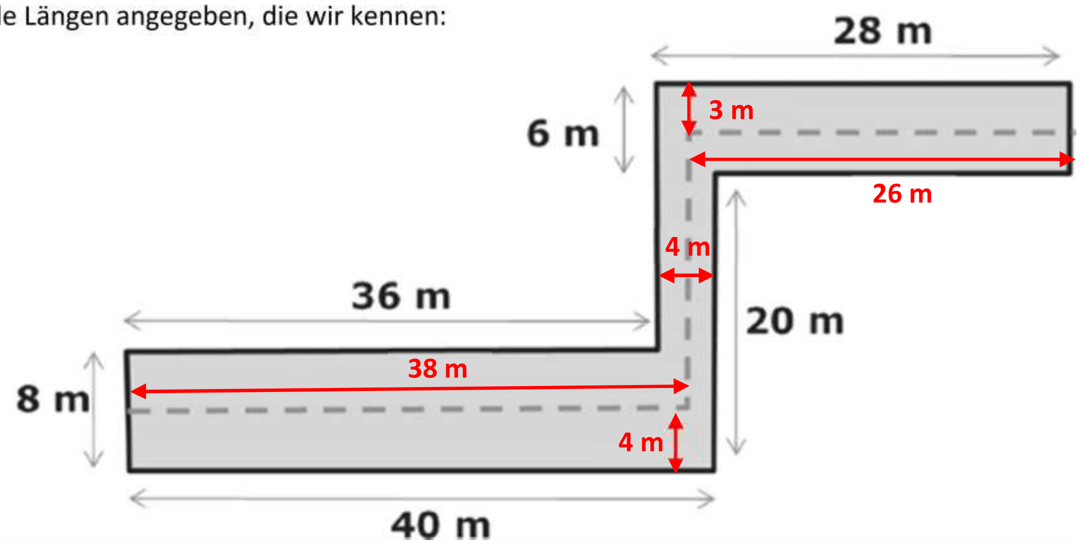
24. Der Gang einer Schule sieht von oben so aus wie im Bild.
Eine Katze geht entlang der eingezeichneten Linie in der Mitte des Raumes.



Wie viele Meter geht die Katze?

(A) 75 m (B) 77 m (C) 79 m (D) 81 m (E) **83 m**

Schauen wir uns zunächst die Längen an, die wir noch zur Lösung brauchen. Der mittlere Verbindungsgang ist 40 – 36 = 4 m breit und 20 + 6 = 26 m lang. Die Katze geht immer in der Mitte des Zimmers. In der Zeichnung unten sind alle Längen angegeben, die wir kennen:



Den Weg, den die Katze im mittleren Verbindungsgang zurücklegt, ist 26 - 3 - 4 = 19 m lang. Der Gesamtweg ist also 38 + 19 + 26 = 83 m lang.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5. – 6.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

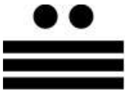
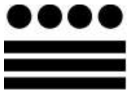
Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

- 3 Punkte Beispiele -

1. Carina hat angefangen eine Katze zu zeichnen.  Sie fügt noch Augen hinzu.
Welches Bild könnte ihre fertige Zeichnung sein?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

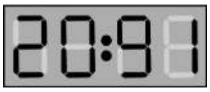
2. Die Maya verwendeten Punkte und Striche um ihre Zahlen zu schreiben. Ein Punkt steht für 1, ein Strich für 5.
Welche der folgenden Maya-Zahlen steht für 17?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

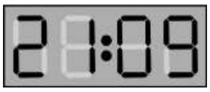
3. In einer Kindergartengruppe gibt es 14 Mädchen und 12 Buben. Die Hälfte der Gruppe macht einen Spaziergang.
Wie viele Mädchen müssen sich mindestens darunter befinden?
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

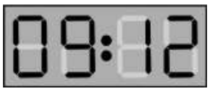
4. Eine digitale Uhr zeigt folgende Zeit an: 

Welche Zeit zeigt die Uhr an, wenn zum ersten Mal nach diesem Zeitpunkt die gleichen Ziffern verwendet werden?

(A) 

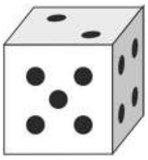
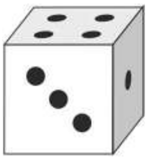
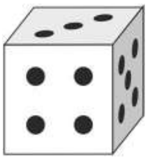
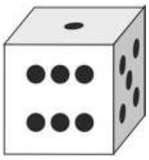
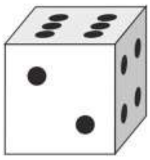
(B) 

(C) 

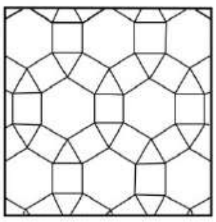
(D) 

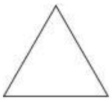
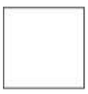
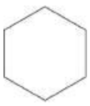
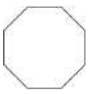
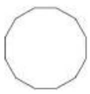
(E) 

5. Die Augensumme gegenüberliegender Flächen eines üblichen Würfels beträgt 7.
Welcher der folgenden Würfel könnte einen üblichen Spielwürfel zeigen?

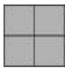
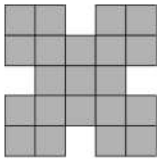
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Welche der folgenden geometrischen Figuren befindet sich nicht im großen Bild?



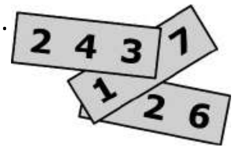
(A)  Dreieck
(B)  Quadrat
(C)  Sechseck
(D)  Achteck
(E)  Zwölfeck

7. In einem Gehege befindet sich eine Gruppe Kängurus. Addiert man das Alter aller Kängurus, so erhält man 36 Jahre. In zwei Jahren werden die Kängurus zusammen 60 Jahre alt sein.
Wie viele Kängurus befinden sich im Gehege?
(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

8. Laura möchte genau ein 2 × 2 Quadrat  der gegebenen Figur  anmalen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

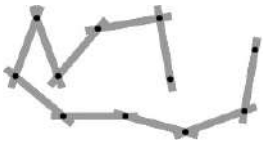
- 4 Punkte Beispiele -

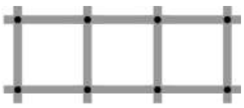
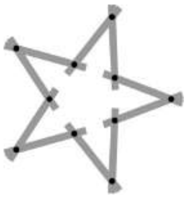
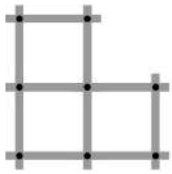
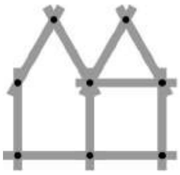
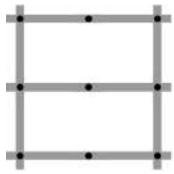
9. Auf jedem der drei Papierstücke steht eine dreistellige Zahl. Die Summe der drei Zahlen ist 826.
Wie lautet die Summe der beiden verdeckten Ziffern?
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11



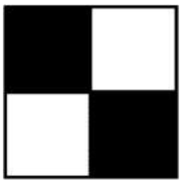
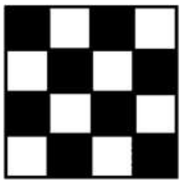
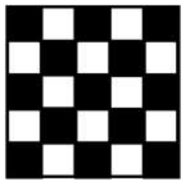
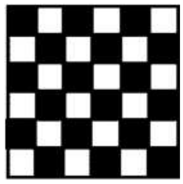
10. Auf den Seitenflächen eines Würfels stehen die sechs kleinsten ungeraden natürlichen Zahlen.
Toni würfelt drei Mal und addiert die Zahlen.
Welche Summe kann Toni damit nicht erreichen?
(A) 3 (B) 19 (C) 21 (D) 29 (E) 35

11. Pia hat einen Metermaßstab, der aus 10 gleich langen Teilen besteht.
Welche der folgenden Figuren kann sie damit nicht herstellen?



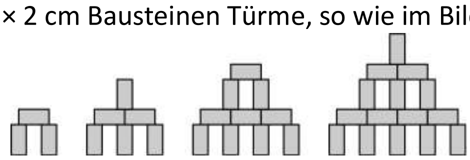
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

12. Welches der fünf Quadrate hat den größten Anteil an schwarzer Fläche?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

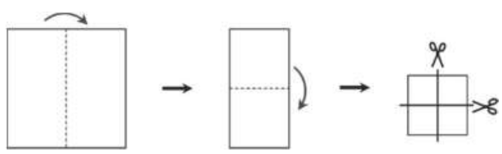
13. Im Garten einer Hexe befinden sich 30 Tiere: Hunde, Katzen und Mäuse. Die Hexe verwandelt 6 Hunde in 6 Katzen und dann 5 Katzen in 5 Mäuse. Nun gibt es gleich viele Hunde, Katzen und Mäuse.
Wie viele Katzen gab es am Anfang?
(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 10 (E) 11

14. Maxi baut mit kleinen 1 cm × 1 cm × 2 cm Bausteinen Türme, so wie im Bild zu sehen ist.

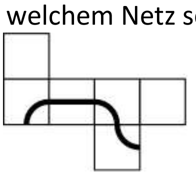
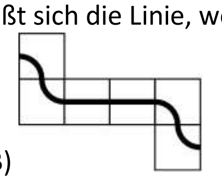
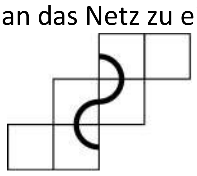
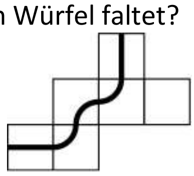
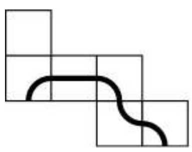


Er baut seine Türme auf dieselbe Art weiter. Für einen Turm verwendet er schließlich 28 Bausteine.
Welche Höhe hat dieser Turm?
(A) 9 cm (B) 10 cm (C) 11 cm (D) 12 cm (E) 14 cm

15. Bridget faltet ein quadratisches Blatt Papier zweimal und zerschneidet es dann zweimal so, wie im Bild zu sehen ist.
Wie viele Stück Papier erhält sie auf diese Weise?
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 16

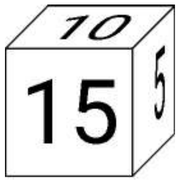


16. Jedes der 5 Würfelnetze enthält eine Linie.
Bei welchem Netz schließt sich die Linie, wenn man das Netz zu einem Würfel faltet?

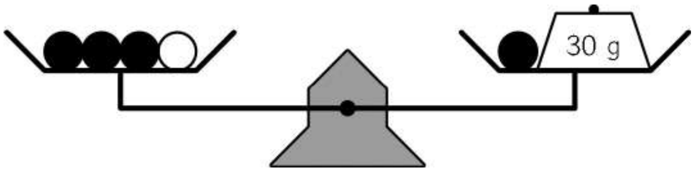
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 5 Punkte Beispiele -

17. Auf jeder Fläche des abgebildeten Würfels steht eine natürliche Zahl, die größer als 0 ist.
Alle Produkte gegenüberliegender Zahlen liefern das gleiche Ergebnis.
Wie groß ist die kleinstmögliche Summe der 6 Zahlen?
(A) 36 (B) 37 (C) 41 (D) 44 (E) 60



18. 4 gleich schwere schwarze Perlen, 1 weiße Perle und ein Stück Eisen mit 30 g werden auf eine Balkenwaage gelegt, wie im Bild zu sehen ist. Die Waage befindet sich im Gleichgewicht.
Wie schwer sind 6 schwarze und 3 weiße Perlen zusammen?

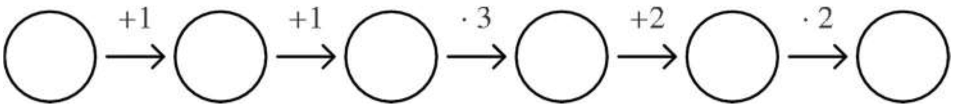


(A) 100 g (B) 99 g (C) 96 g (D) 94 g (E) 90 g

19. Robert macht 5 Aussagen. Genau eine davon ist falsch.
(A) Mein Sohn Basil hat 3 Schwestern.
(B) Meine Tochter Ann hat 2 Brüder.
(C) Meine Tochter Ann hat 2 Schwestern.
(D) Mein Sohn Basil hat 2 Brüder.
(E) Ich habe 5 Kinder.

Welche Aussage ist falsch?
(A) Aussage A (B) Aussage B (C) Aussage C (D) Aussage D (E) Aussage E

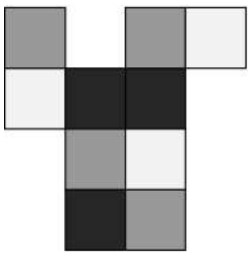
20. Benjamin schreibt eine Zahl in den ersten Kreis. Danach berechnet er laut Anweisungen die weiteren Rechnungen und schreibt die Ergebnisse in die weiteren Kreise.
Wie viele der sechs Zahlen sind durch 3 teilbar?

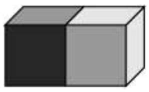


(A) 1 (B) 2 (C) 1 oder 2 (D) 2 oder 3 (E) 3 oder 4

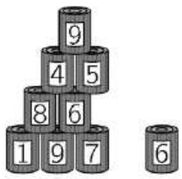
21. Emil machte mit seinen 8 Cousinen Selfies. Jede der 8 Cousinen ist auf zwei oder drei Bildern zu sehen.
In jedem Bild kann man genau 5 Cousinen sehen.
Wie viele Selfies machte Emil?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

22. Das Kartonpapier wird in eine $2 \times 1 \times 1$ Schachtel gefaltet.
Welches der folgenden Bilder zeigt die Schachtel nicht?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

23. Jette und Willi werfen Bälle auf zwei identisch aufgebaute Pyramiden, die jeweils aus 15 Dosen aufgebaut wurden. Jette trifft 6 Dosen und erhält 25 Punkte. Willi trifft 4 Dosen.
Wie viele Punkte erhält Willi?
(A) 22 (B) 23 (C) 25 (D) 26 (E) 28



nach Jettes Wurf

nach Willis Wurf

24. Linus baut einen $4 \times 4 \times 4$ Würfel mit 32 weißen und 32 schwarzen $1 \times 1 \times 1$ Würfeln. Er ordnet die Würfel so an, dass die Oberfläche des großen Würfels möglichst viel weiß enthält.
Welcher Bruchteil der Oberfläche ist weiß?
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Level: Benjamin, Grade: 5 - 6

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
each correct answer to questions 1. – 8.: 3 points
each correct answer to questions 9. – 16.: 4 points
each correct answer to questions 17. – 24.: 5 points
each question left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

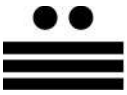
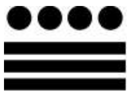
Känguru der Mathematik 2019
Level Benjamin (Schulstufe 5 and 6)
Austria – 21. 3. 2019

- 3 Point Examples -

1. Carina has started to draw a cat.  She then adds some eyes.
Which picture could show her finished drawing?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

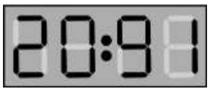
2. The Mayas used points and lines to write numbers. A point stands for 1, a line for 5.
Which of the following Maya-numbers stands for 17?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

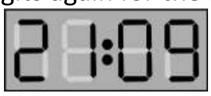
3. In a nursery group there are 14 girls and 12 boys. Half of the group go for a walk.
What is the minimum number of girls that have to be amongst that group?
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1

4. A digital clock shows the following time: 

What time is it when it uses the exactly same digits again for the first time after that?

(A) 

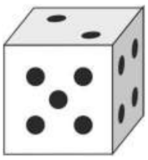
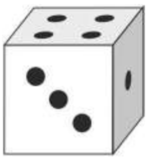
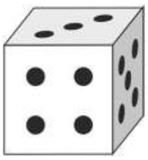
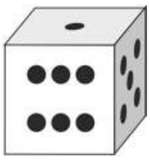
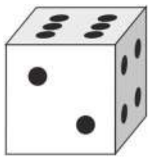
(B) 

(C) 

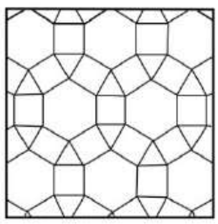
(D) 

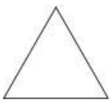
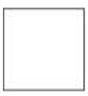
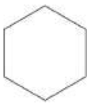
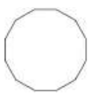
(E) 

5. The sum of the dots on opposite sides of an ordinary die is 7.
Which of the following dice could be an ordinary die?

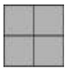
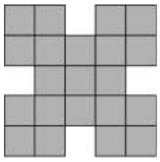
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Which of the following geometrical figures does not appear in the big picture?



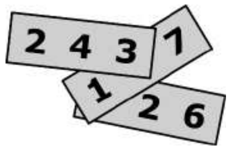
(A)  Triangle (B)  Square (C)  Hexagon (D)  Octagon (E)  Dodecagon

7. In an enclosure there is a group of kangaroos. If you add up the ages of all kangaroos you get 36 years. In two years all the kangaroos together will be 60 years old.
How many kangaroos are in the enclosure?
(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

8. Laura wants to colour in exactly one 2 × 2 square  in the figure given .
How many ways are there for her to do that?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

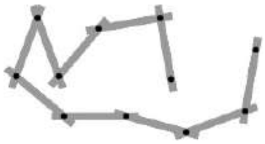
- 4 Point Examples -

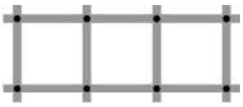
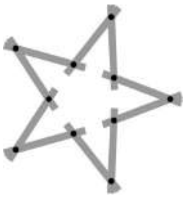
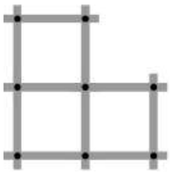
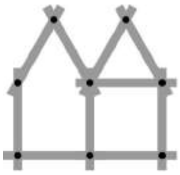
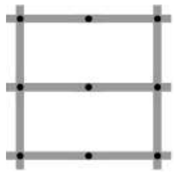
9. On each of the three separate pieces of paper there is a three-digit number. The sum of the three numbers is 826.
What is the sum of the two hidden digits?
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11



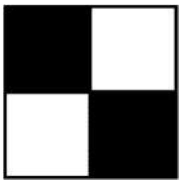
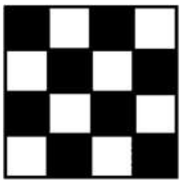
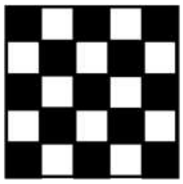
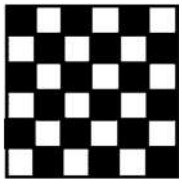
10. The six smallest odd natural numbers are written on the sides of a die. Toni rolls the die three times and adds the numbers. Which sum will Toni not be able to make?
(A) 3 (B) 19 (C) 21 (D) 29 (E) 35

11. Pia has a folding yardstick consisting of 10 equally long pieces.
Which of the following figures can she not make?



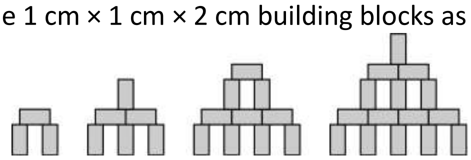
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

12. Which of the five squares has the biggest proportion of black area?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

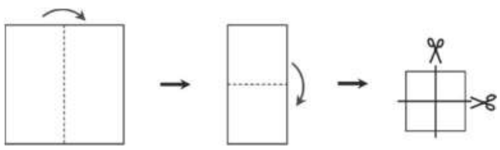
13. In a witch's garden there are 30 animals: dogs, cats and mice. The witch changes 6 dogs into 6 cats and then 5 cats into 5 mice. Now there is an equal number of dogs, cats and mice.
How many cats were there to start with?
(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 10 (E) 11

14. Maxi builds towers made up of little 1 cm × 1 cm × 2 cm building blocks as can be seen in the picture.

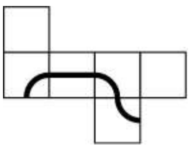
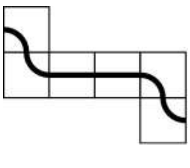
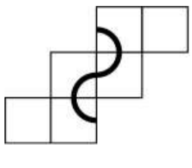
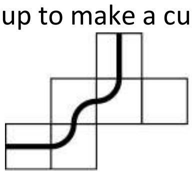
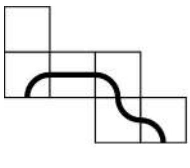


He continues to build his towers in the same way. Finally he uses 28 building blocks for one tower.
What is the height of this tower?
(A) 9 cm (B) 10 cm (C) 11 cm (D) 12 cm (E) 14 cm

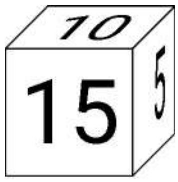
15. Bridget folds a square piece of paper twice and subsequently cuts it along the two lines as shown in the picture.
How many pieces of paper does she obtain this way?
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 16



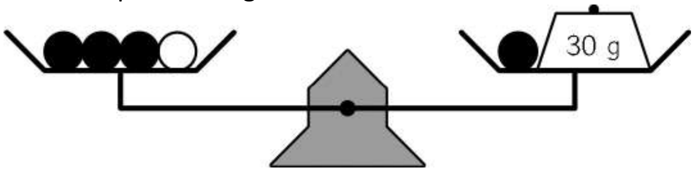
16. Each of the nets of a cube has a line drawn on.
For which net does the line form a closed loop when the net is folded up to make a cube?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

17. A natural number greater than 0 is written on each side of the die shown.
All products of opposite numbers are of the same value.
What is the smallest possible sum of all 6 numbers?
(A) 36 (B) 37 (C) 41 (D) 44 (E) 60



18. 4 equally heavy black pearls, 1 white pearl and a piece of iron weighing 30 g are placed on a beam balance as shown in the diagram. The beam balance is balanced.
How heavy are 6 black and 3 white pearls altogether?

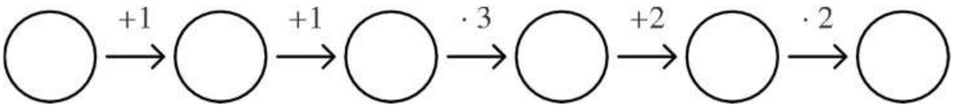


(A) 100 g (B) 99 g (C) 96 g (D) 94 g (E) 90 g

19. Robert makes 5 statements. One of which is wrong.
(A) My son Basil has 3 sisters.
(B) My daughter Ann has 2 brothers.
(C) My daughter Ann has 2 sisters.
(D) My son Basil has 2 brothers.
(E) I have 5 children.

Which statement is wrong?
(A) Statement A (B) Statement B (C) Statement C (D) Statement D (E) Statement E

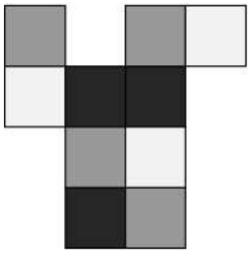
20. Benjamin writes a number into the first circle. He then carries out the calculations as instructed and each time writes down the results in the respective circles.
How many of the six numbers are divisible by 3?

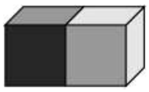


(A) 1 (B) 2 (C) 1 or 2 (D) 2 or 3 (E) 3 or 4

21. Emil takes selfies with his 8 cousins. Each one of the 8 cousins are on two or three of the pictures.
There are exactly 5 cousins on each of the pictures.
How many selfies does Emil take?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

22. The cardboard is folded up into a $2 \times 1 \times 1$ box.
Which of the pictures does not show the box?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

23. Jette and Willi throw balls at two identically built pyramids each made up of 15 tins. Jette hits 6 tins and gets 25 points. Willi hits 4 tins.
How many points does Willi get?
(A) 22 (B) 23 (C) 25 (D) 26 (E) 28

24. Linus builds a $4 \times 4 \times 4$ cube made up of 32 white and 32 black $1 \times 1 \times 1$ cubes. He arranges the cubes so that the surface of the big cube has as much white as possible.
Which fraction of the surface is white?
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$

Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	D	E	C	E	D	A	D	C	E	A	B	C	C	C	D	C	E	D	B	B	B	D	A

– 3 Punkte Beispiele –

Carina hat angefangen eine Katze zu zeichnen.  Sie fügt noch Augen hinzu.
Welches Bild könnte ihre fertige Zeichnung sein?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Carina hat bereits die Nase und die Ohren gezeichnet. Nur die Zeichnung B stimmt mit der Nase und den Ohren überein, deshalb ist das die Lösung. Lösung: **B**

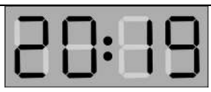
2. Die Maya verwendeten Punkte und Striche um ihre Zahlen zu schreiben. Ein Punkt steht für 1, ein Strich für 5. Welche der folgenden Maya-Zahlen steht für 17?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Die Zahl 17 besteht aus 3x5 und 2x1. Da der Stich für „5“ steht und der Punkt für „1“, benötigt man drei Striche und zwei Punkte, um die Zahl 17 zu schreiben. Dies ist für die Lösung C der Fall. Lösung: **D**

3. In einer Kindergartengruppe gibt es 14 Mädchen und 12 Buben. Die Hälfte der Gruppe macht einen Spaziergang. Wie viele Mädchen müssen sich mindestens darunter befinden?
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 **(E) 1**

Insgesamt gibt es im Kindergarten 26 Kinder. Die Hälfte der Kinder, also 13 Kinder machen einen Spaziergang. Es könnte sein, dass alle 12 Buben bei diesem Spaziergang mit dabei sind, dann kann nur mehr ein Mädchen mitgehen. Somit muss zumindest ein Mädchen dabei sein. Lösung: **E**

4. Eine digitale Uhr zeigt folgende Zeit an: 

Welche Zeit zeigt die Uhr an, wenn zum ersten Mal nach diesem Zeitpunkt die gleichen Ziffern verwendet werden?

(A) 

(B) 

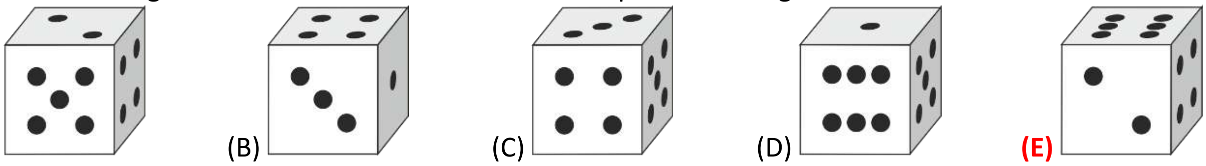
(C) 

(D) 

(E) 

Gesucht ist der erste Zeitpunkt nach 20:19, zu dem die gleichen Ziffern verwendet werden. Es muss daher nach 20:19 sein. Die erste Möglichkeit wäre 20:91, dieser Zeitpunkt wird aber von der Digitaluhr nicht angezeigt, somit muss es 21:09 sein. Lösung: **C**

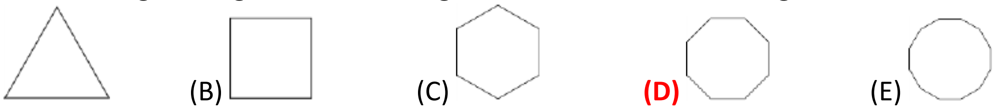
5. Die Augensumme gegenüberliegender Flächen eines üblichen Würfels beträgt 7.
Welcher der folgenden Würfel könnte einen üblichen Spielwürfel zeigen?



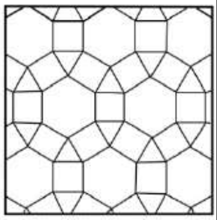
(A) (B) (C) (D) **(E)**

Da die Augensummer gegenüberliegender Flächen soll 7 betragen. Das funktioniert aber nur beim letzten Würfel, denn bei den anderen vier Würfeln beträgt die Summe zweier benachbarten Flächen 7. Lösung: **E**

6. Welche der folgenden geometrischen Figuren befindet sich nicht im großen Bild?



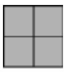
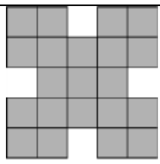
(A) Dreieck (B) Quadrat (C) Sechseck **(D)** Achteck (E) Zwölfeck



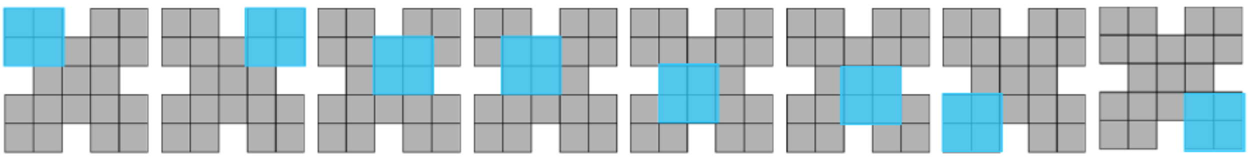
Im Bild findet man Dreiecke, Quadrate, Sechsecke und Zwölfecke, aber kein Achteck. Deshalb Lösung: **D**

7. In einem Gehege befindet sich eine Gruppe Kängurus. Addiert man das Alter aller Kängurus, so erhält man 36 Jahre. In zwei Jahren werden die Kängurus zusammen 60 Jahre alt sein.
Wie viele Kängurus befinden sich im Gehege?
(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

Addiert man alle Alter der Kängurus jetzt, erhält man 36, in zwei Jahren 60. 60 – 36 = 24. Die Differenz der Alter aller Kängurus beträgt 24. Da dies in zwei Jahren stattfindet dividiert man 24 durch 2 und erhält 12. Es befinden sich somit 12 Kängurus im Gehege. Lösung: **A**

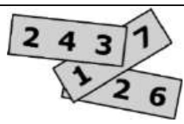
8. Laura möchte genau ein 2 × 2 Quadrat  der gegebenen Figur  anmalen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?
(A) 5 (B) 6 (C) 7 **(D) 8** (E) 9

Laura hat 8 Möglichkeiten ein 2x2 Quadrat auf der gegebenen Figur zu bemalen. Lösung: **D**



4 Punkte Beispiele

9. Auf jedem der drei Papierstücke steht eine dreistellige Zahl. Die Summe der drei Zahlen ist 826.
Wie lautet die Summe der beiden verdeckten Ziffern?
(A) 7 (B) 8 **(C) 9** (D) 10 (E) 11



Wir bilden die Summe der drei Zahlen: 243 müssen die unbekannten Ziffern mit: 243 4 und 5 belegt werden.

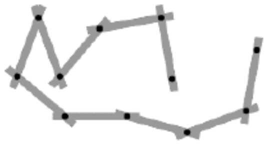
243	243
1*7	157
*26	426
826	826

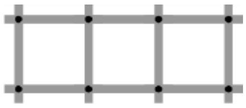
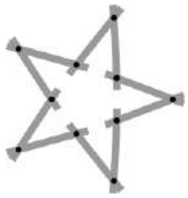
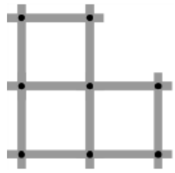
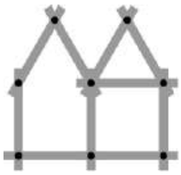
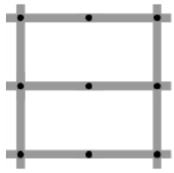
Die Summe ergibt somit 9. Lösung: **C**

10. Auf den Seitenflächen eines Würfels stehen die sechs kleinsten ungeraden natürlichen Zahlen.
Toni würfelt drei Mal und addiert die Zahlen.
Welche Summe kann Toni damit nicht erreichen?
(A) 3 (B) 19 (C) 21 (D) 29 **(E) 35**

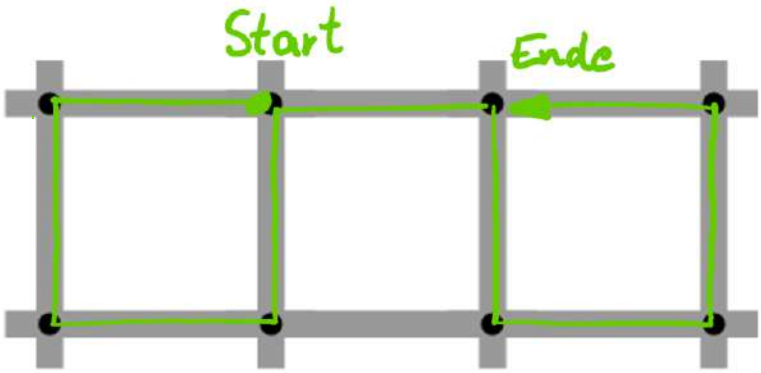
Die sechs kleinsten ungeraden Zahlen lauten: 1, 3, 5, 7, 9 und 11. Die größtmögliche Summe, die damit erreichbar ist lautet 33. Somit kann die Summe 35 nicht erreicht werden. Lösung: **E**

11. Pia hat einen Metermaßstab, der aus 10 gleich langen Teilen besteht. Welche der folgenden Figuren kann sie damit nicht herstellen?

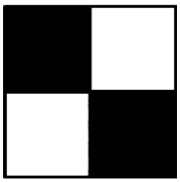
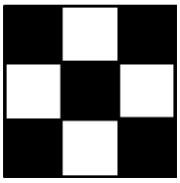
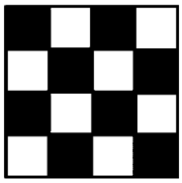
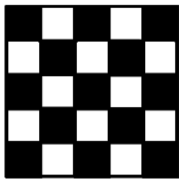
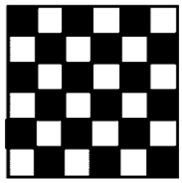


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Um die Figur A zu herzustellen muss ein Teilstück doppelt gelegt werden, somit fehlt ein Teilstück um die Figur zu vervollständigen:



12. Welches der fünf Quadrate hat den größten Anteil an schwarzer Fläche?

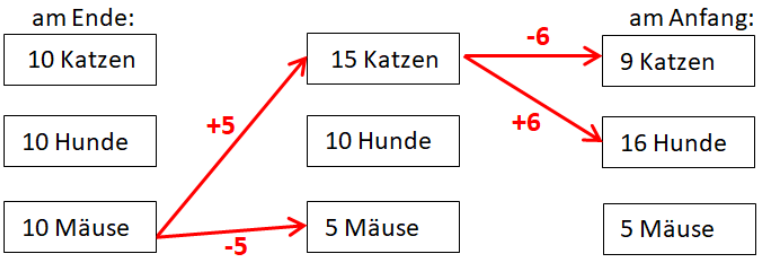
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Bei den Quadraten A, C und E sind die Anteile der weißen und schwarzen Flächen gleich groß. Beim Quadrat B beträgt der Anteil der schwarzen Fläche $\frac{4}{9}$ und beim Quadrat D $\frac{13}{25}$. Da $\frac{4}{9} > \frac{13}{25}$ ist, besitzt das Quadrat B den größten Anteil an schwarzer Fläche. Lösung: **B**

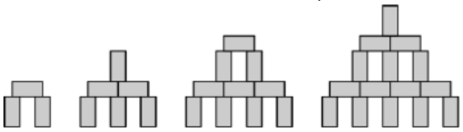
13. Im Garten einer Hexe befinden sich 30 Tiere: Hunde, Katzen und Mäuse. Die Hexe verwandelt 6 Hunde in 6 Katzen und dann 5 Katzen in 5 Mäuse. Nun gibt es gleich viele Hunde, Katzen und Mäuse. Wie viele Katzen gab es am Anfang?

(A) 4 (B) 5 **(C) 9** (D) 10 (E) 11

Da die Anzahl der Tiere nicht verändert, gibt es zum Schluss wieder insgesamt 30 Tiere. Da es gleiche viele von jeder Art gibt, gibt es 10 Katzen, 10 Hunde und 10 Mäuse. Mache nun die Verwandlungen wieder rückgängig.



14. Maxi baut mit kleinen 1 cm × 1 cm × 2 cm Bausteinen Türme, so wie im Bild zu sehen ist.

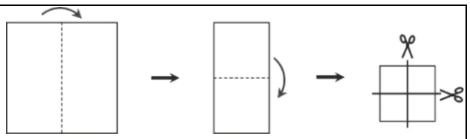


Er baut seine Türme auf dieselbe Art weiter. Für einen Turm verwendet er schließlich 28 Bausteine. Welche Höhe hat dieser Turm?

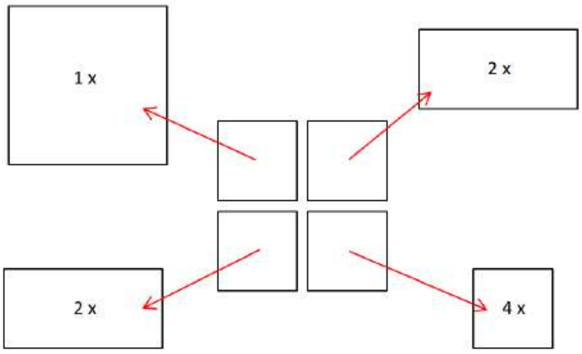
(A) 9 cm (B) 10 cm **(C) 11 cm** (D) 12 cm (E) 14 cm

15. Bridget faltet ein quadratisches Blatt Papier zweimal und zerschneidet es dann zweimal so, wie im Bild zu sehen ist.
Wie viele Stück Papier erhält sie auf diese Weise?

(A) 6 (B) 8 **(C) 9** (D) 12 (E) 16

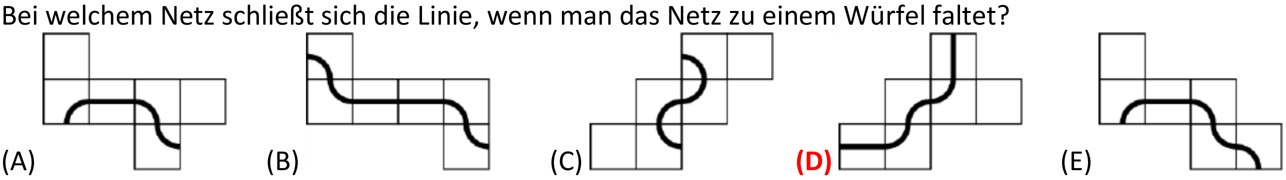


Aus den 4 Stößen ergeben sich folgenden Stücke:



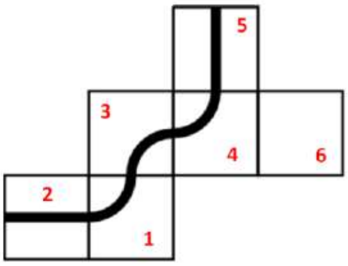
Es ergeben sich 4 kleine und 1 großes Quadrat und 2 mal 2 Rechtecke. Insgesamt sind es 9 Stücke.

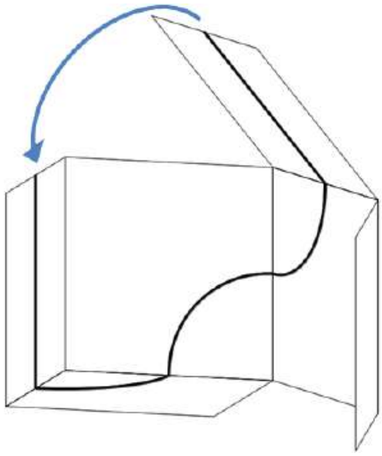
16. Jedes der 5 Würfelnetze enthält eine Linie.
Bei welchem Netz schließt sich die Linie, wenn man das Netz zu einem Würfel faltet?



(A) (B) (C) **(D)** (E)

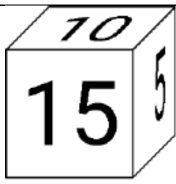
Stell dir vor, 1 ist die Grundfläche eines Würfels. Klappe 2 so, dass es die linke Seitenfläche ist. 3 wird die „Rückwand“, 4 die rechte Seitenfläche, 5 die Deckfläche und 6 wäre die Vorderfläche.





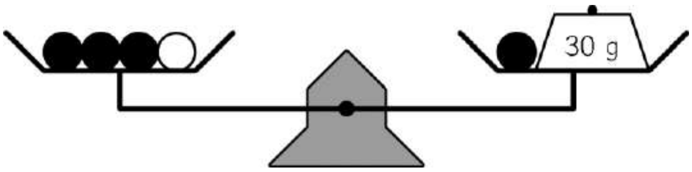
5 Punkte Beispiele

17. Auf jeder Fläche des abgebildeten Würfels steht eine natürliche Zahl, die größer als 0 ist.
Alle Produkte gegenüberliegender Zahlen liefern das gleiche Ergebnis.
Wie groß ist die kleinstmögliche Summe der 6 Zahlen?
(A) 36 (B) 37 **(C) 41** (D) 44 (E) 60



Die größte Zahl lautet 15. 15 x 2 = 30 ist das kleinste Produkt, das man mit der Zahl 15 bilden kann. Somit wird 10 mit 3 multipliziert und 5 mit 6. 10 x 3 = 30 und 5 x 6 = 30 Die Summe 15+2+10+3+5+6 = 41.
Die Lösung lautet somit: **C**

18. 4 gleich schwere schwarze Perlen, 1 weiße Perle und ein Stück Eisen mit 30 g werden auf eine Balkenwaage gelegt, wie im Bild zu sehen ist. Die Waage befindet sich im Gleichgewicht.
Wie schwer sind 6 schwarze und 3 weiße Perlen zusammen?



(A) 100 g (B) 99 g (C) 96 g (D) 94 g **(E) 90 g**

Entfernt man auf beiden Seiten der Balkenwaage eine schwarze Perle, befindet sie sich noch immer im Gleichgewicht, da die schwarzen Perlen alle gleich schwer sind. Zwei schwarze Perlen und eine weiße Perle wiegen somit 30 g. 6 schwarze Perlen und 3 weiße Perlen wiegen somit 3 Mal so viel, also 90 g.
Lösung: **E**

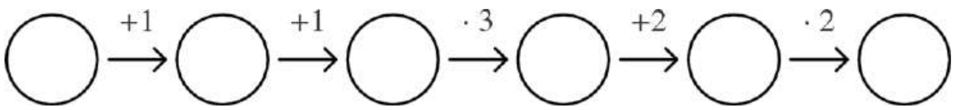
19. Robert macht 5 Aussagen. Genau eine davon ist falsch.
(A) Mein Sohn Basil hat 3 Schwestern.
(B) Meine Tochter Ann hat 2 Brüder.
(C) Meine Tochter Ann hat 2 Schwestern.

(D) Mein Sohn Basil hat 2 Brüder.
(E) Ich habe 5 Kinder.

Welche Aussage ist falsch?
(A) Aussage A (B) Aussage B (C) Aussage C **(D) Aussage D** (E) Aussage E

Wenn der Sohn Basil drei Schwestern hat, die Tochter Ann zwei Schwestern hat, gibt es drei Mädchen in der Familie. Wenn Robert 5 Kinder hat, kann er nur zwei Söhne haben, somit kann Basil nicht zwei Brüder haben.
Lösung: **D**

20. Benjamin schreibt eine Zahl in den ersten Kreis. Danach berechnet er laut Anweisungen die weiteren Rechnungen und schreibt die Ergebnisse in die weiteren Kreise.
Wie viele der sechs Zahlen sind durch 3 teilbar?



(A) 1 **(B) 2** (C) 1 oder 2 (D) 2 oder 3 (E) 3 oder 4

Egal mit welcher Zahl man beginnt, es sind immer zwei Zahlen durch 3 teilbar, auch wenn man mit der Zahl 0 startet, da 0 durch 3 geteilt werden kann.

$$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{\cdot 2} 16$$

$$2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{\cdot 3} 12 \xrightarrow{+2} 14 \xrightarrow{\cdot 2} 28$$

Lösung: **B**

21. Emil machte mit seinen 8 Cousinen Selfies. Jede der 8 Cousinen ist auf zwei oder drei Bildern zu sehen.
In jedem Bild kann man genau 5 Cousinen sehen.
Wie viele Selfies machte Emil?
(A) 3 **(B) 4** (C) 5 (D) 6 (E) 7

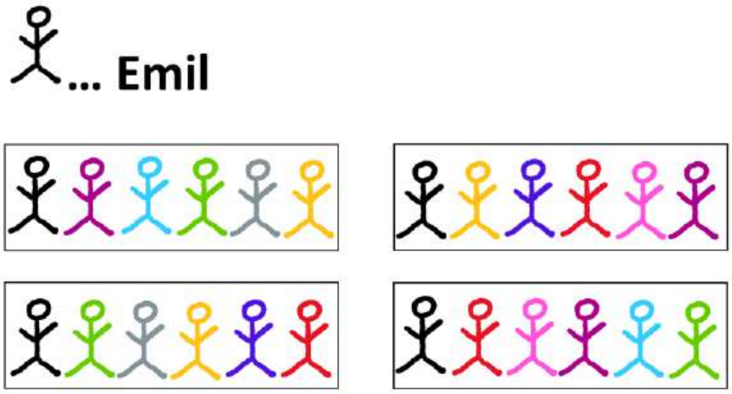
Wenn jede Cousine auf 2 Fotos wäre, würden die Cousinen insgesamt 8 · 2 = 16 Mal abgebildet.

Wenn jede Cousine auf 3 Fotos wäre, würden die Cousinen insgesamt 8 · 3 = 24 Mal abgebildet.

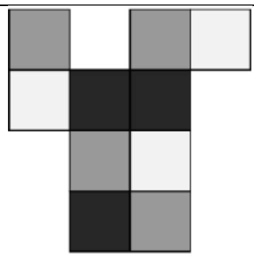
Die einzige Zahl zwischen 16 und 24, die durch 5 teilbar ist, ist 20 = 5 · 4.

Das heißt, es wurden vier Fotos mit je 5 Cousinen gemacht.

Dies ist wirklich möglich; z.B.:



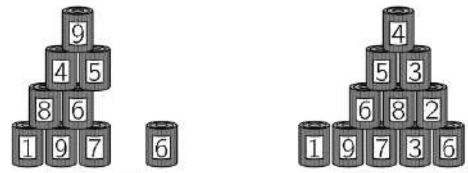
22. Das Kartonpapier wird in eine $2 \times 1 \times 1$ Schachtel gefaltet.
Welches der folgenden Bilder zeigt die Schachtel nicht?



(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

23. Jette und Willi werfen Bälle auf zwei identisch aufgebaute Pyramiden, die jeweils aus 15 Dosen aufgebaut wurden. Jette trifft 6 Dosen und erhält 25 Punkte. Willi trifft 4 Dosen.
Wie viele Punkte erhält Willi?

(A) 22 (B) 23 (C) 25 **(D) 26** (E) 28



nach Jettes Wurf nach Willis Wurf

Jette hat die Dosen mit den Zahlen 3, 8, 2, 3, 4 und einer noch unbekannten Zahl geworfen. Da sie 25 Punkte erreicht hat, hat die Dose an der Spitze der Pyramide den Wert 5.
Willi hat die Dosen mit den Zahlen 8, 4, 9 und 5 geworfen, somit erhält er 26 Punkte.
Lösung: **D**

24. Linus baut einen $4 \times 4 \times 4$ Würfel mit 32 weißen und 32 schwarzen $1 \times 1 \times 1$ Würfeln. Er ordnet die Würfel so an, dass die Oberfläche des großen Würfels möglichst viel weiß enthält.
Welcher Bruchteil der Oberfläche ist weiß?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{1}{4}$

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7. – 8.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. - 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. - 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

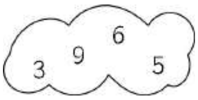
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

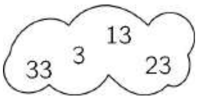
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

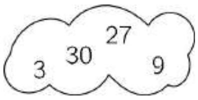
Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

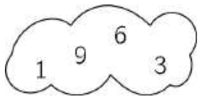
- 3 Punkte Beispiele -

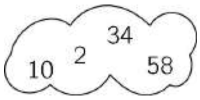
1. Welche Wolke enthält nur gerade Zahlen?

(A) 

(B) 

(C) 

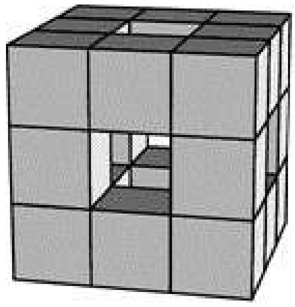
(D) 

(E) 

2. Zehn Viertelstunden entsprechen wie vielen Stunden?

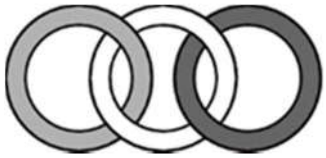
(A) 40 (B) 5½ (C) 4 (D) 3 (E) 2½

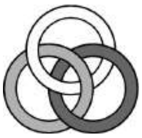
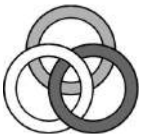
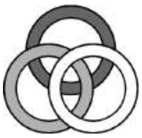
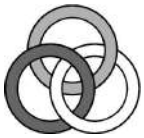
3. Ein $3 \times 3 \times 3$ - Würfel wird aus kleinen $1 \times 1 \times 1$ - Würfeln hergestellt. Danach werden, von vorne bis hinten, von oben bis unten und von rechts bis links die mittleren Würfel entfernt (siehe Abbildung). Wie viele $1 \times 1 \times 1$ - Würfel bleiben übrig?



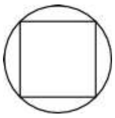
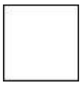
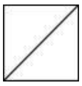
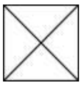
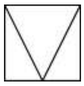
(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

4. Drei Ringe sind wie abgebildet miteinander verbunden.
Welches der folgenden Bilder zeigt auch drei auf dieselbe Weise verbundene Ringe?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Vier der folgenden fünf Figuren können gezeichnet werden, ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu zeichnen. Für eine Figur gilt das nicht. Welche ist das?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Fünf Freunde backen Lebkuchen und treffen sich danach zum Verkosten. Jeder gibt jedem anderen einen seiner Lebkuchen. Danach isst jeder alle Lebkuchen, die er bekommen hat. Dadurch verringert sich die Gesamtzahl der Lebkuchen um die Hälfte. Wie viele Lebkuchen hatten die fünf Freunde zu Beginn?

(A) 20 (B) 24 (C) 30 (D) 40 (E) 60

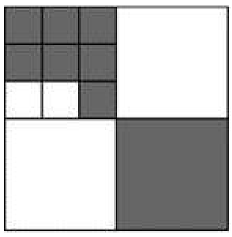
7. Lothar beendet ein Wettrennen vor Manfred. Victor beendet das Rennen nach Jan, Manfred vor Jan und Eddy vor Victor. Wer von diesen fünf beendet das Rennen als Letzter?

(A) Victor (B) Manfred (C) Lothar (D) Jan (E) Eddy

8. Julia liest ein Buch, in dem alle Seiten nummeriert sind. Die Ziffer 0 wird fünf Mal und die Ziffer 8 sechs Mal verwendet. Wie lautet die Seitenzahl der letzten Seite?

(A) 48 (B) 58 (C) 60 (D) 68 (E) 88

9. Ein großes Quadrat wird wie abgebildet in kleinere Quadrate unterschiedlicher Größe geteilt. Einige der kleineren Quadrate werden grau gefärbt.
Welcher Bruchteil des großen Quadrats wurde grau gefärbt?



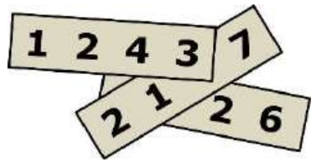
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{5}{12}$

10. Andreas verteilt einige Äpfel gleichmäßig auf sechs Körbe. Boris verteilt die gleiche Anzahl von Äpfeln gleichmäßig auf fünf Körbe. Boris bemerkt, dass jeder seiner Körbe zwei Äpfel mehr enthält als jeder Korb von Andreas.
Wie viele Äpfel hat Andreas verteilt?

(A) 60 (B) 65 (C) 72 (D) 75 (E) 90

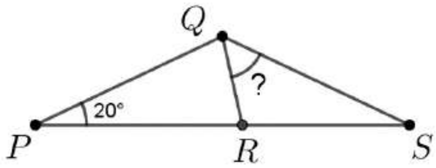
- 4 Punkte Beispiele -

11. Drei vierziffrige Zahlen werden wie abgebildet auf drei Papierstreifen geschrieben. Die Summe der drei Zahlen ist 10126. Drei der Ziffern sind im Bild verdeckt. Wie lauten die drei verdeckten Ziffern?



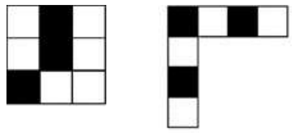
(A) 5, 6 und 7 (B) 4, 5 und 7 (C) 4, 6 und 7 (D) 4, 5 und 6 (E) 3, 5 und 6

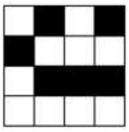
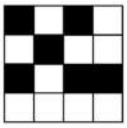
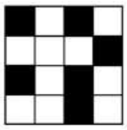
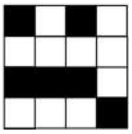
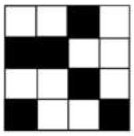
12. Im Dreieck PSQ gilt: ∠QPS = 20°. Das Dreieck PSQ wird wie abgebildet durch die Strecke QR in zwei kleinere Dreiecke unterteilt. Es gilt PQ = PR = QS. Wie groß ist der Winkel RQS?



(A) 50° (B) 60° (C) 65° (D) 70° (E) 75°

13. Aus den beiden abgebildeten Bausteinen soll ein 4 x 4 -Quadrat zusammengesetzt werden. Welches der dargestellten 4 x 4 - Quadrate kann so nicht gebildet werden?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

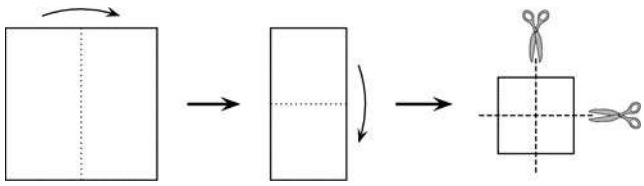
14. Anna, Bella, Claire, Dora und Erika treffen sich auf einer Party. Je zwei von ihnen, die einander kennen, geben einander genau einmal die Hand. Anna gibt nur einmal die Hand, Bella zwei Mal, Claire drei Mal und Dora vier Mal. Wie vielen Personen gibt Erika die Hand?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Jane spielt Basketball. Von ihren ersten 20 Würfen sind 55% Treffer. Nach weiteren 5 Würfen ist ihre Trefferquote auf 56% angewachsen. Wie viele Treffer hat sie bei den letzten fünf Würfen erzielt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16. Kathi faltet ein quadratisches Blatt Papier zwei Mal und zerschneidet es dann entlang der zwei Linien wie im Bild. Die entstandenen Papierstücke faltet sie, wenn möglich, auf. Wie viele Papierstücke sind Quadrate?

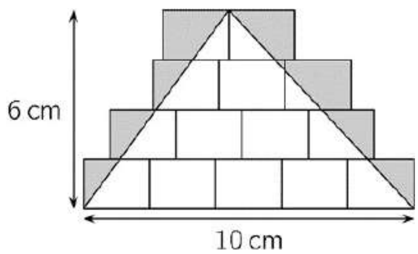


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

17. Michaela hat 24 Tiere, nämlich Hunde, Kühe, Katzen und Kängurus. Ein Achtel der Tiere sind Hunde. Drei Viertel der Tiere sind **keine** Kühe, und zwei Drittel sind **keine** Katzen. Wie viele Kängurus hat Michaela?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

18. Mia zeichnet einige kongruente Rechtecke und ein Dreieck. Danach bemalt sie jene Teile der Rechtecke grau, die außerhalb des Dreiecks liegen (siehe Abbildung). Wie groß ist die so entstehende graue Fläche?

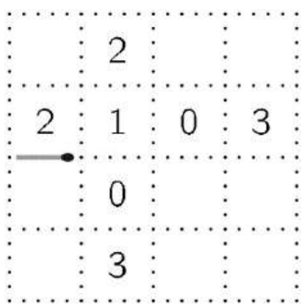


(A) 10 cm² (B) 12 cm² (C) 14 cm² (D) 15 cm² (E) 21 cm²

19. Julius hat zwei zylinderförmige Kerzen mit unterschiedlichen Höhen und Durchmessern. Die erste Kerze brennt in 6 Stunden und die zweite in 8 Stunden ab, wobei beide gleichmäßig abbrennen. Er zündet beide Kerzen gleichzeitig an und drei Stunden später sind beide Kerzen gleich hoch. In welchem Verhältnis standen ihre ursprünglichen Höhen?

(A) 4:3 (B) 8:5 (C) 5:4 (D) 3:5 (E) 7:3

20. Anna hat mit Zündhölzern einen Weg entlang der punktierten Linien gelegt. Das erste Zündholz hat sie wie abgebildet gelegt. Der Weg verläuft so, dass er schließlich zurück zum linken Ende des ersten Zündholzes führt.
Die Zahlen in den kleinen Quadraten geben an, wie viele Seiten des jeweiligen Quadrates sie mit Zündhölzern belegt hat.
Wie viele Zündhölzer hat sie mindestens verwendet?

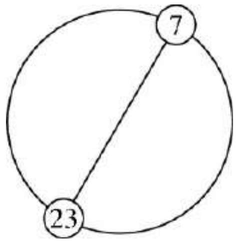


(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

- 5 Punkte Beispiele -

21. Auf einem Kreis liegen n Knöpfe gleichmäßig angeordnet. Die Knöpfe sind im Uhrzeigersinn der Reihe nach mit den Zahlen von 1 bis n beschriftet. Der Knopf mit der Zahl 7 liegt dem Knopf mit der Zahl 23 genau gegenüber. Wie groß ist n?

(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38

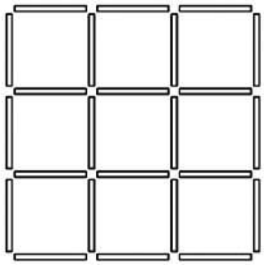


22. Leo gibt sein gesamtes Geld für den Kauf von 50 Flaschen Saft zu je 1 Euro aus und verkauft sie zu einem höheren Preis weiter. Nach dem Verkauf von 40 Flaschen, jeweils zum selben Preis, hat er 10 Euro mehr als zu Beginn. Er verkauft dann auch noch alle übrigen Flaschen zu diesem Preis. Wie viel Geld hat Leo jetzt?

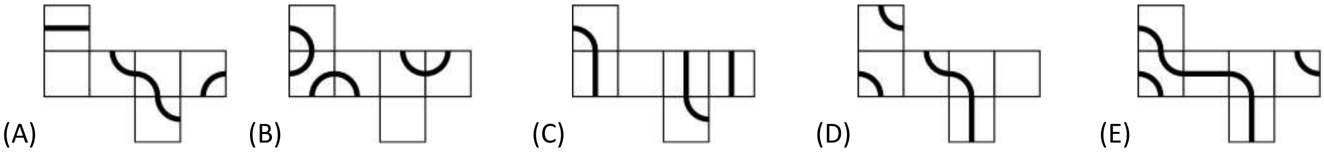
(A) 70 Euro (B) 75 Euro (C) 80 Euro (D) 90 Euro (E) 100 Euro

23. Natascha hat einige blaue, rote, gelbe und grüne Stäbchen mit der Länge 1 cm. Sie möchte das abgebildete 3 × 3 - Gitter so herstellen, dass jedes 1 × 1 - Quadrat im Gitter vier Seiten mit unterschiedlichen Farben hat.
Was ist die kleinste Anzahl grüner Stäbchen, die sie verwenden kann?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



24. Eine Ameise krabbelt entlang einer geschlossenen Linie auf der Oberfläche eines Würfels, bis sie wieder bei ihrem Ausgangspunkt ankommt.
Welches der folgenden Würfelnetze gehört zu dem Würfel, auf dem die Ameise krabbelt?

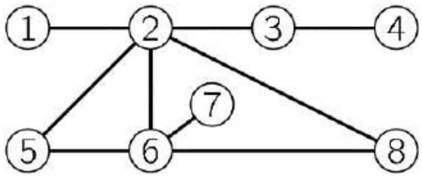


25. Elisabeth hat 60 Pralinen. Am Montag isst sie 1/10 davon. Von den restlichen isst sie am Dienstag 1/9. Dann isst sie am Mittwoch 1/8 der vom Vortag übrig gebliebenen, am Donnerstag 1/7 der vom Vortag übrig gebliebenen und so weiter, bis sie die Hälfte der vom Vortag übrig gebliebenen Pralinen isst.
Wie viele Pralinen hat sie danach noch?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

26. Peter bemalt jeden der acht Kreise mit einer der Farben rot, gelb oder blau. Zwei Kreise, die durch eine Linie direkt verbunden sind, dürfen nicht dieselbe Farbe haben.
Welche zwei Kreise muss Peter jedenfalls mit der gleichen Farbe bemalen?

(A) 5 und 8 (B) 1 und 6 (C) 2 und 7 (D) 4 und 5 (E) 3 und 6



27. Ria und Flora vergleichen ihre Ersparnisse und stellen fest, dass diese im Verhältnis 5:3 stehen.
Dann kauft Ria ein Tablet um 160 €. Das Verhältnis ihrer Ersparnisse ändert sich dadurch auf 3:5.
Wie viel Geld hatte Ria vor dem Kauf des Tablets?

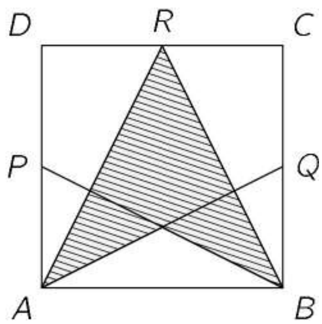
(A) 192 € (B) 200 € (C) 250 € (D) 400 € (E) 420 €

28. An einem Schachturnier nehmen Dreierteams teil. Jeder Teilnehmer spielt gegen jeden Teilnehmer jedes anderen Dreierteams genau einmal. Aus organisatorischen Gründen dürfen nicht mehr als 250 Spiele gespielt werden.
Wie viele Dreierteams können maximal am Turnier teilnehmen?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

29. Im Quadrat $ABCD$ sind P, Q und R die Mittelpunkte der Seiten DA, BC und CD.
Welcher Bruchteil des Quadrats $ABCD$ ist im Bild schraffiert?

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{16}$ (E) $\frac{3}{8}$



30. Ein Zug besteht aus 18 Waggons. Im Zug befinden sich 700 Reisende. In je fünf aufeinanderfolgenden Waggons befinden sich insgesamt genau 199 Reisende.
Wie viele Reisende sind insgesamt in den beiden mittleren Waggons des Zugs?

(A) 70 (B) 77 (C) 78 (D) 96 (E) 103

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Level: Kadett, Grade: 7 - 8

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points

each correct answer to questions 1. – 10.:	3 points
each correct answer to questions 11. – 20.:	4 points
each correct answer to questions 21. – 30.:	5 points
each question left unanswered:	0 points
each incorrect answer:	minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

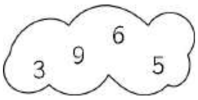
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

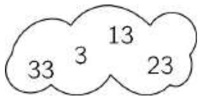
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

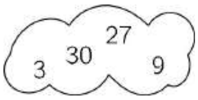
Känguru der Mathematik 2019
Level Kadett (Schulstufe 7 and 8)
Austria – 21. 3. 2019

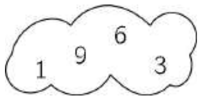
- 3 Point Examples -

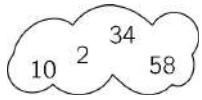
1. Which cloud contains even numbers only?

(A) 

(B) 

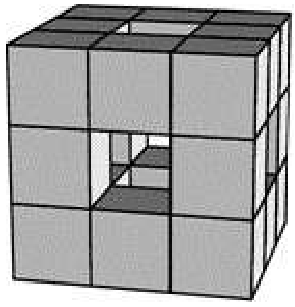
(C) 

(D) 

(E) 

2. Ten quarters of an hour correspond to how many hours?

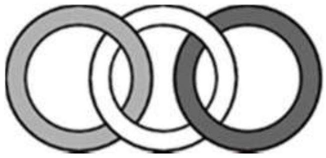
(A) 40 (B) 5½ (C) 4 (D) 3 (E) 2½

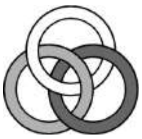
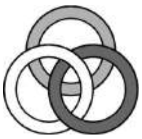
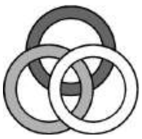
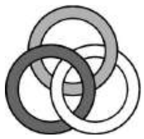


3. A $3 \times 3 \times 3$ cube is made up of small $1 \times 1 \times 1$ cubes. Then the middle cubes from front to back, from top to bottom and from right to left are removed (see diagram). How many $1 \times 1 \times 1$ – cubes remain?

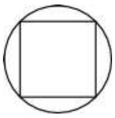
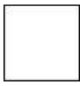
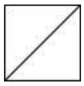
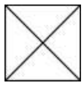
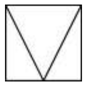
(A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

4. Three rings are connected to each other as shown.
Which of the following pictures also shows three rings connected in the same way?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Four of the following five diagrams can be drawn without lifting the pencil and without going over a line twice. For one diagram this is not true. Which one is it?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Five friends bake ginger bread and subsequently meet up for a tasting session. Each one gives one of his ginger breads to each other person. Then each person eats all of the ginger bread they were given. After that the number of ginger breads halves. How many ginger breads did the five friends have to start with?

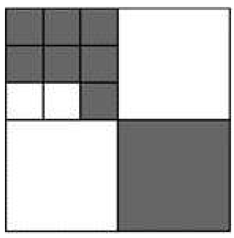
(A) 20 (B) 24 (C) 30 (D) 40 (E) 60

7. Lothar finishes a race in front of Manfred. Victor finishes the race after Jan, Manfred in front of Jan and Eddy in front of Victor. Which of the five finishes the race last?

(A) Victor (B) Manfred (C) Lothar (D) Jan (E) Eddy

8. Julia reads a book whose pages are all numbered. The digit 0 appears five times and the digit 8 six times. What is the page number of the last page?

(A) 48 (B) 58 (C) 60 (D) 68 (E) 88



9. A big square is divided up into smaller squares of different sizes as shown. Some of the smaller squares are shaded in grey.
Which fraction of the big square is shaded in grey?

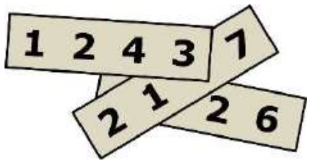
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{4}{9}$ (E) $\frac{5}{12}$

10. Andreas distributes some apples equally into six baskets. Boris distributes the same amount of apples equally into five baskets. Boris realises that each of his baskets contains two more apples than Andreas' basket.
How many apples did Andreas distribute?

(A) 60 (B) 65 (C) 72 (D) 75 (E) 90

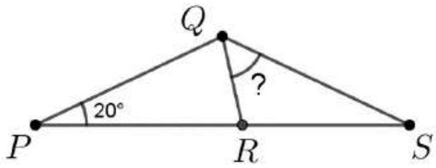
- 4 Point Examples -

11. Three four-digit numbers are written onto three separate pieces of paper as shown. The sum of the three numbers is 10126. Three of the digits in the picture are hidden. Which are the hidden digits?



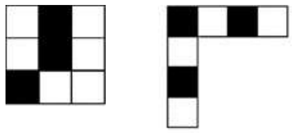
(A) 5, 6 and 7 (B) 4, 5 and 7 (C) 4, 6 and 7 (D) 4, 5 and 6 (E) 3, 5 and 6

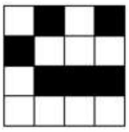
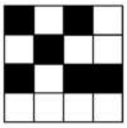
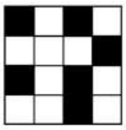
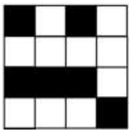
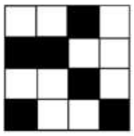
12. The following information is known about triangle PSQ: ∠QPS = 20°. The triangle PSQ has been split up into two smaller triangles by the line QR as shown. It is known that PQ = PR = QS. How big is the angle RQS?



(A) 50° (B) 60° (C) 65° (D) 70° (E) 75°

13. A 4 x 4 square is made up of the two pieces shown. Which of the following 4 x 4 squares cannot be made this way?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

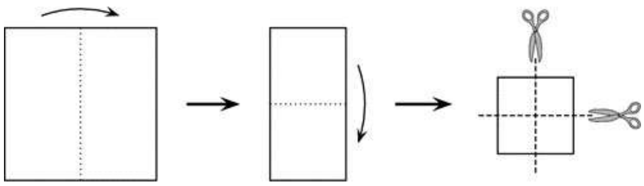
14. Anna, Bella, Claire, Dora and Erika meet at a party. Each pair who know each other shake hands exactly once. Anna shakes hands only once, Bella twice, Claire three times and Dora four times. How many people does Erika shake hands with?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Jane plays basketball. Of her first 20 throws 55% are successful. After five more throws her success rate increases to 56%. How many of her last five throws were successful?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16. Kathi folds a square piece of paper twice and subsequently cuts it along the two lines as shown in the picture. The resulting pieces of paper are then unfolded if possible. How many of the pieces of paper are squares?

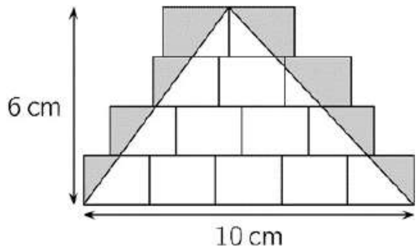


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

17. Michaela has 24 animals, namely dogs, cows, cats and kangaroos. One eighth of the animals are dogs. Three quarters of the animals are *not* cows and two thirds are *not* cats. How many kangaroos does Michaela have?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

18. Mia draws some congruent rectangles and one triangle. She then shades in grey those parts of the rectangles that lie outside the triangle (see diagram). How big is the resulting grey area?

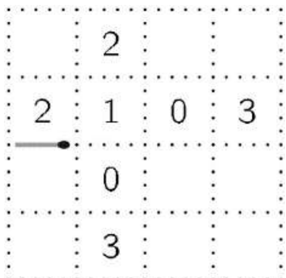


(A) 10 cm² (B) 12 cm² (C) 14 cm² (D) 15 cm² (E) 21 cm²

19. Julius has two cylinder-shaped candles of different heights and diameters. The first candle burns down in 6 hours, the second one in 8 hours. They both burn down evenly. He lights both candles at the same time and after three hours they are both equally high. What was the ratio of the original heights?

(A) 4:3 (B) 8:5 (C) 5:4 (D) 3:5 (E) 7:3

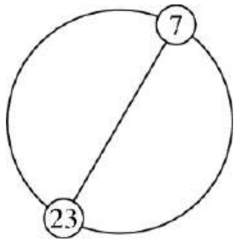
20. Anna has placed matches along the dotted lines to create a path. She has placed the first match as shown in the diagram. The path is in such a way that in the end it leads back to the left end of the first match.
The numbers in the small squares state how many sides of the square she has placed matches on.
What is the minimum number of matches she has used?



(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

- 5 Point Examples -

21. n number of buttons are placed evenly around a circle. The buttons are labelled clockwise in order with the numbers 1 to n. The button with the number 7 is exactly opposite the button with the number 23. How big is n?

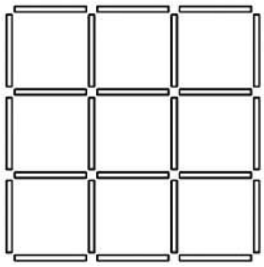


(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 36 (E) 38

22. Leo spends all his money to buy 50 bottles of juice for 1 Euro each and sells them on for a higher price. After selling 40 bottles each for the same price, he has 10 Euros more than to start with. He then continues to sell the remaining bottles for the same price.
How much money does Leo have now?

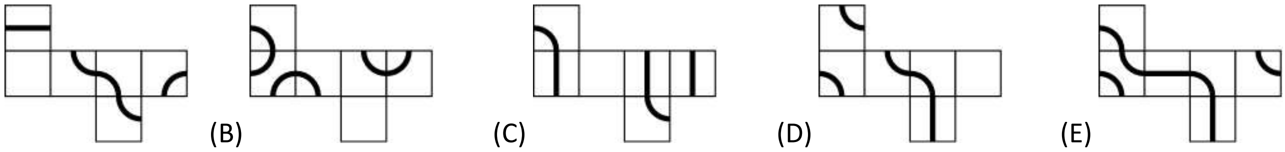
(A) 70 Euros (B) 75 Euros (C) 80 Euros (D) 90 Euros (E) 100 Euros

23. Natascha has some blue, red, yellow and green sticks of 1 cm length. She wants to make a 3 × 3 grid as shown in such a way that the four sides of each 1 × 1 – square in the grid each are of a different colour.
What is the minimum number of green sticks she can use?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

24. An ant crawls along a closed line on the surface of a cube until it reaches its starting point.
Which of the following nets of a cube belongs to the cube that the ant is crawling on?

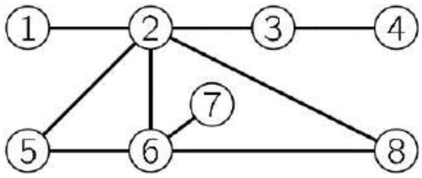


(A) (B) (C) (D) (E)

25. Elisabeth has 60 pralines. On Monday she eats 1/10 of them. Of the remaining ones she eats 1/9 on Tuesday. On Wednesday she then eats 1/8 of the ones left from the day before, on Thursday 1/7 of the ones left from the day before and so on until she eats halve of the pralines left over from the day before.
How many pralines has she still got afterwards?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

26. Peter colours in each of the eight circles in one of the colours red, yellow or blue. Two circles that are directly connected by a line, are not allowed to be of the same colour.
Which two circles does Peter definitely have to colour in the same colour?



(A) 5 and 8 (B) 1 and 6 (C) 2 and 7 (D) 4 and 5 (E) 3 and 6

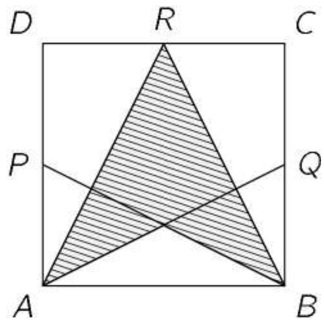
27. Ria and Flora compare their savings and realise that they are in the ratio 5:3 to each other. Then Ria buys a tablet for 160 €. The ratio of their savings thus changes to 3:5.
How much money did Ria have before she bought the tablet?

(A) 192 € (B) 200 € (C) 250 € (D) 400 € (E) 420 €

28. Teams of three are taking part in a chess tournament. Each participant plays against each participant from each of the teams of three exactly once. Due to organisational reasons no more than 250 games are allowed to be played.
What is the maximum number of teams of three that can take part in the tournament?

(A) 11 (B) 10 (C) 9 (D) 8 (E) 7

29. In square $ABCD$ P, Q and R are the midpoints of the edges DA, BC and CD.
Which fraction of the square $ABCD$ is shaded in the diagram?



(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{7}{16}$ (E) $\frac{3}{8}$

30. A train consists of 18 carriages. There are 700 passengers on the train. In each five successive carriages there are exactly 199 passengers in total.
How many passengers are in the two middle carriages of the train in total?

(A) 70 (B) 77 (C) 78 (D) 96 (E) 103

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9. – 10.

Vor- und Zuname:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

☐Ich stimme zu, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

Ort, Datum Unterschrift

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

- 3 Punkte Beispiele -

1. $20 \times 19 + 20 + 19 =$

(A) 389 (B) 399 (C) 409 (D) 419 (E) 429

2. Eine Modelleisenbahn fährt im Kreis. Sie benötigt (bei konstanter Geschwindigkeit) genau 1 Minute und 11 Sekunden für eine Runde. Wie lange braucht sie für sechs Runden?

(A) 6 Minuten 56 Sekunden (B) 7 Minuten 6 Sekunden (C) 7 Minuten 16 Sekunden
(D) 7 Minuten 26 Sekunden (E) 7 Minuten 36 Sekunden

3. Ein Barbier möchte das Wort SHAVE so auf eine Tafel schreiben, dass ein Kunde, der das Wort im Spiegel sieht, das Wort normal lesen kann. Wie muss er das Wort auf die Tafel schreiben?

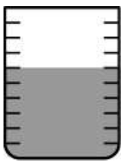
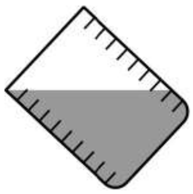
(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

4. Wie viele verschiedene Punktesummen kann man erhalten, wenn man drei gewöhnliche Spielwürfel gleichzeitig wirft?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

5. Fünf identische Messbecher sind mit Wasser gefüllt. Vier davon enthalten jeweils genau gleich viel Wasser. Welcher Messbecher enthält eine andere Menge?

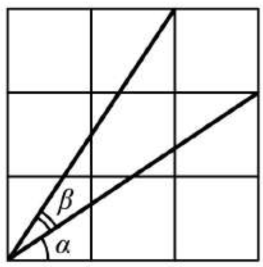
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Ein Park hat fünf Zugänge. Monika möchte durch einen Zugang den Park betreten und durch einen anderen Zugang wieder verlassen. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie den Park betreten und verlassen?

(A) 25 (B) 20 (C) 16 (D) 15 (E) 10

7. Die Masse (in kg) dreier Kängurus ist jeweils eine andere ganze Zahl. Zusammen wiegen sie 97 kg. Wie viel kann das leichteste von ihnen höchstens wiegen?

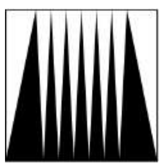
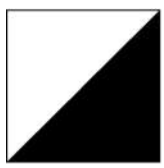
(A) 1 (B) 30 (C) 31 (D) 32 (E) 33



8. Welche der folgenden Aussagen trifft sicher auf die markierten Winkel in der gegebenen aus neun Quadraten zusammengesetzten Figur zu?

(A) $\alpha = \beta$ (B) $2\,\alpha + \beta = 90°$ (C) $\alpha + \beta = 60°$ (D) $2\,\beta + \alpha = 90°$ (E) $\alpha + \beta = 45°$

9. Ein Einheitsquadrat wurde wie abgebildet auf fünf verschiedene Arten angemalt. In welchem Bild ist der schwarze Bereich am größten?

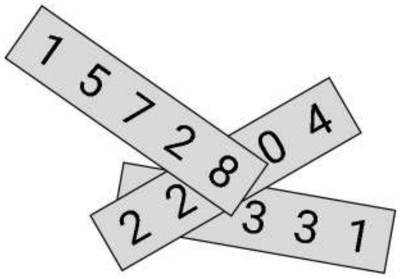
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Julia liest ein Buch, in dem alle Seiten nummeriert sind. Die Ziffer 0 wird sechs Mal und die Ziffer 8 sieben Mal verwendet. Wie lautet die Seitenzahl der letzten Seite?

(A) 58 (B) 68 (C) 70 (D) 78 (E) 98

- 4 Punkte Beispiele -

11. Auf drei Papierstreifen wurde jeweils wie abgebildet eine fünfziffrige Zahl geschrieben. Drei der Ziffern sind im Bild verdeckt. Die Summe der drei Zahlen ist 57263. Wie lauten die verdeckten Ziffern?



(A) 0, 2 und 2 (B) 1, 2 und 9 (C) 2, 4 und 9 (D) 2, 7 und 8 (E) 5, 7 und 8

12. Anna, Bella, Claire, Dora, Erika und Frieda treffen sich auf einer Party. Je zwei von ihnen, die einander kennen, geben einander genau einmal die Hand. Anna gibt nur einmal die Hand, Bella zwei Mal, Claire drei Mal, Dora vier Mal und Erika fünf Mal. Wie vielen Personen gibt Frieda die Hand?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

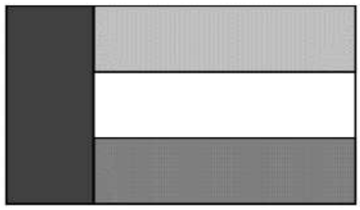
13. In einem Quadrat *ABCD* sind die Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn beschriftet. *A* und *C* sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks *AEC*, dessen Eckpunkte ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn beschriftet sind.
Wie groß ist der Winkel *CBE*?

(A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) 145° (E) 150°

14. Die Zahlen a, b, c und d sind paarweise verschiedene positive ganze Zahlen aus dem Bereich von 1 bis 10.
Was ist der kleinstmögliche Wert des Ausdrucks $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

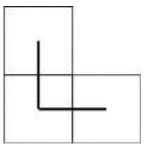
(A) $\frac{2}{10}$ (B) $\frac{3}{19}$ (C) $\frac{14}{45}$ (D) $\frac{29}{90}$ (E) $\frac{25}{72}$

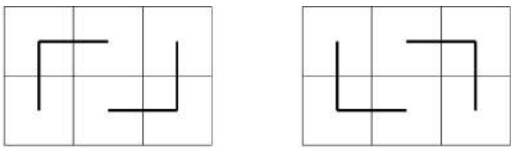
15. Die Flagge von Kanguria ist ein Rechteck, dessen Seitenlängen zueinander im Verhältnis $3:5$ stehen. Die Flagge ist, wie in der Abbildung zu sehen, in vier flächengleiche Rechtecke unterteilt.
In welchem Verhältnis stehen die Seitenlängen des weißen Rechtecks?

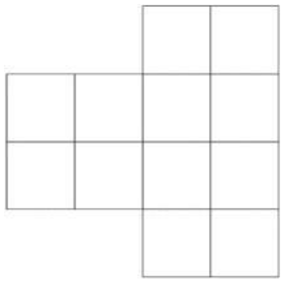


(A) $1:3$ (B) $1:4$ (C) $2:7$ (D) $3:10$ (E) $4:15$

16. Ein 3×2 Rechteck kann wie abgebildet auf zwei Arten von zwei der abgebildeten L-förmigen Figuren überdeckt werden:







Auf wie viele Arten kann die rechts abgebildete Figur durch die L-förmigen Figuren überdeckt werden?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 48

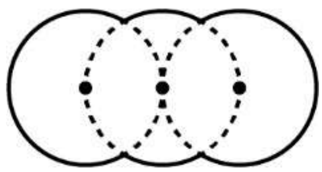
17. Ein Triathlon besteht aus den drei Bewerben Schwimmen, Laufen und Radfahren. Die Radfahrstrecke beträgt drei Viertel der Gesamtdistanz, die Laufstrecke beträgt ein Fünftel der Gesamtdistanz und die Schwimmstrecke ist 2 km lang. Wie lang ist die Gesamtdistanz des Triathlons in km?

(A) 10 (B) 20 (C) 38 (D) 40 (E) 60

18. Eine 1-Liter-Flasche Sirup ist noch halb voll. Der Sirup soll im Verhältnis $1:7$ zu Saft verdünnt werden.
Welchen Bruchteil dieses Sirups muss man verwenden, um 2 Liter Saft zu erhalten?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$ (E) den gesamten Sirup

19. Die gegebene Figur setzt sich aus drei Kreisen mit gleichem Radius R zusammen. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einer gemeinsamen Geraden, wobei der mittlere Kreis durch die Mittelpunkte der anderen beiden Kreise geht (siehe Abbildung). Wie groß ist der Umfang der Figur?



(A) $\frac{10\pi R}{3}$ (B) $\frac{5\pi R}{3}$ (C) $\frac{2\pi\ \sqrt{3}}{3}$ (D) $2\pi R\sqrt{3}$ (E) $4\pi R$

20. Die Summe der sieben Ziffern einer siebenstelligen Telefonnummer $aaabbbb$ ist die zweistellige Zahl ab.
Wie groß ist der Wert der Summe $a+b$?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

- 5 Punkte Beispiele -

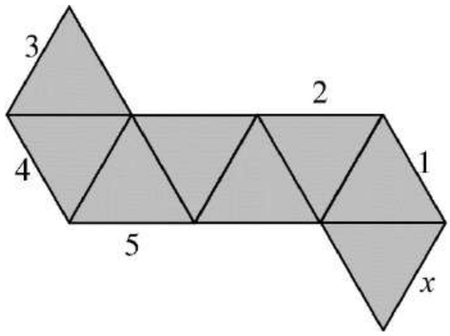
21. Löscht man von einer zweiziffrigen Zahl eine der beiden Ziffern, so ist in beiden Fällen die resultierende Zahl ein Teiler der ursprünglichen Zahl. Wie viele zweiziffrige Zahlen haben diese Eigenschaft?

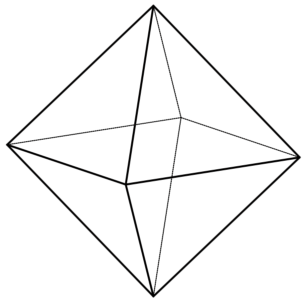
(A) 5 (B) 9 (C) 14 (D) 19 (E) 23

22. Insgesamt 60 Äpfel und 60 Birnen werden auf mehrere Schachteln verteilt. In jeder Schachtel sollen sich gleich viele Äpfel befinden, aber keine zwei Schachteln sollen gleich viele Birnen enthalten. Jede Schachtel enthält beide Obstsorten. Höchstens wie viele Schachteln kann man so befüllen?

(A) 20 (B) 15 (C) 12 (D) 10 (E) 6

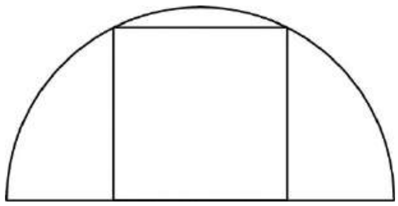
23. Im Bild ist das Netz eines Oktaeders zu sehen. Welche Kante fällt mit der mit x gekennzeichneten Kante zusammen, wenn das Netz zum Oktaeder gefaltet wird?





(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24. Zwei Eckpunkte eines Quadrats liegen wie abgebildet auf einem Halbkreis, während die beiden anderen auf seinem Durchmesser liegen. Der Radius des Kreises ist 1 cm. Wie groß ist die Fläche des Quadrats?



(A) $\frac{4}{5}$ cm² (B) $\frac{\pi}{4}$ cm² (C) 1 cm² (D) $\frac{4}{3}$ cm² (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm²

25. Zwei Punkte sind auf einer um ihren Mittelpunkt rotierenden Kreisscheibe markiert. Der äußere Punkt ist um 3 cm weiter vom Mittelpunkt entfernt als der innere Punkt und er bewegt sich 2,5 Mal so schnell wie der innere Punkt. Wie groß ist der Abstand des äußeren Punktes vom Mittelpunkt der Kreisscheibe?

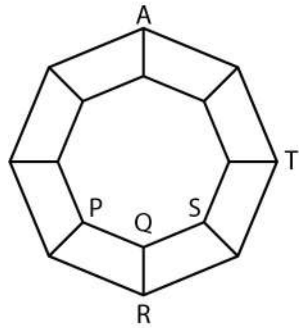
(A) 10 cm (B) 9 cm (C) 8 cm (D) 6 cm (E) 5 cm

26. Die ganzen Zahlen von 1 bis 99 werden in aufsteigender Reihenfolge ohne Zwischenraum angeschrieben. Diese Ziffernfolge wird in Tripel (Dreiergruppen) unterteilt:
$123456789101112\cdots979899 \longrightarrow (123)(456)(789)(101)(112)\cdots(979)(899)$.
Welches der folgenden Tripel erhält man nicht?

(A) (222) (B) (444) (C) (464) (D) (646) (E) (888)

27. Wie viele Ebenen existieren, die durch genau drei Eckpunkte eines gegebenen Würfels gehen?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10



28. Ein Graph besteht aus 16 Punkten und einigen Verbindungsstrecken, wie im Bild zu sehen ist. Eine Ameise befindet sich im Punkt A. Mit jedem Zug kann sich die Ameise vom Punkt, in dem sie sich befindet, längs einer Verbindungsstrecke zu einem benachbarten Punkt bewegen.
In welchem der Punkte P, Q, R, S und T kann sich die Ameise nach 2019 Zügen befinden?

(A) nur in P, R oder S, nicht in Q oder T (B) nur in P, R, S oder T, nicht in Q
(C) nur in Q (D) nur in T (E) in allen Punkten

29. Die Zahlen a, b und c sind dreistellig, und in jeder Zahl ist die erste Ziffer gleich der letzten.
Weiters gilt $b = 2a + 1$ und $c = 2b + 1$. Wie viele mögliche Werte gibt es für die Zahl a?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) mehr als 3

30. Wie viele Elemente müssen aus der Menge $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ mindestens entnommen werden, damit das Produkt der in der Menge verbleibenden Elemente eine Quadratzahl ist?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Level: Junior, Grade: 9 - 10

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points

each correct answer to questions 1. – 10.:	3 points
each correct answer to questions 11. – 20.:	4 points
each correct answer to questions 21. – 30.:	5 points
each question left unanswered:	0 points

each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

☐Ich stimme zu, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte

Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

Ort, Datum　　　　　　　　Unterschrift

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2019
Level Junior (Schulstufe 9 and 10)
Austria – 21. 3. 2019

- 3 Point Examples -

1. $20\times\ 19+20+19=$

(A) 389 (B) 399 (C) 409 (D) 419 (E) 429

2. A model railway goes round in circles. It drives with constant speed and needs exactly 1 minute and 11 seconds for one circuit. How long does it need for six circuits?

(A) 6 minutes 56 seconds (B) 7 minutes 6 seconds (C) 7 minutes 16 seconds
(D) 7 minutes 26 seconds (E) 7 minutes 36 seconds

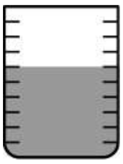
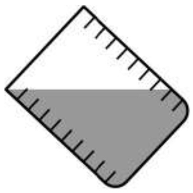
3. A barber wants to write the word SHAVE on a board so that a customer who sees the word in the mirror can read the word normally. How does he have to write the word on the board?

(A)  (B)  (C) 
(D)  (E) 

4. How many different sums of the dots can one obtain if three ordinary dice are thrown at the same time?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

5. Five identical measuring jugs are filled with water. Four of them contain exactly the same amount of water. Which measuring jug contains a different amount?

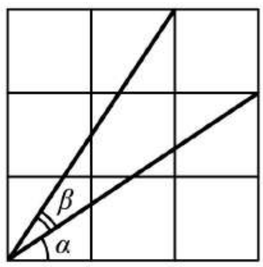
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. A park has five entrances. Monika wants to enter the park through one entrance and leave the park through another entrance. How many ways are there in which she can enter and leave the park?

(A) 25 (B) 20 (C) 16 (D) 15 (E) 10

7. The individual masses (in kg) of three kangaroos are three different integers. Together they weigh 97 kg. What is the maximum weight the lightest of the three can have?

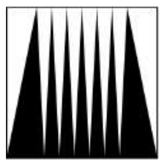
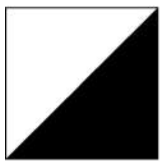
(A) 1 (B) 30 (C) 31 (D) 32 (E) 33



8. Which of the following statements is definitely true for the angle marked in the diagram which is made up of nine squares?

(A) $\alpha=\beta$ (B) $2\ \alpha+\beta=90°$ (C) $\alpha+\beta=60°$ (D) $2\ \beta+\alpha=90°$ (E) $\alpha+\beta=45°$

9. Inside a unit square a certain area has been coloured in black. In which square is the black area biggest?

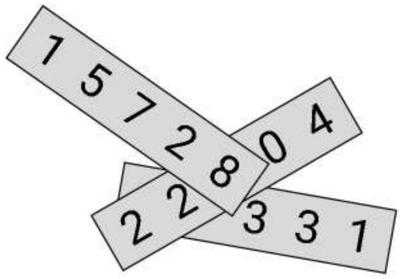
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Julia reads a book whose pages are all numbered. The digit 0 appears six times and the digit 8 seven times. What is the page number of the last page?

(A) 58 (B) 68 (C) 70 (D) 78 (E) 98

- 4 Point Examples -

11. Three five-digit numbers are written onto three separate pieces of paper as shown. Three of the digits in the picture are hidden. The sum of the three numbers is 57263. Which are the hidden digits?



(A) 0, 2 and 2 (B) 1, 2 and 9 (C) 2, 4 and 9 (D) 2, 7 and 8 (E) 5, 7 and 8

12. Anna, Bella, Claire, Dora, Erika and Frieda meet at a party. Each pair who know each other shake hands exactly once. Anna shakes hands only once, Bella twice, Claire three times, Dora four times and Erika five times. How many people does Frieda shake hands with?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

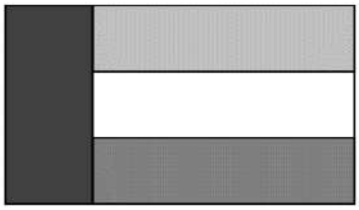
13. The vertices of a square *ABCD* are labelled anti-clockwise. *A* and *C* are the vertices of an equilateral triangle *AEC*, whose vertices are also labelled anti-clockwise.
How big is the angle *CBE*?

(A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) 145° (E) 150°

14. The numbers a, b, c and d are pairwise different integers between 1 and 10 (1 and 10 including).
What is the smallest possible value of the expression $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

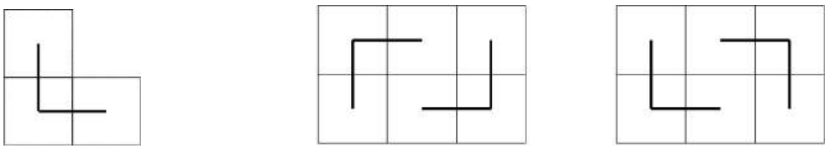
(A) $\frac{2}{10}$ (B) $\frac{3}{19}$ (C) $\frac{14}{45}$ (D) $\frac{29}{90}$ (E) $\frac{25}{72}$

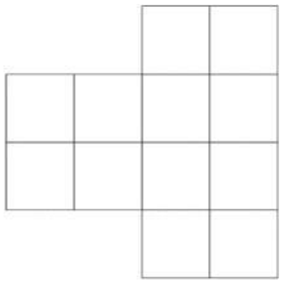
15. The flag of Kanguria is a rectangle whose side lengths are in the ratio $3:5$.
The flag is split into four rectangles of equal area as shown.
In which ratio are the side lengths of the white rectangle?



(A) $1:3$ (B) $1:4$ (C) $2:7$ (D) $3:10$ (E) $4:15$

16. A 3×2 rectangle can be covered in two ways by two of the L-shaped figures as shown:





In how many ways can the diagram on the right be covered by these L-shaped figures?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 48

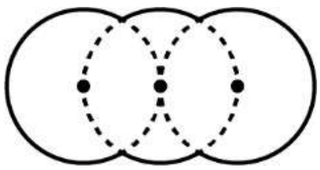
17. A triathlon consists of three disciplines swimming, running and cycling. The cycle route is three quarters of the entire distance, the running route is one fifth of the entire distance and the swimming route is 2 km long. How long is the whole distance of the triathlon in km?

(A) 10 (B) 20 (C) 38 (D) 40 (E) 60

18. A 1-liter-bottle of syrup is still half full. The syrup shall be diluted in the ratio $1:7$ to make juice.
Which fraction of the syrup should be used to obtain 2 litres of juice?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$ (E) the whole syrup

19. The diagram consists of three circles of equal radius R. The centre of those circles lie on a common straight line where the middle circle goes through the centres of the other two circles (see diagram). How big is the perimeter of the figure?



(A) $\frac{10\pi R}{3}$ (B) $\frac{5\pi R}{3}$ (C) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ (D) $2\pi R\sqrt{3}$ (E) $4\pi R$

20. The sum of the seven digits of a seven-digit phone number $aaabbbb$ is a two-digit number ab.
How big is the value of the sum $a+b$?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

- 5 Point Examples -

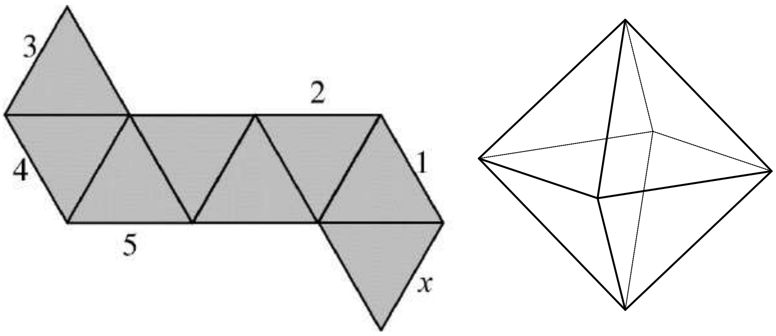
21. If one of the digits of a two-digit number is deleted, the result in both cases is a factor of the original number. How many two-digit numbers have this property?

(A) 5 (B) 9 (C) 14 (D) 19 (E) 23

22. 60 apples and 60 pears in total are shared out in several boxes. There should be the same amount of apples in each box but no two boxes should contain the same amount of pears. Each box contains both fruits. What is the maximum number of boxes that can be filled in this way?

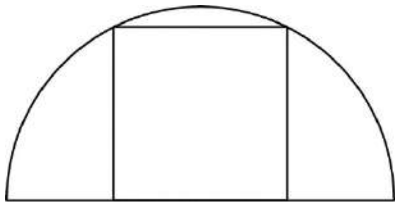
(A) 20 (B) 15 (C) 12 (D) 10 (E) 6

23. The diagram shows the net of an octahedron. Which edge meets the edge labelled with x if the net is folded up to form an octahedron?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24. Two vertices of a square lie on a semi-circle as shown, while the other two lie on its diameter. The radius of the circle is 1 cm. How big is the area of the square?



(A) $\frac{4}{5}$ cm² (B) $\frac{\pi}{4}$ cm² (C) 1 cm² (D) $\frac{4}{3}$ cm² (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm²

25. Two points are marked on a circular disc that rotates about its centre. The outer point is 3 cm further away from the centre than the inner point and it moves 2.5 times as fast as the inner point. How big is the distance between the outer point and the centre of the circular disc?

(A) 10 cm (B) 9 cm (C) 8 cm (D) 6 cm (E) 5 cm

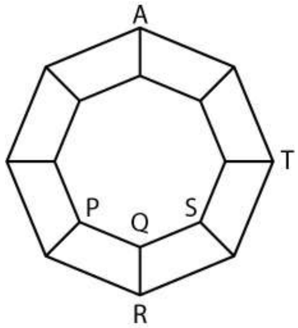
26. The integers from 1 to 99 are written down in ascending order without a gap. This sequence of numbers is divided up into triples (groups of three):
$123456789101112 \cdots 979899 \longrightarrow (123)(456)(789)(101)(112) \cdots (979)(899)$.
Which of the following triples is not obtained?

(A) (222) (B) (444) (C) (464) (D) (646) (E) (888)

27. How many planes exist that go through exactly three vertices of a given cube?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

28. A graph consists of 16 points and several connecting lines as shown in the diagram. An ant is at point A. With every move the ant can move from the point where it currently is, along one of the connecting lines, to an adjacent point.
At which of the points P, Q, R, S and T can the ant be after 2019 moves?



(A) only at P, R or S, not at Q or T (B) only at P, R, S or T, not at Q
(C) only at Q (D) only at T (E) At all of the points

29. The numbers a, b and c are three-digit numbers and in each number the first digit is equal to the last one. Furthermore $b = 2a + 1$ and $c = 2b + 1$. How many possible values are there for the number a?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) more than 3

30. What is the minimum number of elements of the set $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ that have to be removed so that the product of the remaining elements of the set is a square number?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	E	C	B	B	C	B	A	B	B	C	C	C	E	B	D	B	A	C	C	D	E	A	E	B	D	C	C	B

– 3 Punkte Beispiele –

1. $20 \times 19 + 20 + 19 =$

(A) 389 (B) 399 (C) 409 **(D) 419** (E) 429

2. Eine Modelleisenbahn fährt im Kreis. Sie benötigt (bei konstanter Geschwindigkeit) genau 1 Minute und 11 Sekunden für eine Runde. Wie lange braucht sie für sechs Runden?

(A) 6 Minuten 56 Sekunden **(B) 7 Minuten 6 Sekunden** (C) 7 Minuten 16 Sekunden
(D) 7 Minuten 26 Sekunden (E) 7 Minuten 36 Sekunden

Das Sechsfache von 1 Minute 11 Sekunden sind 6 Minuten 66 Sekunden, also 7 Minuten 6 Sekunden.

3. Ein Barbier möchte das Wort SHAVE so auf eine Tafel schreiben, dass ein Kunde, der das Wort im Spiegel sieht, das Wort normal lesen kann. Wie muss er das Wort auf die Tafel schreiben?

(A)  (B)  (C) 
(D)  **(E)** 

Man muss das Wort spiegelverkehrt auf die Tafel schreiben.

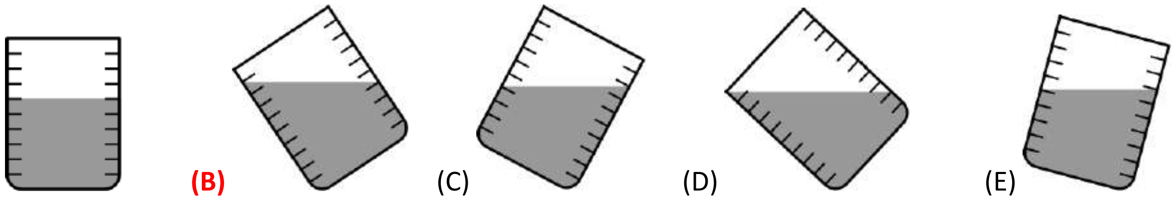
Dadurch wird aus  .

4. Wie viele verschiedene Punktesummen kann man erhalten, wenn man drei gewöhnliche Spielwürfel gleichzeitig wirft?

(A) 14 (B) 15 **(C) 16** (D) 17 (E) 18

Ein gewöhnlicher Spielwürfel trägt auf seinen Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkte. Die kleinste mögliche Punktsumme ist 3 (1+1+1), die größte 18 (6+6+6). Auch die Summen zwischen 3 und 18 kann man erhalten. Damit gibt es 16 verschiedene Punktesummen.

5. Fünf identische Messbecher sind mit Wasser gefüllt. Vier davon enthalten jeweils genau gleich viel Wasser. Welcher Messbecher enthält eine andere Menge?



(A) **(B)** (C) (D) (E)

Bei Messbecher A steht das Wasser auf Höhe der sechsten Markierung. Bei den schräg stehenden Bechern ergibt sich die Höhe, wenn man den Becher aufrecht stellt, als Mittelwert der rechten und linken Markierung. Bei C, D und E ist das bei der sechsten Markierung. Bei B steht das Wasser links bis zur neunten Markierung und rechts bis zur vierten Markierung. Der Mittelwert ist daher größer als sechs. B enthält daher mehr Wasser als die anderen Becher.

6. Ein Park hat fünf Zugänge. Monika möchte durch einen Zugang den Park betreten und durch einen anderen Zugang wieder verlassen. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie den Park betreten und verlassen?

(A) 25 **(B) 20** (C) 16 (D) 15 (E) 10

Unabhängig davon durch welchen der 5 Zugänge Monika den Park betritt, hat sie 4 Wahlmöglichkeiten für den Zugang, durch den sie den Park verlässt. Damit gibt es $5 \cdot 4$ Arten, wie sie den Park betreten und verlassen kann.

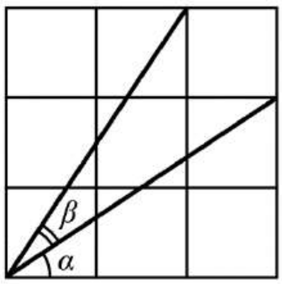
7. Die Masse (in kg) dreier Kängurus ist jeweils eine andere ganze Zahl. Zusammen wiegen sie 97 kg. Wie viel kann das leichteste von ihnen höchstens wiegen?

(A) 1 (B) 30 **(C) 31** (D) 32 (E) 33

Das leichteste Känguru kann nicht mehr wiegen als der Mittelwert aller drei Kängurus, also nicht mehr als 32 1/3 kg. Wiegt das leichteste Känguru 32 kg, dann wiegt das zweite 33 kg und das dritte 34 kg. Das ergibt eine zu große Summe von 99 kg. Daher kann das leichteste Känguru höchstens 31 kg wiegen. Wenn das zweite Känguru 32 kg, das dritte 34 kg wiegt sind alle Voraussetzungen erfüllt.

8. Welche der folgenden Aussagen trifft sicher auf die markierten Winkel in der gegebenen aus neun Quadraten zusammengesetzten Figur zu?

(A) $\alpha = \beta$ **(B)** $\boldsymbol{2\alpha + \beta = 90°}$ (C) $\alpha + \beta = 60°$ (D) $2\beta + \alpha = 90°$ (E) $\alpha + \beta = 45°$



Die eingezeichneten Strecken zerlegen das große Quadrat in ein Deltoid und zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlängen 2 und 3. Damit zerlegen die Strecken rechten Winkel in der linken unteren Ecke des Quadrats in die Winkel α, β und noch einmal α, und es gilt $2\alpha + \beta = 90°$.

9. Im Inneren eines Einheitsquadrats wurde ein gewisser Bereich schwarz bemalt. In welchem Quadrat ist der schwarze Teil am größten?

(A) (B) (C) (D) (E)

Durch Einzeichnen von senkrechten Linien durch die Spitzen der Dreiecke wird jede der Figuren B, C, D, E vollständig in Rechtecke zerlegt, die je zur Hälfte schwarz gefärbt sind, d.h. die Figuren sind jeweils als Ganze zur Hälfte schwarz gefärbt. Nur in Figur A gibt es ein vollständig schwarz gefärbtes Teilrechteck. Daher ist der schwarze Teil in Figur A am größten.

10. Julia liest ein Buch, in dem alle Seiten nummeriert sind. Die Ziffer 0 wird sechs Mal und die Ziffer 8 sieben Mal verwendet. Wie lautet die Seitenzahl der letzten Seite?

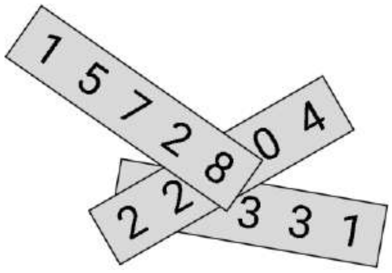
(A) 58 **(B) 68** (C) 70 (D) 78 (E) 98

In den Seitenzahlen kommt die Ziffer „0" genau sechs Mal (nämlich ausschließlich als Einerziffer) vor. Daher ist die gesuchte Seitenzahl mindestens 60 aber kleiner als 70. Bei der einzig verbliebenen möglichen Seitenzahl 68 kommt die Ziffer 8 tatsächlich siebenmal in einer Seitennummer vor (8, 18, 28,…, 68).

4 Punkte Beispiele

11. Auf drei Papierstreifen wurde jeweils wie abgebildet eine fünfziffrige Zahl geschrieben. Drei der Ziffern sind im Bild verdeckt. Die Summe der drei Zahlen ist 57263. Wie lauten die verdeckten Ziffern?

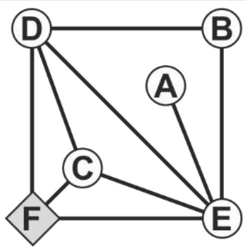
(A) 0, 2 und 2 **(B) 1, 2 und 9** (C) 2, 4 und 9 (D) 2, 7 und 8 (E) 5, 7 und 8



1	5	7	2	8
2	2	**2**	0	4
1	**9**	3	3	1
5	7	2	6	3

12. Anna, Bella, Claire, Dora, Erika und Frieda treffen sich auf einer Party. Je zwei von ihnen, die einander kennen, geben einander genau einmal die Hand. Anna gibt nur einmal die Hand, Bella zwei Mal, Claire drei Mal, Dora vier Mal und Erika fünf Mal. Wie vielen Personen gibt Frieda die Hand?

(A) 1 (B) 2 **(C) 3** (D) 4 (E) 5

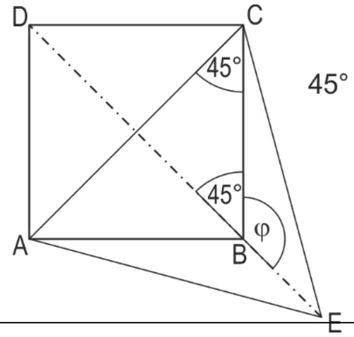


Erika, die jeder der anderen fünf die Hand schüttelt, ist die einzige, der Anna die Hand gibt. Daher gibt Dora allen außer Anna die Hand, d.h. die beiden, denen Bella die Hand schüttelt sind Dora und Erika. Folglich gibt Claire weder Anna noch Bella die Hand, was bedeutet, dass Claire neben Dora und Erika auch Frieda die Hand schüttelt. Somit gibt Frieda Claire, Dora und Erika die Hand, nicht aber Anna und Bella.

13. In einem Quadrat *ABCD* sind die Eckpunkte gegen den Uhrzeigersinn beschriftet. *A* und *C* sind Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks *AEC*, dessen Eckpunkte ebenfalls gegen den Uhrzeigersinn beschriftet sind. Wie groß ist der Winkel *EBC*?

(A) 30° (B) 45° **(C) 135°** (D) 145° (E) 150°

Der gesuchte Winkel ergänzt den Winkel CBD = 45°, den die Quadratseite BC mit der Quadratdiagonale BD einschließt, auf 180°. Er beträgt daher 135°.



14. Die Zahlen a, b, c und d sind paarweise verschiedene positive ganze Zahlen aus dem Bereich von 1 bis 10. Was ist der kleinstmögliche Wert des Ausdrucks $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

(A) $\frac{2}{10}$ (B) $\frac{3}{19}$ **(C) $\frac{14}{45}$** (D) $\frac{29}{90}$ (E) $\frac{25}{72}$

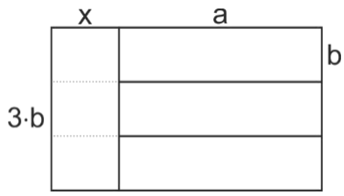
Es ist offensichtlich, dass 1 und 2 als Zähler, 9 und 10 als Nenner der Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zu wählen sind.

Wegen $\frac{1}{9}+\frac{2}{10}=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}<\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{2}{9}+\frac{1}{10}$ ist $\frac{1}{9}+\frac{2}{10}=\frac{28}{90}=\frac{14}{45}$ der kleinste Wert, den der Ausdruck $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ unter den gegebenen Voraussetzungen annehmen kann.

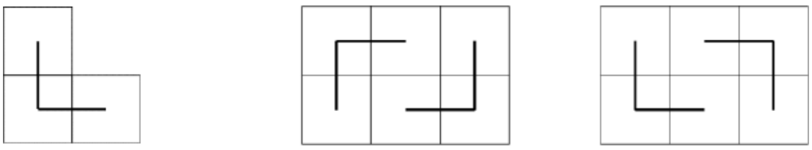
15. Die Flagge von Kanguria ist ein Rechteck, dessen Seitenlängen zueinander im Verhältnis 3: 5 stehen. Die Flagge ist, wie in der Abbildung zu sehen, in vier flächengleiche Rechtecke unterteilt. In welchem Verhältnis stehen die Seiten längen des weißen Rechtecks?

(A) 1 : 3 (B) 1 : 4 (C) 2 : 7 (D) 3 : 10 **(E) 4 : 15**

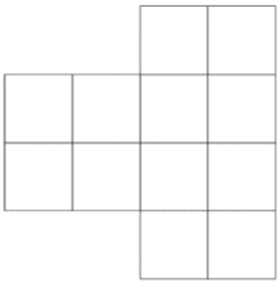
Weil die vier Teilrechtecke flächengleich sind, gilt $a \cdot b = x \cdot 3b$, also $x = \frac{a}{3}$. Das Verhältnis der Seitenlängen der Flagge ergibt damit $3b : \frac{4a}{3}$ = 3 : 5, also $b : a = 4 : 15$.



16. Ein 3 × 2 Rechteck kann wie abgebildet auf zwei Arten von zwei der abgebildeten L-förmigen Figuren überdeckt werden:

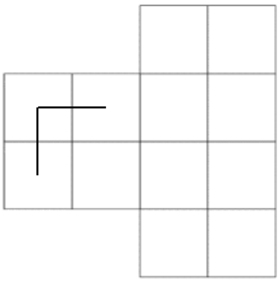
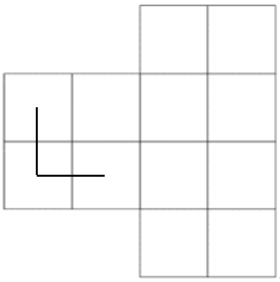


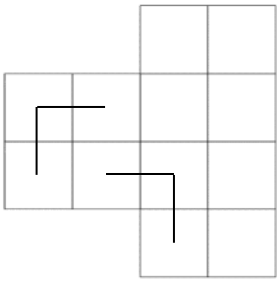
Auf wie viele Arten kann die rechts abgebildete Figur durch die L-förmigen Figuren überdeckt werden?

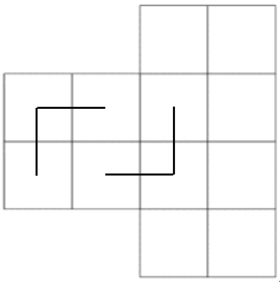
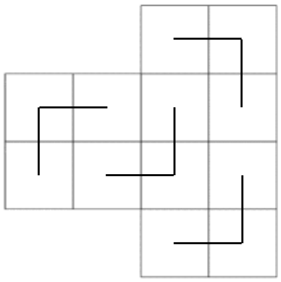


(A) 1 **(B) 2** (C) 3 (D) 4 (E) 48

Es ist klar, dass im linken Teil eine L-förmige Figur auf eine der beiden Arten liegen muss:

 oder . Diese Arten gehen durch Spiegelung ineinander über. Daher reicht es, eine weiter zu verfolgen.

Im linken 2x2-Quadrat ist noch ein kleines Quadrat frei. Die Variante  führt zu keiner Lösung, da keine L-förmige Figur mehr das rechte untere Quadrat überdecken kann.

Bleibt noch die Variante , die genau eine Lösung liefert: .

Durch Spiegelung erhalten wir eine zweite Lösung.

17. Ein Triathlon besteht aus den drei Bewerben Schwimmen, Laufen und Radfahren. Die Radfahrstrecke beträgt drei Viertel der Gesamtdistanz, die Laufstrecke beträgt ein Fünftel der Gesamtdistanz und die Schwimmstrecke ist 2 km lang. Wie lang ist die Gesamtdistanz des Triathlons in km?

(A) 10 (B) 20 (C) 38 **(D) 40** (E) 60

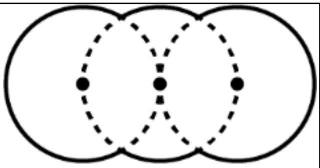
Ist die Gesamtdistanz des Triathlons (in km) gleich x, dann ist die Länge der Radstrecke $\frac{3}{4}x$, die Länge der Laufstrecke $\frac{1}{5}x$ und die Länge der Schwimmstrecke $x - \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}x = \frac{1}{20}x = 2$. Daraus folgt $x = 40$.

18. Eine 1-Liter-Flasche Sirup ist noch halb voll. Der Sirup soll im Verhältnis $1:7$ zu Saft verdünnt werden. Welchen Bruchteil dieses Sirups muss man verwenden, um 2 Liter Saft zu erhalten?

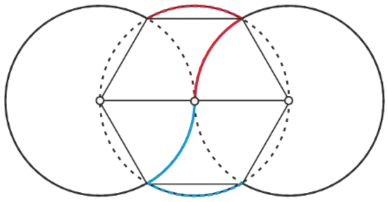
(A) $\frac{1}{4}$ **(B) $\frac{1}{2}$** (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{4}{7}$ (E) den gesamten Sirup

Um 2 Liter Saft zu erhalten, benötigt man $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ Liter Sirup. Die 1-Liter-Flasche ist noch halb voll, enthält also $\frac{1}{2}$ Liter Sirup. Man muss davon die Hälfte verwenden.

19. Die gegebene Figur setzt sich aus drei Kreisen mit gleichem Radius R zusammen. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einer gemeinsamen Geraden, wobei der mittlere Kreis durch die Mittelpunkte der anderen beiden Kreise geht (siehe Abbildung). Wie groß ist der Umfang der Figur?



(A) $\mathbf{\frac{10\pi R}{3}}$ (B) $\frac{5\pi R}{3}$ (C) $\frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ (D) $2\pi\, R\sqrt{3}$ (E) $4\pi\, R$



Die rot und blau markierten Kreisbögen sind je genau ein Sechstel eines Kreises. Der Umfang setzt sich damit zusammen aus 2 Kreisen, wobei zweimal so ein Kreisbogen fehlt.

Der Umfang ist daher $2\pi R \cdot \left(2 - \frac{2}{6}\right) = 2\pi R \cdot \frac{5}{3} = \frac{10\pi R}{3}$.

20. Die Summe der sieben Ziffern einer siebenstelligen Telefonnummer $aaabbbb$ ist die zweistellige Zahl ab. Wie groß ist der Wert der Summe $a + b$?

(A) 8 (B) 9 **(C) 10** (D) 11 (E) 12

Der Wert der zweistelligen Zahl ab (also der Zahl mit Zehnerziffer a und Einerziffer b) ist $10a + b$. Daraus folgt, dass $3a + 4b = 10a + b,\ \ 7a = 3b$ und somit (wegen $a, b < 10$) $a = 3,\ \ b = 7,\ \ a + b = 10$.

– 5 Punkte Beispiele –

21. Löscht man von einer zweiziffrigen Zahl eine der beiden Ziffern, so ist in beiden Fällen die resultierende Zahl ein Teiler der ursprünglichen Zahl. Wie viele zweiziffrige Zahlen haben diese Eigenschaft?

(A) 5 (B) 9 **(C) 14** (D) 19 (E) 23

Offensichtlich ist keine der Ziffern 0. Betrachten wir nun die zweiziffrige Zahl 10a+b (mit a und b ganze Zahlen zwischen 1 und 9). Es soll nun gelten a|(10a+b) und b|(10a+b). Da a|10a folgt, dass a|b gelten muss. Und aus b|b folgt, dass b|10a gelten muss. Daher kann b=a, b=2a (für a<5) oder b=5a (für a<2) sein.

Das liefert die zweiziffrigen Zahlen 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 und 99.

22. Insgesamt 60 Äpfel und 60 Birnen werden auf mehrere Schachteln verteilt. In jeder Schachtel sollen sich gleich viele Äpfel befinden, aber keine zwei Schachteln sollen gleich viele Birnen enthalten. Jede Schachtel enthält beide Obstsorten. Höchstens wie viele Schachteln können auf diese Art gepackt werden?

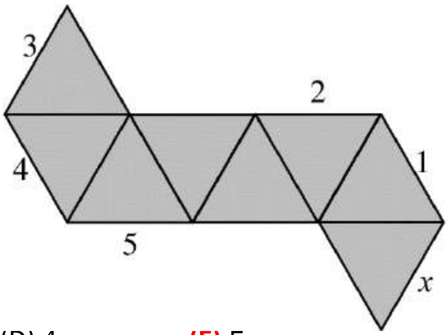
(A) 20 (B) 15 (C) 12 **(D) 10** (E) 6

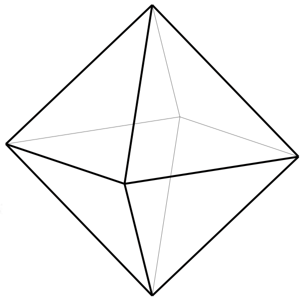
Die Anzahl an Schachteln, die so gepackt werden können, muss ein Teiler von 60 sein, um die 60 Äpfel gleichmäßig aufteilen zu können.

Wenn n Schachteln gepackt werden, benötigt man dafür mindestens $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Birnen, da sonst in zumindest zwei Schachteln gleich viele Birnen wären. Da nur 60 Birnen zur Verfügung stehen, gilt $\frac{n(n+1)}{2} \leq 60$ und daher $n \leq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{481}{4}} < 11$.

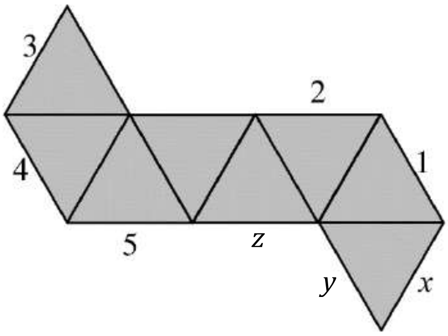
Der größtmögliche Teiler von 60, der kleiner als 11 ist, ist 10.

23. Im Bild ist das Netz eines Oktaeders zu sehen. Welche Kante fällt mit der mit x gekennzeichneten Kante zusammen, wenn das Netz zum Oktaeder gefaltet wird?





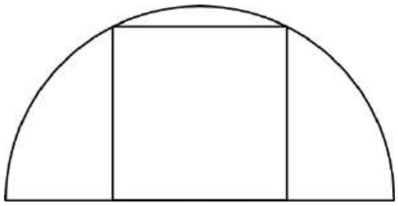
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 **(E) 5**



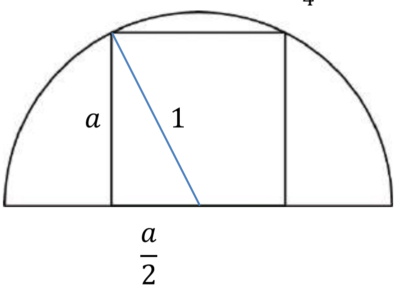
Die Kanten y und z fallen zusammen. Dann fallen die Kanten 5 und x zusammen.

24. Zwei Eckpunkte eines Quadrats liegen wie abgebildet auf einem Halbkreis, während die beiden anderen auf seinem Durchmesser liegen. Der Radius des Kreises ist 1 cm. Wie groß ist die Fläche des Quadrats?

(A) $\frac{4}{5}$ cm² (B) $\frac{\pi}{4}$ cm² (C) 1 cm² (D) $\frac{4}{3}$ cm² (E) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm²



Die Verbindung eines Eckpunktes am Kreis mit dem Mittelpunkt des Kreises ist 1 cm. Für die Seitenlänge a des Quadrats gilt dann $a^2 + \frac{a^2}{4} = 1$ cm² und somit $a^2 = \frac{4}{5}$ cm².



25. Zwei Punkte sind auf einer um ihren Mittelpunkt rotierenden Kreisscheibe markiert. Der äußere Punkt ist um 3 cm weiter vom Mittelpunkt entfernt als der innere Punkt und er bewegt sich 2,5 Mal so schnell ist wie der innere Punkt. Wie groß ist der Abstand des äußeren Punktes vom Mittelpunkt der Kreisscheibe?

(A) 10 cm (B) 9 cm (C) 8 cm (D) 6 cm **(E) 5 cm**

Wenn r der Abstand des inneren Punktes vom Mittelpunkt ist und Rder Abstand des äußeren Punktes, dann gilt $r = R - 3\ cm$.

Da sich der Punkt 2,5 Mal so schnell bewegt, ist der Umfang seiner Kreisbahn (und damit auch der Radius) 2,5 Mal so lang. Es gilt daher $2{,}5 \cdot r = R$ und daher $R - 3\ cm = \frac{R}{2{,}5}$, folglich $R = 5\ cm$.

26. Die ganzen Zahlen von 1 bis 99 werden in aufsteigender Reihenfolge ohne Zwischenraum angeschrieben. Diese Ziffernfolge wird in Tripel (Dreiergruppen) unterteilt:
$123456789101112 \cdots 979899 \longrightarrow (123)(456)(789)(101)(112) \cdots (979)(899)$.
Welches der folgenden Tripel erhält man nicht?

(A) (222) **(B) (444)** (C) (464) (D) (646) (E) (888)

Nach den einstelligen Zahlen bilden je drei zweistellige Zahlen a, $a+1$, $a+2$ (mit $3|a+2$) zwei Tripel.

Aus $3|24$ folgt daher, dass die beiden Tripel (222) und (324) existieren. Ebenso existiert (464) wegen $3|48$, (646) wegen $3|66$ und (888) wegen $3|90$.

Drei Mal die Ziffer 4 taucht nur an der Stelle $41\ 42\ 43\ 44\ 45$ auf. Da $3|45$, werden aber die Tripel folgendermaßen gebildet: … $4)(142)(434)(445)$ … und (444) erhält man daher nicht als Tripel.

27. Wie viele Ebenen existieren, die durch genau drei Eckpunkte eines gegebenen Würfels gehen?

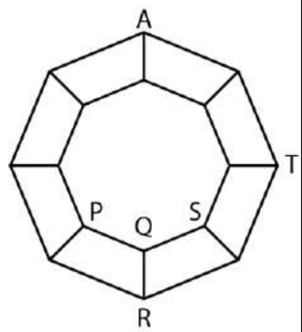
(A) 2 (B) 4 (C) 6 **(D) 8** (E) 10

Wenn man zwei Eckpunkte auswählt, die durch eine Kante des Würfels verbunden sind, so kann man keinen dritten Eckpunkt dazu wählen, sodass kein vierter Eckpunkt in der Ebene dieser drei Punkte liegt. Ebenso kann zu zwei Eckpunkten, die auf der gleichen Raumdiagonale des Würfels liegen, kein dritter Eckpunkt gewählt werden, sodass kein vierter Eckpunkt in der Ebene dieser drei Punkte liegt.

Man benötigt also drei Punkte, von denen je zwei auf einer gemeinsamen Seitendiagonale des Würfels liegen. Wählt man einen der acht Eckpunkte, und dazu zwei der drei Eckpunkte, die mit diesem auf einer gemeinsamen Seitendiagonale liegen, so bilden diese drei Punkte eine gesuchte Ebene. Da jeweils einer der drei Eckpunkte, die mit dem ersten auf einer gemeinsamen Seitendiagonale liegen, nicht gewählt wird, liegt jeder Eckpunkt in drei der gesuchten Ebenen.

Wir zählen also für alle acht Eckpunkte je drei Ebenen. Dabei zählen wir jede Ebene drei Mal (ein Mal für jeden der drei Punkte). Es gibt also $\frac{8\cdot 3}{3} = 8$ solche Ebenen.

28. Ein Graph besteht aus 16 Punkten und einigen Verbindungsstrecken, wie im Bild zu sehen ist. Eine Ameise befindet sich im Punkt A. Mit jedem Zug kann sich die Ameise vom Punkt, in dem sie sich befindet, längs einer Verbindungsstrecke zu einem benachbarten Punkt bewegen.
In welchem der Punkte P, Q, R, S und T kann sich die Ameise nach 2019 Zügen befinden?



(A) nur in P, R oder S, nicht Q oder T (B) nur in P, R, S oder T, nicht in Q
(C) nur in Q (D) nur in T (E) in allen Punkten

Jeder Kreis (Rundweg) in dem Graphen besteht aus einer geraden Anzahl an Kanten. Teilt man einen Kreis in zwei Abschnitte, so haben die Längen beider Abschnitte die gleiche Parität (also entweder haben beide gerade Länge oder beide ungerade Läge).

Zwei Wege zwischen zwei Punkten X und Y können sich in zwei Punkten voneinander unterscheiden:

- Ein Weg verwendet einen Kreis öfter als der andere.
- Ein Weg verwendet in einem Kreis genau den Abschnitt, den der andere nicht verwendet.

Beides verändert nicht die Parität der Länge des Weges. Folglich haben die Längen aller Wege zwischen zwei Punkten X und Y die gleiche Parität.

Es gibt einen Weg von A nach T in zwei Schritten, also mit gerader Länge. Von A nach S und von A nach P gibt es je einen Weg der Länge vier, von A nach R einen Weg der Länge sechs. Es gibt also keinen Weg mit 2019 Schritten von A nach P, R, S oder T.

Von A nach Q gibt es einen Weg der Länge fünf. Von Q kann die Ameise noch $\frac{2008}{4} = 502$ Mal einen Kreis der Länge vier und einmal einen Kreis der Länge sechs gehen und befindet sich somit nach $5 + 502 \cdot 4 + 6 = 2019$ Schritten in Q.

29. Die Zahlen a, b und c sind dreistellig, und in jeder Zahl ist die erste Ziffer gleich der letzten. Weiters gilt $b = 2a + 1$ und $c = 2b + 1$. Wie viele mögliche Werte gibt es für die Zahl a?

(A) 0 (B) 1 **(C) 2** (D) 3 (E) mehr als 3

Wäre die mittlere Ziffer von a kleiner oder gleich 4, dann wäre in 2a die Einerziffer gleich der Hunderterziffer, also würde 2a+1 nicht die geforderte Form haben. Daher muss die mittlere Ziffer mindestens 5 sein.

Wäre die erste und dritte Ziffer von a größer oder gleich 2, dann wäre a ≥ 250, demnach b = 2a + 1 ≥ 501 und c = 2b+1 ≥ 1003, ein Widerspruch zur Dreistelligkeit.

Daher ist die erste und letzte Ziffer von a gleich 1. Auch bei b muss mit derselben Überlegung die mittlere Ziffer mindestens 5 sein. Das ist nur dann erfüllt, wenn die mittlere Ziffer von a gleich 8 oder 9 ist.

Tatsächlich liefern beide Fälle Lösungen für (a, b, c), nämlich (181, 363, 727) und (191, 383, 767)

30. Wie viele Elemente müssen aus der Menge $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ mindestens entnommen werden, damit das Produkt der in der Menge verbleibenden Elemente eine Quadratzahl ist?

(A) 1 **(B) 2** (C) 3 (D) 4 (E) 5

Eine Zahl ist genau dann eine Quadratzahl, wenn jeder der Primfaktoren mit gerader Potenz in der Primfaktorzerlegung vorkommt.

Das Produkt aller Elemente der Menge ist $10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 70 \cdot 80 \cdot 90 = 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5^{10} \cdot 7^1$. Der Faktor 7 kommt genau dann mit gerader Potenz im Produkt der verbleibenden Elemente der Menge vor, wenn wir die Zahl 70 entnehmen. Es muss also in jedem Fall die 70 entnommen werden.

Dadurch reduziert sich das Produkt auf $2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5^9 \cdot 7^0$. Nun sind die Potenzen der Faktoren 2 und 5 ungerade. Wenn nun ein Element der Menge gefunden wird, in deren Primfaktorzerlegung die Faktoren 2 und 5 mit ungerader, der Faktor 3 mit gerader Potenz vorkommen und dieses entnommen wird, so bleibt als Produkt der verbleibenden Elemente eine Quadratzahl.

Solche Elemente der Menge sind $10 = 2^1 \cdot 5^1$, $40 = 2^3 \cdot 5^1$, $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Wenn also zum Beispiel die Elemente 70 und 90 aus der Menge entnommen werden, so ist das Produkt der verbleibenden Zahlen $10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60 \cdot 80 = 2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5^8 \cdot 7^0 = (2^7 \cdot 3 \cdot 5^4)^2 = 240000^2$ eine Quadratzahl.

Es müssen somit mindestens 2 Elemente entnommen werden!

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Kategorie: Student, Schulstufe: 11. – 13.

Vor- und Zuname:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

☐Ich stimme zu, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

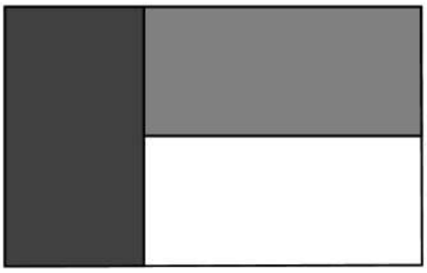
Ort, Datum Unterschrift

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2019
Gruppe Student (11., 12. und 13. Schulstufe)
Österreich – 21. 3. 2019

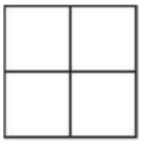
- 3 Punkte Beispiele -

1. Die Flagge von Kangoraland ist ein Rechteck, welches wie abgebildet in drei gleiche Rechtecke unterteilt ist. Wie groß ist das Seitenverhältnis des weißen Rechtecks?



(A) $1:2$ (B) $2:3$ (C) $2:5$ (D) $3:7$ (E) $4:9$

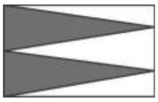
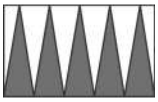
2. Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 werden in verschiedene Felder der abgebildeten



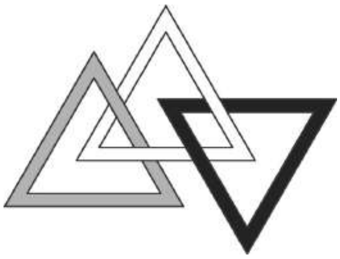
2×2 Tabelle eingetragen. Danach werden die Summen der Zahlen in jeder Zeile und jeder Spalte bestimmt. Zwei dieser Summen sind 4 und 5. Wie groß sind die übrigen beiden Summen?

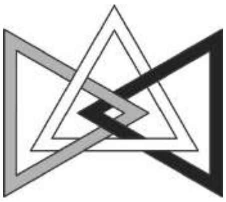
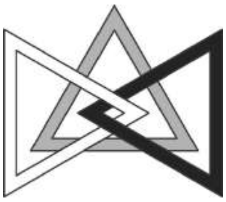
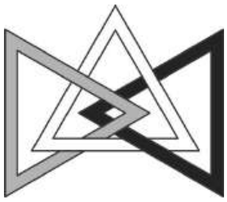
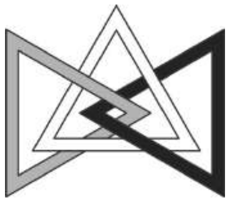
(A) 6 und 6 (B) 3 und 5 (C) 4 und 5 (D) 4 und 6 (E) 5 und 6

3. Ein Rechteck wurde wie abgebildet auf fünf verschiedene Arten angemalt. In welchem Bild ist der graue Bereich am größten?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Drei Dreiecke sind wie abgebildet miteinander verbunden. In welchem der folgenden Bilder sind die drei Dreiecke auf dieselbe Art verbunden?

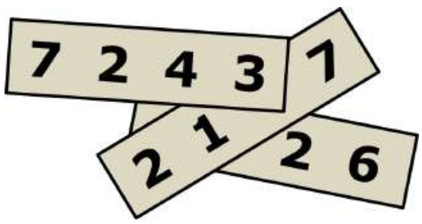


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Eine Pyramide hat 23 dreieckige Seitenflächen. Wie viele Kanten hat diese Pyramide?

(A) 23 (B) 24 (C) 46 (D) 48 (E) 69

6. Drei vierziffrige Zahlen werden wie abgebildet auf drei Papierstreifen geschrieben. Die Summe der drei Zahlen ist 11126. Drei der Ziffern sind im Bild verdeckt. Wie lauten die drei verdeckten Ziffern?



(A) 1, 4 und 7 (B) 1, 5 und 7 (C) 3, 3 und 3 (D) 4, 5 und 6 (E) 4, 5 und 7

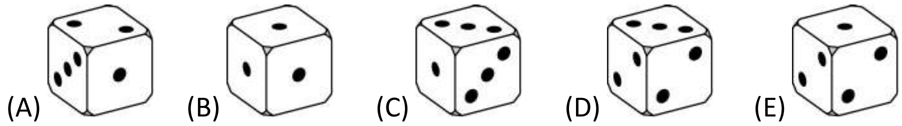
7. Was ist, von links gelesen, die erste Ziffer der kleinsten positiven ganzen Zahl mit der Ziffernsumme 2019?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. Wie viele der Zahlen von 2^{10} bis 2^{13} (inklusive dieser beiden Zahlen) sind durch 2^{10} teilbar?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

9. Jede Seitenfläche eines Würfels wird so mit entweder 1, 2 oder 3 Punkten markiert, dass die Wahrscheinlichkeit eine 1 zu würfeln gleich $\frac{1}{2}$ ist, die Wahrscheinlichkeit eine 2 zu würfeln gleich $\frac{1}{3}$ ist, und die Wahrscheinlichkeit eine 3 zu würfeln gleich $\frac{1}{6}$ ist. Welches der folgenden Bilder kann nicht eine Ansicht dieses Würfels sein?



10. Die drei Kängurus Alex, Bob und Carl gehen täglich spazieren. Wenn Alex keinen Hut trägt, trägt Bob einen Hut. Wenn Bob keinen Hut trägt, trägt Carl einen Hut. Heute trägt Carl keinen Hut. Über welche der Kängurus kann man mit Sicherheit sagen, dass sie heute einen Hut tragen?

(A) nur über Alex und Bob (B) nur über Alex (C) über Alex, Bob und Carl

(D) weder über Alex noch über Bob (E) nur über Bob

- 4 Punkte Beispiele -

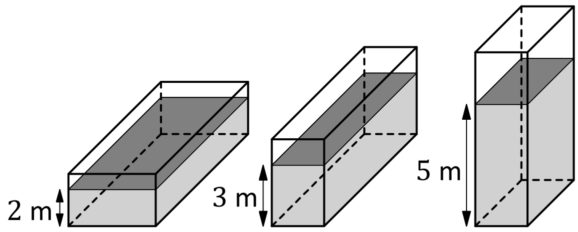
11. Welche ist die höchste Dreierpotenz, die die Zahl $7! + 8! + 9!$ teilt?
(Hinweis: Der Ausdruck n! ist definiert durch $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.)

(A) 3^2 (B) 3^4 (C) 3^5 (D) 3^6 (E) eine Dreierpotenz größer als 3^6

12. In diesem Schuljahr ist die Anzahl der Burschen in meiner Klasse gegenüber dem Vorjahr um 20% gestiegen und die Anzahl der Mädchen um 20% gefallen. In der Klasse ist jetzt um eine Person mehr als zuvor. Welche der folgenden Zahlen könnte die derzeitige Anzahl der Personen in meiner Klasse sein?

(A) 22 (B) 26 (C) 29 (D) 31 (E) 34

13. Ein quaderförmiger Behälter, der nicht zur Gänze gefüllt ist, enthält 120 m³ Wasser. Die Wassertiefe beträgt entweder 2 m oder 3 m oder 5 m, je nachdem auf welcher Seite der Behälter gerade steht (Zeichnung nicht im Maßstab). Wie groß ist das Volumen des Behälters?



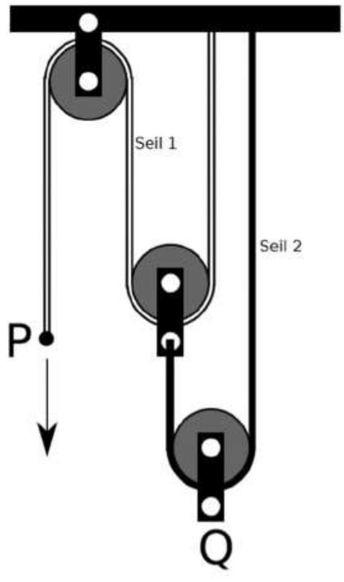
(A) 160 m³ (B) 180 m³ (C) 200 m³ (D) 220 m³ (E) 240 m³

14. Michael erfindet eine neue Operation „⋄" für reelle Zahlen, die durch $x \diamond y = y - x$ definiert ist. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig, wenn die Zahlen a, b, und c die Bedingung $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ erfüllen?

(A) $a = b$ (B) $b = c$ (C) $a = c$ (D) $a = 0$ (E) $c = 0$

15. Das abgebildete System besteht aus drei Umlenkrollen, die durch zwei Seile miteinander verbunden sind. Das Ende P des einen Seils wird um 24 Zentimeter nach unten gezogen. Wie viele Zentimeter bewegt sich der Punkt Q hinauf?

(A) 24 (B) 12 (C) 8 (D) 6 (E) $\frac{24}{5}$



16. Eine positive ganze Zahl n heißt gut, wenn ihr größter Teiler (außer n selbst) gleich $n - 6$ ist. Wie viele gute positive ganze Zahlen gibt es?

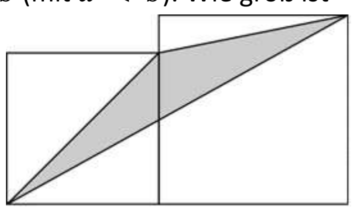
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) unendlich viele

17. In einer Schachtel befinden sich fünf Kugeln. Vier davon enthalten Schokolade und eine davon enthält ein Fruchtbonbon. Johann und Maria ziehen abwechselnd je eine Kugel aus der Schachtel, ohne sie zurückzulegen. Wer das Fruchtbonbon zieht, gewinnt. Johann zieht zuerst. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maria gewinnt?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

18. In der Abbildung sehen wir zwei angrenzende Quadrate mit den Seitenlängen a und b (mit $a < b$). Wie groß ist die Fläche des grauen Dreiecks?

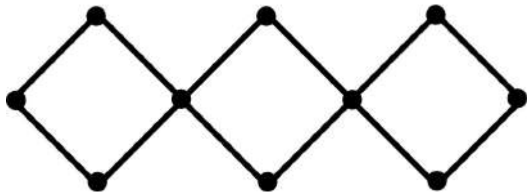
(A) $\sqrt{ab}$ (B) $\frac{1}{2}a^2$ (C) $\frac{1}{2}b^2$ (D) $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ (E) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$



19. Was ist die größte ganze Zahl, die kleiner als $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}}$ ist?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 20 (E) 25

20. Die Knotenpunkte des abgebildeten Stangengeflechts sind mit den Zahlen 1 bis 10 beschriftet. Die Summen S der Zahlen in den vier Eckpunkten jedes Quadrats sind alle gleich. Was ist der kleinstmögliche Wert von S?



(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

- 5 Punkte Beispiele -

21. Es sei a die Summe aller positiven Teiler von 1024 und b das Produkt aller positiven Teiler von 1024. (Hinweis: 1 und 1024 sind auch Teiler von 1024.) Dann gilt

(A) $(a-1)^5=b$ (B) $(a+1)^5=b$ (C) $a^5=b$ (D) $a^5-1=b$ (E) $a^5+1=b$

22. Wie lautet die Menge aller Parameter a, für welche die Gleichung $2-|x|=ax$ genau zwei Lösungen besitzt?

(A) $(-\infty;-1]$ (B) $(-1;1)$ (C) $[1;+\infty)$ (D) $\{0\}$ (E) $\{-1;1\}$

23. Um das Ergebnis der Rechnung $\frac{a+b}{c}$ zu bestimmen (a, b und c sind positive ganze Zahlen), tippt Sara in einen Taschenrechner $a+b\div c=$ und erhält das Ergebnis 11. Sie tippt dann $b+a\div c=$ und wundert sich darüber, dass das Ergebnis nun 14 ist. Sie stellt fest, dass der Taschenrechner gemäß den Vorrangregeln Divisionen vor Additionen ausführt. Wie groß ist das tatsächliche Ergebnis der Rechnung $\frac{a+b}{c}$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24. Gegeben ist ein Würfel. Wie viele Ebenen gibt es, die mindestens drei Eckpunkte dieses Würfels enthalten?

(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

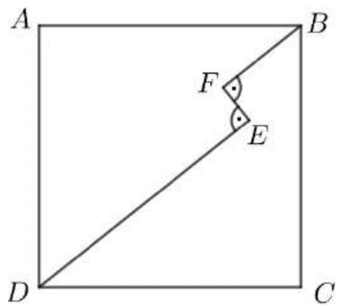
25. Vier verschiedene Geraden gehen durch den Koordinatenursprung. Diese schneiden die Parabel $y=x^2-2$ in acht Punkten. Was kann das Produkt der x-Koordinaten dieser acht Punkte sein?

(A) nur 16 (B) nur -16 (C) nur 8 (D) nur -8 (E) Es gibt mehr als einen möglichen Wert.

26. Für wie viele ganze Zahlen n ist $|n^2-2n-3|$ eine Primzahl?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) unendlich viele

27. Ein Weg $DEFB$ mit $DE\perp EF$ und $EF\perp FB$ liegt wie abgebildet im Inneren des Quadrats $ABCD$. Es ist gegeben, dass $DE=5$, $EF=1$ und $FB=2$ gilt. Wie groß ist die Seitenlänge des Quadrats?

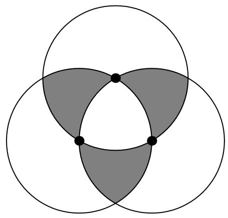


(A) $3\sqrt{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $5\sqrt{2}$ (E) ein anderer Wert

28. Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beginnt mit $a_1=49$. Für $n\geq 1$ erhält man das Folgenglied a_{n+1} indem man 1 zur Ziffernsumme von a_n addiert und dieses Ergebnis quadriert. So gilt dann z.B. $a_2=(4+9+1)^2=196$. Bestimme a_{2019}.

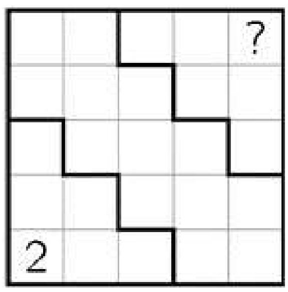
(A) 121 (B) 25 (C) 64 (D) 400 (E) 49

29. Drei Kreise mit dem Radius 2 werden so gezeichnet, dass jeweils einer der Schnittpunkte von zwei Kreisen wie abgebildet mit dem Mittelpunkt des dritten Kreises übereinstimmt. Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Bereichs?



(A) π (B) 3π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 2π (E) 4π

30. Im abgebildeten quadratischen Raster sollen Zahlen so eingetragen werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jede der Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 genau einmal vorkommt. Darüber hinaus soll die Summe der Zahlen in den drei stark umgrenzten Bereichen jeweils gleich sein. Welche Zahl muss in das obere rechte Feld geschrieben werden?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2019
21. 3. 2019

Level: Student, Grade: 11–13

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
each correct answer to questions 1. – 10.: 3 points
each correct answer to questions 11. – 20.: 4 points
each correct answer to questions 21. – 30.: 5 points
each question left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

☐Ich stimme zu, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

Ort, Datum — Unterschrift

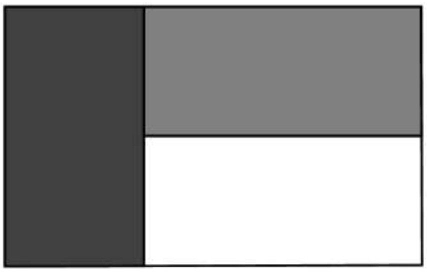
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2019
Level Student (Schulstufe 11, 12 and 13)
Austria – 21. 3. 2019

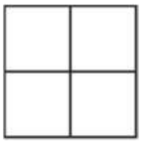
- 3 Point Examples -

1. The flag of Kangoraland is a rectangle which is split into three equal rectangles as shown.
How big is the ratio of the side lengths of the white rectangle?

(A) $1:2$ (B) $2:3$ (C) $2:5$ (D) $3:7$ (E) $4:9$

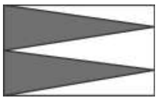
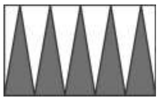


2. The numbers 1, 2, 3 and 4 are inserted into different cells of the 2×2 table shown. Then the sums of the numbers in each row and column are determined. Two of these sums are 4 and 5. How big are the two remaining sums?

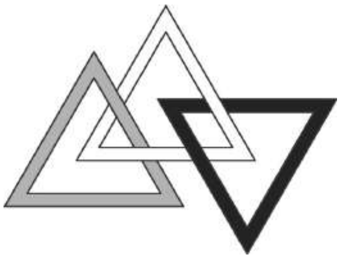


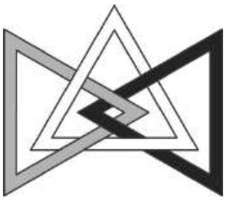
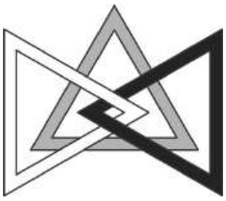
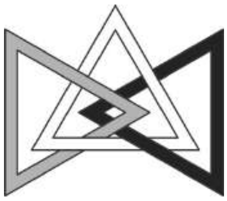
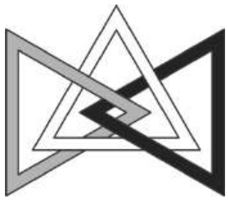
(A) 6 and 6 (B) 3 and 5 (C) 4 and 5 (D) 4 and 6 (E) 5 and 6

3. A rectangle is coloured in five different ways as shown. In which picture is the grey area biggest?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Three triangles are connected to each other as shown. In which of the following pictures are the three triangles connected in the same way?



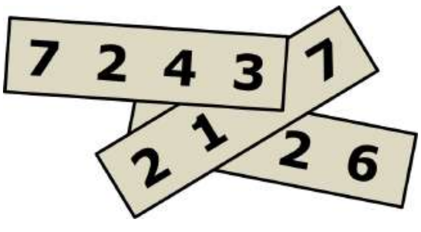
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. A pyramid has 23 triangular faces. How many edges does this pyramid have?

(A) 23 (B) 24 (C) 46 (D) 48 (E) 69

6. Three four-digit numbers are written onto three separate pieces of paper as shown. The sum of the three numbers is 11126. Three of the digits in the picture are hidden. Which are the three hidden digits?

(A) 1, 4 and 7 (B) 1, 5 and 7 (C) 3, 3 and 3 (D) 4, 5 and 6 (E) 4, 5 and 7



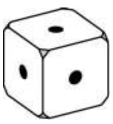
7. Reading from the left, what is the first digit of the smallest positive integer whose digit sum is 2019?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

8. How many of the numbers from 2^{10} to 2^{13} (including these two numbers) are divisible by 2^{10}?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

9. Each side of a die is marked with either 1, 2 or 3 dots so that the probability of rolling a 1 is equal to $\frac{1}{2}$, the probability of rolling a 2 is equal to $\frac{1}{3}$ and the probability of rolling a 3 is equal to $\frac{1}{6}$.
Which of these pictures cannot be a picture of this particular die?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Every day the three kangaroos Alex, Bob and Carl go for a walk. If Alex does not wear a hat, Bob wears a hat. If Bob does not wear a hat, Carl wears a hat. Today Carl does not wear a hat. Which kangaroos can one say for sure are wearing a hat today?

(A) only Alex and Bob (B) only Alex (C) Alex, Bob and Carl

(D) neither Alex nor Bob (E) only Bob

- 4 Point Examples -

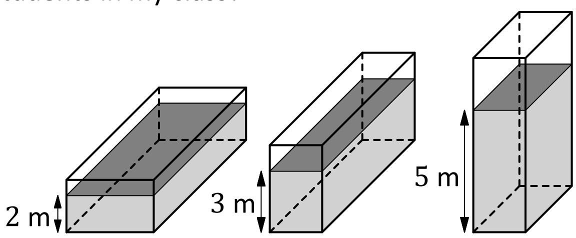
11. Which is the highest power of three that divides the number $7! + 8! + 9!$?
(Hint: The expression n! is defined by n! = n·(n-1)·(n-2)·…·3·2·1.)

(A) 3^2 (B) 3^4 (C) 3^5 (D) 3^6 (E) a power of three greater than 3^6

12. In this school year the number of boys in my class has increased by 20% compared to the previous year and the number of girls has decreased by 20%. There is now one person more than before in this class.
Which of the following numbers could be the current number of students in my class?

(A) 22 (B) 26 (C) 29 (D) 31 (E) 34

13. A cuboid-shaped container that is not filled completely contains 120 m³ of water. The depth of the water is either 2 m or 3 m or 5 m, depending on which side the container is actually standing on (drawings not to scale).
How big is the volume of the container?

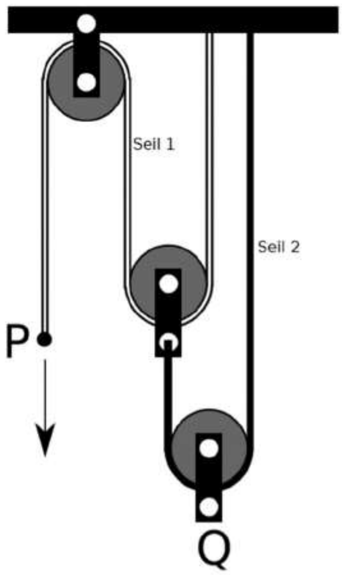


(A) 160 m³ (B) 180 m³ (C) 200 m³ (D) 220 m³ (E) 240 m³

14. Michael invents a new operation „⋄“ for real numbers that is defined by $x \diamond y = y - x$. Which of the following statements is definitely true if the numbers a, b, and c fulfill the condition $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$?

(A) $a = b$ (B) $b = c$ (C) $a = c$ (D) $a = 0$ (E) $c = 0$

15. The system shown consists of three pulleys that are connected to each other via two ropes. P, the end of one rope, is pulled down by 24 cm.
By how many centimeters does point Q move upwards?



(A) 24 (B) 12 (C) 8 (D) 6 (E) $\frac{24}{5}$

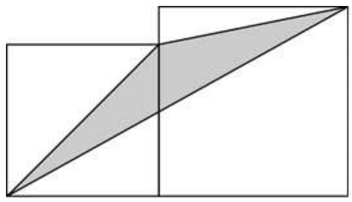
16. A positive integer n is called good, if it's biggest factor (apart from n itself) is equal to $n - 6$. How many good positive integers are there?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 6 (E) infinitely many

17. There are five balls in a box. Four of which contain chocolate, one contains one boiled sweet. Johann and Maria take it in turns to draw a ball from the box without replacing it. Whoever draws the boiled sweet wins. Johann starts.
How big is the probability that Maria wins?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{6}$ (E) $\frac{1}{3}$

18. The diagram shows two adjoining squares with side lengths a and b (with $a < b$). How big is the area of the grey triangle?

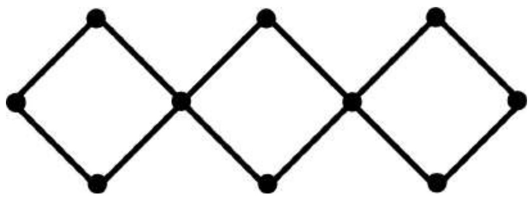


(A) $\sqrt{ab}$ (B) $\frac{1}{2}a^2$ (C) $\frac{1}{2}b^2$ (D) $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ (E) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

19. What is the biggest integer smaller than $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}}$?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 20 (E) 25

20. The points of intersection of the network of bars shown are labelled with the numbers 1 to 10. The sums S of the four numbers on the vertices of each square are all the same.
What is the minimum value of S?



(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

- 5 Point Examples -

21. Let a be the sum of all positive factors of 1024 and b be the product of all positive factors of 1024. (Hint: 1 and 1024 are also factors of 1024.) Then

(A) $(a-1)^5 = b$ (B) $(a+1)^5 = b$ (C) $a^5 = b$ (D) $a^5 - 1 = b$ (E) $a^5 + 1 = b$

22. Which is the set of all parameters a for which the equation $2 - |x| = ax$ has exactly two solutions?

(A) $]-\infty; -1]$ (B) $]-1; 1[$ (C) $[1; +\infty[$ (D) $\{0\}$ (E) $\{-1; 1\}$

23. In order to determine the result of the calculation $\frac{a+b}{c}$ (a, b and c are positive integers), Sara inserts into a calculator $a + b \div c =$ and obtains the result 11. Then she inserts $b + a \div c =$ and is surprised that the result is now 14. She realises that the calculator follows the rules for the order of operations and does division before addition.

What is the actual result of the calculation $\frac{a+b}{c}$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24. Consider a cube. How many planes are there that go through at least three vertices of this cube?

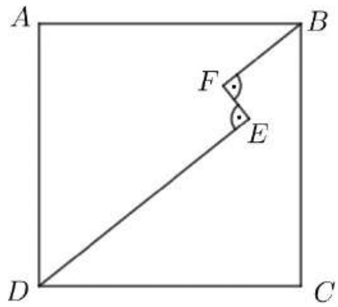
(A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

25. Four different straight lines go through the origin of the co-ordinate-system. They intersect the parabola $y = x^2 - 2$ at eight points. What could be the product of the x-co-ordinates of these eight points?

(A) only 16 (B) only -16 (C) only 8 (D) only -8 (E) There is more than one possible value.

26. For how many integers n is $|n^2 - 2n - 3|$ a prime number?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) infinitely many



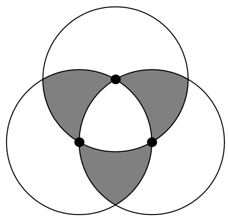
27. A path $DEFB$ with $DE \perp EF$ and $EF \perp FB$ lies within the square $ABCD$ as shown. We know that $DE = 5$, $EF = 1$ and $FB = 2$.

What is the side length of the square?

(A) $3\sqrt{2}$ (B) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $5\sqrt{2}$ (E) another value

28. The sequence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ starts with $a_1 = 49$. To work out a_{n+1} for $n \geq 1$ you add 1 to the digit sum of a_n and square the result. So e.g. $a_2 = (4+9+1)^2 = 196$. Work out a_{2019}.

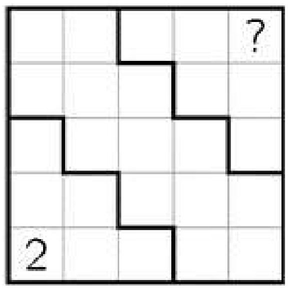
(A) 121 (B) 25 (C) 64 (D) 400 (E) 49



29. Three circles with radius 2 are drawn in such a way that each time one of the points of intersection of two circles is identical with the centre of the third circle.

How big is the area of the grey zone?

(A) π (B) 3π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 2π (E) 4π



30. numbers are to be placed into the square grid shown, so that each of the numbers $1, 2, 3, 4$ and 5 appears exactly once in each row and in each column. Furthermore sthe sum of all numbers in the three black-bordered sections should always be the same. Which number has to be written into the top right cell?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Känguru 2019 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Die lange Seite des schwarzen Rechtecks ist gleich lang wie die breiten Seiten der beiden anderen Rechtecke. Da die drei Rechtecke gleich groß sind, ist das Verhältnis von Breite zu Länge daher **1 : 2**.

2. Die Summe 4 kann nur als $1 + 3$ erreicht werden (weil wir für $2 + 2$ den 2er doppelt verwenden müssten), daher enthält eine Zeile oder eine Spalte die beiden Zahlen 1 und 3. Da Zeilen und Spalten beliebig vertauscht werden können, dürfen wir annehmen, dass dies die erste Zeile ist, und dass links oben 1 und rechts oben 3 steht.

   In der zweiten Zeile müssen also 2 und 4 in irgendeiner Reihenfolge stehen, somit hat die zweite Zeile sicher die Summe 6.
   Falls links unten 2 und rechts unten 4 steht, dann sind die Spaltensummen gleich 3 und 7, also fehlt die aus der Angabe bekannte Summe 5. Daher muss umgekehrt links unten 4 und rechts unten 2 stehen, also sind die Spaltensummen gleich 5 und 5.
   Somit sind die übrigen beiden Summen **5 und 6**.

1	3
4	2

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Alternativ kommen wir mit einem „Trick“ viel schneller ans Ziel: Die Summe aller 4 Zahlen ist 10, daher muss die Summe der beiden Zeilensummen gleich 10 sein und ebenso die Summe der beiden Spaltensummen. Wenn es also irgendwo eine Zeile (oder Spalte) mit Summe 4 gibt, muss die andere Zeile (oder Spalte) die Summe $10 - 4 = 6$ haben. Ebenso, wenn eine Zeilen- oder Spaltensumme gleich 5 ist, muss die zweite $10 - 5 = 5$ sein. Daher fehlen die Summen **5 und 6**.

3. Wir nutzen hier, dass die Fläche eines Dreiecks sich als $\frac{\text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe}}{2}$ berechnet. Insbesondere folgt daraus, wenn mehrere Dreiecke dieselbe Höhe haben, dann kann man die Summe ihrer Flächen als

   $$\frac{\text{Summe der Grundlinien} \cdot \text{gemeinsame Höhe}}{2}$$

   berechnen.

   Bezeichne l die längere und b die kürzere Seite der Rechtecke.

   - In (A) ist die Fläche $\frac{l \cdot b}{2}$.
   - In (B) ist die Summe der Grundlinien gleich b und die Höhe l, also ist die Fläche gleich $\frac{b \cdot l}{2}$.
   - In (C) ist die Summe der Grundlinien gleich l und die Höhe b, also ist die Fläche gleich $\frac{l \cdot b}{2}$.
   - In (D) ist die Summe der Grundlinien weniger als l und die Höhe b, also ist die Fläche weniger als $\frac{l \cdot b}{2}$.
   - In (E) zerschneiden wir das Rechteck entlang einer Diagonale und lassen vorläufig eine Hälfte weg, sodass wir wieder lauter Dreiecke mit Spitze oben haben. Die Summe der Grundlinien dieser Dreiecke ist gleich l und die Höhe b, also ist die Fläche gleich $\frac{l \cdot b}{2}$. Dazu kommt noch die Fläche des weggelassenen halben Rechtecks.

   Daher hat **(E)** den größten grauen Bereich.

4. Wir sehen, dass das graue mit dem weißen Dreieck verbunden ist und das weiße mit dem schwarzen, nicht aber das graue mit dem schwarzen.

   - In (A) ist jedes Dreieck mit jedem verbunden.
   - In (B) ist das graue Dreieck mit gar keinem Dreieck verbunden.
   - In (C) sind gar keine Dreiecke miteinander verbunden.
   - **In (D) sind die gleichen Dreiecke miteinander verbunden wie in der Vorlage.**
   - In (E) ist jedes Dreieck mit jedem verbunden.

5. Die Pyramide hat 23 Kanten zwischen benachbarten Seitenflächen und zusätzlich die 23 Kanten des unteren 23-Ecks, insgesamt also **46** Kanten.

6. Wir schreiben die Zahlen zunächst als Summe untereinander und ersetzen fehlende Ziffern durch Variablen, siehe Abbildung rechts.
Die Summe der Einerziffern ist 16, also schreibe 6, Übertrag 1.
Die Summe der Zehnerziffern plus Übertrag ist $4 + x + 2 + 1 = 7 + x$. Die letzte Stelle dieses Ergebnisses muss 2 sein, also folgt $x = 5$, und Übertrag ist 1.

$$\begin{array}{r} 7243 \\ 21x7 \\ zy26 \\ \hline 11126 \end{array}$$

Die Summe der Hunderterziffern plus Übertrag ist $2+1+y+1 = 4+y$. Die letzte Stelle davon soll 1 sein, also erhalten wir $y = 7$ und Übertrag 1.

Die Summe der Tausenderziffern plus Übertrag schließlich ist $7+2+z+1 = 10+z$ und soll gleich 11 sein, daher folgt $z = 1$.

Die drei Ziffern sind daher **1, 5 und 7**.

7. Um eine möglichst kleine Zahl zu erhalten, wollen wir in erster Linie möglichst wenige Ziffern, und da die Ziffernsumme vorgegeben ist, erreichen wir das, indem wir möglichst große Ziffern verwenden. Andererseits möchten wir die großen Ziffern möglichst weit hinten. Wir beginnen daher von der Einerstelle mit 9ern aufzufüllen, bis wir 224 Ziffern 9 und damit eine Summe von 2016 haben. Nun fügen wir noch eine **führende Ziffer 3** hinzu.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Ganz mathematisch korrekt können wir jetzt noch kurz argumentieren, dass es sicher nicht besser geht: Weniger Ziffern sind nicht möglich, da mit 224 Ziffern die maximale Ziffernsumme nur 2016 wäre. Mehr Ziffern machen die Zahl größer. Und bei genau gleich vielen Ziffern ist es nicht möglich, die führende Ziffer 3 kleiner zu machen, da wir zu keiner anderen Ziffer mehr etwas hinzufügen können, um dieselbe Ziffernsumme zu erreichen.

8. Die ersten Vielfachen von 2^{10} sind $1 \cdot 2^{10}$, $2 \cdot 2^{10}$, $3 \cdot 2^{10}$, $4 \cdot 2^{10}$, und so weiter. Es gilt $2^{13} = 2^3 \cdot 2^{10} = 8 \cdot 2^{10}$. Daher sind **8 Vielfache** von 2^{10} im betrachteten Bereich.

9. Es sind also drei Seiten mit 1 markiert, zwei Seiten mit 2 und eine Seite mit 3. Das ist bei **Würfel (C)** nicht möglich, da wir dort zwei Seiten mit 3 Punkten sehen. Alle anderen Würfel erfüllen diese Einschränkungen.

10. Carl trägt laut Angabe keinen Hut.

Würde Bob keinen Hut tragen, müsste Carl einen Hut tragen. Da dies nicht der Fall ist, trägt Bob sicher einen Hut.

Ob Alex einen Hut trägt, können wir nicht sagen; sowohl, wenn er einen trägt, als auch, wenn er keinen trägt, sind alle uns bekannten Bedingungen erfüllt.

Wir können daher **nur über Bob** mit Sicherheit sagen, dass er einen Hut trägt.

11. Wir können $7!$ herausziehen und erhalten $7! + 8! + 9! = 7! \cdot (1 + 8 + 8 \cdot 9) = 7! \cdot 81$. In $81 = 3^4$ sind vier 3er enthalten. Von den Faktoren von $7!$ enthalten 3 und 6 jeweils genau einen 3er, die restlichen sind nicht durch 3 teilbar. Insgesamt ist $\mathbf{3^6}$ daher die höchste enthaltene Dreierpotenz.

12. Wir bezeichnen mit m und b die Anzahl der Mädchen bzw. Burschen im vorigen Jahr, und mit M und B die Anzahlen im heurigen Jahr. Es gilt $M + B = m + b + 1$, $M = m \cdot 0.8$ und $B = b \cdot 1.2$. Wir setzen die letzten beiden Gleichungen in die erste ein und erhalten

$$\begin{aligned} & m \cdot 0.8 + b \cdot 1.2 = m + b + 1 \\ \iff \quad & 8m + 12b = 10m + 10b + 10 \\ \iff \quad & 2b = 2m + 10 \\ \iff \quad & b = m + 5. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Burschen muss im Vorjahr also um 5 größer gewesen sein als die Anzahl der Mädchen. Darüber hinaus müssen im Vorjahr sowohl die Anzahl der Mädchen als auch Burschen durch 5 teilbar gewesen sein, damit die Anzahlen heuer wieder ganzzahlig sind. Es gilt also $m = 5x$ und $b = m + 5 = 5x + 5 = 5 \cdot (x + 1)$ für eine passende positive ganze Zahl x.

Die Anzahl heuer ist daher $M + B = 5x \cdot 0.8 + 5(x+1) \cdot 1.2 = 4x + 6(x+1) = 10x + 6$. Möglich ist daher jede Anzahl mit Einerziffer 6, von den zur Verfügung stehenden Auswahlmöglichkeiten also **26**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Drei der fünf Antwortmöglichkeiten kann man bereits nur mit dem zweiten Teil der Überlegung ausschließen: Im Vorjahr müssen die Anzahlen durch 5 teilbar gewesen sein, damit die heurigen Anzahlen ganzzahlig sind. Daher muss auch die Gesamtzahl durch 5 teilbar gewesen sein. Heuer ist die Gesamtzahl um 1 höher, daher muss die Einerziffer gleich 1 oder 6 sein.

Auch die Überlegung, dass die Anzahl der Burschen um 5 größer gewesen sein muss, bekommt man statt über den formellastigen Ansatz auch argumentativ heraus: Pro 5er-Gruppe Mädchen wird die Anzahl der Personen im nächsten Jahr um 1 niedriger, pro 5er-Gruppe Burschen um 1 höher. Daher gibt es eine 5er-Gruppe Burschen mehr als Mädchen. Insgesamt gibt es daher eine ungerade Anzahl von 5er-Gruppen, und im Jahr darauf eine Person mehr, daher ist die Einerstelle gleich 6.

13. Wir bezeichnen die kürzeste, mittlere und längste Seite mit b (Breite), l (Länge) bzw. h (Höhe), und verwenden überall Meter als Einheit. Wenn wir die ersten beiden Skizzen vergleichen, sehen wir, dass das Wasser in beiden die volle Höhe h einnimmt. Da das Volumen gleich Grundfläche mal Höhe ist, sind daher auch die Grundflächen gleich, also gilt $2 \cdot l = 3 \cdot b$, folglich $l : b = 3 : 2$. Auf dieselbe Art erhalten wir im Vergleich zwischen zweiter und dritter Skizze, wo das Wasser beide Male die volle Breite einnimmt, dass $h : l = 5 : 3$. Schließlich erhalten wir aus dem Vergleich von erster und dritter Skizze, wo das Wasser beide Male die volle Länge ausfüllt, dass $b : h = 2 : 5$. Letzteres hätten wir auch einfach aus Kombination der ersten beiden Verhältniss erhalten können.

    Insgesamt gilt also $b = 2x$, $l = 3x$ und $h = 5x$ für eine passende Länge x. Aus dem Wasservolumen im ersten Bild erhalten wir $120 = 2 \cdot 3x \cdot 5x = 30x^2$, also $4 = x^2$ und somit $x = 2$. Das gesamte Volumen ist daher gleich $2x \cdot 3x \cdot 5x = 30 \cdot 2^3 = \mathbf{240}\mathrm{m}^3$.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Für diese Aufgabe gibt es eine ebenso schöne alternative Herangehensweise, bei der wir uns zunutze machen, dass wir uns nicht für die einzelnen Seitenlängen interessieren, sondern nur für deren Produkt: Dasselbe Wasservolumen kann man in der ersten Skizze berechnen als $120 = 2 \cdot l \cdot h$, in der zweiten als $120 = b \cdot 3 \cdot h$ und in der dritten als $120 = b \cdot l \cdot 5$. Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander, so erhält man $120^3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot b^2 \cdot l^2 \cdot h^2$, und somit für das gewünschte Volumen

    $$b \cdot l \cdot h = \sqrt{\frac{120^3}{2 \cdot 3 \cdot 5}} = \sqrt{120^2 \cdot 4} = 120 \cdot 2 = \mathbf{240}\mathrm{m}^3.$$

14. Nach Definition gilt $(a\Diamond b)\Diamond c = c-(a\Diamond b) = c-(b-a) = a-b+c$, und $a\Diamond(b\Diamond c) = a\Diamond(c-b) = (c-b)-a = -a-b+c$. Wenn die beiden gleich sein sollen, muss somit $a-b+c = -a-b+c$ gelten, also $-a = a$. Das ist nur für $\mathbf{a = 0}$ erfüllt.

15. Nach dem Ziehen wird die mittlere Rolle um ein Stück höher hängen, und der rechte und mittlere Abschnitt von Seil 1 (also jener Abschnitt von der Befestigung an der Decke bis zur mittleren Rolle, sowie jener Abschnitt zwischen den beiden Rollen) werden beide um dieses Stück kürzer. Da diese beiden Abschnitte zusammen um 24cm kürzer werden (und der linke Abschnitt um dieses Stück länger), wird jeder davon um 12cm kürzer also hängt die mittlere Rolle danach um 12cm höher.

    Die Situation bei Seil 2 ist ganz gleich (wenn wir die beiden Abschnitte von der Decke bis zur Rolle und von der Rolle bis zur *ursprüngliche* Position der mittleren Rolle betrachten; die feste ursprüngliche Position spielt hier also dieselbe Rolle wie zuvor die fest an der Decke montierte linke Rolle). Somit halbiert der Abstand sich ein weiteres Mal. Wenn die mittlere Rolle sich um 12cm nach oben bewegt, dann bewegt die rechte Rolle mit Punkt Q sich daher um **6**cm nach oben.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Dieses Prinzip entspricht einem Flaschenzug. Da physikalisch betrachtet Arbeit sich als „Kraft mal Weg“ berechnet, können wir durch das Verdoppeln des Weges die benötigte Kraft halbieren. Diese konkreten Konstruktion vervierfacht den Weg: Eine Bewegung um x nach unten bei P bewirkt eine Bewegung um $\frac{x}{4}$ bei Q nach oben. Würde man also eine schwere Kiste an Q befestigen und an P anziehen, so benötigt man zum Hochheben der Kiste also nur ein Viertel der Kraft, die man beim direkten Heben benötigen würde.

16. Der größte Teiler ist mindestens 1, daher ist n mindestens 7. Wir unterscheiden Fälle nach dem kleinsten Primfaktor p von n. Der größte Teiler (außer n selbst) ist gleich n dividiert durch den kleinsten Primfaktor, also $n - 6 = \frac{n}{p}$, das ist äquivalent zu $p \cdot (n-6) = n$, was wir weiter umformen zu $p \cdot n - 6p = n$ und damit $(p-1) \cdot n = 6p$ und schließlich

    $$n = \frac{6p}{p-1} = \frac{6p-6+6}{p-1} = 6 + \frac{6}{p-1}.$$

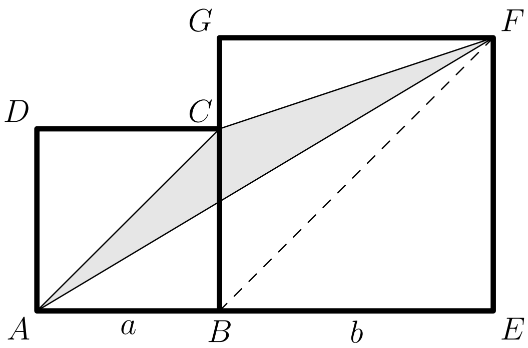
    - Für $p = 2$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{1} = 12$, dies ist eine Lösung.

- Für $p = 3$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{2} = 9$, dies ist eine Lösung.
- Für $p = 5$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{4} = 7.5$, das ist keine ganze Zahl.
- Für $p = 7$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{6} = 7$, das ist eine Lösung.
- Für $p \geq 11$ erhalten wir $n = 6 + \frac{6}{p-1} < 7$, also ist $n - 6 < 1$ und damit kein Teiler von n.

Insgesamt haben wir daher die **3 Lösungen** 7, 9 und 12 gefunden.

17. Die Wahrscheinlichkeit, ob die Kugel mit dem Fruchtbonbon an der ersten, zweiten, dritten, vierten oder fünften Stelle gezogen wird, ist genau gleich, nämlich jeweils ein Fünftel. Maria zieht die zweite und vierte Kugel, ihre Gewinnchance ist daher $\mathbf{\frac{2}{5}}$.

18. Im Folgenden bezeichne $[XYZ]$ jeweils die Fläche eines Dreiecks XYZ, sowie $[PQRS]$ die Fläche eines Vierecks $PQRS$. Wir bezeichnen die Ecken wie in der Skizze zu sehen. Weiters sei a die Seitenlänge des kleineren und b jene des größeren Quadrats.



Dann lässt die graue Fläche sich berechnen als

$$\begin{aligned}
\text{grau} &= [ABCD] + [BEFG] - [ACD] - [AEF] - [CFG] \\
&= a^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{(a+b)\cdot b}{2} - \frac{(b-a)\cdot b}{2} \\
&= \frac{a^2}{2} + b^2 - \frac{ab + b^2 + b^2 - ab}{2} \\
&= \frac{a^2}{2} + b^2 - b^2 \\
&= \mathbf{\frac{a^2}{2}}.
\end{aligned}$$

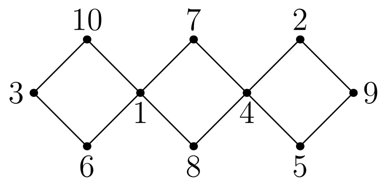
Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wenn wir diese überraschend einfache Formel einmal gesehen haben, fragen wir uns natürlich, ob man das nicht viel einfacher auch hätte sehen können. Tatsächlich liegt es nun nahe, die Diagonale BF einzuzeichnen. Da die beiden Diagonalen AC und BF zueinander parallel sind, haben die beiden Dreiecke ACB und ACF (mit der gemeinsamen Grundlinie AC) dieselbe Höhe, und daher folgt sofort $[ACF] = [ACB] = \frac{a^2}{2}$.

19. Die Zahl $\sqrt{20}$ ist größer als 4 (wegen $20 > 16$) und kleiner als 5 (wegen $20 < 25$). Folglich ist $16 < 20 + \sqrt{20} < 25$, und die Wurzel daraus liegt wieder zwischen 4 und 5. Dies setzt sich nun fort: Wenn $4 < x < 5$ gilt, dann ist $16 < 20 + x < 25$ und die Wurzel daraus folglich wieder $4 < \sqrt{20 + x} < 5$. Die größte ganze Zahl kleiner als eine solche Wurzel (unabhängig von der genauen Anzahl der verschachtelten Wurzeln) ist daher **4**.

20. Wenn wir die Summen der drei Quadrate zusammenzählen, werden die „äußeren" Punkte jeweils einfach gezählt und die zwei mittleren Punkte doppelt. Insgesamt setzt diese Summe sich daher zusammen aus der Summe der Zahlen von 1 bis 10 plus den zwei doppelt gezählten Zahlen, und ist somit (wenn wir die beiden kleinstmöglichen Zahlen verdoppeln) mindestens $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 + 1 + 2 = 58$. Andererseits muss diese Summe gleich $3S$ sein, also durch 3 teilbar. Da 58 und 59 das nicht erfüllen, ist 60 die kleinste zumindest theoretisch mögliche Gesamtsumme; in diesem Fall wäre $S = 20$.

    Tatsächlich finden wir für $S = 20$ eine mögliche Anordnung wie unten abgebildet, daher ist **20** tatsächlich der kleinste mögliche Wert von S.



21. Die Teiler von $1024 = 2^{10}$ sind $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$. Für ihr Produkt gilt demnach

$$b = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \cdots \cdot 2^{10} = 2^{0+1+2+3+\cdots+10} = 2^{55},$$

und für ihre Summe nach geometrischer Summenformel

$$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10} = 2^{11} - 1.$$

Folglich gilt $\mathbf{(a+1)^5} = 2^{55} \mathbf{= b}$.

22. Für $x \geq 0$ können wir das umformen zu $2 - x = ax$, also $x = \frac{2}{a+1}$. Für $a < -1$ wäre x entgegen der Voraussetzung negativ, für $a = -1$ hätten wir eine Division durch 0 (das heißt, wir hätten die Umformung gar nicht machen dürfen, sehen aber in der ursprünglichen Gleichung sofort, dass $2 - x = -x$, also $2 = 0$, keine Lösung hat), und für $a > -1$ erhalten wir genau eine Lösung.

Für $x < 0$ erhalten wir stattdessen $2 + x = ax$, also $x = \frac{2}{a-1}$. Für $a > 1$ wäre x positiv, für $a = 1$ erhalten wir wie zuvor keine Lösung wegen $2 = 0$, und für $a < 1$ erhalten wir genau eine Lösung.

Damit die Gleichung genau zwei Lösungen besitzt, müssen also beide Möglichkeiten genau eine Lösung produzieren. Das trifft im Bereich $-1 < a < 1$ (in Intervallschreibeweise $]\mathbf{-1; 1}[$) zu.

23. Es gilt also $a + \frac{b}{c} = 11$ und $b + \frac{a}{c} = 14$. Multiplizieren wir beide Gleichungen mit c, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$ac + b = 11c, \tag{I}$$
$$bc + a = 14c. \tag{II}$$

Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, so erhalten wir (II) − (I) $= (b-a) \cdot c + a - b = 3c$, was wir weiter umformen können zu

$$(b-a) \cdot (c-1) = 3c. \tag{III}$$

Insbesondere muss also $c - 1$ ein Teiler von $3c$ sein. Da aufeinanderfolgende Zahlen $c - 1$ und c immer teilerfremd sein, muss $c - 1$ ein Teiler von 3 sein.

Wir haben also zwei Fälle zu betrachten:

- Sei $c - 1 = 1$, also $c = 2$. Aus (III) folgt $b - a = 6$, also $b = a + 6$. Setzen wir das in (I) ein, so erhalten wir $2a + a + 6 = 22$, also $3a = 16$, somit $a = \frac{16}{3}$ und $b = a + 6 = \frac{34}{3}$. Zwar erfüllt das tatsächlich die beiden Gleichungen, allerdings sind a und b hier keine ganzen Zahlen.
- Sei $c - 1 = 3$, also $c = 4$. Aus (III) folgt $(b - a) \cdot 3 = 12$, also $b = a + 4$. Setzen wir das in (I) ein, so erhalten wir $4a + a + 4 = 44$, also $5a = 40$, somit $a = 8$ und $b = 12$. Tatsächlich ist das die einzige Lösung in ganzen Zahlen, wie wir durch Einsetzen in die ursprünglichen Gleichungen leicht überprüfen.

Somit folgt $\frac{a+b}{c} = \frac{8+12}{4} = \mathbf{5}$.

24. Wir unterscheiden verschiedene „Arten“ solcher Ebenen nach der Anzahl der Punkte aus derselben Seitenfläche, die sie enthalten.

- Ebenen, die 4 Punkte einer Seitenfläche enthalten, existieren 6 Stück, eine pro Seitenfläche.
- Ebenen, die 3 Punkte einer Seitenfläche enthalten, enthalten automatisch auch den vierten und wurden daher bereits im vorigen Schritt gezählt.
- Betrachten wir nun Ebenen, die zwei benachbarte Punkte einer Seitenfläche enthalten. Da die Ebene einen dritten Eckpunkt des Würfels enthalten muss, aber keinen Punkt auf derselben Seitenfläche wie die beiden schon enthaltenen Punkte enthalten darf, kommt nur die Kante „diagonal gegenüber“ in Frage (also zum Beispiel von vorne betrachtet die beiden linken oberen und die beiden rechten unteren Eckpunkte). Der Würfel hat 12 Kanten, die jeweils in Paaren einander gegenüber liegen, also finden wir 6 solche Ebenen.

- Nun betrachten wir Ebenen, die zwei gegenüberliegende Punkte einer Seitenfläche enthalten, beispielsweise oben links vorne und oben rechts hinten. Vier der restlichen Eckpunkte können nicht in der Ebene liegen, da wir sonst einen der vorigen Fälle vorliegen hätten, für die restlichen beiden ist es möglich. Wir suchen also Ebenen, die durch die drei Nachbarn desselben Eckpunktes gehen. Da es 8 Eckpunkte gibt, gibt es 8 solche Flächen.
- Es gibt keine solchen Ebenen, die von jeder Seitenfläche nur einen Punkt beinhalten, da jeder Eckpunkt an 3 Seitenflächen angrenzt, und der Würfel somit 9 Seiten haben müsste, damit jeder Eckpunkt in der Ebene zu anderen Seitenflächen gehört.

Insgesamt haben wir daher $6 + 6 + 8 = \mathbf{20}$ solche Ebenen gefunden.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Alternativ (und um zu überprüfen, dass wir nichts vergessen haben) können wir auch von der anderen Richtung zu zählen beginnen. Es gibt $\binom{8}{3} = 56$ Möglichkeiten, 3 Eckpunkte des Würfels auszuwählen. Nun haben wir aber jede Ebene, die vier Eckpunkte enthält, vierfach gezählt. Vier Eckpunkte enthalten sind in den Ebenen, die eine Seitenfläche enthalten, davon gibt es 6, und in jenen, die zwei „gegenüberliegende“ Kanten beinhalten, davon gibt es wie oben betrachtet ebenfalls 6. Wir haben also 12 Ebenen jeweils vierfach gezählt, müssen daher $12 \cdot 3 = 36$ Ebenen abziehen. Es bleiben $56 - 36 = 20$ Ebenen übrig.

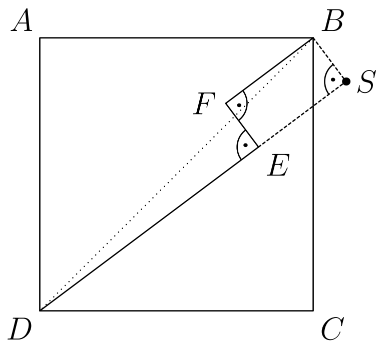
25. Eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung geht, hat die Gleichung $y = ax$ für eine passende reelle Zahl a. Die Schnittpunkte mit der Parabel erhalten wir durch das Lösen der Gleichung $x^2 - 2 = ax$, also $x^2 - ax - 2 = 0$. Da wir uns nur für das Produkt der beiden Lösungen für die x-Werte interessieren, erhalten wir aus dem Satz von Vieta sofort $x_1 \cdot x_2 = -2$.

    Multipliziert man die x-Koordinaten der Schnittpunkte vier solcher Geraden miteinander, so erhält man daher jedenfalls $(-2)^4 = \mathbf{16}$.

26. Mit etwas Übung erkennt man sofort die Faktorisierung $|n^2 - 2n - 3| = |(n-3)(n+1)|$. Damit das Produkt eine Primzahl ist, muss also einer der Faktoren gleich 1 oder -1 sein. Dies führt zu den Fällen $n \in \{-2, 0, 2, 4\}$, von denen wir leicht ausrechnen, dass sie die Werte 5, 3, 3 bzw. 5 ergeben, also alle **vier** Lösungen sind.

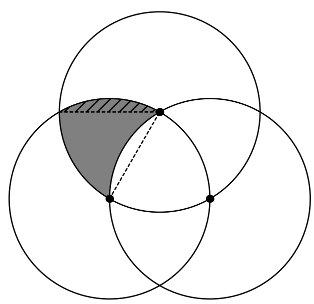
27. Wir verlängern DE und zeichnen eine Parallele zu EF durch B wie abgebildet. Sei S der Schnittpunkt dieser beiden neuen Geraden. Da $EFBS$ wegen der Parallelität ein Rechteck ist, ist $BS = FE$ und $ES = FB$.
    Im rechtwinkeligen Dreieck DSB gilt nach Pythagoras $DB^2 = DS^2 + BS^2 = (5+2)^2 + 1^2 = 50$.
    Bekanntlich gilt im Quadrat $DB = AB \cdot \sqrt{2}$, also umgekehrt

$$AB = \frac{DB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = \mathbf{5}.$$



28. Ausprobieren der ersten Werte liefert $a_1 = 49$, $a_2 = 196$, $a_3 = 289$, $a_4 = 400$, $a_5 = 25$, $a_6 = 64$, $a_7 = 121$, $a_8 = 25$. Da jeder Wert nur vom vorigen abhängt und 25 bereits vorgekommen ist, wird die Folge sich nun immer wieder wiederholen und zwar zwischen den 3 Werten 25, 64 und 121. Es gilt also $a_{2019} = a_{2016} = a_{2013} = \cdots = a_9 = a_6 = \mathbf{64}$.

29. Wir berechnen die Fläche von einem der drei grauen Teile, indem wir den schraffierten Teil „abschneiden“ und unten wieder anfügen, sodass wir als graue Fläche einen Kreissektor mit Innenwinkel 60° erhalten. Insgesamt haben wir drei solche Sektoren, deren Flächen in Summe daher einen halben Kreis ausmachen, also $r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = 2^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{2\pi}$.



30. Die Gesamtsumme jeder Zeile ist 15, die Gesamtsumme aller Zeilen somit 75. Daher muss die Summe in jedem der drei Bereich gleich 25 sein.

Die größtmöglichen Zahlen, die man im linken unteren Bereich unterbringen kann, sind drei 5er (da pro Spalte nur einer erlaubt ist), zwei 4er und der schon vorhandene 2er, das ergibt in Summe 25. Jede andere Möglichkeit hätte eine geringere Summe, daher gibt es hier keine andere Möglichkeit.

Auch im rechten oberen Bereich brauchen wir die Summe 25. Um die größtmögliche Summe zu erreichen, können wir maximal zwei 5er verwenden (da drei der 5er bereits verbraucht sind) und maximal drei 4er (höchstens einer pro Spalte), sowie einen 3er. Das ergibt Summe 25. Auch hier hätte jede andere Möglichkeit eine zu geringe Summe. Daher ist die Zahl rechts oben gleich **3**.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2020
23. 3. 2020

Kategorie: Felix, 1. – 2. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

11	12	13	14	15

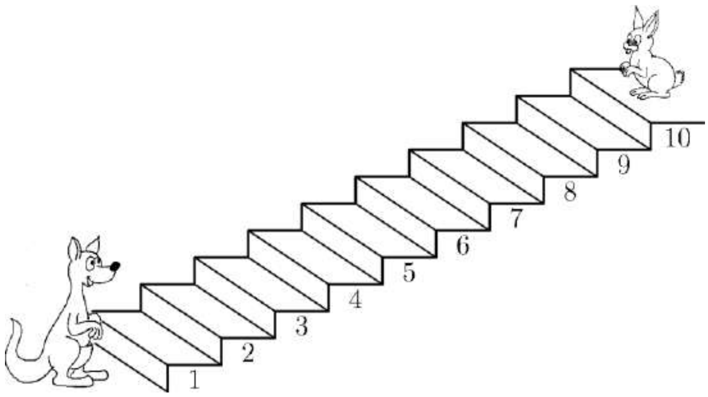
pwc

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

- 3 Punkte Beispiele -

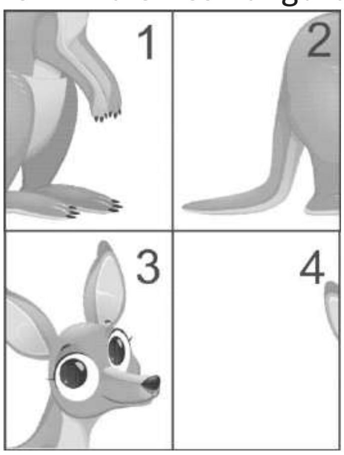
1. Das Känguru hüpft immer drei Stufen aufwärts. Jedes Mal, wenn das Känguru aufwärts hüpft, dann hüpft der Hase zwei Stufen abwärts.



Auf welcher Stufe treffen sich Känguru und Hase?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

2. Nelly möchte die vier Teile zu einem Bild eines Kängurus zusammenfügen.



Wie muss sie die Stücke anordnen?

(A)

4	3
2	1

(B)

3	4
2	1

(C)

2	1
4	3

(D)

4	3
1	2

(E)

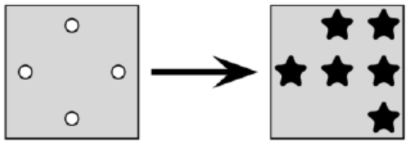
3	4
1	2

3. Ein Zauberer zaubert Tiere aus seinem Hut – immer in derselben Reihenfolge. Nach jedem 5. Tier wiederholt sich diese Reihenfolge.

Welche zwei Tiere zieht der Zauberer als nächste?

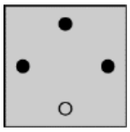
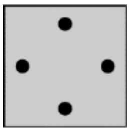
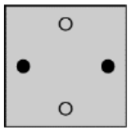
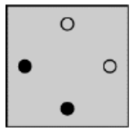
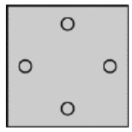
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Josef hat zwei Karten. Karte A hat Löcher. Josef legt Karte A auf Karte B.

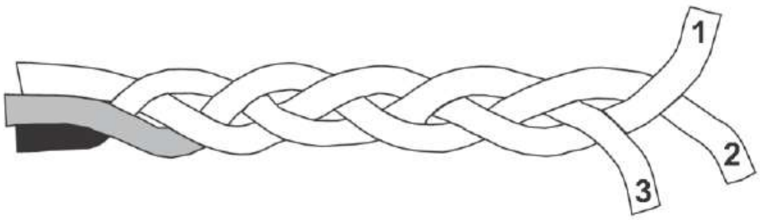


Karte A Karte B

Was kann er nun sehen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

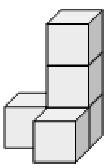
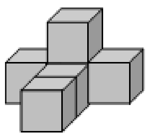
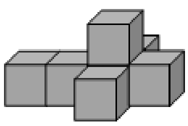
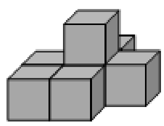
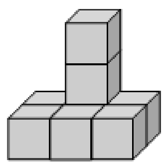
5. Der Zopf im Bild besteht aus drei Schnüren. Eine Schnur ist schwarz, eine ist grau und eine ist weiß.



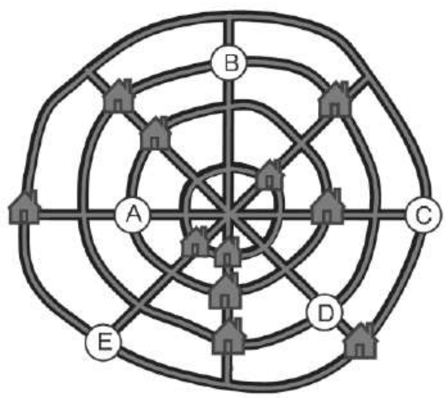
Welche Schnur hat welche Farbe?
(A) Schnur 1 ist grau, 2 ist weiß und 3 ist schwarz.
(B) Schnur 1 ist weiß, 2 ist schwarz und 3 ist grau.
(C) Schnur 1 ist schwarz, 2 ist grau und 3 ist weiß.
(D) Schnur 1 ist weiß, 2 ist grau und 3 ist schwarz.
(E) Schnur 1 ist grau, 2 ist schwarz und 3 ist weiß.

- 4 Punkte Beispiele -

6. Susi fügt Würfel Seite an Seite zusammen. Sie erhält diese fünf Bauwerke.
Für welches Bauwerk benötigt Susi die meisten Würfel?

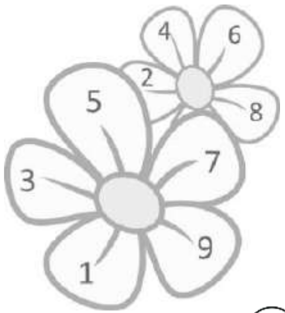
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Ein Dorf hat 4 ringförmige Straßen und 4 gerade Straßen.
Das Dorf hat 12 Häuser.
Du kannst 11 davon im Plan sehen.
Auf jeder ringförmigen Straße sollen 3 Häuser stehen.
Auch auf jeder geraden Straße sollen 3 Häuser stehen.



Wo muss im Plan das 12. Haus stehen?
(A) auf A (B) auf B (C) auf C (D) auf D (E) auf E

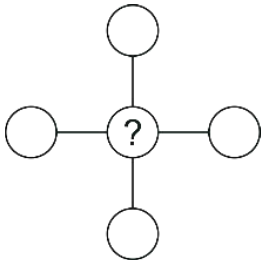
8. Felix hat zwei Blumen mit je fünf Blütenblättern (siehe Bild).
Felix rechnet die fünf Zahlen auf jeder Blume zusammen.
Er erhält bei beiden Blumen das gleiche Ergebnis.



Welche Zahl steht auf dem verdeckten Blütenblatt?

(A) 7 (B) 5 (C) 3 (D) 1 (E) 0

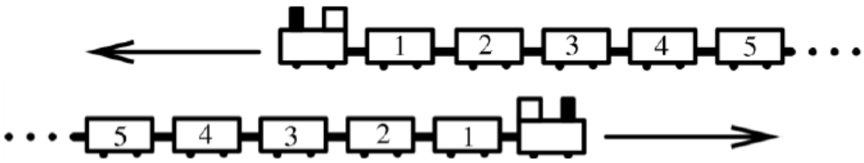
9. Roo schreibt jede der Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 in einen der Kreise. Er rechnet die drei Zahlen entlang der Linie von oben nach unten zusammen. Dann rechnet er die drei Zahlen von links nach rechts zusammen. Die beiden Ergebnisse sind gleich.



Welche Zahlen können im Kreis mit dem Fragezeichen stehen?

(A) nur 5 (B) 1, 3 oder 5 (C) nur 3 (D) nur 1 oder 3 (E) 2, 3 oder 4

10. Zwei gleiche Züge mit je 31 Waggons fahren aus entgegengesetzten Richtungen in einen Bahnhof ein. Die Waggons beider Züge sind der Reihe nach von 1 bis 31 nummeriert (siehe Bild).



Als die Züge im Bahnhof halten, stehen die beiden Waggons mit der Nummer 19 genau einander gegenüber.

Welcher Waggon ist gegenüber von Waggon Nummer 12?

(A) 7 (B) 12 (C) 21 (D) 26 (E) 31

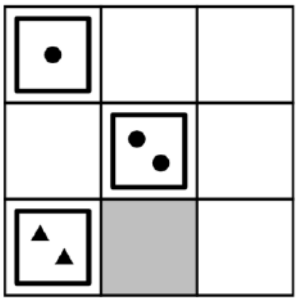
- 5 Punkte Beispiele -

11. Beim Zusammenlegen von Fliesen entstehen vier schwarze Figuren: ♣, ♦, ♥, ♠
Welche Fliese fehlt im Bild?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

12. Tom hat diese neun Karten:

Er legt sie auf ein Spielbrett. Dabei muss in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Anzahl (1, 2 und 3) und jede Form (Kreis, Dreieck und Viereck) genau einmal vorkommen.

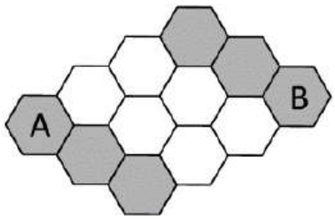


Welche Karte muss Tom auf das graue Feld legen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

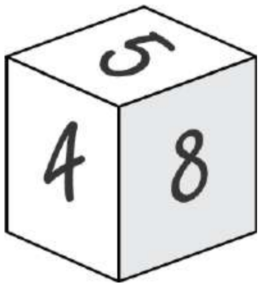
13. Biene Mark kann sich nur auf grauen Waben fortbewegen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau zwei weiße Waben grau zu färben, sodass Mark von A nach B gehen kann?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

14. Mia schreibt auf jede Seite eines Würfels eine der Zahlen von 1 bis 9.
Sie darf dabei keine Zahl doppelt verwenden.
Rechnet sie die Zahlen auf zwei gegenüberliegenden Seiten zusammen, so erhält sie immer das gleiche Ergebnis.



Welche Zahl steht auf der gegenüberliegenden Seite der Zahl 5?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

15. John und Olivia tauschten Zuckerl aus.
Zuerst gab John Olivia so viele Zuckerl, wie sie vorher hatte.
Dann gab Olivia John so viele Zuckerl, wie er nach dem ersten Tausch hatte.
Danach hatte jeder der beiden vier Zuckerl.

Wie viele Zuckerl hatte John ganz zu Beginn?

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 (E) 2

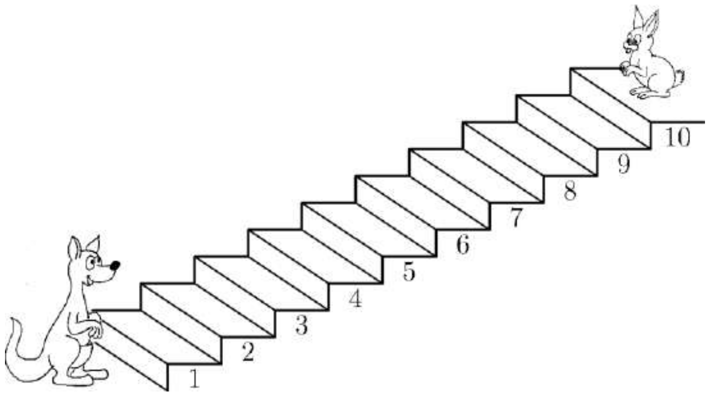
Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	A	E	A	D	E	C	B	B	D	E	D	C	C	B

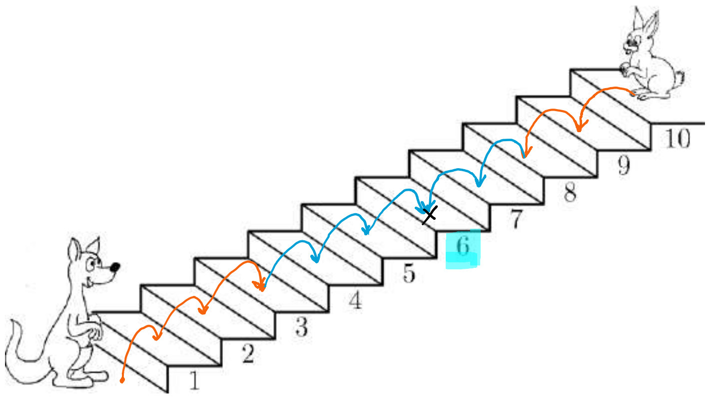
– 3 Punkte Beispiele –

1. Das Känguru hüpft immer drei Stufen aufwärts. Jedes Mal, wenn das Känguru aufwärts hüpft, dann hüpft der Hase zwei Stufen abwärts.



Auf welcher Stufe treffen sich Känguru und Hase?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 **(D) 6** (E) 7

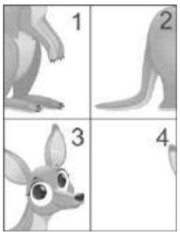


Rechenweg:

Immer, wenn das Känguru und der Hase gleichzeitig hüpfen, werden 3 + 2 = 5 Stufen übersprungen. Bei 10 Stufen brauchen sie 10 : 5 = 2 Durchgänge.

Nach 2 Durchgängen ist das Känguru auf Stufe 2 · 3 = <u>**6**</u>.

2. Nelly möchte die vier Teile zu einem Bild eines Kängurus zusammenfügen.



Wie muss sie die Stücke anordnen?

(A)

4	3
2	1

(B)

3	4
2	1

(C)

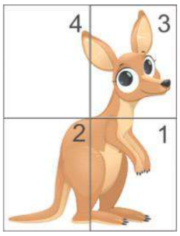
2	1
4	3

(D)

4	3
1	2

(E)

3	4
1	2



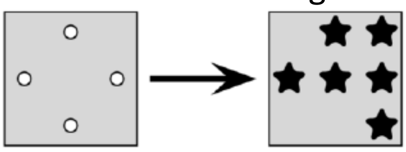
3. Ein Zauberer zaubert Tiere aus seinem Hut – immer in derselben Reihenfolge. Nach jedem 5. Tier wiederholt sich diese Reihenfolge.

Welche zwei Tiere zieht der Zauberer als nächste?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

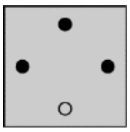
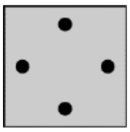
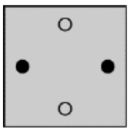
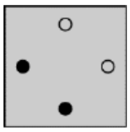
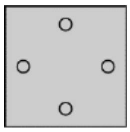
Nach jedem 5. Tier wiederholt sich diese Reihenfolge:
Ratte – Schnecke – Vogel – Vogel – Frosch – Ratte – Schnecke – Vogel – ...

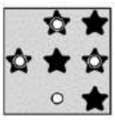
4. Josef hat zwei Karten. Karte A hat Löcher. Josef legt Karte A auf Karte B.



Karte A Karte B

Was kann er nun sehen?

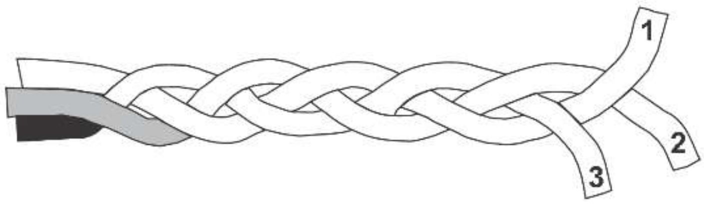
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 



Karte B

Wenn Josef Karte A über Karte B legt, dann liegen 3 Sterne unter den Löchern.
Daher gilt Lösung (A).

5. Der Zopf im Bild besteht aus drei Schnüren. Eine Schnur ist schwarz, eine ist grau und eine ist weiß.



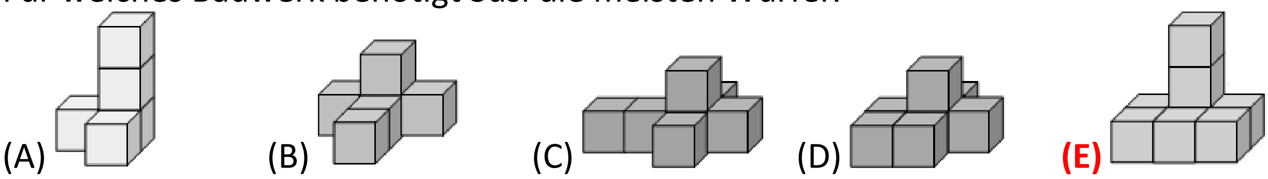
Welche Schnur hat welche Farbe?

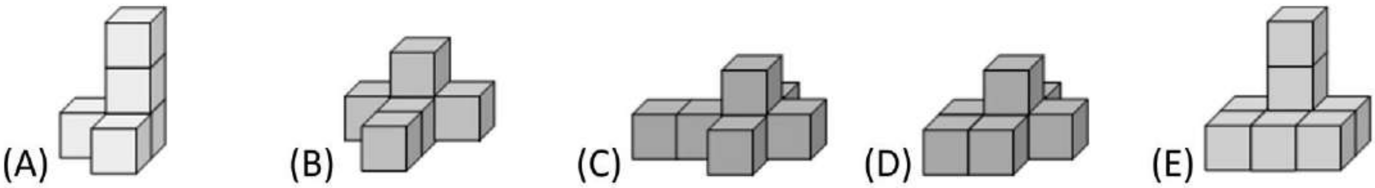
(A) Schnur 1 ist grau, 2 ist weiß und 3 ist schwarz.
(B) Schnur 1 ist weiß, 2 ist schwarz und 3 ist grau.
(C) Schnur 1 ist schwarz, 2 ist grau und 3 ist weiß.
(D) Schnur 1 ist weiß, 2 ist grau und 3 ist schwarz.
(E) Schnur 1 ist grau, 2 ist schwarz und 3 ist weiß.

Schnur 1 ist weiß, 2 ist grau und 3 ist schwarz.

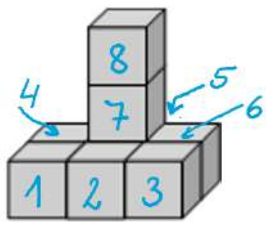
– 4 Punkte Beispiele –

6. Susi fügt Würfel Seite an Seite zusammen. Sie erhält diese fünf Bauwerke. Für welches Bauwerk benötigt Susi die meisten Würfel?



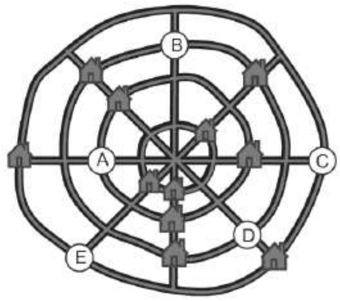


5 Würfel | 6 Würfel | 7 Würfel | 7 Würfel | **8 Würfel**



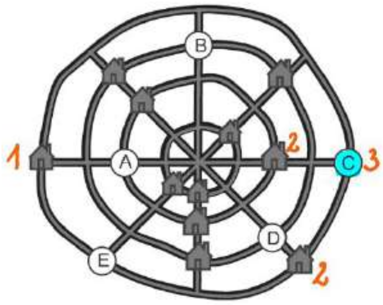
Unter jedem Turm muss am Boden ein Würfel sein.
Diese Würfel sind in allen Bildern (außer bei (A)) nicht sichtbar!

7. Ein Dorf hat 4 ringförmige Straßen und 4 gerade Straßen.
Das Dorf hat 12 Häuser.
Du kannst 11 davon im Plan sehen.
Auf jeder ringförmigen Straße sollen 3 Häuser stehen.
Auch auf jeder geraden Straße sollen 3 Häuser stehen.



Wo muss im Plan das 12. Haus stehen?

(A) auf A (B) auf B **(C)** auf C (D) auf D (E) auf E

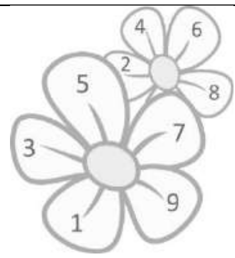


Am äußersten Ring stehen nur 2 Häuser. Deshalb kann nur an Stelle von C oder E ein Haus stehen.

Würde das Haus auf E stehen, wären auf der geraden Straße durch E 4 Häuser.

Deshalb muss das Haus auf **C** stehen.

8. Felix hat zwei Blumen mit je fünf Blütenblättern (siehe Bild).
Felix rechnet die fünf Zahlen auf jeder Blume zusammen.
Er erhält bei beiden Blumen das gleiche Ergebnis.

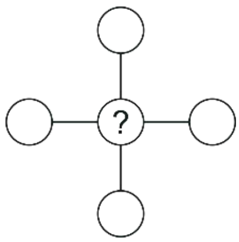


Welche Zahl steht auf dem verdeckten Blütenblatt?

(A) 7 **(B)** 5 (C) 3 (D) 1 (E) 0

Für die große Blume gilt die Rechnung 5 + 7 + 9 + 1 + 3 = 25.
Für die kleine Blume gilt die Rechnung 2 + 4 + 6 + 8 = 20.
Da Felix bei beiden Blumen das gleiche Ergebnis erhalten muss, muss auf dem verdeckten Blatt 25 – 20 = **5** stehen.

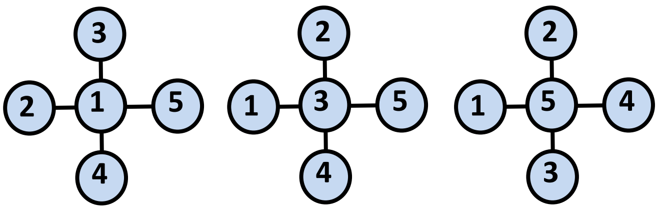
9. Roo schreibt jede der Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5 in einen der Kreise. Er rechnet die drei Zahlen entlang der Linie von oben nach unten zusammen. Dann rechnet er die drei Zahlen von links nach rechts zusammen. Die beiden Ergebnisse sind gleich.



Welche Zahlen können im Kreis mit dem Fragezeichen stehen?

(A) nur 5 **(B)** 1, 3 oder 5 (C) nur 3 (D) nur 1 oder 3 (E) 2, 3 oder 4

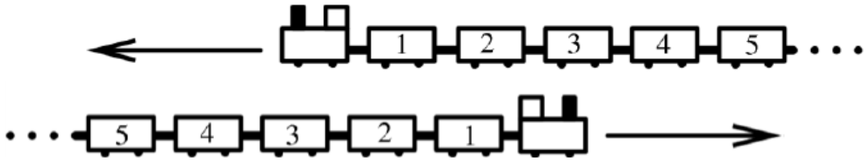
Durch Ausprobieren erhält man diese drei Lösungen:



2 + 1 + 5 = 8 1 + 3 + 5 = 9 1 + 5 + 4 = 10
3 + 1 + 4 = 8 2 + 3 + 4 = 9 2 + 5 + 3 = 10

Somit können die Zahlen **1, 3 oder 5** an Stelle des Fragezeichens eingesetzt werden.

10. Zwei gleiche Züge mit je 31 Waggons fahren aus entgegengesetzten Richtungen in einen Bahnhof ein. Die Waggons beider Züge sind der Reihe nach von 1 bis 31 nummeriert (siehe Bild).



Als die Züge im Bahnhof halten, stehen die beiden Waggons mit der Nummer 19 genau einander gegenüber.

Welcher Waggon ist gegenüber von Waggon Nummer 12?

(A) 7 (B) 12 (C) 21 **(D) 26** (E) 31

Beschrifte alle Waggons der beiden Züge. Die Waggons mit der Nummer 19 müssen dabei übereinanderstehen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31						
						31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

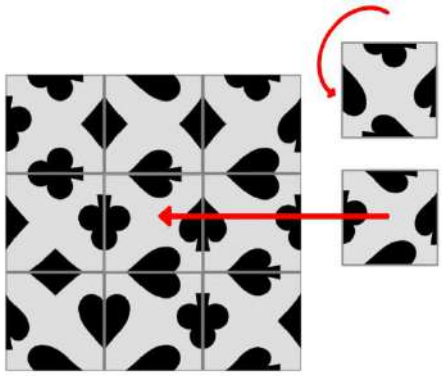
Man sieht, dass gegenüber des Waggons Nummer 12 der Waggon mit der Nummer **26** ist.

– 5 Punkte Beispiele –

11. Beim Zusammenlegen von Fliesen entstehen vier schwarze Figuren: ♣, ♦, ♥, ♠
Welche Fliese fehlt im Bild?

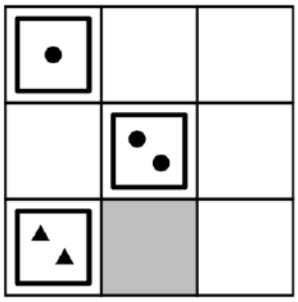
(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Das Bild **E** muss nach links gekippt werden. Dann hast du unten ein halbes Herz, links ein halbes Kleeblatt (Kreuz), und oben und rechts eine halbe Schaufel (Pik). Verschiebt man das Bild nun in das Feld mit dem Fragezeichen, siehts du vollständige schwarze Figuren.



12. Tom hat diese neun Karten:

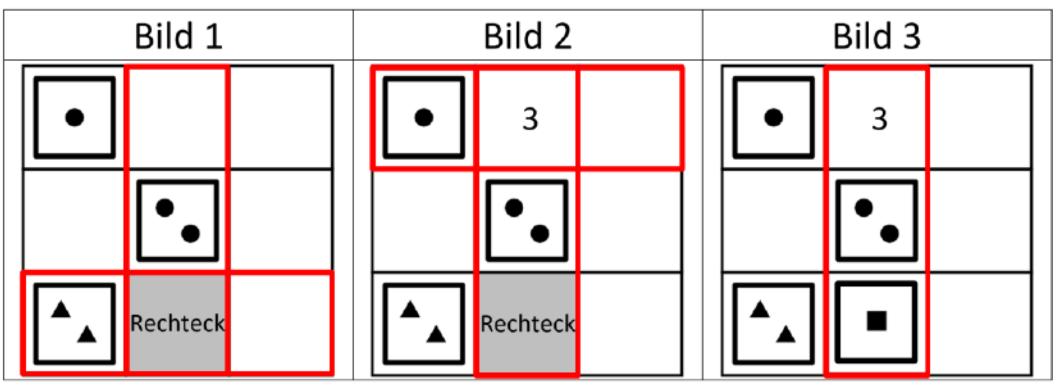
Er legt sie auf ein Spielbrett. Dabei muss in jeder Zeile und in jeder Spalte jede Anzahl (1, 2 und 3) und jede Form (Kreis, Dreieck und Viereck) genau einmal vorkommen.



Welche Karte muss Tom auf das graue Feld legen?

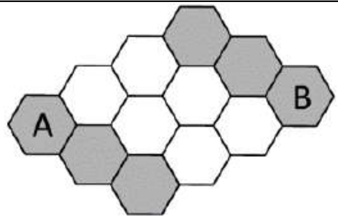
(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Die Figur im grauen Feld muss ein Rechteck sein, weil bereits Dreiecke in der gleichen Reihe sind und Punkte in der gleichen Spalte vorkommen (Bild 1).
Im Feld oben in der Mitte müssen drei Kreise, drei Dreiecke oder drei Rechtecke sein, da in der ersten Zeile bereits die Anzahl eins vorkommt und in der mittleren Spalte die Anzahl zwei vorkommt (Bild 2).
Da in der mittleren Spalte die Anzahlen drei und zwei vorkommen, muss in der grauen Zelle ein Rechteck stehen (Bild 3).



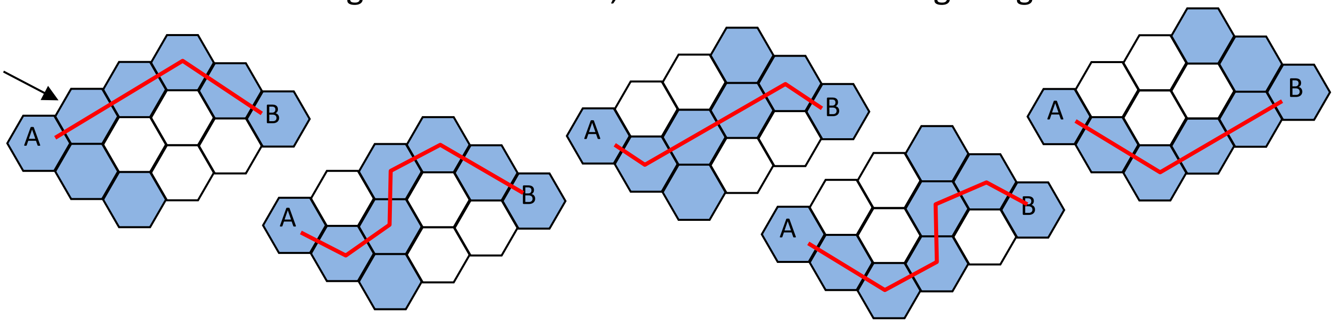
13. Biene Mark kann sich nur auf grauen Waben fortbewegen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau zwei weiße Waben grau zu färben, sodass Mark von A nach B gehen kann?



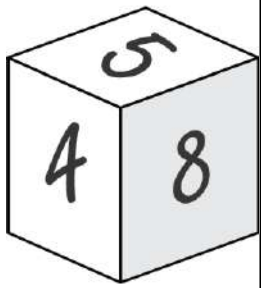
(A) 3 (B) 4 **(C) 5** (D) 6 (E) 7

Hier kannst du alle Möglichkeiten sehen, um von A nach B zu gelangen:



14. Mia schreibt auf jede Seite eines Würfels eine der Zahlen von 1 bis 9.
Sie darf dabei keine Zahl doppelt verwenden.
Rechnet sie die Zahlen auf zwei gegenüberliegenden Seiten zusammen, so erhält sie immer das gleiche Ergebnis.

Welche Zahl steht auf der gegenüberliegenden Seite der Zahl 5?



(A) 3 (B) 5 **(C) 6** (D) 7 (E) 9

Die 8 ist bereits zu sehen. Das kleinste mögliche Ergebnis, wenn du zu 8 eine andere Zahl dazuzählst, ist 8 + 1 = 9. Das geht jedoch nicht, da jede Zahl nur einmal vorkommen darf und gegenüber von 5 nicht noch eine 4 stehen darf.
Das zweitkleinste mögliche Ergebnis, wenn du zu 8 eine andere Zahl dazuzählst, ist

$$8 + 2 = 10.$$

Das geht jedoch auch nicht, da jede Zahl nur einmal vorkommen darf und so gegenüber von 5 noch eine 5 stehen müsste.
Das drittkleinste mögliche Ergebnis, wenn du zu 8 eine andere Zahl dazuzählst, ist

$$8 + 3 = 11.$$

Somit steht die 6 gegenüber der 5, wenn 5 + 6 = 11. Gegenüber der 4 steht die 7, denn

$$4 + 7 = 11.$$

Keine Zahl wurde doppelt verwendet und die Summe gegenüberliegender Seiten ist immer gleich.

15. John und Olivia tauschten Zuckerl aus.
Zuerst gab John Olivia so viele Zuckerl, wie sie vorher hatte.
Dann gab Olivia John so viele Zuckerl, wie er nach dem ersten Tausch hatte.
Danach hatte jeder der beiden vier Zuckerl.

Wie viele Zuckerl hatte John ganz zu Beginn?

(A) 6 **(B) 5** (C) 4 (D) 3 (E) 2

Starte beim letzten Satz: Da am Ende beide je 4 Zuckerl haben, gibt es insgesamt 8 Zuckerl. John hat diese 4 Zuckerl, da er von Olivia beim zweiten Tausch so viele bekommen hat, wie er nach dem ersten Tausch gehabt hat. Das bedeutet, er hat nach dem ersten Tausch 2 gehabt (2+ 2 = 4) und Olivia hat 6 gehabt (6 + 2 = 8).
Beim ersten Tausch gibt John Olivia so viele Zuckerl, wie sie zu Beginn gehabt hat. Da sie nach dem ersten Tausch 6 hat, muss sie zu Beginn 3 gehabt haben (3 + 3 = 6). Somit muss John zu Beginn 5 gehabt haben (8 – 3 = **5**).

	John	Olivia
am Ende	4	4
nach dem 1. Tausch	2	6
am Anfang	5	3

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2020
23. 3. 2020

Kategorie: Écolier, Schulstufe: 3. – 4.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

pwc

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

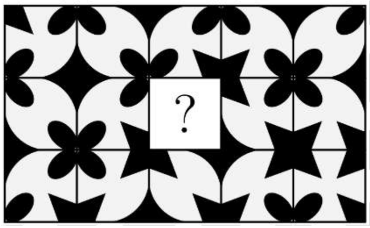
Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Écolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

- 3 Punkte Beispiele -

1. Mary macht von Montag bis Freitag je ein Foto von einem Pilz, der täglich wächst. Welches der Fotos hat sie am Dienstag aufgenommen?

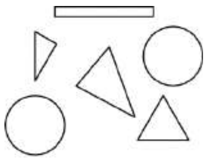
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

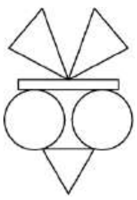
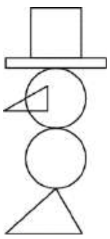
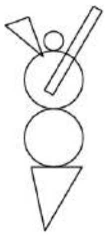
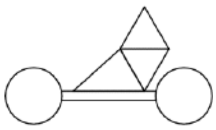
2. Beim Zusammenlegen von Fliesen entstehen diese schwarzen Figuren: 
Welche Fliese fehlt im Bild?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

3. Toni legt mit diesen sechs Teilen verschiedene Figuren.
Welche dieser Figuren kann Toni mit diesen Teilen bauen?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

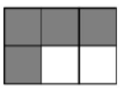
4. Elli malt für ein Hüpfspiel ein großes Quadrat auf den Boden (siehe Bild). Sie stellt sich auf das Feld mit der Zahl 1. Nun hüpft sie immer zu der Zahl weiter, die um 3 größer ist.
Wie lautet die größte Zahl, die Elli erreichen kann?
(A) 11 (B) 14 (C) 18 (D) 19 (E) 24

1	5	8	11
4	7	10	14
24	23	13	18
21	19	16	20

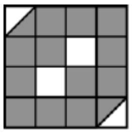
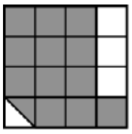
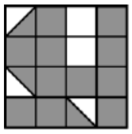
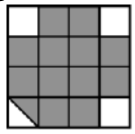
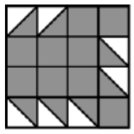
5. Tom malt alle Quadrate mit dem Rechenergebnis 20 an.

Welches Muster erhält er?

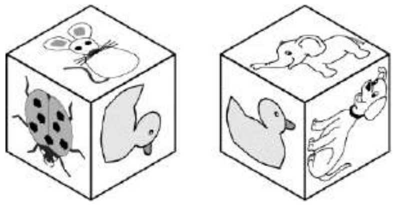
$16+4$	$19+1$	$28-8$
$2\cdot 10$	$16-4$	$7\cdot 3$

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. In welchem der folgenden Quadrate siehst du am wenigsten Weiß?

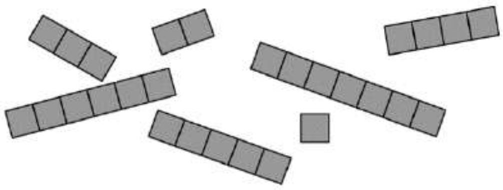
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Jörg klebt je eines der sechs Bilder  auf die Seiten eines Würfels.
Rechts siehst du zwei Fotos von diesem Würfel.
Welches Bild klebt auf der gegenüberliegenden Seite von der Seite mit der Ente?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

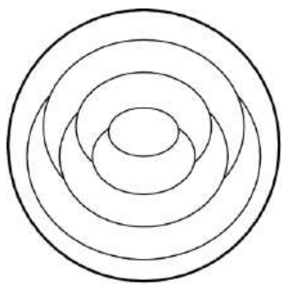
8. Vor Casper liegen sieben graue Teile (siehe rechts).
Dieser Streifen 
soll mit möglichst vielen von ihnen ausgelegt werden.
Es dürfen sich jedoch keine Teile überlappen.
Wie viele Teile verwendet Casper?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

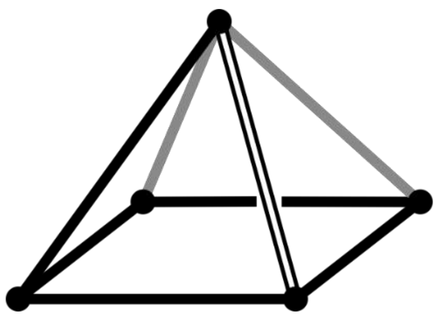
- 4 Punkte Beispiele -

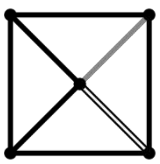
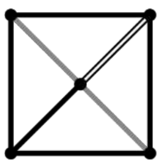
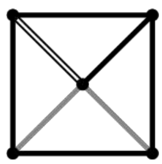
9. Cindy bemalt jedes Feld in dem Bild rechts. Dazu verwendet sie die drei Farben rot, blau und gelb. Benachbarte Felder müssen verschiedene Farben haben. Den äußeren Ring malt sie rot an.
Wie viele Felder sind am Ende rot angemalt?

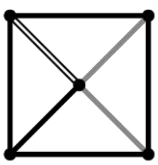
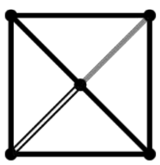


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

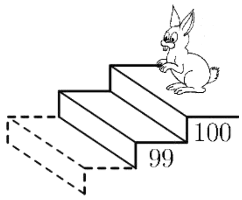
10. Luis betrachtet die Pyramide von oben. Welches Bild sieht er?



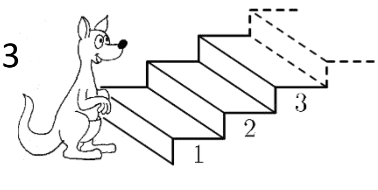
(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

11. Das Känguru hüpft immer drei Stufen aufwärts.
Jedes Mal, wenn das Känguru aufwärts hüpft, dann hüpft der Hase zwei Stufen abwärts (siehe Bild).
Auf welcher Stufe treffen sie sich?

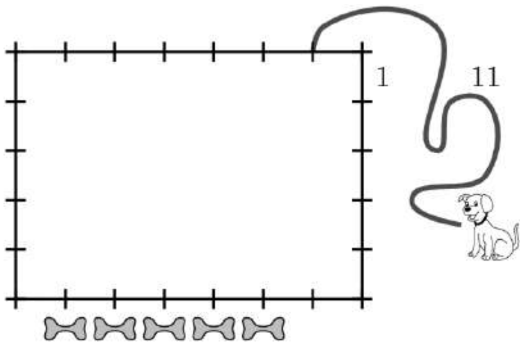


(A) 53 (B) 60 (C) 63 (D) 70 (E) 73



12. Dennis bindet seinen Hund 1 Meter neben der Ecke eines rechteckigen Hauses an. Das Haus ist 7 Meter lang und 5 Meter breit. Die Leine ist 11 Meter lang. Dennis legt fünf Leckerli aus (siehe Bild).
Wie viele Leckerli kann der Hund erreichen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

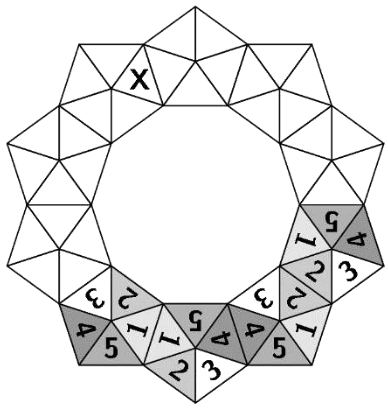


13. Die Königin möchte die drei Vornamen von Rumpelstilzchens Frau herausfinden.
Sie fragt diese: „Heißt du Adele Lilly Cleo?“
„Heißt du Adele Laura Cora?“
„Heißt du Abbey Laura Cleo?“
Bei jeder Frage stimmen genau ein Name und seine Position.
Wie heißt Rumpelstilzchens Frau?

(A) Abbey Lilly Cora (B) Abbey Laura Cora (C) Adele Laura Cleo
(D) Adele Lilly Cora (E) Abbey Laura Cleo

14. Amelie möchte einen Kranz bauen.
Dazu legt sie diese fünfeckigen Steine aneinander.
Dort, wo sich zwei Steine berühren, müssen die gleichen Zahlen stehen (siehe Bild).
Welche Zahl muss in dem Dreieck mit dem X stehen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



15. Farid hat kurze und lange Hölzchen, die entweder 1 cm lang oder 3 cm lang sind.
Er legt mit seinen Hölzchen ein Quadrat. Dazu darf er kein Hölzchen auseinanderbrechen.
Es dürfen auch keine Hölzchen übereinander liegen.
Mit welchen Hölzchen kann er ein Quadrat legen?

(A) mit 5 kurzen und 2 langen (B) mit 3 kurzen und 3 langen (C) mit 6 kurzen
(D) mit 4 kurzen und 2 langen (E) mit 6 langen

16. Von 6 Kindern bestellt sich jedes eine Kugel Eis mit Deko. Zusammen bestellen sie 3 Kugeln Vanilleeis, 2 Kugeln Erdbeereis und 1 Kugel Nusseis. Als Deko nehmen sie 3 Kirschen, 2 Waffeln und 1 Schokostück.
Jedes Kind soll eine andere Eis-Kombination bekommen.
Welche der folgenden Kombinationen ist nicht möglich?

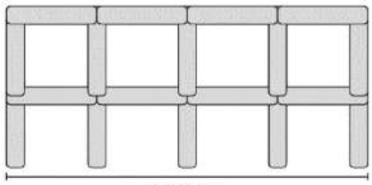
(A) Erdbeere mit Kirsche (B) Vanille mit Kirsche (C) Nuss mit Waffel
(D) Erdbeere mit Waffel (E) Vanille mit Schokostück

- 5 Punkte Beispiele -

17. Karin denkt sich drei Zahlen aus. Sie zählt diese zusammen und erhält 50. Danach zieht sie von jeder der drei Zahlen die gleiche Geheimzahl ab und erhält 24, 13 und 7.
Welche der folgenden Zahlen ist eine der drei ausgedachten Zahlen?

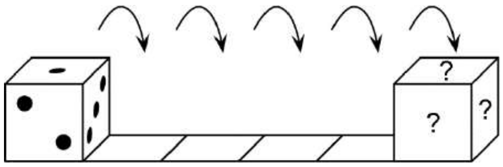
(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 17 (E) 23

18. Leni baut einen 10 Meter langen Zaun aus 1 Meter langen Latten  . Im Bild sieht man 4 Meter von diesem Zaun. Wie viele Latten benötigt Leni für ihren Zaun?



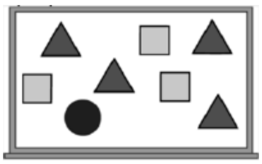
(A) 22 (B) 30 (C) 33 (D) 40 (E) 42

19. Zwei gegenüberliegende Seiten eines Würfels haben zusammen sieben Punkte.
Ein Würfel wird auf das erste Feld gelegt (siehe Bild).
Danach wird er von Feld zu Feld nach rechts gerollt.
Am sechsten Feld bleibt er liegen.
Wie viele Punkte haben die drei Seiten mit den Fragezeichen zusammen?



(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 11 (E) 12

20. Die Zahlen von 1 bis 8 werden auf eine Tafel geschrieben. Dann verdeckt der Lehrer sie mit Dreiecken, Quadraten und einem Kreis (siehe Bild).
Man zählt alle Zahlen unter den Dreiecken zusammen. Das ergibt 10.
Man zählt alle Zahlen unter den Quadraten zusammen. Das ergibt 20.
Welche Zahl wird vom Kreis verdeckt?

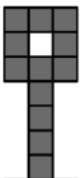
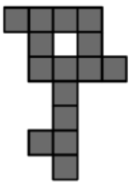
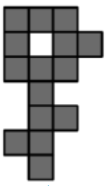
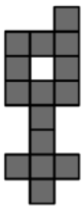
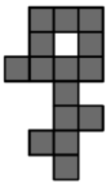


(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

21. Jane malt die Köpfe, Flügel und Schwänze von Vögeln mit drei verschiedenen Farben an.
Sie malt bei einem Vogel den Kopf rot, die Flügel grün und den Schwanz blau an.
Wie viele weitere Vögel kann sie mit denselben Farben anmalen, sodass sie lauter unterschiedliche Vogelbilder erhält?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 9

22. Zum Känguru-Camp kommen viele Siegerteams. Jedes Team setzt sich aus 5 oder 6 Teilnehmern zusammen. Insgesamt kommen 43 Personen.
Wie viele Teams kommen zum Camp?
(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 4

23. Eine Figur soll in drei verschieden geformte Teile zerschnitten werden. Dabei muss jeder Teil aus fünf Quadraten bestehen.
Welche dieser Figuren kann man nicht so zerschneiden?


(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

24. Anna ersetzt in der Rechnung KAN – ROO + GA die Buchstaben durch Zahlen von 1 bis 9.
Für verschiedene Buchstaben verwendet sie auch verschiedene Zahlen. Gleiche Buchstaben ersetzt sie durch gleiche Zahlen. Dann berechnet sie das Ergebnis.
Wie lautet das größtmögliche Ergebnis?
(A) 925 (B) 933 (C) 939 (D) 942 (E) 948

Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E	E	E	D	A	A	E	C	C	C	B	D	A	D	B	C	A	E	B	D	D	B	B	D

– 3 Punkte Beispiele –

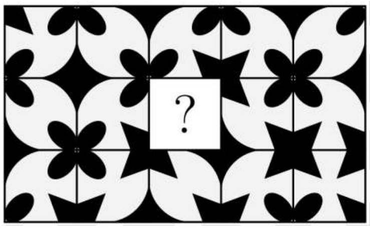
1. Mary macht von Montag bis Freitag je ein Foto von einem Pilz, der täglich wächst. Welches der Fotos hat sie am Dienstag aufgenommen?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Die fünf Antworten zeigen die fünf Fotos, die Mary von Montag bis Freitag macht. Am Montag ist der Pilz am kleinsten (Antwort B), am Dienstag ist er schon einen Tag gewachsen.

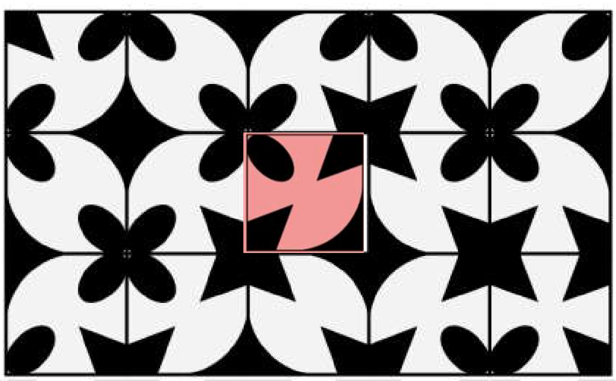
Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
 (B)	 (E)	 (C)	 (A)	 (D)

2. Beim Zusammenlegen von Fliesen entstehen diese schwarzen Figuren: 
Welche Fliese fehlt im Bild?

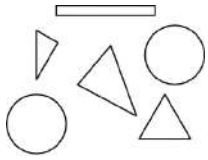


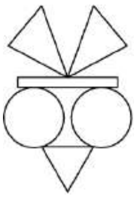
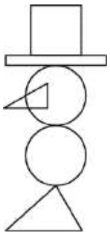
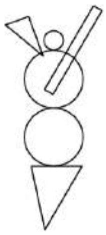
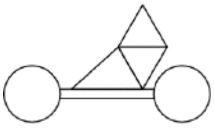
(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Die fehlende Fliese muss im linken oberen Eck rund sein, rechts oben und links unten einen Zacken des Sternes haben und rechts unten das Viereck ergänzen:



3. Toni legt mit diesen sechs Teilen verschiedene Figuren.
Welche dieser Figuren kann Toni mit diesen Teilen bauen?



(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Die Figur muss aus zwei gleichen Kreisen, einem Stab und einem großen, einem mittleren und einem kleinen Dreieck bestehen. Nur Figur E besteht aus den sechs Teilen.

4. Elli malt für ein Hüpfspiel ein großes Quadrat auf den Boden (siehe Bild).
Sie stellt sich auf das Feld mit der Zahl 1. Nun hüpft sie immer zu der Zahl weiter, die um 3 größer ist.
Wie lautet die größte Zahl, die Elli erreichen kann?

1	5	8	11
4	7	10	14
24	23	13	18
21	19	16	20

(A) 11 (B) 14 (C) 18 **(D)** 19 (E) 24

Elli beginnt bei der Zahl 1 zu hüpfen, nun zählt sie immer 3 dazu. 1+3 = 4, 4+3 = 7, 7+3 = 10, 10+3 = 13, 13+3 = 16, 16+3 = 19, 19+3 = 22, die Zahl 22 ist allerdings nicht mehr auf ihrem Quadrat eingezeichnet. Elli kann also nicht weiter als bis zur Zahl 19 hüpfen.

1	5	8	11
4	7	10	14
24	23	13	18
21	19	16	20

5. Tom malt alle Quadrate mit dem Rechenergebnis 20 an.

Welches Muster erhält er?

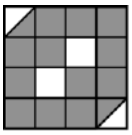
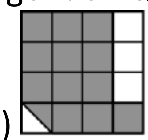
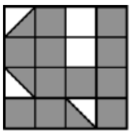
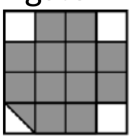
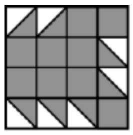
$16+4$	$19+1$	$28-8$
$2 \cdot 10$	$16-4$	$7 \cdot 3$

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

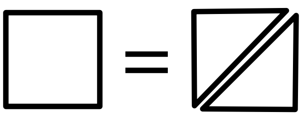
Rechenergebnis 20: 16+4 = 20, 19+1 = 20, 28-8 = 20, 2*10 = 20
ABER: 16-4 = 12 und 7*3 = 21

$16+4$	$19+1$	$28-8$
$2 \cdot 10$	$16-4$	$7 \cdot 3$

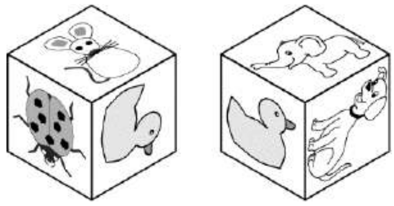
6. In welchem der folgenden Quadrate siehst du am wenigsten Weiß?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Die weißen Flächen in den Bildern sind entweder Vierecke oder Dreiecke. Zwei Dreiecke kann man zu einem Viereck zusammenlegen. Macht man dies, erhält man bei Antwort A drei Vierecke, bei allen weiteren Antworten aber drei Vierecke und noch ein Dreieck.

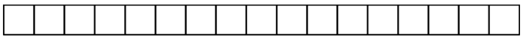


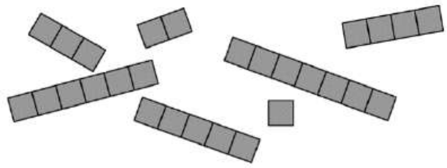
7. Jörg klebt je eines der sechs Bilder  auf die Seiten eines Würfels.
Rechts siehst du zwei Fotos von diesem Würfel.
Welches Bild klebt auf der gegenüberliegenden Seite von der Seite mit der Ente?



(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

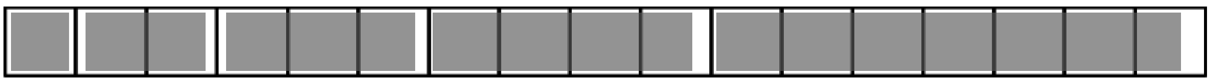
Ein Würfel hat sechs Seiten. An eine Seite grenzen vier weitere Seiten, die gegenüberliegende Seite grenzt als einzige nicht an diese Seite. Wir wissen, dass der Elefant oben an die Seite mit der Ente grenzt, der Hund grenzt rechts, die Maus grenzt links und der Marienkäfer grenzt unten an die Ente. Diese vier Tiere grenzen also an die Seite mit der Ente. Die Fliege muss also auf der gegenüberliegenden Seite sein.

8. Vor Casper liegen sieben graue Teile (siehe rechts).
Dieser Streifen 
soll mit möglichst vielen von ihnen ausgelegt werden.
Es dürfen sich jedoch keine Teile überlappen.
Wie viele Teile verwendet Casper?



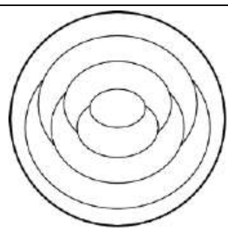
(A) 3 (B) 4 **(C)** 5 (D) 6 (E) 7

Der Streifen, den Caspar auslegen soll, hat 17 Kästchen. Ihm stehen Teile mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 Kästchen zur Verfügung. Je kleiner die Teile sind, desto mehr muss Caspar verwenden. Er beginnt also mit den kleineren Teilen. Mit den vier kleinsten Teilen kann er 10 Kästchen belegen, 1+2+3+4 = 10. Für das übrige Stück braucht er das „7er-Teil“, 10+7 = 17. Er braucht also 5 Teile.



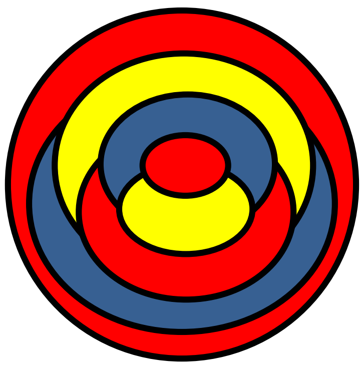
4 Punkte Beispiele

9. Cindy bemalt jedes Feld in dem Bild rechts. Dazu verwendet sie die drei Farben rot, blau und gelb. Benachbarte Felder müssen verschiedene Farben haben. Den äußeren Ring malt sie rot an.
Wie viele Felder sind am Ende rot angemalt?

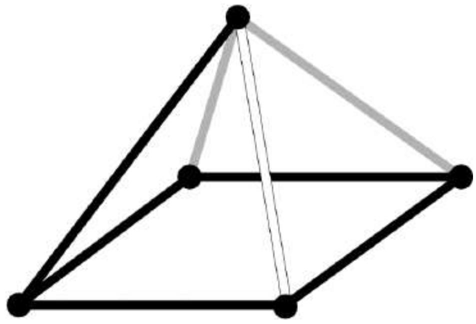


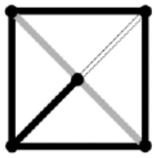
(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

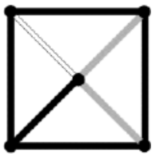
Der äußere Ring ist rot, die beiden angrenzenden Flächen müssen also blau und gelb sein. Man erhält folgendes Muster (s. Bild). Auch wenn die Farben gelb und blau vertauscht werden, hat man immer 3 rote Flächen:



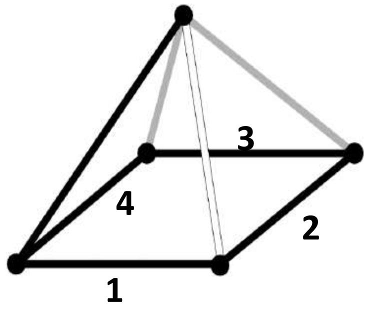
10. Luis betrachtet die Pyramide von oben. Welches Bild sieht er?

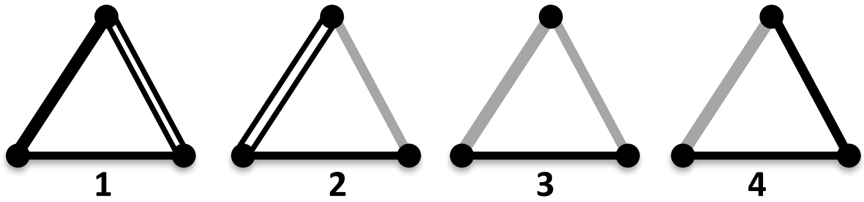


(A)  (B)  **(C)** 

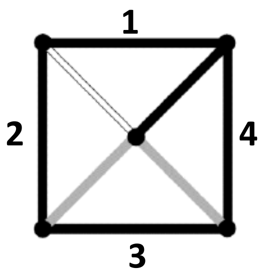
(D)  (E) 

Von oben betrachtet sieht Luis ein Viereck aus schwarzen Rändern und vier Dreiecke mit unterschiedlichen Rändern. Folgende Dreiecke sieht er:

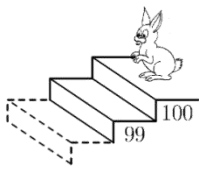


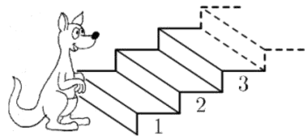


Das passt zu Lösung (C):



11. Das Känguru hüpft immer drei Stufen aufwärts.
Jedes Mal, wenn das Känguru aufwärts hüpft, dann hüpft der Hase zwei Stufen abwärts (siehe Bild).
Auf welcher Stufe treffen sie sich?



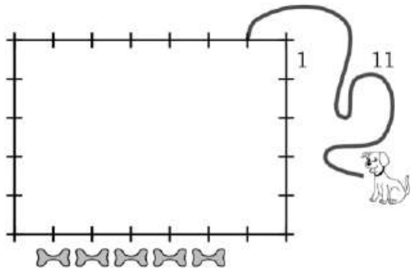


(A) 53 **(B)** 60 (C) 63 (D) 70 (E) 73

Der Hase hüpft 2 Stufen, das Känguru hüpft 3 Stufen. Nach dem ersten Mal Hüpfen sind sie also gemeinsam 2+3 = 5 Stufen von den 100 Stufen gehüpft. Sie treffen sich, wenn sie gemeinsam alle 100 Stufen gehüpft sind, also nach 100:5 = 20 Mal Hüpfen. Nach 20 Mal hüpfen steht das Känguru auf der Stufe **3*20 = 60**. (Und der Hase auch, denn er ist 2*20 Stufen gehüpft und steht auf der Stufe **100-40 = 60**.)

12. Dennis bindet seinen Hund 1 Meter neben der Ecke eines rechteckigen Hauses an. Das Haus ist 7 Meter lang und 5 Meter breit. Die Leine ist 11 Meter lang. Dennis legt fünf Leckerli aus (siehe Bild).
Wie viele Leckerli kann der Hund erreichen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 4 (E) 5



Die lange Seite des Rechtecks ist in 7 Einheiten unterteilt. Da sie gesamt 7 Meter lang ist, ist eine Einheit 1 Meter. Das erste Leckerli ist also 2 Meter neben der rechten unteren Ecke, die weiteren Leckerli in einem Abstand von 1 Meter. Der Weg des Hundes zum ersten Leckerli ist somit:
1 Meter bis zur Ecke + 5 Meter entlang der Seite + 2 Meter zum Leckerli = 8 Meter.
Da die Leine gesamt 11 Meter lang ist, bleiben noch 11-8 = 3 Meter Leine übrig. Nach dem ersten Leckerli kann er also noch 3 weitere Leckerli erreichen, das macht gesamt 4 Leckerli.

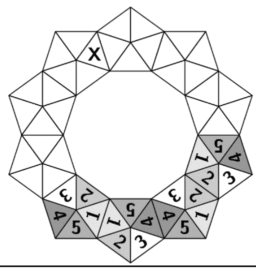
13. Die Königin möchte die drei Vornamen von Rumpelstilzchens Frau herausfinden.
Sie fragt diese: „Heißt du Adele Lilly Cleo?"
„Heißt du Adele Laura Cora?"
„Heißt du Abbey Laura Cleo?"
Bei jeder Frage stimmen genau ein Name und seine Position.
Wie heißt Rumpelstilzchens Frau?

(A) Abbey Lilly Cora (B) Abbey Laura Cora (C) Adele Laura Cleo
(D) Adele Lilly Cora (E) Abbey Laura Cleo

Bei jeder Frage stimmt nur genau ein Name und die Position dieses Namens. Kommt ein Name bei zwei Fragen an der gleichen Stelle vor, kann dieser Name also nicht stimmen. An der ersten Stelle kommt Adele in 2 Fragen vor, der richtige Name ist also **Abbey**. An der zweiten Stelle kommt Laura in 2 Fragen vor, der richtige Name ist also **Lilly**. Und an der dritten Stelle kommt Cleo in 2 Fragen vor, der richtige Name ist also **Cora**. Die Frau von Rumpelstilzchen heißt daher **Abbey Lilly Cora**.

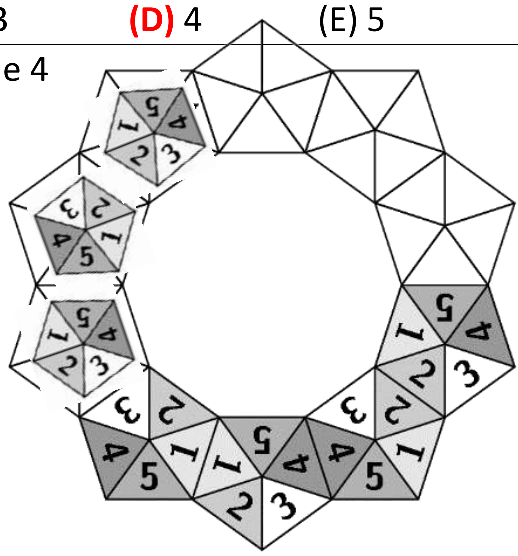
14. Amelie möchte einen Kranz bauen.
Dazu legt sie diese fünfeckigen Steine aneinander.

Dort, wo sich zwei Steine berühren, müssen die gleichen Zahlen stehen (siehe Bild).
Welche Zahl muss in dem Dreieck mit dem X stehen?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 4 (E) 5

An der Stelle mit dem X steht die 4



15. Farid hat kurze und lange Hölzchen, die entweder 1 cm lang oder 3 cm lang sind.
Er legt mit seinen Hölzchen ein Quadrat. Dazu darf er kein Hölzchen auseinanderbrechen.
Es dürfen auch keine Hölzchen übereinander liegen.
Mit welchen Hölzchen kann er ein Quadrat legen?

(A) mit 5 kurzen und 2 langen (B) mit 3 kurzen und 3 langen (C) mit 6 kurzen
(D) mit 4 kurzen und 2 langen (E) mit 6 langen

Ein Quadrat ist ein Viereck mit 4 gleich langen Seiten. Farid muss also mit seinen Hölzchen 4 gleich lange Seiten legen können. Oder anders ausgedrückt: Die Gesamtlänge aller Hölzchen muss durch 4 ohne Rest teilbar sein. Dies ist nur bei Antwort B der Fall:
3*1 + 3*3 = 12 und 12:4 = 3

16. Von 6 Kindern bestellt sich jedes eine Kugel Eis mit Deko. Zusammen bestellen sie 3 Kugeln Vanilleeis, 2 Kugeln Erdbeereis und 1 Kugel Nusseis. Als Deko nehmen sie 3 Kirschen, 2 Waffeln und 1 Schokostück.
Jedes Kind soll eine andere Eis-Kombination bekommen.
Welche der folgenden Kombinationen ist nicht möglich?

(A) Erdbeere mit Kirsche (B) Vanille mit Kirsche (C) Nuss mit Waffel
(D) Erdbeere mit Waffel (E) Vanille mit Schokostück

Jedes Kind soll eine andere Eis-Kombination bekommen. Wir haben 3 Kugeln Vanilleeis und 3 unterschiedliche Dekos zur Auswahl. Jede Kugel Vanilleeis muss also eine andere Deko bekommen: Vanille mit Kirsche, Vanille mit Waffel und Vanille mit Schokostück. Für die weiteren Eiskugeln bleiben uns noch 2 Kirschen und 1 Waffel übrig. Die 2 Kugeln Erdbeereis müssen wieder 2 unterschiedliche Dekos bekommen: Erdbeereis mit Kirsche und Erdbeereis mit Waffel. Uns bleibt für die Kugel Nusseis also nur die dritte Kirsche als Deko. Ein **Nusseis mit Waffel** kann also keiner bekommen.

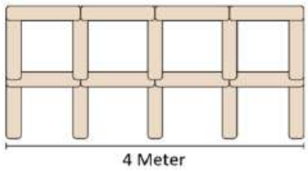
– 5 Punkte Beispiele –

17. Karin denkt sich drei Zahlen aus. Sie zählt diese zusammen und erhält 50. Danach zieht sie von jeder der drei Zahlen die gleiche Geheimzahl ab und erhält 24, 13 und 7.
Welche der folgenden Zahlen ist eine der drei ausgedachten Zahlen?

(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 17 (E) 23

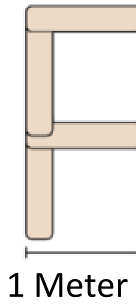
Wenn wir die Zahlen 24, 13 und 7 zusammenzählen, erhalten wir 24+13+7 = 44. Uns fehlen noch 50-44 = 6. Andererseits müssen wir beachten, dass wir zu jeder dieser drei Zahlen auch noch dieselbe Geheimzahl dazuzählen müssen. Drei Mal die Geheimzahl muss also 6 sein. Die Geheimzahl ist daher 6:3 = 2. Die drei Zahlen von Karin sind 26, 15 und **9**.

18. Leni baut einen 10 Meter langen Zaun aus 1 Meter langen Latten . Im Bild sieht man 4 Meter von diesem Zaun. Wie viele Latten benötigt Leni für ihren Zaun?

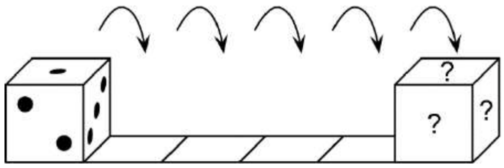


(A) 22 (B) 30 (C) 33 (D) 40 **(E)** 42

Im Bild sieht man 4 Meter des Zaunes. Wenn wir dieses Stück in 4 Einheiten unterteilen, sehen wir, wie viel Latten wir für 1 Meter brauchen.
Um 1 Meter Zaun zu bauen, brauchen wir also insgesamt 4 Latten.
Für 10 Meter braucht man also 4*10 Latten = 40 Latten.
Dazu kommen noch die 2 Latten am Ende. 40+2 = 42 Latten.

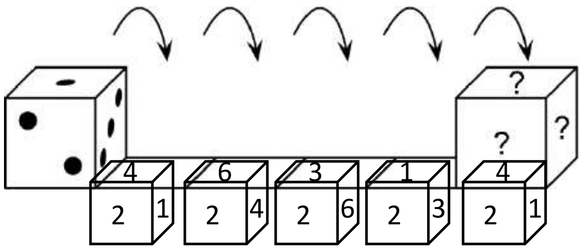


19. Zwei gegenüberliegende Seiten eines Würfels haben zusammen sieben Punkte.
Ein Würfel wird auf das erste Feld gelegt (siehe Bild).
Danach wird er von Feld zu Feld nach rechts gerollt.
Am sechsten Feld bleibt er liegen.
Wie viele Punkte haben die drei Seiten mit den Fragezeichen zusammen?

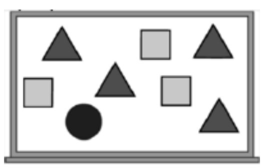


(A) 6 **(B)** 7 (C) 9 (D) 11 (E) 12

Zwei gegenüberliegende Seiten des Würfels haben zusammen 7 Punkte. Gegenüber von der 3 liegt also 7-3 = 4. Und gegenüber von 1 liegt 7-1 = 6. Rollen wir den Würfel das erste Mal nach rechts, liegt er auf der 3 (siehe Bild). Das nächste Mal auf der 1. Dann auf der 4. Dann auf der 6. Und nach dem letzten Mal rollen liegt er wieder auf der 3. Die Seite **1** liegt somit auf der rechten Seite und die Seite **4** liegt oben gegenüber der Seite 3. Die vordere Seite mit der **2** ändert sich durch das Rollen nicht. Die Punkte der 3 Seiten ergeben zusammen also **1+4+2** = 7



20. Die Zahlen von 1 bis 8 werden auf eine Tafel geschrieben. Dann verdeckt der Lehrer sie mit Dreiecken, Quadraten und einem Kreis (siehe Bild).
Man zählt alle Zahlen unter den Dreiecken zusammen. Das ergibt 10.
Man zählt alle Zahlen unter den Quadraten zusammen. Das ergibt 20.
Welche Zahl wird vom Kreis verdeckt?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 **(D)** 6 (E) 7

Zählt man die Zahlen unter den Dreiecken zusammen, ergibt das 10. Es gibt insgesamt 4 Dreiecke, man muss also 4 Zahlen zusammenzählen und 10 erhalten. Damit man 4 Zahlen zusammenzählen und 10 erhalten kann, müssen das sehr kleine Zahlen sein: 1+2+3+4 = 10
Uns bleiben also noch die Zahlen 5, 6, 7, 8. Drei von diesen Zahlen stehen unter den Quadraten und ergeben zusammen 20. Das ist nur mit 5+7+8 = 20 möglich. Unter dem Kreis muss also die Zahl **6** stehen.

ZWEITE MÖGLICHKEIT: Man kann diese Beispiel auch lösen, ohne zu wissen, welche Zahlen unter den Dreiecken und Quadraten stehen. Zählt man alle Zahlen von 1 bis 8 zusammen, erhält man 36. Zählt man die Zahlen unter den Quadraten und die Zahlen unter den Dreieck zusammen, erhält man 10 + 20 =30. Die Zahl unter dem Kreis muss also 36-30 = **6** sein.

21. Jane malt die Köpfe, Flügel und Schwänze von Vögeln mit drei verschiedenen Farben an. Sie malt bei einem Vogel den Kopf rot, die Flügel grün und den Schwanz blau an.
Wie viele weitere Vögel kann sie mit denselben Farben anmalen, sodass sie lauter unterschiedliche Vogelbilder erhält?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 **(D)** 5 (E) 9

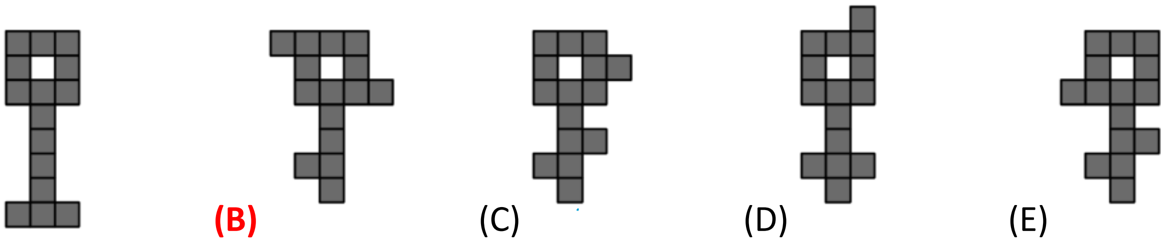
Jane hat für den Kopf, die Flügel und den Schwanz des Vogels die Farben rot, grün und blau zur Verfügung. Malt sie den Kopf rot an, kann sie Schwanz und Flügel in grün und blau oder in blau und grün anmalen, sie hat also 2 Möglichkeiten. Malt sie den Kopf grün an, kann sie Schwanz und Flügel in rot und blau oder in blau und rot anmalen, sie hat also wieder 2 Möglichkeiten. Malt sie den Kopf blau an, kann sie Schwanz und Flügel in rot und grün oder in grün und rot anmalen, wieder 2 Möglichkeiten. Insgesamt hat sie also 6 Möglichkeiten. 1 Möglichkeit steht bereits in der Angabe, es bleiben noch **5** weitere Möglichkeiten.

22. Zum Känguru-Camp kommen viele Siegerteams. Jedes Team setzt sich aus 5 oder 6 Teilnehmern zusammen. Insgesamt kommen 43 Personen.
Wie viele Teams kommen zum Camp?

(A) 9 **(B)** 8 (C) 7 (D) 6 (E) 4

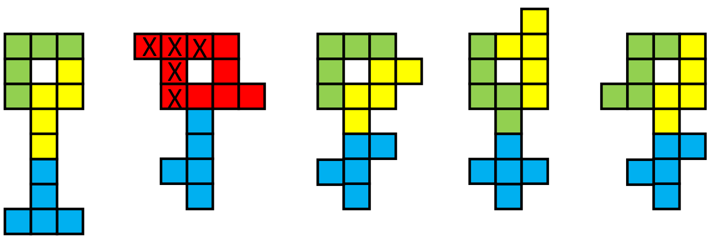
Jedes Team hat entweder 5 oder 6 Personen. Hätte jedes Team 6 Personen, würden 7 Teams höchstens 6*7 = 42 Personen haben. Bei 7 Teams oder weniger können also nie 43 Personen kommen. Hätte jedes Team 5 Personen, müssen bei 9 Teams zumindest 5*9 = 45 Personen kommen. Bei 9 Teams kommen immer mehr als 43 Personen.
Man kann also nur mit **8** Teams auf 43 Personen kommen: 5***5** + 6***3** = 25+18 = 43

23. Eine Figur soll in drei verschieden geformte Teile zerschnitten werden. Dabei muss jeder Teil aus fünf Quadraten bestehen.
Welche dieser Figuren kann man nicht so zerschneiden?



(A) **(B)** (C) (D) (E)

Figuren A, C, D und E kann man in 3 unterschiedliche Teile schneiden.



Bei Figur B müssen die untersten 5 Quadrate in einem Teil sein. Die restliche Figur kann immer nur in gleiche Teile geschnitten werden.

24. Anna ersetzt in der Rechnung KAN – ROO + GA die Buchstaben durch Zahlen von 1 bis 9. Für verschiedene Buchstaben verwendet sie auch verschiedene Zahlen. Gleiche Buchstaben ersetzt sie durch gleiche Zahlen. Dann berechnet sie das Ergebnis.
Wie lautet das größtmögliche Ergebnis?
(A) 925 (B) 933 (C) 939 (D) 942 (E) 948

Wir suchen das größtmögliche Ergebnis. Wir zählen KANN und GA zusammen, diese Zahlen sollten also möglichst groß sein. Da wir die Zahl ROO abziehen, sollte diese möglichst klein sein. Die kleinste Zahl, die wir für ROO einsetzen können ist 122 (R=1 und O = 2).
Damit die Zahl KAN möglichst groß ist, müssen die Hunderterstelle und die Zehnerstelle der Zahl möglichst groß sein. K muss also 9 sein und A muss 8 sein. Somit fehlen uns noch die Buchstaben G und N. Für ein möglichst großes Ergebnis der Rechnung muss auch 8N + G8 möglichst groß sein. G8 ist möglichst groß, wenn die Zehnerstelle der Zahl möglichst groß ist. Die größte Zahl von 1 bis 9, die wir noch nicht verwendet haben, ist 7, also G = 7. Für N bleiben uns noch die Zahlen 5 und 6. Wir nehmen die größere dieser Zahlen, N = 6. Die Rechnung lautet somit: 986 – 122 + 78 = 942.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2020
23. 3. 2020

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5. – 6.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen
Antwort in das Kästchen unter die Nummer des
Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

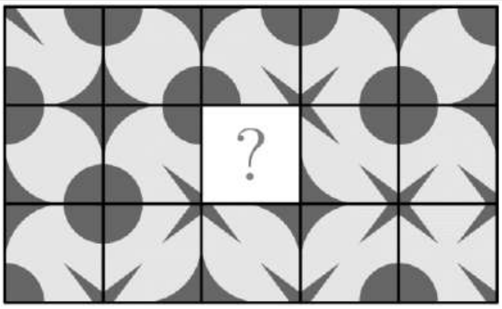
pwc

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

- 3 Punkte Beispiele –

1. In jeder inneren Ecke sollen vier gleiche Figuren zusammenstoßen. Welcher Teil fehlt im Bild?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Als Amira von Atown nach Betown spaziert, kommt sie an fünf Wegweisern vorbei. Einer dieser Wegweiser ist falsch. Welcher?

(A) 

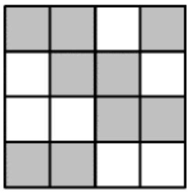
(B) 

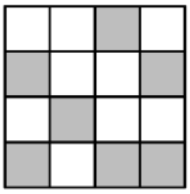
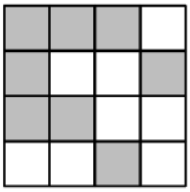
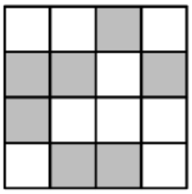
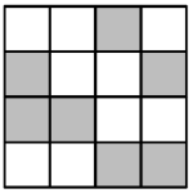
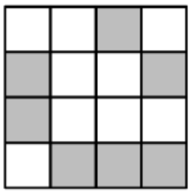
(C) 

(D) 

(E) 

3. Das große Quadrat besteht aus kleinen weißen und grauen Quadraten. Wie sieht das große Quadrat aus, wenn die Farben vertauscht werden?

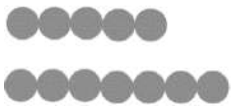


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Niko möchte für seine Geburtstagsparty 24 Muffins backen. Für sechs Muffins benötigt er zwei Eier. Die Eier werden in Sechser-Packungen verkauft. Wie viele Sechser-Packungen muss Niko kaufen?

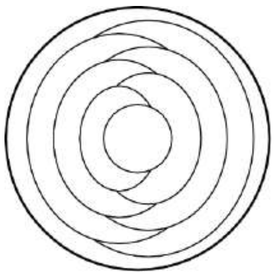
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 8

5. Kim hat einige Ketten mit den Längen 5 und 7. Indem Kim mehrere Ketten aneinanderreiht, erhält sie Ketten verschiedener Längen. Welche Länge kann so eine Kette nicht haben?



(A) 10 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

6. Cindy färbt jede Fläche des Musters entweder rot, blau oder gelb. Benachbarte Flächen bemalt sie mit verschiedenen Farben. Cindy beginnt mit der äußersten Fläche und färbt sie blau. Wie viele der Flächen werden nach Fertigstellung blau bemalt sein?

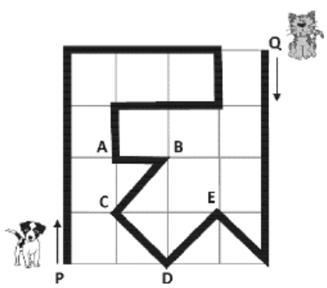


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Maria hat 10 Blätter Papier. Sie schneidet einige davon in jeweils fünf Teile. Nun hat Maria insgesamt 22 Stück. Wie viele Blätter hat sie zerschnitten?

(A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 8

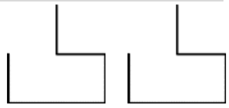
8. Ein Hund und eine Katze spazieren im Park entlang des Weges, der durch die dicke schwarze Linie gekennzeichnet wird. Der Hund startet im Punkt P. Gleichzeitig startet die Katze im Punkt Q. Der Hund spaziert dreimal so schnell wie die Katze. In welchem Punkt treffen sie sich?

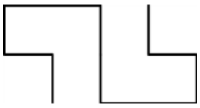
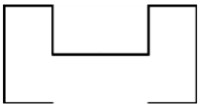
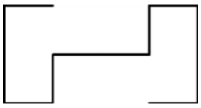
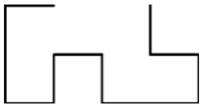
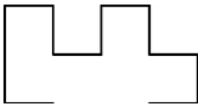


(A) in A (B) in B (C) in C (D) in D (E) in E

- 4 Punkte Beispiele -

9. Georg hat zwei gleich geformte Drahtteile (siehe Abbildung).
Welche der folgenden Figuren kann Georg nicht bilden, wenn er beide Teile zusammenfügt?

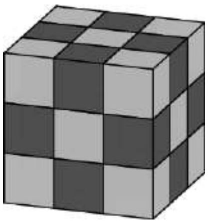
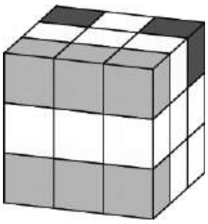
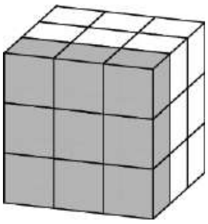
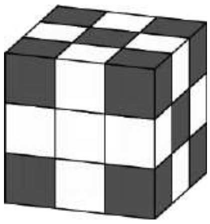
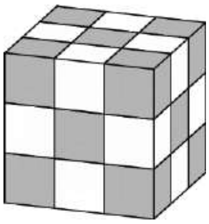


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Der Kobold lügt immer. Die Elfe sagt immer die Wahrheit.
Welchen der folgenden Sätze können beide sagen, wenn sie sich treffen?

(A) Ich sage die Wahrheit. (B) Du sagst die Wahrheit. (C) Wir sagen beide die Wahrheit.
(D) Ich lüge immer. (E) Wir lügen beide.

11. Mary hat genau 10 weiße, 9 hellgraue und 8 dunkelgraue gleich große kleine Würfel. Sie klebt alle kleinen Würfel zu einem großen Würfel zusammen. Welchen der abgebildeten Würfel kann sie bauen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

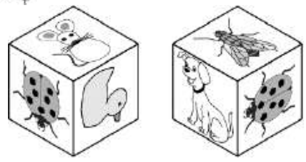
12. Ein Vater wohnt mit seinen drei Kindern zusammen. Alle vier Familienmitglieder haben am selben Tag Geburtstag. Der Vater ist 36 Jahre alt, die Kinder sind 13, 6 und 4 Jahre alt. Wenn sie über etwas abstimmen, hat jedes der vier Familienmitglieder so viele Stimmen, wie es alt ist. Deshalb gewinnt der Vater jede Abstimmung.
Wie viele Jahre wird es noch dauern, bis die Kinder den Vater überstimmen können?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 13 (E) 14

13. Die Fledermaus Elyse verlässt ihre Höhle, als eine Uhr an der Wand 20:20 zeigt. Unmittelbar nach der Rückkehr hängt sich Elyse kopfüber an die Höhlendecke, sieht wieder die Uhr, und sieht wieder 20:20.
Wie lange war sie fort?

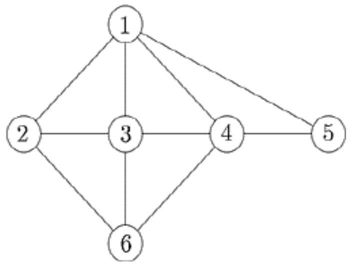
(A) 3 Stunden und 28 Minuten (B) 3 Stunden und 40 Minuten (C) 3 Stunden und 42 Minuten
(D) 4 Stunden und 18 Minuten (E) 5 Stunden und 42 Minuten

14. Amy klebt diese sechs Sticker auf die Seiten eines Würfels: 
Die beiden Abbildungen zeigen diesen Würfel in zwei verschiedenen Lagen.
Welcher Sticker ist auf der Fläche, die sich gegenüber der Fläche mit der Maus befindet?



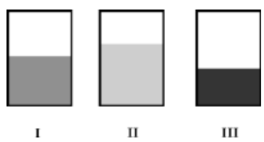
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

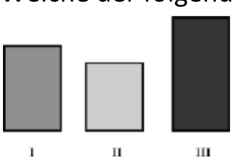
15. Die Abbildung zeigt, wie Anna, Babsi, Christina, Doro, Eli und Flora miteinander befreundet sind. Jede Zahl steht für eines der Mädchen und die Verbindungsstrecke zwischen zwei Zahlen zeigt, ob diese beiden Mädchen miteinander befreundet sind. Christina, Doro und Flora haben je vier Freundinnen.
Babsi ist nur mit Christina und Doro befreundet. Welche Zahl steht für Flora?

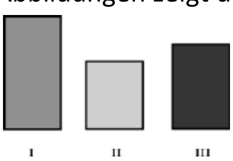


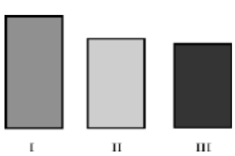
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

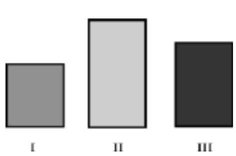
16. Marie gießt in jedes von drei quaderförmigen Gefäßen gleich viel Flüssigkeit.
Von vorne gesehen scheint jedes Gefäß die gleiche Größe zu haben, aber die Flüssigkeit steht in ihnen verschieden hoch.
Welche der folgenden Abbildungen zeigt die drei Gefäße von oben?

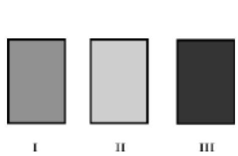


(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

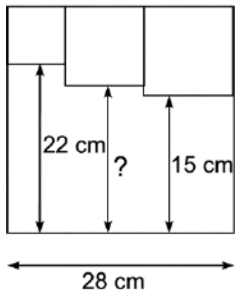
(E) 

- 5 Punkte Beispiele -

17. Magnus muss 15 Spiele in einem Schachturnier spielen. Zu einem Zeitpunkt während des Turniers hat er die Hälfte der Spiele, die er gespielt hat, gewonnen und ein Drittel der Spiele verloren. Zwei Spiele endeten unentschieden. Wie viele Spiele muss Magnus in dem Turnier noch spielen?

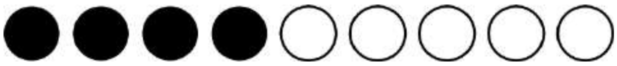
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. In ein großes Quadrat werden drei kleinere Quadrate eingezeichnet (siehe Abbildung). Wie lang ist die Strecke, die mit dem Fragezeichen markiert ist?



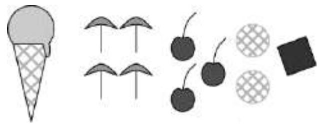
(A) 17 cm (B) 17,5 cm (C) 18 cm (D) 18,5 cm (E) 19 cm

19. Niki spielt mit neun Spielmarken, von denen jede eine schwarze und eine weiße Seite hat. Zu Beginn liegen vier Spielmarken mit der schwarzen Seite nach oben. Pro Spielzug dreht Niki drei Spielmarken um. Wie viele Spielzüge muss Niki mindestens machen, damit alle mit der gleichen Farbe nach oben zu liegen kommen?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

20. Zehn Personen kaufen je eine Kugel Eis. Zusammen bestellen sie vier Kugeln Vanille, drei Kugeln Schokolade, zwei Kugeln Zitrone und eine Kugel Mango. Jede Kugel wird dekoriert. Von den zehn Kugeln werden vier mit Schirmen, drei mit Kirschen, zwei mit Waffeln und eine mit Schokochips dekoriert. Jeder bekommt eine unterschiedliche Kombination. Welche der folgenden Kombinationen kommt darunter nicht vor?

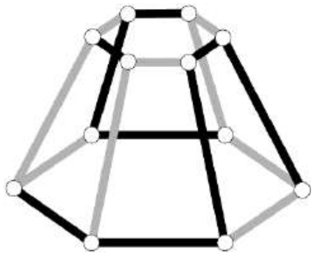


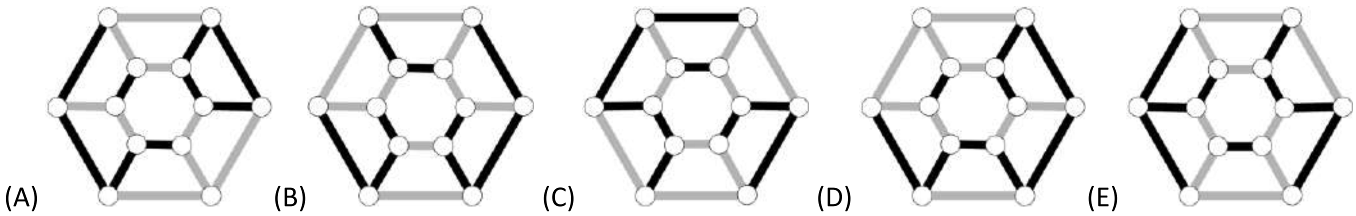
(A) Schokolade mit einer Kirsche (B) Mango mit einem Schirm (C) Vanille mit einem Schirm
(D) Zitrone mit einer Waffel (E) Vanille mit Schokochips

21. Eine dreistellige Zahl heißt „nett", wenn die Zehnerstelle größer als die Summe der Hunderter- und Einerstelle ist. Wie groß ist die größte Anzahl aufeinanderfolgender dreistelliger netter Zahlen?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

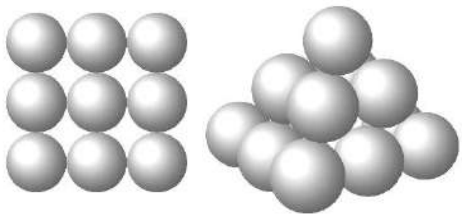
22. Wie sieht das Objekt aus, wenn es von oben betrachtet wird?





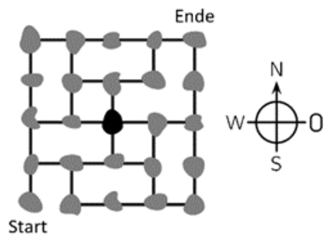
(A) (B) (C) (D) (E)

23. Don baut eine Pyramide aus gleich großen Kugeln. Die Basis besteht, so wie im Bild zu sehen ist, aus 3 × 3 Kugeln. Die mittlere Schicht besteht aus 2 × 2 Kugeln, und an der Spitze befindet sich eine Kugel. An den Stellen, wo sich zwei Kugeln berühren, verwendet Don einen Tropfen Klebstoff. Wie viele Tropfen Klebstoff benötigt Don?



(A) 20 (B) 24 (C) 28 (D) 32 (E) 36

24. Die Figur zeigt eine Landkarte mit einigen Inseln und den Brücken, die sie verbinden. Ein Postmann soll jede Insel genau einmal besuchen. Er beginnt bei der Insel, die mit „Start" gekennzeichnet ist, und würde gerne bei der Insel mit „Ende" seine Tour beenden. Soeben hat er die schwarze Insel in der Mitte der Landkarte erreicht. In welche Richtung sollte er seine Tour fortsetzen, um seine Route zu beenden?



(A) indem er nach Norden geht (B) indem er nach Osten geht (C) indem er nach Süden geht
(D) indem er nach Westen geht (E) Es gibt keinen solchen Weg.

Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

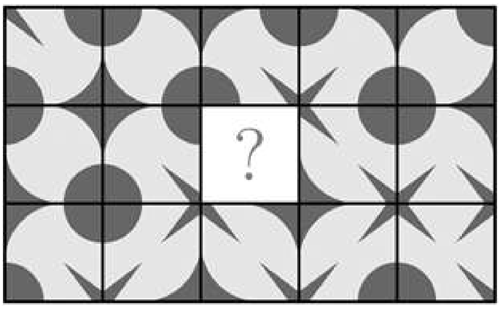
– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
A	E	D	B	C	B	B	E	E	A	C	C	E	D	B	A	B	E	B	D	D	C	E	B

– 3 Punkte Beispiele –

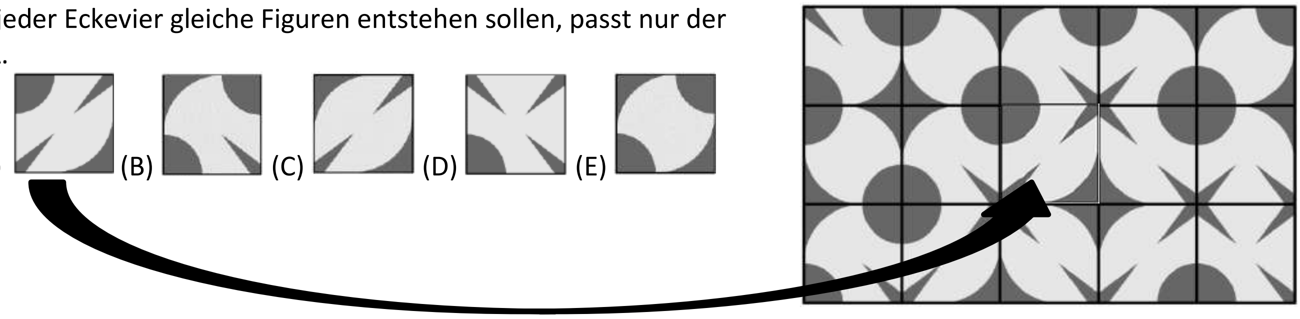
1. In jeder inneren Ecke sollen vier gleiche Figuren zusammenstoßen.

Welcher Teil fehlt im Bild?



(A) (B) (C) (D) (E)

Da in jeder Eckevier gleiche Figuren entstehen sollen, passt nur der Teil **A**.



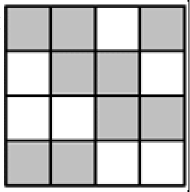
(A) (B) (C) (D) (E)

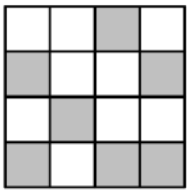
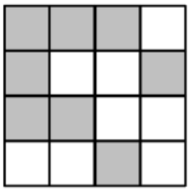
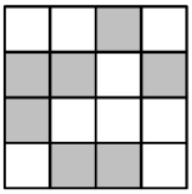
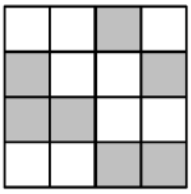
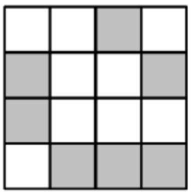
2. Als Amira von Atown nach Betown spaziert, kommt sie an fünf Wegweisern vorbei. Einer dieser Wegweiser ist falsch. Welcher?

(A) (B) (C) (D) **(E)**

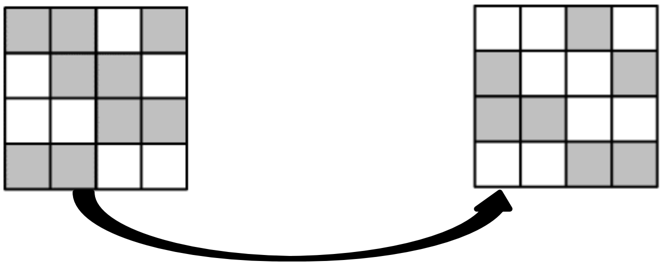
Die Entfernung zwischen Atown und Btown muss immer gleich groß sein. 2 + 9 = 3 + 8 = 5 + 6 = 8 + 3 = 11 km.
Beim Wegweiser **E** beträgt die Entfernung jedoch 9 + 4 = 13 km. Dieser Wegweiser ist daher falsch.

3. Das große Quadrat besteht aus kleinen weißen und grauen Quadraten. Wie sieht das große Quadrat aus, wenn die Farben vertauscht werden?



(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Wenn alle Farben vertauscht werden, wird weiß zu grau und grau zu weiß.

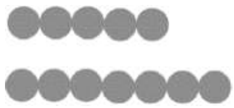


4. Niko möchte für seine Geburtstagsparty 24 Muffins backen. Für sechs Muffins benötigt er zwei Eier. Die Eier werden in Sechser-Packungen verkauft. Wie viele Sechser-Packungen muss Niko kaufen?

(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 (E) 8

Da er für 6 Muffins 2 Eier benötigt, benötigt er für 24 Muffins die vierfache Menge Eier, also 8 Eier. Da die Eier in Sechser-Packungen verkauft werden, benötigt er **2** Packungen.

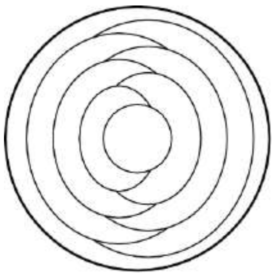
5. Kim hat einige Ketten mit den Längen 5 und 7. Indem Kim mehrere Ketten aneinanderreiht, erhält sie Ketten verschiedener Längen. Welche Länge kann so eine Kette nicht haben?



(A) 10 (B) 12 **(C)** 13 (D) 14 (E) 15

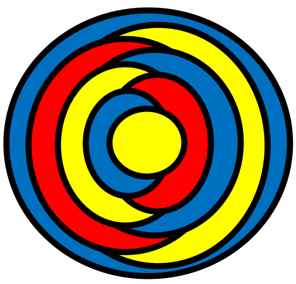
Wenn Kim Ketten mit der Länge 5 aneinanderreiht, kann sie Ketten mit der Länge 10 und 15 erzeugen.
Wenn Kim Ketten mit der Länge 7 aneinanderreiht, kann sie eine Kette mit der Länge 14 erzeugen.
Wenn Kim Ketten mit der Länge 5 und 7 aneinanderreiht, kann sie eine Kette mit der Länge 12 erzeugen.
Eine Kette mit der Länge **13** kann nicht erzeugt werden.

6. Cindy färbt jede Fläche des Musters entweder rot, blau oder gelb. Benachbarte Flächen bemalt sie mit verschiedenen Farben. Cindy beginnt mit der äußersten Fläche und färbt sie blau. Wie viele der Flächen werden nach Fertigstellung blau bemalt sein?



(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Cindy färbt von außen nach innen. Sie beginnt mit blau, verwendet dann abwechselnd gelb, rot, und dann wieder blau usw. Insgesamt verwendet sie die Farbe blau **3** Mal.
Die Farben rot und gelb können ausgetauscht werden – die Lösung bleibt gleich.



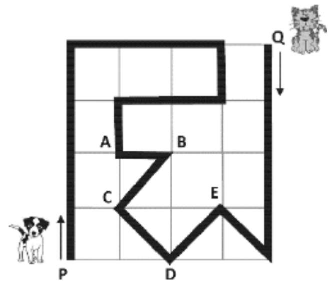
7. Maria hat 10 Blätter Papier. Sie schneidet einige davon in jeweils fünf Teile. Nun hat Maria insgesamt 22 Stück. Wie viele Blätter hat sie zerschnitten?

(A) 2 **(B)** 3 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Wenn Maria ein Blatt Papier in 5 Teile schneidet, erhöht sich die Anzahl ihrer Papierstücke um 4. Maria hat am Ende 22 Stück. 22 – 10 = 12. Maria hat also nun 12 Stück mehr als zu Beginn, das bedeutet, dass sie 12 : 4 = **3** Stück Papier zerschnitten hat.

8. Ein Hund und eine Katze spazieren im Park entlang des Weges, der durch die dicke schwarze Linie gekennzeichnet wird. Der Hund startet im Punkt P. Gleichzeitig startet die Katze im Punkt Q. Der Hund spaziert dreimal so schnell wie die Katze. In welchem Punkt treffen sie sich?

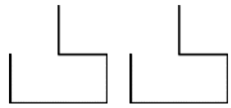
(A) in A (B) in B (C) in C (D) in D **(E)** in E

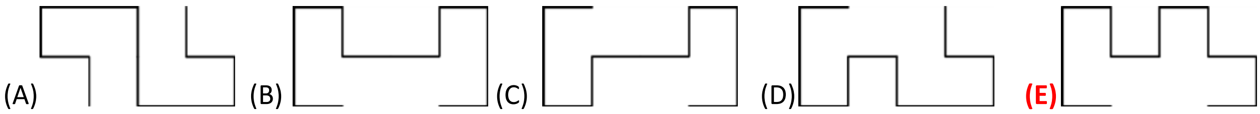


Um sich zu treffen müssen sie entlang 16 geradliniger Streckenteile und 4 diagonaler Streckenteile spazieren. Während sich die Katze 4 Felder geradlinig und ein Feld diagonal fortbewegt, bewegt sich der Hund 12 Felder geradlinig und 3 Felder diagonal fort. Sie treffen sich somit im Punkt **E**.

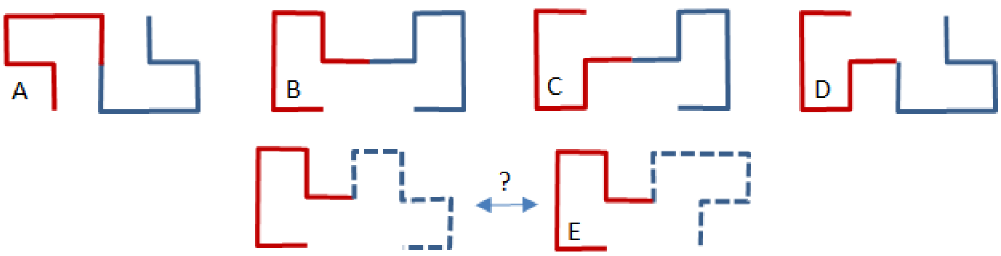
4 Punkte Beispiele

9. Georg hat zwei gleich geformte Drahtteile (siehe Abbildung). Welche der folgenden Figuren kann Georg nicht bilden, wenn er beide Teile zusammenfügt?





Die nachfolgenden Zeichnungen zeigen, wie man aus den beiden gegebenen Drahtteilen die Figuren A, B, C und D bilden kann, und dass dies bei der Figur **E** nicht möglich ist.

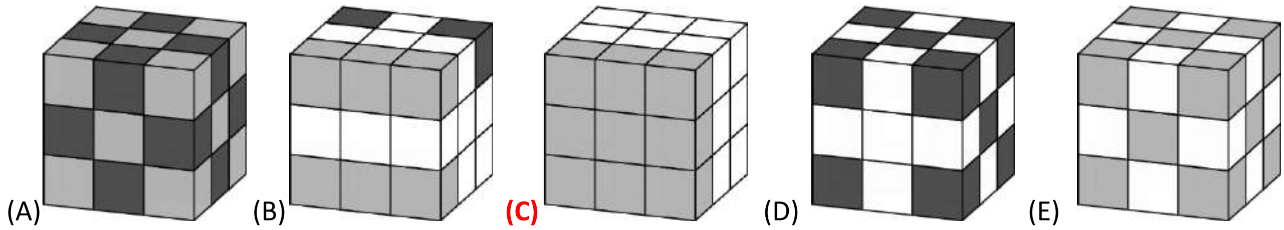


10. Der Kobold lügt immer. Die Elfe sagt immer die Wahrheit. Welchen der folgenden Sätze können beide sagen, wenn sie sich treffen?

(A) Ich sage die Wahrheit. (B) Du sagst die Wahrheit. (C) Wir sagen beide die Wahrheit.
(D) Ich lüge immer. (E) Wir lügen beide.

„Ich sage die Wahrheit." ist die richtige Lösung weil, die Elfe immer die Wahrheit sagt und der Kobold immer lügt und somit nie die Wahrheit sagt.

11. Mary hat genau 10 weiße, 9 hellgraue und 8 dunkelgraue gleich große kleine Würfel. Sie klebt alle kleinen Würfel zu einem großen Würfel zusammen. Welchen der abgebildeten Würfel kann sie bauen?



Würfel A: Man sieht 9 dunkelgraue Würfel, sie hat aber nur 8.
Würfel B: Man sieht 11 weiße Würfel, sie hat aber nur 10.
Würfel D: Man sieht 9 dunkelgraue Würfel, sie hat aber nur 8.
Würfel E: Man sieht 10 hellgraue Würfel, sie hat aber nur 9.
Würfel C: Man sieht 9 hellgraue Würfel, 10 weiße Würfel und die restlichen 8 Würfel, die man nicht sehen kann, müssen schwarz sein.

12. Ein Vater wohnt mit seinen drei Kindern zusammen. Alle vier Familienmitglieder haben am selben Tag Geburtstag. Der Vater ist 36 Jahre alt, die Kinder sind 13, 6 und 4 Jahre alt. Wenn sie über etwas abstimmen, hat jedes der vier Familienmitglieder so viele Stimmen, wie es alt ist. Deshalb gewinnt der Vater jede Abstimmung.
Wie viele Jahre wird es noch dauern, bis die Kinder den Vater überstimmen können?

(A) 5 (B) 6 **(C)** 7 (D) 13 (E) 14

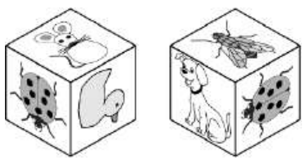
Heute ist der Vater 36 Jahre alt, und die Kinder sind 13 + 6 + 4 = 23 Jahre alt.
In 5 Jahren ist der Vater 41 Jahre alt, und die Kinder sind 18 + 11 + 9 = 38 Jahre alt.
In 6 Jahren ist der Vater 42 Jahre alt, und die Kinder sind 19 + 12 +10 = 41 Jahre alt.
In 7 Jahren in der Vater 43 Jahre alt, und die Kinder sind 20 + 13 + 11 = 44 Jahre alt. Der Vater kann also nach **7 Jahren** erstmals überstimmt werden.

13. Die Fledermaus Elyse verlässt ihre Höhle, als eine Uhr an der Wand 20:20 zeigt. Unmittelbar nach der Rückkehr hängt sich Elyse kopfüber an die Höhlendecke, sieht wieder die Uhr, und sieht wieder 20:20.
Wie lange war sie fort?

(A) 3 Stunden und 28 Minuten (B) 3 Stunden und 40 Minuten (C) 3 Stunden und 42 Minuten
(D) 4 Stunden und 18 Minuten **(E)** 5 Stunden und 42 Minuten

Sieht Elyse 20:20 nach ihrer Rückkehr kopfüber hängend an die Höhlendecke sieht sie eigentlich 02:02. Zwischen 20:20 und 02:02 liegen **5 Stunden und 42 Minuten**.

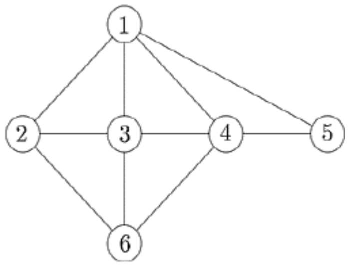
14. Amy klebt diese sechs Sticker auf die Seiten eines Würfels: 
Die beiden Abbildungen zeigen diesen Würfel in zwei verschiedenen Lagen.
Welcher Sticker ist auf der Fläche, die sich gegenüber der Fläche mit der Maus befindet?



(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

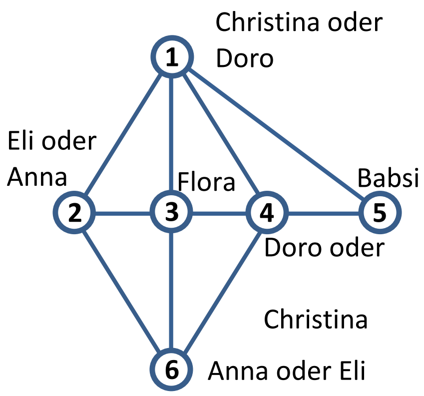
Der Kopf des Marienkäfers blickt zum Hund und der hintere Teil des Marienkäfers zeigt zur Maus. Das heißt, dass sich auf den Flächen, die links und rechts vom Marienkäfer sind, **Hund** und Maus befinden, die sich also gegenüber liegen.

15. Die Abbildung zeigt, wie Anna, Babsi, Christina, Doro, Eli und Flora miteinander befreundet sind. Jede Zahl steht für eines der Mädchen und die Verbindungsstrecke zwischen zwei Zahlen zeigt, ob diese beiden Mädchen miteinander befreundet sind. Christina, Doro und Flora haben je vier Freundinnen.
Babsi ist nur mit Christina und Doro befreundet. Welche Zahl steht für Flora?

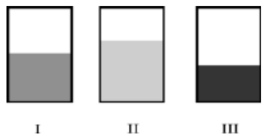


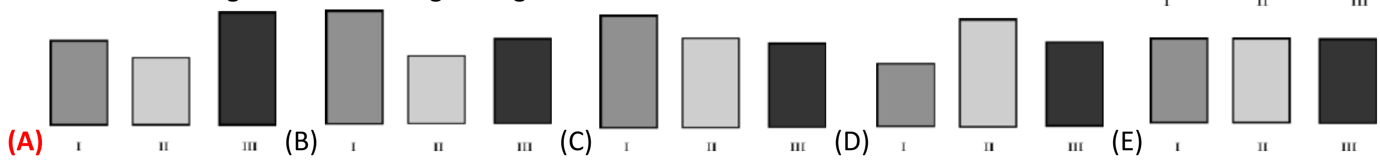
(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Babsi hat nur zwei Freundinnen. Nur von der Zahl *5* gehen zwei Verbindungsstrecken aus, weshalb Babsi *5* sein muss.
Da ihre Freundinnen Christina und Doro sind, müssen diese aus *1* oder *4* sein.
Von den verbleibenden Zahlen bleiben sind nur bei *3* vier Verbindungslinien, deshalb muss Flora bei der Nummer ***3*** sein, da sie als einzig verbliebene vier Freundinnen hat.



16. Marie gießt in jedes von drei quaderförmigen Gefäßen gleich viel Flüssigkeit. Von vorne gesehen scheint jedes Gefäß die gleiche Größe zu haben, aber die Flüssigkeit steht in ihnen verschieden hoch.
Welche der folgenden Abbildungen zeigt die drei Gefäße von oben?





Alle Gefäße sind in Länge und Höhe gleich und unterscheiden sich nur in der Tiefe. Die Flüssigkeitsmengen sind jedoch verschieden hoch, daher muss das Gefäß mit der größten Flüssigkeitshöhe die geringste Tiefe haben, da sich in allen Gefäßen gleich viel Flüssigkeit befindet.

I: mittlere Flüssigkeitshöhe, deshalb mittlere Tiefe →Antwortmöglichkeit: **A**
II: größte Flüssigkeitshöhe, deshalb kleinste Tiefe → Antwortmöglichkeiten: **A** und B
III: geringste Flüssigkeitshöhe, deshalb größte Tiefe → Antwortmöglichkeit: **A**

5 Punkte Beispiele

17. Magnus muss 15 Spiele in einem Schachturnier spielen. Zu einem Zeitpunkt während des Turniers hat er die Hälfte der Spiele, die er gespielt hat, gewonnen und ein Drittel der Spiele verloren. Zwei Spiele endeten unentschieden.

Wie viele Spiele muss Magnus in dem Turnier noch spielen?

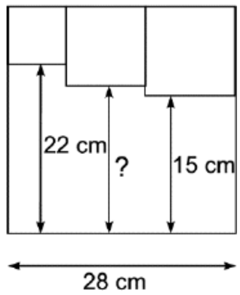
(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Magnus hat zu dem Zeitpunkt, als er die Hälfte der Spiele gewonnen hat und ein Drittel verloren hat, genau 5/6 der Spiele gespielt, da 1/2 + 1/3 = 5/6 ergibt. Daher verbleiben noch 1/6 der Spiele. Von diesen haben zwei unentschieden geendet. 2 ist aber 1/6 von 12, das bedeutet, dass zu diesem Zeitpunkt 12 Spiele gespielt wurden.

15 – 12 = 3. Es müssen daher noch 3 Spiele gespielt werden.

18. In ein großes Quadrat werden drei kleinere Quadrate eingezeichnet (siehe Abbildung).
Wie lang ist die Strecke, die mit dem Fragezeichen markiert ist?

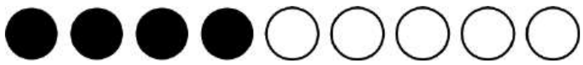
(A) 17 cm (B) 17,5 cm (C) 18 cm (D) 18,5 cm **(E)** 19 cm



Das kleine Quadrat in der linken oberen Ecke hat die Länge: 28 – 22 = 6 cm. Das kleine Quadrat in der rechten oberen Ecke hat die Länge: 28 – 15 = 13 cm. Die Seite des großen Quadrats beträgt 28 cm.

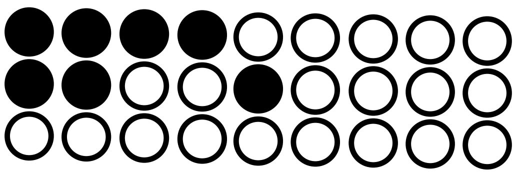
28 – 6 – 13 = 9 cm. Das kleine Quadrat in der Mitte hat somit die Länge 9 cm. Die Strecke mit dem Fragezeichen kann somit errechnet werden: 28 – 9 = **19 cm**.

19. Niki spielt mit neun Spielmarken, von denen jede eine schwarze und eine weiße Seite hat. Zu Beginn liegen vier Spielmarken mit der schwarzen Seite nach oben. Pro Spielzug dreht Niki drei Spielmarken um. Wie viele Spielzüge muss Niki mindestens machen, damit alle mit der gleichen Farbe nach oben zu liegen kommen?

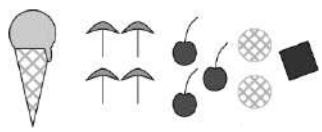


(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Niki dreht zuerst drei Spielmarken um →
Nach dem zweiten Spielzug sind alle weiß →



20. Zehn Personen kaufen je eine Kugel Eis. Zusammen bestellen sie vier Kugeln Vanille, drei Kugeln Schokolade, zwei Kugeln Zitrone und eine Kugel Mango. Jede Kugel wird dekoriert. Von den zehn Kugeln werden vier mit Schirmen, drei mit Kirschen, zwei mit Waffeln und eine mit Schokochips dekoriert. Jeder bekommt eine unterschiedliche Kombination.



Welche der folgenden Kombinationen kommt darunter nicht vor?

(A) Schokolade mit einer Kirsche (B) Mango mit einem Schirm (C) Vanille mit einem Schirm
(D) Zitrone mit einer Waffel (E) Vanille mit Schokochips

Da es 4 Kugeln Vanille gibt und nur unterschiedliche Kombinationen vorkommen dürfen, muss jedes Vanilleeis eine andere Dekoration erhalten. Dasselbe gilt für die Kugeln der Sorte Schokolade und Zitrone. Für Mango bleibt nur mehr ein Schirm übrig. Nicht möglich ist **Zitrone mit einer Waffel** (siehe Tabelle).

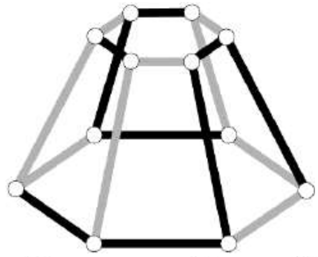
	Vanille	Vanille	Vanille	Vanille	Schoko	Schoko	Schoko	Zitrone	Zitrone	Mango
Schirm	x				x			x		x
Kirsche		x				x			x	
Waffel			x				x			
Schoko				x						

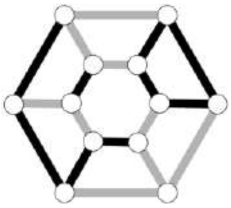
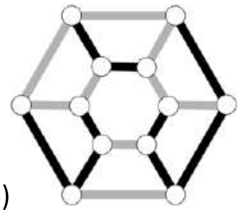
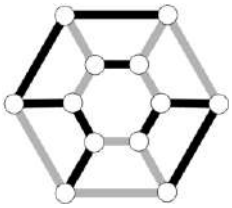
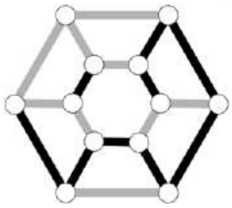
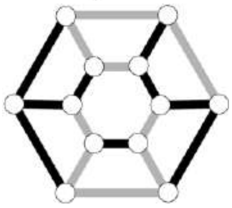
21. Eine dreistellige Zahl heißt „nett”, wenn die Zehnerstelle größer als die Summe der Hunderter- und Einerstelle ist. Wie groß ist die größte Anzahl aufeinanderfolgender dreistelliger netter Zahlen?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 **(D)** 8 (E) 9

Die Einerstelle einer „netten“ dreistelligen Zahl kann nicht 8 oder 9 sein, denn dann würde sie wie folgt aussehen: **8 oder **9. Bei solchen Zahlen wäre die Summe der Hunderter- und Einerstelle mindestens 9 und die Zehnerstelle kann nicht größer sein. Der Wert der Einerstelle kann somit höchstens 7 sein.
Somit ergeben sich diese **8** „netten“ aufeinanderfolgenden Zahlen: 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197.
Andere Kombinationen, bei denen die Zehnerstelle nicht 9 ist, liefern weniger aufeinanderfolgende „nette“ Zahlen.

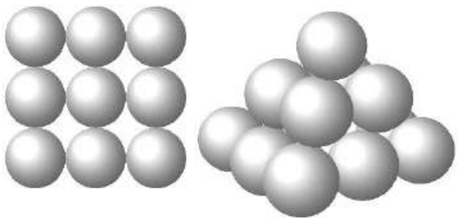
22. Wie sieht das Objekt aus, wenn es von oben betrachtet wird?



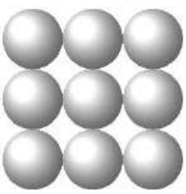
(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Nur beim Objekt **C** gilt folgendes: Es sind zwei schwarze Linien auf der unteren Fläche miteinander verbunden, es geht nur eine schwarze Linie nach oben. Angehängt ist dann eine weitere schwarze Linie auf der oberen Fläche, gefolgt von einer schwarzen Linie die wieder zur unteren Fläche führt.

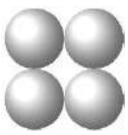
23. Don baut eine Pyramide aus gleich großen Kugeln. Die Basis besteht, so wie im Bild zu sehen ist, aus 3 × 3 Kugeln. Die mittlere Schicht besteht aus 2 × 2 Kugeln, und an der Spitze befindet sich eine Kugel.
An den Stellen, wo sich zwei Kugeln berühren, verwendet Don einen Tropfen Klebstoff. Wie viele Tropfen Klebstoff benötigt Don?



(A) 20 (B) 24 (C) 28 (D) 32 **(E)** 36



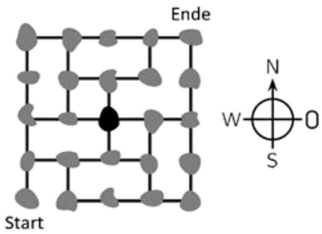
In der untersten Schicht hat man insgesamt 12 Berührungspunkte.



In der mittleren Schicht hat man insgesamt 4 Berührungsunkte.

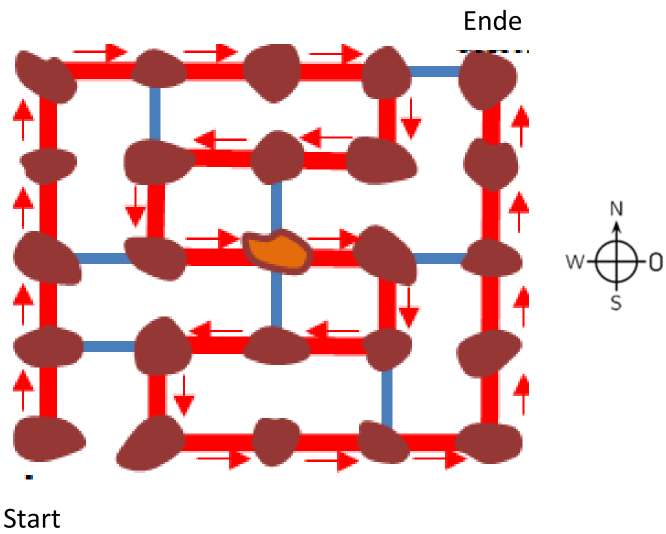
Zwischen den Ebenen hat jede Kugel 4 weitere Berührungspunkte. In der mittleren Ebene befinden sich 4 Kugeln in der obersten Ebene befindet sich 1 Kugel. Somit gibt er 5 * 4 = 20 weitere Berührungspunkte.
12 + 4+ 20 = **36** Berührungspunkte.

24. Die Figur zeigt eine Landkarte mit einigen Inseln und den Brücken, die sie verbinden. Ein Postmann soll jede Insel genau einmal besuchen. Er beginnt bei der Insel, die mit „Start" gekennzeichnet ist, und würde gerne bei der Insel mit „Ende" seine Tour beenden. Soeben hat er die schwarze Insel in der Mitte der Landkarte erreicht. In welche Richtung sollte er seine Tour fortsetzen, um seine Route zu beenden?



(A) indem er nach Norden geht
(B) indem er nach Osten geht
(C) indem er nach Süden geht
(D) indem er nach Westen geht
(E) Es gibt keinen solchen Weg.

Da er alle Inseln genau einmal besuchen muss, gibt er nur eine einzelne Möglichkeit. Siehe Bild.



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2020
23. 3. 2020

Kategorie: Kadett, 7. – 8. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

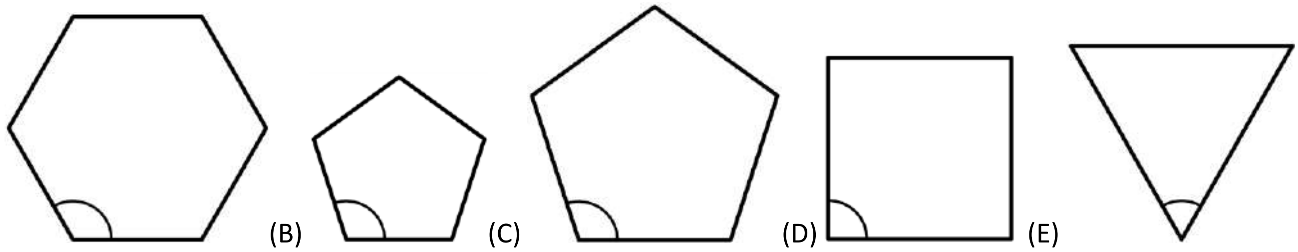
Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Kadett (7. – 8. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

- 3 Punkte Beispiele -

1. Wie viele der Zahlen 2, 20, 202, 2020 sind Primzahlen?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

2. In welchem der regelmäßigen Vielecke ist der markierte Winkel der größte?



(A) (B) (C) (D) (E)

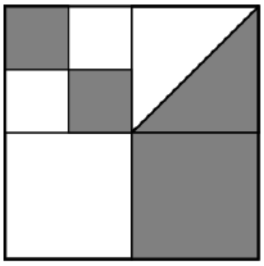
3. Miguel löst jeden Tag sechs Rätsel und Lázaro löst jeden Tag vier Rätsel. Wie viele Tage benötigt Lázaro um die gleiche Anzahl von Rätseln, die Miguel in vier Tagen löst, zu lösen?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

4. Welcher dieser Brüche hat den größten Wert?

(A) $\frac{8+5}{3}$ (B) $\frac{8}{3+5}$ (C) $\frac{3+5}{8}$ (D) $\frac{8+3}{5}$ (E) $\frac{3}{8+5}$

5. Ein großes Quadrat wird wie abgebildet in kleinere Quadrate unterschiedlicher Größe geteilt. In eines der kleinen Quadrate wird die Diagonale eingezeichnet. Welcher Bruchteil des großen Quadrates wurde grau gefärbt?

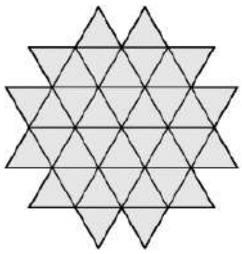


(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

6. In einem Fußballturnier spielen 4 Teams. Jedes Team spielt genau einmal gegen jedes andere Team. Gewinnt ein Team, erhält es 3 Punkte, verliert es, erhält es 0 Punkte. Endet ein Spiel unentschieden, erhalten beide Teams je einen Punkt. Welche Punktezahl kann kein Team erreicht haben, nachdem alle Spiele gespielt wurden?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

7. Das folgende Diagramm besteht aus 36 identischen kleinen Dreiecken. Wie groß ist die kleinste Anzahl solcher Dreiecke, die man hinzufügen muss, um ein regelmäßiges Sechseck zu erhalten?



(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

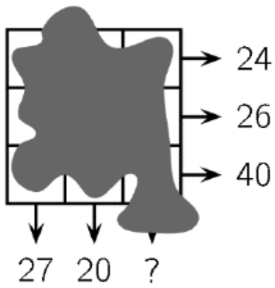
8. Kanga möchte drei verschiedene der gegebenen Zahlen $-5, -3, -1, 2, 4, 6$ miteinander multiplizieren. Wie lautet das kleinste Ergebnis, das Kanga so erhalten kann?

(A) -200 (B) -120 (C) -90 (D) -48 (E) -15

9. Wenn John mit dem Bus zur Schule fährt und denselben Weg zu Fuß nach Hause geht, braucht er insgesamt 3 Stunden. Wenn er beide Wege mit dem Bus zurücklegt, braucht er eine Stunde. Wie lange braucht er, wenn er beide Wege zu Fuß geht?

(A) 3,5 Stunden (B) 4 Stunden (C) 4,5 Stunden (D) 5 Stunden (E) 5,5 Stunden

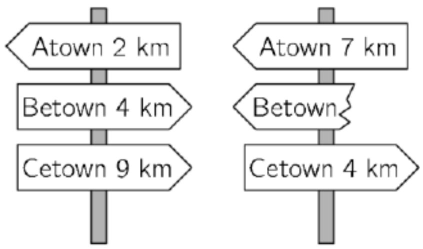
10. In jede Zelle des 3×3 Quadrats wird eine Zahl geschrieben. Unglücklicherweise lief Tinte auf das Quadrat, und so kann man die Zahlen nicht lesen. Allerdings sind die Summen der drei Zeilen und die Summen zweier Spalten bekannt (siehe Abbildung). Wie groß ist die Summe der dritten Spalte?



(A) 41 (B) 43 (C) 44 (D) 45 (E) 47

- 4 Punkte Beispiele -

11. Der kürzeste Weg von Atown nach Cetown führt durch Betown. Entlang der Strecke stehen, wie in der Abbildung zu sehen ist, zwei Wegweiser. Welche Distanz war auf dem beschädigten Wegweiser angeschrieben?

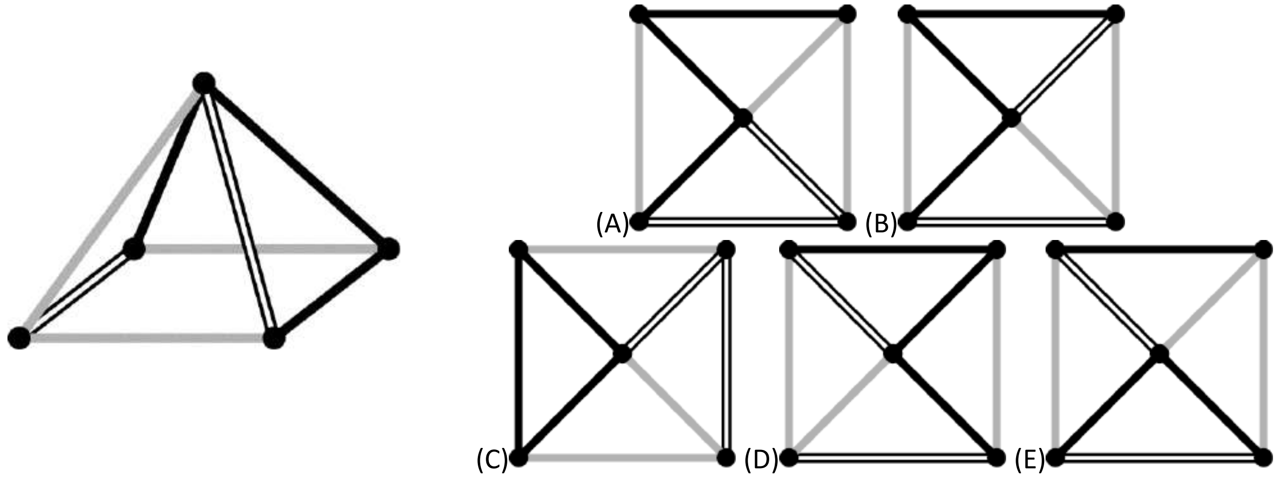


(A) 1 km (B) 3 km (C) 4 km (D) 5 km (E) 9 km

12. Anna möchte im Monat März täglich durchschnittlich 5 km gehen. Bis zum Abend des 16. März ist sie insgesamt 95 km gegangen. Wie weit muss sie ab dem 17. März durchschnittlich bis Ende des Monats täglich gehen, um ihr Ziel zu erreichen?

(A) 5,4 km (B) 5 km (C) 4 km (D) 3,6 km (E) 3,1 km

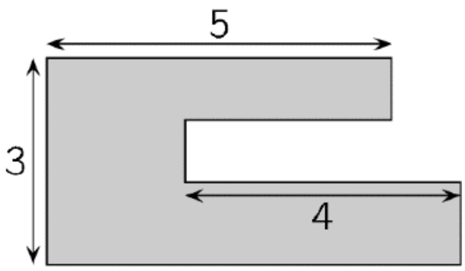
13. Welches der folgenden Bilder zeigt die links abgebildete Pyramide, wenn sie von oben betrachtet wird?



14. Alle Kinder einer Klasse schwimmen oder tanzen. Drei Fünftel der Kinder schwimmen und drei Fünftel der Kinder tanzen. Fünf Kinder üben beide Sportarten aus. Wie viele Kinder gibt es in der Klasse?

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 35

15. Ein Garten hat die rechts abgebildete Form. Benachbarte Seiten stehen aufeinander normal. Einige Längen sind angegeben. Welchen Umfang hat der Garten? (Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.)

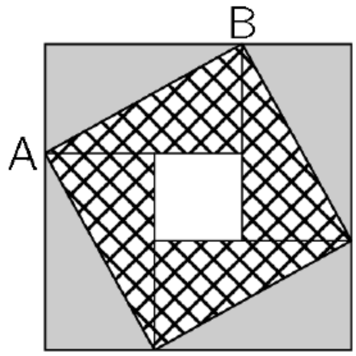


(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

16. Andrew hat 27 identische kleine Würfel. Jeder dieser Würfel besitzt zwei rote aneinandergrenzende Flächen und vier weiße Flächen. Andrew verwendet alle kleinen Würfel, um einen großen Würfel zu bauen. Wie viele gänzlich rote Seitenflächen kann er beim großen Würfel maximal erhalten?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

17. Ein großes Quadrat besteht aus 8 kongruenten rechtwinkeligen Dreiecken und einem kleinen Quadrat. Die Fläche des großen Quadrats beträgt 49 cm^2. Die Länge der Hypotenuse AB beträgt 5 cm und ist in allen Dreiecken gleich groß. Welche Fläche besitzt das kleine Quadrat?

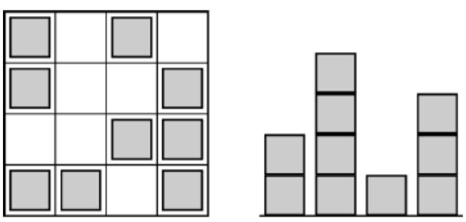


(A) 1 cm^2 (B) 4 cm^2 (C) 9 cm^2 (D) 16 cm^2 (E) 25 cm^2

18. Werners Gehalt beträgt 20 % des Gehalts seines Chefs. Um wie viel Prozent ist das Gehalt seines Chefs größer als das Gehalt von Werner?

(A) 80 % (B) 120 % (C) 180 % (D) 400 % (E) 520 %

19. Irene baut eine "Stadt" aus identischen hölzernen Würfeln. Eine Abbildung zeigt die Stadt von oben, die andere von einer Seite. Allerdings weiß man nicht, von welcher Seite die Stadt betrachtet wurde. Wie groß ist die maximale Anzahl von Würfeln, die Irene benutzt haben kann?



(A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 22 (E) 21

20. Anja hat einen Papierstreifen, der in 5 gleiche Quadrate unterteilt ist und in denen die Zahlen 1 bis 5 geschrieben sind (siehe Abbildung). Anja faltet nun den Streifen entlang der Quadratseiten viermal so, dass die 5 Quadrate genau übereinander zu liegen kommen. In welcher Reihenfolge können nach der Faltung die nummerierten Quadrate, von oben nach unten betrachtet, nicht übereinander zu liegen kommen?

1	2	3	4	5

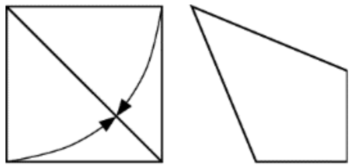
(A) 3, 5, 4, 2, 1 (B) 3, 4, 5, 1, 2 (C) 3, 2, 1, 4, 5 (D) 3, 1, 2, 4, 5 (E) 3, 4, 2, 1, 5

- 5 Punkte Beispiele -

21. Zwölf gefärbte Würfel werden in einer Reihe angeordnet. Es gibt drei blaue, zwei weiße, drei rote und vier grüne Würfel, jedoch nicht in dieser Reihenfolge. Ein weißer Würfel befindet sich an einem Ende, am anderen ein roter Würfel. Alle roten Würfel liegen nebeneinander. Alle grünen Würfel liegen ebenfalls nebeneinander. Der zehnte Würfel von links ist blau. Welche Farbe hat der sechste Würfel von links?

(A) grün (B) weiß (C) blau (D) rot (E) rot oder blau

22. Zaida faltet zwei Seiten eines quadratischen Stücks Papier zur Diagonale und erhält ein Viereck. Wie groß ist der größte Winkel des Vierecks?



(A) 112,5° (B) 120° (C) 125° (D) 135° (E) 150°

23. Wie viele vierstellige Zahlen gibt es, deren Hälfte durch 2, deren Drittel durch 3 und deren Fünftel durch 5 jeweils ohne Rest teilbar ist?

(A) 1 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 11

24. Im Finale eines Tanzwettbewerbs geben die drei Jurymitglieder den fünf Finalisten 0, 1, 2, 3 oder 4 Punkte. Jedes Jurymitglied gibt jedem Finalisten eine andere Punkteanzahl. Adam kennt von jedem der Teilnehmenden die erreichte Gesamtpunktzahl und einige einzelne Punkte, so wie in der Abbildung zu sehen ist. Wie viele Punkte erhält Adam vom dritten Jurymitglied?

	Adam	Berta	Clara	David	Emil
I	2	0			
II		2	0		
III					
Summe	7	5	3	4	11

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

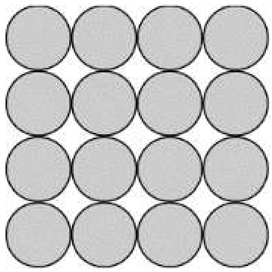
25. Saniya schreibt auf jede Seite eines Quadrats eine positive ganze Zahl. In jede Ecke schreibt sie das Produkt der beiden Zahlen jener Seiten, die sich in dieser Ecke treffen. Die Summe aller Zahlen in den Ecken beträgt 15. Wie groß ist die Summe aller Zahlen, die auf den Seiten des Quadrats stehen?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

26. Sophia hat 52 identische gleichschenkelige rechtwinkelige Dreiecke. Sie möchte mit einigen dieser Dreiecke ein Quadrat herstellen. Wie viele verschiedene Größen sind für so ein Quadrat möglich?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

27. Cleo baut eine Pyramide aus gleich großen kleinen Metallkugeln. Die Basis besteht, so wie im Bild zu sehen ist, aus 4 × 4 Kugeln. Die mittleren Schichten bestehen aus 3 × 3 und 2 × 2 Kugeln, und an der Spitze befindet sich eine Kugel. An den Stellen, wo sich zwei Kugeln berühren, verwendet Cleo einen Tropfen Klebstoff. Wie viele Tropfen Klebstoff benötigt Cleo?



(A) 72 (B) 85 (C) 88 (D) 92 (E) 96

28. In jeder Ecke eines 10 m × 25 m Schwimmbeckens befindet sich ein Kind. Ihr Trainer steht irgendwo am Rand des Beckens. Die kürzesten Entfernungen des Trainers entlang des Beckenrandes zu drei der vier Kinder betragen zusammen 50 m. Wie lang ist der kürzeste Weg, den der Trainer zurücklegen muss, um zum vierten Kind zu kommen?

(A) 10 m (B) 12 m (C) 15 m (D) 20 m (E) 25 m

29. Anna, Boris und Clara laufen um die Wette. Sie starten zur gleichen Zeit und laufen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit. Als Anna ins Ziel kommt, hat Boris noch 15 m und Clara noch 35 m zu laufen. Als Boris ins Ziel kommt, hatte Clara noch 22 m zu laufen. Über welche Streckenlänge wird das Wettrennen gelaufen?

(A) 135 m (B) 140 m (C) 150 m (D) 165 m (E) 175 m

30. Die folgenden Aussagen liefern Hinweise über eine vierstellige Zahl und ihre Ziffern:

In der Zahl **4 1 3 2** sind zwei Ziffern korrekt, aber an der falschen Stelle.

In der Zahl **9 8 2 6** ist eine Ziffer korrekt und an der richtigen Stelle.

In der Zahl **2 7 4 1** ist eine Ziffer korrekt, aber an der falschen Stelle.

In der Zahl **7 6 4 2** ist keine der Ziffern korrekt.

In der Zahl **5 0 7 9** sind zwei Ziffern korrekt, eine davon an der richtigen Stelle, die andere an der falschen Stelle.

Wie lautet die letzte Stelle der vierstelligen Zahl?

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 9

Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	C	A	E	E	D	B	D	B	A	C	B	C	C	C	A	D	B	E	A	A	D	B	C	C	E	D	D	C

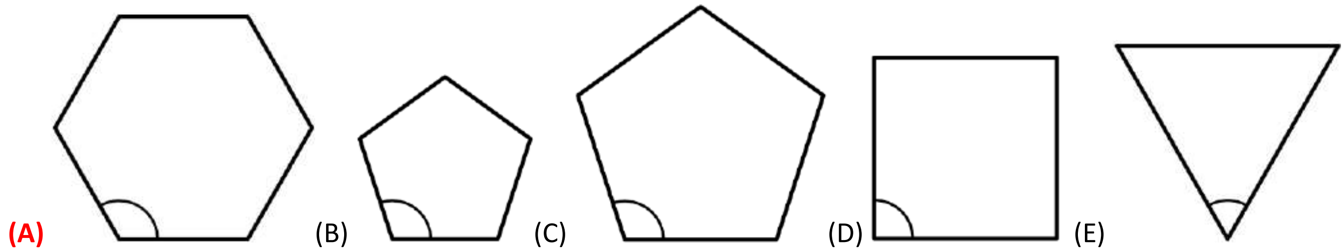
– 3 Punkte Beispiele –

1. Wie viele der Zahlen 2, 20, 202, 2020 sind Primzahlen?

(A) 0 **(B)** 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Die Zahlen 20, 202 und 2020 haben nicht nur die 1 und sich selbst als Teiler. Nur die 2 ist eine Primzahl, daher Antwort **(B)**.

2. In welchem der regelmäßigen Vielecke ist der markierte Winkel der größte?



Der Innenwinkel des regelmäßigen Sechsecks beträgt 120°, beim regelmäßigen Fünfeck 108°, beim Quadrat 90° und beim gleichseitigen Dreieck 60°, daher Antwort **(A)**.

3. Miguel löst jeden Tag sechs Rätsel und Lázaro löst jeden Tag vier Rätsel. Wie viele Tage benötigt Lázaro um die gleiche Anzahl von Rätseln, die Miguel in vier Tagen löst, zu lösen?

(A) 4 (B) 5 **(C)** 6 (D) 7 (E) 8

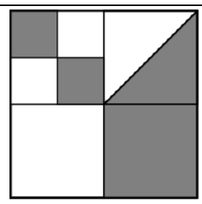
Miguel löst in vier Tagen $6 \cdot 4 = 24$ Rätsel, daher benötigt Lázaro $24 : 4 = \mathbf{6}$ Tage, um dieselbe Anzahl an Rätsel zu lösen.

4. Welcher dieser Brüche hat den größten Wert?

(A) $\frac{8+5}{3}$ (B) $\frac{8}{3+5}$ (C) $\frac{3+5}{8}$ (D) $\frac{8+3}{5}$ (E) $\frac{3}{8+5}$

$\mathbf{\frac{8+5}{3}} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$. Alle anderen Brüche haben einen kleineren Wert.

5. Ein großes Quadrat wird wie abgebildet in kleinere Quadrate unterschiedlicher Größe geteilt. In eines der kleinen Quadrate wird die Diagonale eingezeichnet. Welcher Bruchteil des großen Quadrates wurde grau gefärbt?



(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

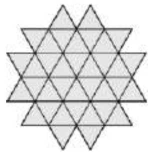
Die kleinsten gefärbten Quadrate sind jeweils $\frac{1}{16}$ der Gesamtfläche, das rechtwinkelige Dreieck ist $\frac{1}{8}$ und das Quadrat rechts unten $\frac{1}{4}$. Daher sind insgesamt $2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ gefärbt.

6. In einem Fußballturnier spielen 4 Teams. Jedes Team spielt genau einmal gegen jedes andere Team. Gewinnt ein Team, erhält es 3 Punkte, verliert es, erhält es 0 Punkte. Endet ein Spiel unentschieden, erhalten beide Teams je einen Punkt. Welche Punktezahl kann kein Team erreicht haben, nachdem alle Spiele gespielt wurden?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

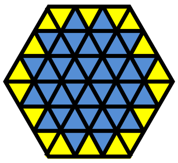
Jedes Team spielt genau drei Spiele. Die höchste zu erreichende Punkteanzahl wäre 3+3+3=9 Punkte. Die nächsthöchste Punkteanzahl ist 1+3+3=7 Punkte. Die Zahl **8** lässt sich also nicht als Summe der Zahlen 0, 1 und 3, wobei nur drei Summanden vorkommen, zusammensetzen.

7. Das folgende Diagramm besteht aus 36 identischen kleinen Dreiecken. Wie groß ist die kleinste Anzahl solcher Dreiecke, die man hinzufügen muss, um ein regelmäßiges Sechseck zu erhalten?



(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

Wie in der Abbildung zu sehen ist, sind **18** Dreiecke zu ergänzen.



8. Kanga möchte drei verschiedene der gegebenen Zahlen $-5, -3, -1, 2, 4, 6$ miteinander multiplizieren. Wie lautet das kleinste Ergebnis, das Kanga so erhalten kann?

(A) -200 (B) -120 (C) -90 (D) -48 (E) -15

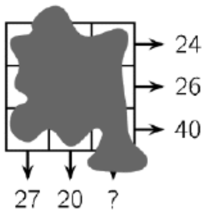
Man muss entweder drei negative oder genau eine negative und zwei positive Zahlen wählen, um eine negative Zahl zu erhalten. Man wählt außerdem jene Zahlen, deren Betrag möglichst groß ist. Daher erhält man $(-5) \cdot 4 \cdot 6 = \mathbf{-120}$.

9. Wenn John mit dem Bus zur Schule fährt und denselben Weg zu Fuß nach Hause geht, braucht er insgesamt 3 Stunden. Wenn er beide Wege mit dem Bus zurücklegt, braucht er eine Stunde. Wie lange braucht er, wenn er beide Wege zu Fuß geht?

(A) 3,5 Stunden (B) 4 Stunden (C) 4,5 Stunden (D) 5 Stunden (E) 5,5 Stunden

Für beide Wege benötigt er mit dem Bus eine Stunde, daher benötigt er für einen Weg eine halbe Stunde mit dem Bus. Daher benötigt er für einen Weg zu Fuß 2,5 Stunden. Für zwei Wege zu Fuß braucht er also **5 Stunden**.

10. In jede Zelle des 3×3 Quadrats wird eine Zahl geschrieben. Unglücklicherweise lief Tinte auf das Quadrat, und so kann man die Zahlen nicht lesen. Allerdings sind die Summen der drei Zeilen und die Summen zweier Spalten bekannt (siehe Abbildung). Wie groß ist die Summe der dritten Spalte?

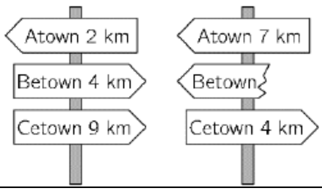


(A) 41 (B) 43 (C) 44 (D) 45 (E) 47

Die Gesamtsumme der drei Zeilen ist $24 + 26 + 40 = 90$ und muss gleich der Gesamtsumme der drei Spalten sein. Daher ist die Summe der dritten Spalte $90 - 27 - 20 = \mathbf{43}$.

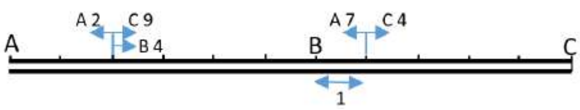
4 Punkte Beispiele

11. Der kürzeste Weg von Atown nach Cetown führt durch Betown. Entlang der Strecke stehen, wie in der Abbildung zu sehen ist, zwei Wegweiser. Welche Distanz war auf dem beschädigten Wegweiser angeschrieben?



(A) 1 km (B) 3 km (C) 4 km (D) 5 km (E) 9 km

Lösung 1: Am ersten Wegweiser kann man erkennen, dass Atown und Betown 6 km voneinander entfernt sind. Da man vom zweiten Wegweiser aus 7 km nach Atown benötigt, ist man **1 km** von Betown entfernt.



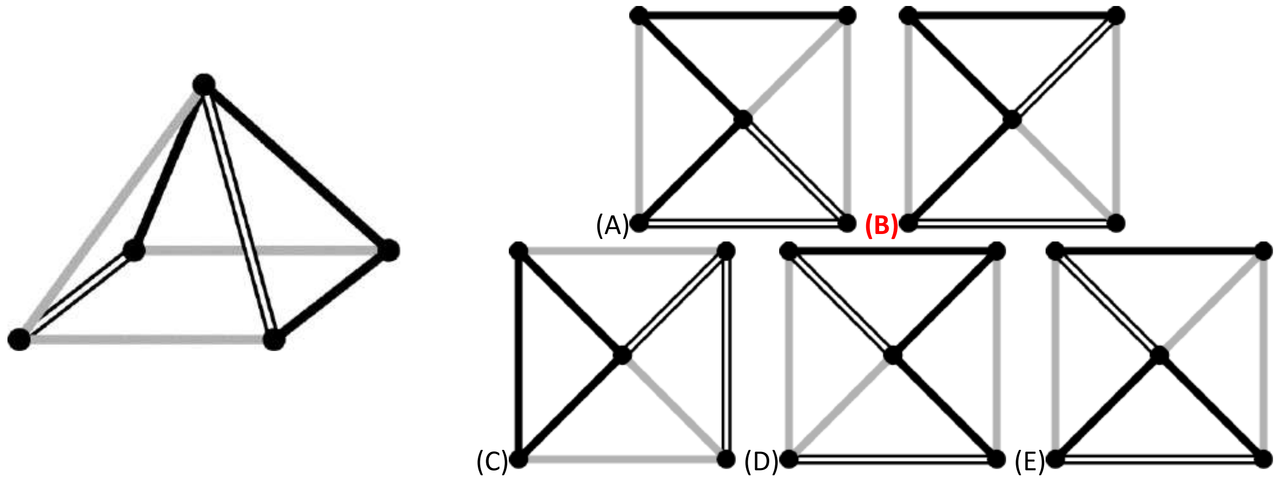
Lösung 2: Am ersten Wegweiser kann man erkennen, dass Betown und Cetown 5 km voneinander entfernt sind. Da man beim zweiten Wegweiser noch 4 km nach Cetown benötigt, ist man **1 km** von Betown entfernt.

12. Anna möchte im Monat März täglich durchschnittlich 5 km gehen. Bis zum Abend des 16. März ist sie insgesamt 95 km gegangen. Wie weit muss sie ab dem 17. März durchschnittlich bis Ende des Monats täglich gehen, um ihr Ziel zu erreichen?

(A) 5,4 km (B) 5 km **(C)** 4 km (D) 3,6 km (E) 3,1 km

Insgesamt möchte Anna im Monat März $31 \cdot 5 = 155$ km gehen. In den restlichen 15 Tagen des Monats sind noch $155 - 95 = 60$ km zurückzulegen. Daher muss sie ab dem 17. März durchschnittlich täglich $60 : 15 = \mathbf{4}$ **km** gehen.

13. Welches der folgenden Bilder zeigt die links abgebildete Pyramide, wenn sie von oben betrachtet wird?



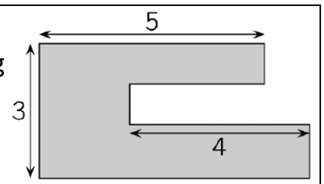
Betrachtet man die Anordnung der Farben der Kanten, so erhält man **(B)** als einzige Lösung.

14. Alle Kinder einer Klasse schwimmen oder tanzen. Drei Fünftel der Kinder schwimmen und drei Fünftel der Kinder tanzen. Fünf Kinder üben beide Sportarten aus. Wie viele Kinder gibt es in der Klasse?

(A) 15 (B) 20 **(C)** 25 (D) 30 (E) 35

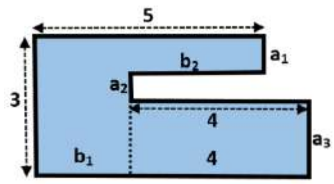
Da drei Fünftel schwimmen und drei Fünftel tanzen, muss ein Fünftel beide Tätigkeiten ausüben. Daher entsprechen 5 Kinder einem Fünftel. Somit gibt es $5 \cdot 5 = \mathbf{25}$ Kinder in der Klasse.

15. Ein Garten hat die rechts abgebildete Form. Benachbarte Seiten stehen aufeinander normal. Einige Längen sind angegeben. Welchen Umfang hat der Garten? (Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu.)



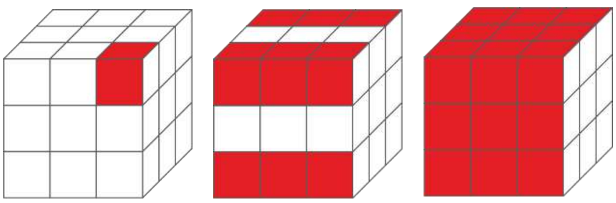
(A) 22 (B) 23 **(C)** 24 (D) 25 (E) 26

Man erkennt, dass $a_1 + a_2 + a_3 = 3$ und $b_1 + b_2 = 5$ ist. Daher ist der Umfang $3 + 5 + 4 + 4 + (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2) = 16 + 3 + 5 = \mathbf{24}$.



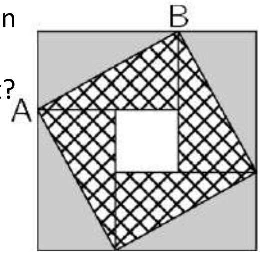
16. Andrew hat 27 identische kleine Würfel. Jeder dieser Würfel besitzt zwei rote aneinandergrenzende Flächen und vier weiße Flächen. Andrew verwendet alle kleinen Würfel, um einen großen Würfel zu bauen. Wie viele gänzlich rote Seitenflächen kann er beim großen Würfel maximal erhalten?

(A) 2 (B) 3 **(C)** 4 (D) 5 (E) 6



Da es nur zwei rote aneinandergrenzende Flächen pro kleinen Würfel gibt, können nur zwei der drei Flächen des großen Würfels in einer Ecke gefärbt sein. Also ist es möglich, vier parallele Kanten rot anzuordnen. Dann werden die restlichen kleinen Quadrate der jeweiligen Flächen zwischen diesen Kanten wie in der Abbildung rot gefärbt. Der große Würfel kann also wie abgebildet so gebaut werden, dass genau 2 gegenüberliegende Flächen zum Teil weiß und die restlichen **4** Flächen gänzlich rot sind.

17. Ein großes Quadrat besteht aus 8 kongruenten rechtwinkeligen Dreiecken und einem kleinen Quadrat. Die Fläche des großen Quadrats beträgt 49 cm². Die Länge der Hypotenuse AB beträgt 5 cm und ist in allen Dreiecken gleich groß. Welche Fläche besitzt das kleine Quadrat?



(A) 1 cm² (B) 4 cm² (C) 9 cm² (D) 16 cm² (E) 25 cm²

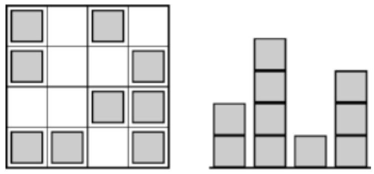
Die Fläche des großen Quadrats beträgt 49 cm², die des Quadrats mit Kantenlänge $AB = 5$ cm beträgt 25 cm². Die graue Fläche, also die Differenz der Fläche des großen Quadrats und des Quadrats mit Kantenlänge AB, ist $49 - 25 = 24$ cm². Da die in der Abbildung grau gefärbte Fläche gleich groß ist wie die karierte Fläche, ist die Fläche des weißen Quadrats $25 - 24 =$ **1 cm²**.

18. Werners Gehalt beträgt 20 % des Gehalts seines Chefs. Um wie viel Prozent ist das Gehalt seines Chefs größer als das Gehalt von Werner?

(A) 80 % (B) 120 % (C) 180 % **(D)** 400 % (E) 520 %

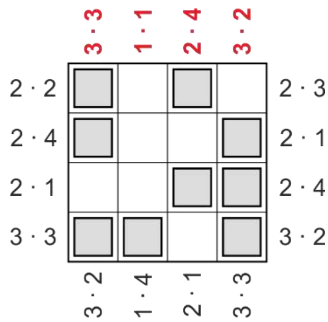
Da Werners Gehalt 20 % des Gehalts seines Chefs beträgt, verdient sein Chef fünfmal so viel wie Werner. Der Chef verdient also um **400 %** mehr als Werner.

19. Irene baut eine "Stadt" aus identischen hölzernen Würfeln. Eine Abbildung zeigt die Stadt von oben, die andere von einer Seite. Allerdings weiß man nicht, von welcher Seite die Stadt betrachtet wurde. Wie groß ist die maximale Anzahl von Würfeln, die Irene benutzt haben kann?



(A) 25 **(B)** 24 (C) 23 (D) 22 (E) 21

Die Abbildung zeigt die maximale Würfelanzahl pro Reihe ausgehend von den jeweiligen Seitenansichten. Die rot markierte Ansicht zeigt, dass die maximale Anzahl an Würfeln **24** beträgt.

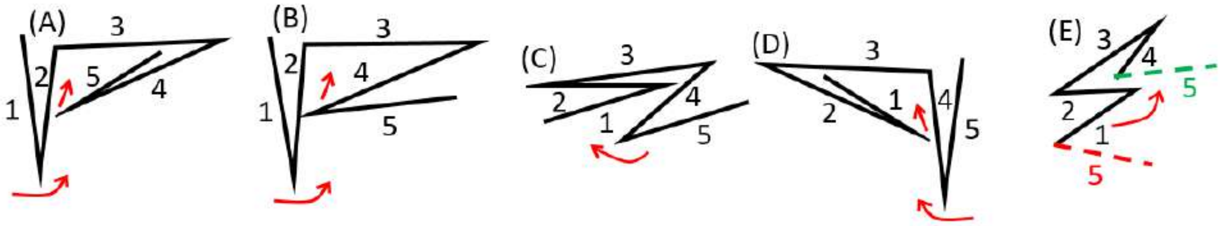


20. Anja hat einen Papierstreifen, der in 5 gleiche Quadrate unterteilt ist und in denen die Zahlen 1 bis 5 geschrieben sind (siehe Abbildung). Anja faltet nun den Streifen entlang der Quadratseiten viermal so, dass die 5 Quadrate genau übereinander zu liegen kommen. In welcher Reihenfolge können nach der Faltung die nummerierten Quadrate, von oben nach unten betrachtet, nicht übereinander zu liegen kommen?

1	2	3	4	5

(A) 3, 5, 4, 2, 1 (B) 3, 4, 5, 1, 2 (C) 3, 2, 1, 4, 5 (D) 3, 1, 2, 4, 5 **(E)** 3, 4, 2, 1, 5

Anhand der Grafik erkennt man, dass (E) nicht möglich ist.



5 Punkte Beispiele

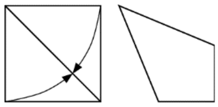
21. Zwölf gefärbte Würfel werden in einer Reihe angeordnet. Es gibt drei blaue, zwei weiße, drei rote und vier grüne Würfel, jedoch nicht in dieser Reihenfolge. Ein weißer Würfel befindet sich an einem Ende, am anderen ein roter Würfel. Alle roten Würfel liegen nebeneinander. Alle grünen Würfel liegen ebenfalls nebeneinander. Der zehnte Würfel von links ist blau. Welche Farbe hat der sechste Würfel von links?

(A) grün (B) weiß (C) blau (D) rot (E) rot oder blau

Die Würfel müssen wie in der Abbildung angeordnet werden. Da die vier grünen Würfel immer nebeneinander liegen müssen, haben sie nur zwischen den roten Würfeln und dem blauen Würfel Platz. Daher ist, egal wo man sie dort platziert, der sechste Würfel von links auf jeden Fall **grün**.

R	**R**	**R**			**6. Platz**				**B**		**W**

22. Zaida faltet zwei Seiten eines quadratischen Stücks Papier zur Diagonale und erhält ein Viereck. Wie groß ist der größte Winkel des Vierecks?



(A) 112,5° (B) 120° (C) 125° (D) 135° (E) 150°

Durch die Faltung erhält Zaida ein Deltoid. Der rechte Winkel des Quadrats wird geviertelt, also $90°: 4 = 22{,}5°$. Man kennt vom Deltoid also die beiden Winkel 90° und $2 \cdot 22{,}5° = 45°$. Die beiden fehlenden Winkel sind stumpf und gleich groß. Betrachtet man nun die Innenwinkelsumme 360° des Deltoids, so erhält man einen gesuchten stumpfen Winkel $(360° - 90° - 45°): 2 = \mathbf{112{,}5}°$.

23. Wie viele vierstellige Zahlen gibt es, deren Hälfte durch 2, deren Drittel durch 3 und deren Fünftel durch 5 jeweils ohne Rest teilbar ist?

(A) 1 (B) 7 (C) 9 **(D)** 10 (E) 11

Ist die Hälfte einer Zahl durch 2 teilbar, so ist die Zahl durch 4 teilbar. Ist das Drittel einer Zahl durch 3 teilbar, so ist die Zahl durch 9 teilbar. Und ist das Fünftel einer Zahl durch 5 teilbar, so ist die Zahl durch 25 teilbar. Die gesuchten Zahlen müssen also durch $4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$ teilbar und somit Vielfache von 900 sein. Die vierstelligen Vielfachen von 900 sind 1800, 2700, 3600, 4500, 5400, 6300, 7200, 8100, 9000 und 9900. Es gibt also **10** solche Zahlen.

24. Im Finale eines Tanzwettbewerbs geben die drei Jurymitglieder den fünf Finalisten 0, 1, 2, 3 oder 4 Punkte. Jedes Jurymitglied gibt jedem Finalisten eine andere Punkteanzahl. Adam kennt von jedem der Teilnehmenden die erreichte Gesamtpunktzahl und einige einzelne Punkte, so wie in der Abbildung zu sehen ist. Wie viele Punkte erhält Adam vom dritten Jurymitglied?

	Adam	Berta	Clara	David	Emil
I	2	0			
II		2	0		
III					
Summe	7	5	3	4	11

(A) 0 **(B)** 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Berta muss 3 Punkte von III bekommen. Emil muss von 2 Jurymitgliedern 4 Punkte und von einem 3 Punkte erhalten. Daher erhält er von III sicher 4 Punkte. Adam muss von II auf jeden Fall 3 oder 4 Punkte erhalten. Damit erhält David von II 1 Punkt. Da nun weder Clara noch David von I 4 Punkte erhalten können, muss diese Emil bekommen und so erhält er von II 3 Punkte. Daher erhält Adam von II 4 Punkte und so von III **1 Punkt**. Die restlichen Eintragungen sind nicht relevant.

	Adam	Berta	Clara	David	Emil
I	2	0			4
II	4	2	0	1	3
III	1	3			4
Summe	7	5	3	4	11

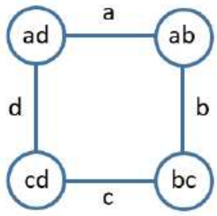
25. Saniya schreibt auf jede Seite eines Quadrats eine positive ganze Zahl. In jede Ecke schreibt sie das Produkt der beiden Zahlen jener Seiten, die sich in dieser Ecke treffen. Die Summe aller Zahlen in den Ecken beträgt 15. Wie groß ist die Summe aller Zahlen, die auf den Seiten des Quadrats stehen?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 15

Beschriftet man das Quadrat mit Variablen wie in der Abbildung, so erhält man die Gleichungen

$ab + ad + bc + cd = 15 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (b+d) + c \cdot (b+d) = 15 \Leftrightarrow \quad (b+d) \cdot (a+c) = 15$

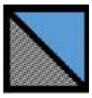
Weil $15 = 3 \cdot 5$ ist, ist entweder $(b+d) = 3$ und $(a+c) = 5$ oder umgekehrt. Daher ist $(b+d) + (a+c) = a + b + c + d = 3 + 5 = \mathbf{8}$.



26. Sophia hat 52 identische gleichschenkelige rechtwinkelige Dreiecke. Sie möchte mit einigen dieser Dreiecke ein Quadrat herstellen. Wie viele verschiedene Größen sind für so ein Quadrat möglich?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Aus den gegebenen Dreiecken kann man auf zwei Arten Quadrate bilden:

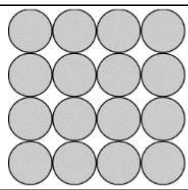


Erste Möglichkeit (siehe links): Mit solchen Quadraten können 1×1-, 2×2-, 3×3-, 4×4- und 5×5-Quadrate gelegt werden. Für ein 5×5-Quadrat benötigt man bereits $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ Dreiecke, daher ist kein größeres Quadrat möglich.

Zweite Möglichkeit (siehe rechts): Mit solchen Quadraten können 1×1-, 2×2- und 3×3-Quadrate gelegt werden. Für ein 3×3-Quadrat benötigt man $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ Dreiecke, für ein 4×4-Quadrat würde man bereits 64 Dreiecke benötigen.

Insgesamt sind also **8** verschiedene Quadratgrößen möglich.

27. Cleo baut eine Pyramide aus gleich großen kleinen Metallkugeln. Die Basis besteht, so wie im Bild zu sehen ist, aus 4 × 4 Kugeln. Die mittleren Schichten bestehen aus 3 × 3 und 2 × 2 Kugeln, und an der Spitze befindet sich eine Kugel. An den Stellen, wo sich zwei Kugeln berühren, verwendet Cleo einen Tropfen Klebstoff. Wie viele Tropfen Klebstoff benötigt Cleo?



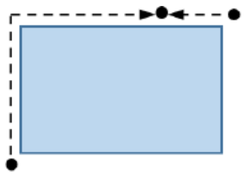
(A) 72 (B) 85 (C) 88 (D) 92 (E) 96

Damit die unterste Schicht zusammenklebt, benötigt Cleo $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ Tropfen. Für die 3 × 3 Kugeln benötigt er $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ und für die 2 × 2 Kugeln $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ Tropfen Klebstoff. Jede Kugel, die auf anderen Kugeln aufliegt, hat zur unteren Kugelebene jeweils 4 Kontaktpunkte. Daher kommen weitere $3 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 56$ Tropfen hinzu. Insgesamt benötigt Cleo also $24 + 12 + 4 + 56 = \mathbf{96}$ Tropfen Klebstoff.

28. In jeder Ecke eines 10 m × 25 m Schwimmbeckens befindet sich ein Kind. Ihr Trainer steht irgendwo am Rand des Beckens. Die kürzesten Entfernungen des Trainers entlang des Beckenrandes zu drei der vier Kinder betragen zusammen 50 m. Wie lang ist der kürzeste Weg, den der Trainer zurücklegen muss, um zum vierten Kind zu kommen?

(A) 10 m (B) 12 m (C) 15 m (D) 20 m (E) 25 m

Egal wo der Trainer sich befindet, seine Entfernung zu zwei Kindern, die sich an diagonal-gegenüberliegenden Eckpunkten befinden, ist zusammen der halbe Umfang des Schwimmbeckens, also $(10 + 25 + 10 + 25) : 2 = 35$ m (siehe Abbildung). Insgesamt ist er daher von allen vier Kindern $2 \cdot 35 = 70$ m entfernt. Da er von den drei Kindern insgesamt 50 m entfernt ist, beträgt die kürzeste Entfernung zum vierten Kind $70 - 50 = \mathbf{20\ m}$.



29. Anna, Boris und Clara laufen um die Wette. Sie starten zur gleichen Zeit und laufen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit. Als Anna ins Ziel kommt, hat Boris noch 15 m und Clara noch 35 m zu laufen. Als Boris ins Ziel kommt, hatte Clara noch 22 m zu laufen. Über welche Streckenlänge wird das Wettrennen gelaufen?

(A) 135 m (B) 140 m (C) 150 m (D) 165 m (E) 175 m

Als Anna ins Ziel kommt, hat Boris auf Clara 20 m Vorsprung. Als Boris ins Ziel kommt, also 15 m später, hat er auf Clara bereits 22 m Vorsprung. Das bedeutet, Boris gewinnt pro 15 m auf Clara 2 m Vorsprung. Da er, als Anna ins Ziel kommt, bereits 20 m = $10 \cdot 2$ m Vorsprung hat, muss er bis zu diesem Zeitpunkt bereits $10 \cdot 15$ m = 150 m weit gelaufen sein. Also hat er bis ins Ziel insgesamt **165 m** zurückgelegt.

30. Die folgenden Aussagen liefern Hinweise über eine vierstellige Zahl und ihre Ziffern:

In der Zahl **4 1 3 2** sind zwei Ziffern korrekt, aber an der falschen Stelle.

In der Zahl **9 8 2 6** ist eine Ziffer korrekt und an der richtigen Stelle.

In der Zahl **2 7 4 1** ist eine Ziffer korrekt, aber an der falschen Stelle.

In der Zahl **7 6 4 2** ist keine der Ziffern korrekt.

In der Zahl **5 0 7 9** sind zwei Ziffern korrekt, eine davon an der richtigen Stelle, die andere an der falschen Stelle.

Wie lautet die letzte Stelle der vierstelligen Zahl?

(A) 0 (B) 1 **(C)** 3 (D) 5 (E) 9

~~4~~ **1 3** ~~2~~
9 8 ~~2 6~~
~~2 7 4~~ **1**
~~7 6 4 2~~
5 0 ~~7~~ **9**

Aufgrund der vierten Aussage sind die Ziffern 7, 6, 4 und 2 nicht die Ziffern der gesuchten Zahl. Die somit noch möglichen Ziffern sind in der Abbildung rechts schwarz. Die Ziffer 1 kommt laut dritter und erster Aussage vor, ist aber nicht an der Einer- oder Hunderterstelle. Die Ziffer 3 wird auch verwendet, aber nicht an der Zehnerstelle. Laut der zweiten Aussage ist eine der Ziffern 9 und 8 korrekt, außerdem laut der fünften Aussage zwei der Ziffern 0, 5 und 9. Da zwei Ziffern schon fix sind (1 und 3), muss die 9 vorkommen, und dies laut zweiter Aussage an der Tausenderstelle. Da die 9 bei der fünften Aussage an der falschen Stelle steht. Die Tausenderstelle ist bei Aussage fünf besetzt, somit muss die 0 an der Hunderterstelle die letzte gesuchte Ziffer sein. Damit ist 1 an der Zehnerstelle und **3** an der Einerstelle. Die gesuchte Zahl lautet somit 9013.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2020
23. 3. 2020
Kategorie: Junior, 9. – 10. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

Mit meiner Unterschrift gebe ich das Einverständnis, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

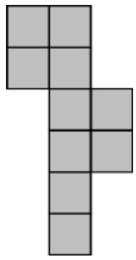
Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

Ort, Datum Unterschrift

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Junior (9. – 10. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

- 3 Punkte Beispiele -



1. Die Abbildung zeigt eine Figur, die aus 10 Quadraten mit Seitenlänge 1 cm besteht, die Seite an Seite liegen. Wie groß ist der Umfang der Figur in cm?

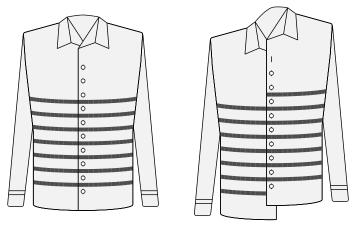
(A) 14 (B) 18 (C) 30 (D) 32 (E) 40

2. Welches Ergebnis befindet sich in der Mitte, wenn die Ergebnisse der folgenden Rechnungen der Größe nach geordnet werden?

(A) 1 + 2345 (B) 12 + 345 (C) 123 + 45 (D) 1234 + 5 (E) 12345 + 0

3. Wer ist die Mutter der Tochter von Annas Großmutter?

(A) Annas Schwester (B) Annas Nichte (C) Annas Mutter (D) Annas Tante (E) Annas Großmutter



4. Trägt Cosimo sein neues Hemd wie in der Abbildung links, so bilden die horizontalen Streifen sieben geschlossene Ringe um seinen Oberkörper. Heute hat er die Knöpfe, wie rechts abgebildet, falsch zugeknöpft. Wie viele geschlossene Ringe befinden sich nun um Cosimos Oberkörper?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

5. In der dargestellten Rechnung steht jeder Buchstabe anstelle einer Ziffer, wobei gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern stehen. Die Buchstaben werden verwendet, um einige zweistellige Zahlen zu bilden.
Wie groß ist die Summe der vier Zahlen auf der rechten Seite?

	A D
	+ C D
A B	+ A B
+ C D	+ C B
7 9	?

(A) 79 (B) 158 (C) 869 (D)1418 (E)7979

6. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist 2.
Wie lautet die kleinste dieser Zahlen?

(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 (E) 1

7. Die Jahreszahlen 2020 und 1717 bestehen jeweils aus einer zweistelligen Zahl, die zweimal hintereinander angeschrieben wird.
In wie vielen Jahren nach 2020 wird das nächste Mal eine Jahreszahl diese Eigenschaft besitzen?

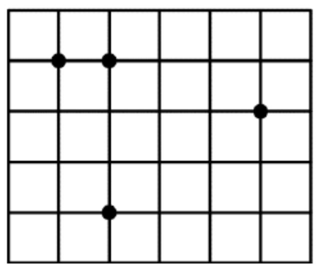
(A) 20 (B) 101 (C) 120 (D) 121 (E) 202

8. Maria hat zehn Papierstücke. Einige davon sind Quadrate, die übrigen sind Dreiecke. Sie zerschneidet drei der Quadrate entlang einer Diagonale. Die 13 Stücke haben nun zusammen 42 Ecken. Wie viele Dreiecke hatte sie, bevor sie zu schneiden begann?

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

9. Helena möchte 18 aufeinanderfolgende Tage bei ihrer Großmutter verbringen. Die Großmutter erzählt an den Märchentagen Dienstag, Samstag und Sonntag jeweils genau ein Märchen, an den anderen Tagen keines. Helena möchte möglichst viele Märchen hören.
An welchem Wochentag sollte Helena ihren Besuch beginnen?

(A) Montag (B) Dienstag (C) Freitag (D) Samstag (E) Sonntag

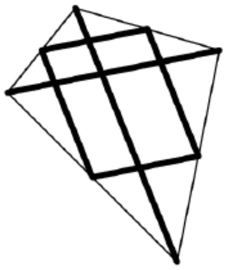


10. Das gegebene Gitter besteht aus lauter Quadraten mit Seitenlänge 1. Vier Gitterpunkte sind markiert. Was ist der kleinste Flächeninhalt, den ein Dreieck mit Eckpunkten in drei dieser Punkte haben kann?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{5}{2}$

- 4 Punkte Beispiele -

11. Martin baut einen Drachen, indem er einen geraden Holzstab in sechs Stücke zerteilt. Er nutzt zwei davon, mit den Längen 120 cm und 80 cm, für die Diagonalen. Die restlichen vier Stücke verbinden die Mittelpunkte der Seiten des Drachens (siehe Abbildung).
Wie lang war der ursprüngliche Holzstab?

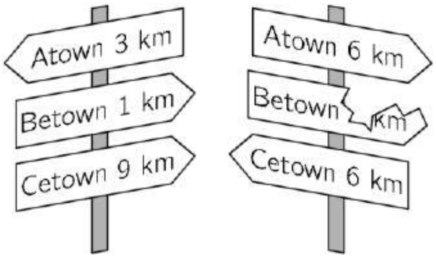


(A) 300 cm (B) 370 cm (C) 400 cm (D) 410 cm (E) 450 cm

12. Die ganzen Zahlen *a, b, c* und *d* erfüllen die Gleichung $ab = 2cd$.
Welchen der folgenden Werte kann das Produkt *abcd* nicht annehmen?

(A) 50 (B) 100 (C) 200 (D) 450 (E) 800

13. Der kürzeste Weg von Atown nach Cetown führt durch Betown. Geht man auf diesem Weg von Atown nach Cetown, trifft man zunächst auf den linken Wegweiser, danach auf den rechten Wegweiser.
Welche Distanzangabe stand auf dem beschädigten Wegweiser?

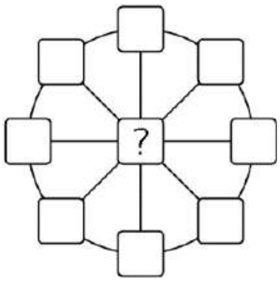


(A) 1 km (B) 2 km (C) 3 km (D) 4 km (E) 5 km

14. Eine Seite eines gleichschenkeligen Dreiecks ist 20 cm lang.
Von den beiden anderen Seiten misst die eine $\frac{2}{5}$ der anderen.
Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

(A) 36 cm (B) 48 cm (C) 60 cm (D) 90 cm (E) 120 cm

15. In die neun Felder der Figur soll jeweils eine beliebige Zahl eingetragen werden.
Die Summe der drei Zahlen entlang jedes Durchmessers soll 13 betragen.
Die Summe der acht Zahlen entlang des Kreisumfangs soll 40 sein.
Welche Zahl muss in das Feld in der Mitte eingetragen werden?

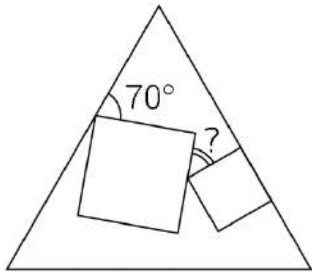


(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 10 (E) 12

16. Maria setzt ein Multiplikationszeichen zwischen die zweite und dritte Ziffer der Zahl 2020 und bemerkt, dass das entstandene Produkt $20 \cdot 20$ eine Quadratzahl ist.
Wie viele Zahlen zwischen 2010 und 2099 (inklusive 2020) haben diese Eigenschaft?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

17. Zwei Quadrate werden wie abgebildet in ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet.
Wie groß ist der mit „?“ markierte Winkel?



(A) 30° (B) 35° (C) 40° (D) 45° (E) 50°

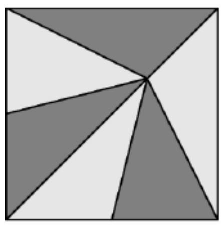
18. Luca startet eine 520 km lange Autobahnfahrt mit 14 Litern Benzin im Tank. Sein Auto verbraucht einen Liter Benzin je 10 km. Nach 55 km liest er ein Schild, auf dem die Entfernungen zu den nächsten fünf Tankstellen auf seinem Weg angegeben sind.
Diese sind 35 km, 45 km, 55 km, 75 km und 95 km. Der Tank fasst 40 Liter. Luca möchte nur einmal tanken.
Wie weit ist es noch bis zur Tankstelle, bei der er tanken sollte?

(A) 35 km (B) 45 km (C) 55 km (D) 75 km (E) 95 km

19. Es gilt $17x + 51y = 102$. Welchen Wert hat $9x + 27y$?

(A) 54 (B) 36 (C) 34 (D) 18 (E) Der Wert ist nicht eindeutig bestimmbar.

20. Ein 81 dm² großes quadratisches Fensterglas besteht wie abgebildet aus sechs flächengleichen Dreiecken.
Welchen Abstand hat der gemeinsame Eckpunkt der sechs Dreiecke von der Unterkante des Fensters?



(A) 3 dm (B) 5 dm (C) 5,5 dm (D) 6 dm (E) 7,5 dm

- 5 Punkte Beispiele -

21. Wir bilden alle 9-ziffrigen Zahlen, die jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthalten.
Wie groß ist der relative Anteil der durch 18 teilbaren Zahlen unter ihnen?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

22. Ein Hase und eine Schildkröte machen ein Wettrennen auf einer 5 km langen geraden Strecke. Der Hase ist fünfmal so schnell wie die Schildkröte. Irrtümlich startet der Hase rechtwinkelig zur Rennstrecke. Nach einer Weile bemerkt er den Fehler. Er ändert seine Richtung und läuft geradlinig auf das Ziel zu. Er erreicht das Ziel gleichzeitig mit der Schildkröte.
Wie groß ist der Abstand zwischen dem Punkt, an dem der Hase die Richtung geändert hat, und dem Ziel?

(A) 11 km (B) 12 km (C) 13 km (D) 14 km (E) 15 km

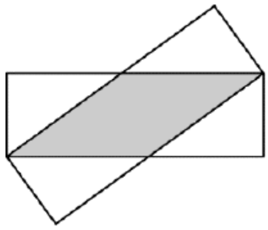
23. Auf dem Tisch liegen einige Quadrate und Dreiecke. Manche dieser Figuren sind blau, die übrigen sind rot. Manche der Figuren sind groß, die übrigen sind klein. Wir wissen:

1. Ist eine Figur groß, so ist sie ein Quadrat.
2. Ist eine Figur blau, so ist sie ein Dreieck.

Welche der Aussagen (A) – (E) ist mit Sicherheit wahr?

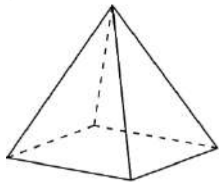
(A) Alle roten Figuren sind Quadrate. (B) Alle Quadrate sind groß. (C) Alle kleinen Figuren sind blau.
(D) Alle Dreiecke sind blau. (E) Alle blauen Figuren sind klein.

24. Zwei deckungsgleiche Rechtecke mit Seitenlängen 3 cm und 9 cm überlappen einander wie abgebildet. Wie groß ist die überlappende Fläche?



(A) 12 cm² (B) 13,5 cm² (C) 14 cm² (D) 15 cm² (E) 16 cm²

25. Kanga beschriftet die Eckpunkte einer quadratischen Pyramide mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5. Sie verwendet jede der Ziffern genau einmal. Für jede Fläche berechnet Kanga die Summe der Zahlen an den Eckpunkten. Vier dieser Summen sind 7, 8, 9 und 10.
Wie groß ist die fünfte Summe?



(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

26. Ein großer Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln, die alle dieselbe Seitenlänge haben.
Drei der Flächen des großen Würfels werden angemalt.
Wie groß ist die maximale Anzahl an kleinen Würfeln, bei denen genau eine Seite angemalt ist?

(A) 27 (B) 28 (C) 32 (D) 34 (E) 40

27. In jedes der Quadrate wird eine Zahl so eingetragen, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich ist.
Welche Zahl wird in das graue Feld eingetragen?

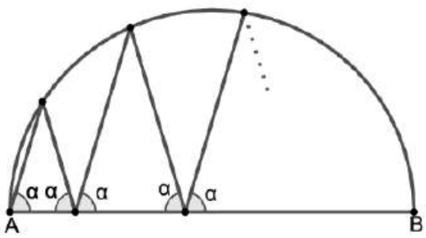
1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

28. Alice, Bella und Cathy veranstalten einen Wettbewerb im Armdrücken. In jeder Runde treten zwei der Mädchen gegeneinander an, das dritte pausiert. Nach jeder Runde tritt die Gewinnerin gegen das Mädchen an, das gerade pausiert hat. Alice tritt 10 Mal an, Bella 15 Mal und Cathy 17 Mal. Wer könnte in der zweiten Runde verloren haben?

(A) nur Alice (B) nur Bella (C) nur Cathy (D) sowohl Alice als auch Bella
(E) sowohl Bella als auch Cathy

29. *AB* ist der Durchmesser eines Kreises. Eine Zickzacklinie startet in Punkt *A* und endet nach vier Spitzen auf dem Kreis im Punkt *B*. Jeder der Winkel, den die Linie mit dem Durchmesser einschließt, ist α (siehe Abbildung).



Wie groß ist der Winkel α?

(A) 60° (B) 72° (C) 75° (D) 80° (E) ein anderer Wert

30. Acht aufeinanderfolgende dreiziffrige positive ganze Zahlen haben die folgende Eigenschaft:
Jede von ihnen ist durch ihre letzte Ziffer teilbar.
Wie groß ist die Ziffernsumme der kleinsten der acht Zahlen?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

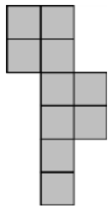
Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

– Lösungsvektor –

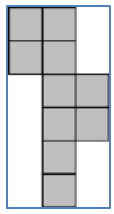
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	D	E	A	B	C	B	E	D	A	C	B	B	B	A	C	E	D	A	D	B	C	E	D	C	C	C	A	B	D

– 3 Punkte Beispiele –

1. Die Abbildung zeigt eine Figur, die aus 10 Quadraten mit Seitenlänge 1 cm besteht, die Seite an Seite liegen. Wie groß ist der Umfang der Figur in cm?



(A) 14 **(B)** 18 (C) 30 (D) 32 (E) 40



Der Umfang der Figur ist gleich groß wie der Umfang des umschriebenen Rechtecks.

$U = 2\cdot(3\text{ cm} + 6\text{ cm}) = \mathbf{18\text{ cm}}$

2. Welches Ergebnis befindet sich in der Mitte, wenn die Ergebnisse der folgenden Rechnungen der Größe nach geordnet werden?

(A) 1 + 2345 (B) 12 + 345 (C) 123 + 45 **(D)** 1234 + 5 (E) 12345 + 0

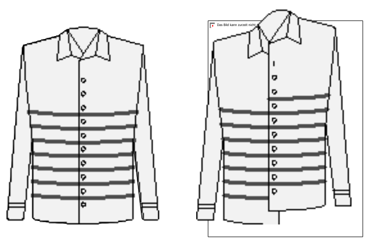
Die Ergebnisse der zweiten und dritten Rechnung sind dreistellig. Die Ergebnisse der ersten und vierten Rechnung sind vierstellig, das Ergebnis in E muss nicht berechnet werden, es ist fünfstellig. Daher befindet sich in der Mitte der geordneten Ergebnisse das kleinere der zwei vierstelligen Ergebnisse, also **1234 + 5 = 1239**, weil die Tausenderziffer hier kleiner ist.

3. Wer ist die Mutter der Tochter von Annas Großmutter?

(A) Annas Schwester (B) Annas Nichte (C) Annas Mutter (D) Annas Tante **(E)** Annas Großmutter

Die Töchter von Annas Großmutter sind Annas Mutter und deren Schwestern, wenn sie welche hat.
Alle haben **Annas Großmutter** als Mutter.

4. Trägt Cosimo sein neues Hemd wie in der Abbildung links, so bilden die horizontalen Streifen sieben geschlossene Ringe um seinen Oberkörper. Heute hat er die Knöpfe, wie rechts abgebildet, falsch zugeknöpft. Wie viele geschlossene Ringe befinden sich nun um Cosimos Oberkörper?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Es existiert kein geschlossener Ring. Die Anzahl ist also **0**.

Es ist eine Art Spirale. Von vorne gesehen ist der oberste linke Streifen mit dem von oben zweiten rechten Streifen verbunden und so weiter. Vergleiche mit der Rille einer Schallplatte.

5. In der dargestellten Rechnung steht jeder Buchstabe anstelle einer Ziffer, wobei gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern stehen.
Die Buchstaben werden verwendet, um einige zweistellige Zahlen zu bilden.
Wie groß ist die Summe der vier Zahlen auf der rechten Seite?

$$\begin{array}{r} A\,B \\ +\,C\,D \\ \hline 7\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} A\,D \\ +\,C\,D \\ +\,A\,B \\ +\,C\,B \\ \hline ? \end{array}$$

(A) 79 (B) 158 (C) 869 (D)1418 (E)7979

Für die gegebene Summe gilt: 79 = 10A + B + 10C +D.
Für die unbekannte Summe S gilt: S = 10A + D + 10C +D + 10A + B + 10C +B = 2·(10A + B + 10C +D) = 2·79 = **158**.

6. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist 2. Wie lautet die kleinste dieser Zahlen?
(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 (E) 1

Wir nennen die gesuchte kleinste Zahl x. Die Gleichung $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 2) = 4x + 6 = 2$ liefert als Lösung **-1**.
Alternative Lösung: Weil die Summe 2 ist, muss die kleinste Zahl negativ sein.
Wegen -1 + 0 + 1 +2 = 0 +2 ist die Summe 2 gleich der größten Zahl und -1 der gesuchte kleinste Summand.

7. Die Jahreszahlen 2020 und 1717 bestehen jeweils aus einer zweistelligen Zahl, die zweimal hintereinander angeschrieben wird.
In wie vielen Jahren nach 2020 wird das nächste Mal eine Jahreszahl diese Eigenschaft besitzen?
(A) 20 (B) 101 (C) 120 (D) 121 (E) 202

Wegen 20 + 1 = 21 ist die nächste Jahreszahl mit dieser Eigenschaft ist 2121 = 2020 + 101.
Daher wird dies **in 101 Jahren** das nächste Mal der Fall sein.

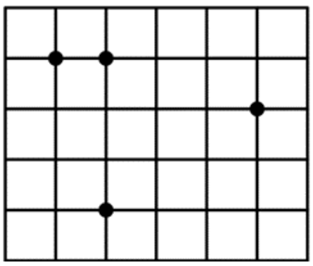
8. Maria hat zehn Papierstücke. Einige davon sind Quadrate, die übrigen sind Dreiecke. Sie zerschneidet drei der Quadrate entlang einer Diagonale. Die 13 Stücke haben nun zusammen 42 Ecken. Wie viele Dreiecke hatte sie, bevor sie zu schneiden begann?
(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

Zerschneidet man ein Quadrat in zwei Dreiecke, so nimmt die Anzahl der Figuren um 1 und die Gesamtanzahl der Ecken um 2 zu. Beim Zerschneiden von 3 Quadraten erhöht sich also die Anzahl der Ecken insgesamt um 6 auf 42. Daher hatten die 10 Figuren anfangs zusammen 36 Ecken, also um 4 Ecken weniger, als 10 Quadrate hätten. Daher hatte Maria vor dem Zerschneiden der Quadrate **4 Dreiecke** und 6 Quadrate

9. Helena möchte 18 aufeinanderfolgende Tage bei ihrer Großmutter verbringen. Die Großmutter erzählt an den Märchentagen Dienstag, Samstag und Sonntag jeweils genau ein Märchen, an den anderen Tagen keines.
Helena möchte möglichst viele Märchen hören. An welchem Wochentag sollte Helena ihren Besuch beginnen?
(A) Montag (B) Dienstag (C) Freitag (D) Samstag (E) Sonntag

In 14 Tagen erzählt die Großmutter immer 6 Märchen, da jeder Wochentag zweimal vorkommt. An den übrigen 4 Tagen möchte Helena möglichst viele Märchen hören. Startet sie ihren Besuch am Samstag, so kommen alle drei Märchentage während des Besuchs zusätzlich auch noch ein drittes Mal vor. Sie sollte ihren Besuch also an einem **Samstag** starten. Bei allen anderen Tagen würde sie weniger Märchen hören.

10. Das gegebene Gitter besteht aus lauter Quadraten mit Seitenlänge 1.
Vier Gitterpunkte sind markiert. Was ist der kleinste Flächeninhalt, den ein Dreieck mit Eckpunkten in drei dieser Punkte haben kann?

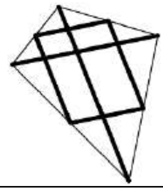


(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{5}{2}$

Da die Fläche eines Dreiecks die Hälfte des Produkts aus Grundlinie und Höhe ist, muss man die beiden Längen minimal wählen. Dies gelingt, wenn man die obersten drei Punkte wählt, da dann beide Größen den minimal möglichen Wert 1 haben und man ein Dreieck mit Fläche $\frac{1}{2}$ erhält.
Da keine drei der markierten Punkte auf einer geraden liegen, gibt es kein entartetes Dreieck mit Fläche 0.

– 4 Punkte Beispiele –

11. Martin baut einen Drachen, indem er einen geraden Holzstab in sechs Stücke zerteilt. Er nutzt zwei davon, mit den Längen 120 cm und 80 cm, für die Diagonalen. Die restlichen vier Stücke verbinden die Mittelpunkte der Seiten des Drachens. Wie lang war der ursprüngliche Holzstab?



(A) 300 cm (B) 370 cm **(C)** 400 cm (D) 410 cm (E) 450 cm

Die Verbindung zweier nebeneinanderliegender Seitenmittelpunkte ist jeweils parallel zu einer Diagonalen des Drachens und wegen des Strahlensatzes halb so lang wie diese Diagonale.
Die Summe der vier Holzstäbe, welche die Seitenmittelpunkte verbinden, ist daher gleich der Summe der beiden Diagonalen. Die Länge des ursprünglichen Holzstabs ist also die doppelte Summe der Diagonalen, nämlich

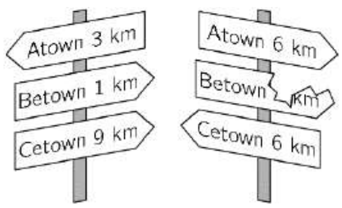
2·(120 cm + 80 cm) = **400 cm**.

12. Die ganzen Zahlen *a, b, c* und *d* erfüllen die Gleichung $ab = 2cd$. Welchen der folgenden Werte kann das Produkt *abcd* nicht annehmen?

(A) 50 **(B)** 100 (C) 200 (D) 450 (E) 800

Wegen $ab = 2cd$ gilt $abcd = 2c^2d^2 = 2\cdot(cd)^2$. Daher muss der Wert jedes möglichen Produkts das Doppelte einer Quadratzahl sein. Wegen $50 = 2\cdot5^2$, $200 = 2\cdot10^2$, $450 = 2\cdot15^2$ und $800 = 2\cdot20^2$, aber $100 = 10^2$ kann das Produkt die Zahl **100** als einzigen der angegebenen Werte nicht annehmen.

13. Der kürzeste Weg von Atown nach Cetown führt durch Betown. Geht man auf diesem Weg von Atown nach Cetown, trifft man zunächst auf den linken Wegweiser, danach auf den rechten Wegweiser. Welche Distanzangabe stand auf dem beschädigten Wegweiser?



(A) 1 km **(B)** 2 km (C) 3 km (D) 4 km (E) 5 km

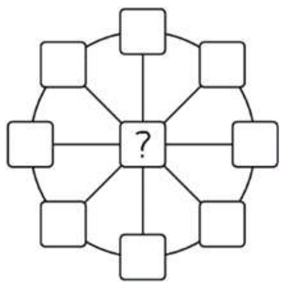
Beachte, dass der linke Wegweiser zwischen Atown und Betown, der rechte zwischen Betown und Cetown steht. Beide Wegweiser zeigen, dass der kürzeste Weg von Atown nach Cetown 12 km (= 3 km + 9 km = 6 km + 6 km) lang ist. Am linken Wegweiser ist zu erkennen, dass Betown 3 km + 1 km = 4 km von Atown und 9 km – 1 km = 8 km von Cetown entfernt ist.
Daher fehlt auf dem beschädigten Wegweiser die Angabe **2 km**, denn 4 km = 6 km – 2 km und 8 km = 6 km + 2 km.

14. Eine Seite eines gleichschenkeligen Dreiecks ist 20 cm lang. Von den beiden anderen Seiten misst die eine $\frac{2}{5}$ der anderen. Wie groß ist der Umfang des Dreiecks?

(A) 36 cm **(B)** 48 cm (C) 60 cm (D) 90 cm (E) 120 cm

Nach Angabe verhalten sich zwei Seitenlängen des Dreiecks wie 2 : 5. Weil das Dreieck gleichschenklig ist, muss die dritte Seite gleich lang sein wie eine der beiden anderen Seiten. Nach Dreiecksungleichung ist ein Seitenverhältnis von 2 : 2 : 5 nicht möglich, also verhalten sich die Seiten wie 2 : 5 : 5, und die gegebene Länge 20 cm muss die Länge der beiden Schenkel des Dreiecks sein. Die Länge der Basis beträgt dann $\frac{2}{5}\cdot20$ cm = 8 cm.
Somit hat das Dreieck einen Umfang von 8 cm + 2·20 cm = **48 cm.**

15. In die neun Felder der Figur soll jeweils eine beliebige Zahl eingetragen werden. Die Summe der drei Zahlen entlang jedes Durchmessers soll 13 betragen. Die Summe der acht Zahlen entlang des Kreisumfangs soll 40 sein. Welche Zahl muss in das Feld in der Mitte eingetragen werden?



(A) 3 (B) 5 (C) 8 (D) 10 (E) 12

Die Summe der Zahlen entlang der vier Durchmesser beträgt $4 \cdot 13 = 52$. Das ist die Summe der acht Zahlen entlang des Kreisumfangs und dem Vierfachen der Zahl in der Mitte. Weil $52 = 40 + 12$ ist, muss die Zahl in der Mitte ein Viertel von 12, also **die Zahl 3** sein.

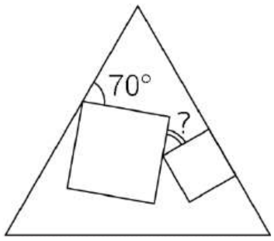
16. Maria setzt ein Multiplikationszeichen zwischen die zweite und dritte Ziffer der Zahl 2020 und bemerkt, dass das entstandene Produkt $20 \cdot 20$ eine Quadratzahl ist.
Wie viele Zahlen zwischen 2010 und 2099 (inklusive 2020) haben diese Eigenschaft?
(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

In jedem der zu betrachtenden Produkte ist der erste Faktor $20 = 5 \cdot 2^2$. Damit muss der zweite Faktor ebenfalls das (zweistellige) Fünffache einer Quadratzahl sein. Die Zahl $5 \cdot 1^2 = 5$ ist nicht zweistellig, aber $5 \cdot 2^2 = 20$, $5 \cdot 3^2 = 45$ und $5 \cdot 4^2 = 80$ erfüllen diese (notwendige und hinreichende) Bedingung, während $5 \cdot 5^2 = 125$ zu groß ist.
Damit haben genau die **3 Zahlen** 2020, 2045 und 2080 die geforderte Eigenschaft.

17. Zwei Quadrate werden wie abgebildet in ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet.

Wie groß ist der mit „?“ markierte Winkel?

(A) 30° (B) 35° (C) 40° (D) 45° **(E)** 50°



Der Teil des Dreiecks rechts oberhalb der beiden Quadrate ist ein Fünfeck mit einer einspringenden Ecke, von dem vier Winkel bekannt sind: 70°, 270°, 90°, 60°. Zusammen mit dem gesuchten Winkel x muss sich wie in jedem Fünfeck die Winkelsumme $3 \cdot 180° = 540°$ ergeben.
Daraus folgt $x = 540 - (70+270+90+60) = 540 - 490 = 50$; der gesuchte Winkel beträgt also **50°**.
Bemerkung: Durch Verlängerung der rechten Seite des großen Quadrats kann das Fünfeck in ein Viereck und ein Dreieck zerlegt werden.

18. Luca startet eine 520 km lange Autobahnfahrt mit 14 Litern Benzin im Tank. Sein Auto verbraucht einen Liter Benzin je 10 km. Nach 55 km liest er ein Schild, auf dem die Entfernungen zu den nächsten fünf Tankstellen auf seinem Weg angegeben sind.
Diese sind 35 km, 45 km, 55 km, 75 km und 95 km. Der Tank fasst 40 Liter. Luca möchte nur einmal tanken.
Wie weit ist es noch bis zur Tankstelle, bei der er tanken sollte?
(A) 35 km (B) 45 km (C) 55 km **(D)** 75 km (E) 95 km

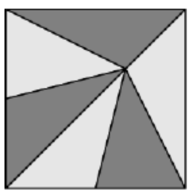
Mit 14 Litern Benzin können 140 km zurückgelegt werden. Nach 55 km können mit dem Benzin im Tank nur mehr 85 km zurückgelegt werden. Tankt man bei der Tankstelle, die **75 km** entfernt ist, so können mit einem vollen Tank die restlichen 390 km zurückgelegt werden, in der Hoffnung, dass nicht durch Stau oder zähflüssigen Verkehr der Benzinverbrauch erhöht wird.

19. Es gilt $17x + 51y = 102$. Welchen Wert hat $9x + 27y$?
(A) 54 (B) 36 (C) 34 (D) 18 (E) Der Wert ist nicht eindeutig bestimmbar.

Die erste Gleichung lässt sich durch 17 kürzen, dann erhält man $x + 3y = 6$. Erweitert man nun mit 9, dann erhält man
$9x + 27y = \mathbf{54}$.

20. Ein 81 dm² großes quadratisches Fensterglas besteht wie abgebildet aus sechs flächengleichen Dreiecken. Welchen Abstand hat der gemeinsame Eckpunkt der sechs Dreiecke von der Unterkante des Fensters?

(A) 3 dm (B) 5 dm (C) 5,5 dm **(D)** 6 dm (E) 7,5 dm



Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt 81 dm², daher hat es die Seitenlänge s = 9 dm.
Die beiden über der unteren Quadratseite errichteten Dreiecke haben den gesuchten Abstand als Höhe über dieser Seite gemeinsam und haben zusammen den Flächeninhalt $A = \frac{1}{3}\,81$ dm² = 27 dm².
Daraus ergibt sich als Höhe $h = \frac{2A}{s} = \frac{54}{9} = 6$, daher beträgt der gesuchte **Abstand 6 dm**.

– 5 Punkte Beispiele –

21. Wir bilden alle 9-ziffrigen Zahlen, die jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthalten.
Wie groß ist der relative Anteil der durch 18 teilbaren Zahlen unter ihnen?
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

Alle 9-ziffrigen Zahlen, die jede Ziffer von 1 bis 9 genau einmal enthalten, haben die Ziffernsumme 45 und sind daher jedenfalls durch 9 teilbar. Maßgeblich dafür, dass eine derartige Zahl durch 18 teilbar ist, ist also ausschließlich, ob die Zahl gerade ist, also ihre Einerziffer.
Weil von den neun zur Verfügung stehendenden Einerziffern vier (2, 4, 6, 8) gerade sind, ist der der relative Anteil der durch 18 teilbaren Zahlen unter den betrachteten Zahlen gleich $\mathbf{\frac{4}{9}}$.

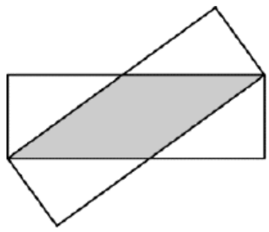
22. Ein Hase und eine Schildkröte machen ein Wettrennen auf einer 5 km langen geraden Strecke. Der Hase ist fünfmal so schnell wie die Schildkröte. Irrtümlich startet der Hase rechtwinkelig zur Rennstrecke.
Nach einer Weile bemerkt er den Fehler. Er ändert seine Richtung und läuft geradlinig auf das Ziel zu.
Er erreicht das Ziel gleichzeitig mit der Schildkröte.
Wie groß ist der Abstand zwischen dem Punkt, an dem der Hase die Richtung geändert hat, und dem Ziel?
(A) 11 km (B) 12 km (C) 13 km (D) 14 km (E) 15 km

Das zweite pythagoräische Zahlentrippel (5,12,13) liefert die Lösung dieser Aufgabe.
Ändert er nach 12 km seine Richtung, dann muss er noch **13 km** laufen.
Probe: 12 km + 15 km = 25 km = 5·5 km.
Bemerkung: Die Aufgabe kann auch mithilfe eines Gleichungsansatzes gelöst werden.

23. Auf dem Tisch liegen einige Quadrate und Dreiecke. Manche dieser Figuren sind blau, die übrigen sind rot.
Manche der Figuren sind groß, die übrigen sind klein. Wir wissen:
1. Ist eine Figur groß, so ist sie ein Quadrat.
2. Ist eine Figur blau, so ist sie ein Dreieck.
Welche der Aussagen (A) – (E) ist mit Sicherheit wahr?
(A) Alle roten Figuren sind Quadrate. (B) Alle Quadrate sind groß. (C) Alle kleinen Figuren sind blau.
(D) Alle Dreiecke sind blau. (E) Alle blauen Figuren sind klein.

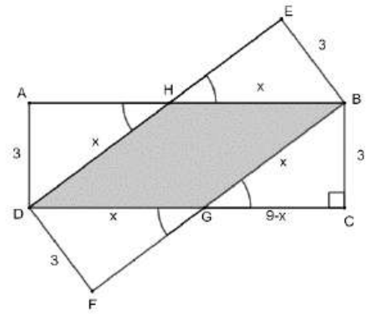
Es gilt: Ist eine Figur groß, so ist sie ein Quadrat. Daher müssen alle Dreiecke kleine Figuren sein.
Es gilt: Ist eine Figur blau, so ist sie ein Dreieck. Das heißt, dass alle blauen Figuren Dreiecke sind.
Da alle Dreiecke kleine Figuren sind und blaue Figuren immer Dreiecke sind, müssen **alle blauen Figuren klein sein.**

24. Zwei deckungsgleiche Rechtecke mit Seitenlängen 3 cm und 9 cm überlappen einander wie abgebildet.
Wie groß ist die überlappende Fläche?



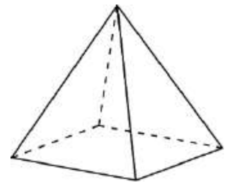
(A) 12 cm² (B) 13,5 cm² (C) 14 cm² (D) 15 cm² (E) 16 cm²

Auf Grund der vorhandenen Parallelwinkel sind die Dreiecke *ADH* und *DFG* kongruent. Daher ist die entstehende graue Figur eine Raute mit Seitenlänge x.
Es gilt: $9 - x = y$
Quadrieren wir die Gleichung folgt $81 - 18x + x^2 = y^2$
In den weißen rechtwinkeligen Dreiecken gilt der Satz des Pythagoras: $x^2 = y^2 + 9$
Wenn die Gleichungen gleichgesetzt werden, gilt: $81 - 18x + x^2 + 9 = x^2$
Somit gilt $x = 5$.
Nach Einsetzen in die Flächenformel erhalten wir $(5 \cdot 3) = 15$.



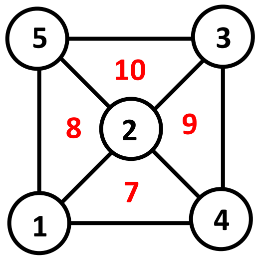
Der Flächeninhalt der überlappenden Fläche beträgt **15 cm².**

25. Kanga beschriftet die Eckpunkte einer quadratischen Pyramide mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5. Sie verwendet jede der Ziffern genau einmal. Für jede Fläche berechnet Kanga die Summe der Zahlen an den Eckpunkten. Vier dieser Summen sind 7, 8, 9 und 10. Wie groß ist die fünfte Summe?



(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

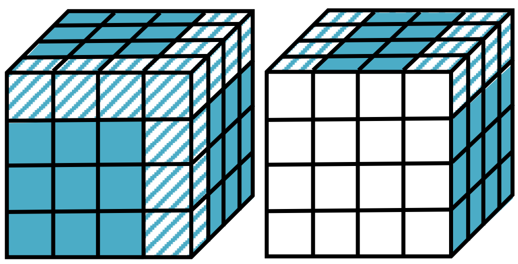
Die Summe der Zahlen an der Basis der Pyramide ist 1+2+3+4=10, somit müssen die Zahlen 7,8 und 9 jedenfalls Summen von Dreiecksflächen der Pyramidenoberfläche sein. Somit kann die Zahl 5 nicht an der Spitze der Pyramide stehen, da ansonsten jede der Dreiecksflächen zumindest den Wert 1+2+5=8 hätte. Damit ist der Wert der Basisfläche der Pyramide zumindest 1+2+3+5=11, also steht die Zahl 10 sicher auf einer Dreiecksfläche der Pyramide. Die vier Dreiecke sind somit mit den Zahlen 7, 8, 9 und 10 beschriftet. Addiert man all diese Zahlen, so werden die Werte an den Eckpunkten der Basis doppelt und der Wert an der Spitze, dieser heiße S, vierfach gezählt. Insbesondere werden also alle Zahlen doppelt und der Wert an der Spitze noch zusätzlich zweimal gezählt:



$2 \cdot (1+2+3+4+5) + 2 \cdot S = 7+8+9+10$
Wir erhalten, dass die Zahl 2 an der Spitze steht. Die Summe der Basisfläche ist somit 1 + 3 + 4 + 5 = **13**, das entspricht der fehlenden fünften Summe. Die Figur zeigt eine mögliche (bis auf Drehung und Spiegelung der Basis eindeutige) Lösung.

26. Ein großer Würfel besteht aus 64 kleinen Würfeln, die alle dieselbe Seitenlänge haben. Drei der Flächen des großen Würfels werden angemalt. Wie groß ist die maximale Anzahl an kleinen Würfeln, bei denen genau eine Seite angemalt ist?
(A) 27 (B) 28 (C) 32 (D) 34 (E) 40

Es gibt 2 unterschiedliche Arten drei Flächen des Würfels vollständig anzumalen. Entweder treffen sich die drei Flächen in einem Eckpunkt des Würfels (linkes Bild) oder nicht (rechtes Bild, eine bemalte Fläche nicht sichtbar). Die Anzahl an kleinen Würfeln mit nur einer bemalten Seite ist maximal, wenn die Anzahl der gemeinsamen Kanten der drei Flächen minimal ist - somit der zweite Fall. Es gibt 40 Würfel, die mindestens an einer Seite angemalt werden. Da die drei angemalten großen Würfelflächen zwei gemeinsame Kanten haben, werden $2 \cdot 4 = 8$ Würfel (schraffiert) an zwei Seiten angemalt.
Alle übrigen 32 Würfel werden nur an einer Seite angemalt.



27. In jedes der Quadrate wird eine Zahl so eingetragen, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte gleich ist. Welche Zahl wird in das graue Feld eingetragen?

1		6	3
	2	2	8
	7		4
		7	

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Trägt man rechts unten ein x ein, folgt die Summe $15+x$.

Dann ist der fehlende Eintrag in der ersten Zeile $15 + x - (1+6+3) = 5 + x$.
Im Feld rechts neben dem grauen Feld steht $15 + x - (5 + x + 2 + 7) = 1$.
Im grauen Feld steht somit $15 + x - (1 + 7 + x) =$ **7**.

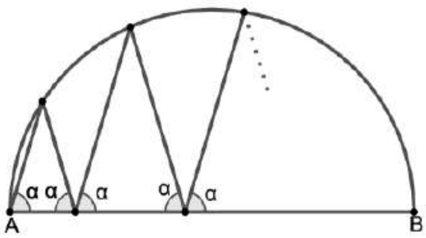
28. Alice, Bella und Cathy veranstalten einen Wettbewerb im Armdrücken. In jeder Runde treten zwei der Mädchen gegeneinander an, das dritte pausiert. Nach jeder Runde tritt die Gewinnerin gegen das Mädchen an, das gerade pausiert hat. Alice tritt 10 Mal an, Bella 15 Mal und Cathy 17 Mal. Wer könnte in der zweiten Runde verloren haben?

(A) nur Alice (B) nur Bella (C) nur Cathy (D) sowohl Alice als auch Bella
(E) sowohl Bella als auch Cathy

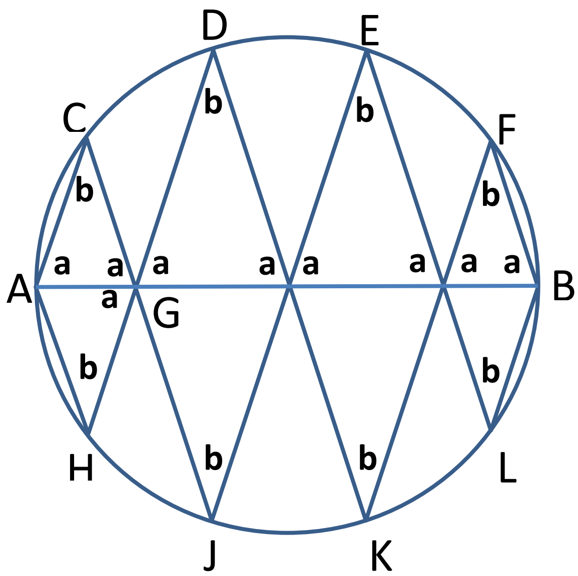
Die Anzahl der Runden ist die Hälfte der Summe der drei gegebenen Antritte 10, 15 und 17. Es fanden also 21 Runden statt. Alice hat nur 10 Antritte, hat also in 11 Runden pausiert und alle ihre Runde verloren. Da man nicht zwei Mal hintereinander pausieren kann, muss sie in der zweiten Runde angetreten sein und verloren haben.
Das ist die einzige Möglichkeit und **nur Alice kann in der zweiten Runde verloren haben**.

29. *AB* ist der Durchmesser eines Kreises. Eine Zickzacklinie startet in Punkt *A* und endet nach vier Spitzen auf dem Kreis im Punkt *B*.
Jeder der Winkel, den die Linie mit dem Durchmesser einschließt, ist α (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Winkel α?

(A) 60° (B) 72° (C) 75° (D) 80° (E) ein anderer Wert



Die Zickzacklinie endet nach genau vier Spitzen in Punkt B. Damit endet die zweite Spitze im Mittelpunkt der Strecke AB und somit im Mittelpunkt des Kreises.
Spiegeln wir die gesamte Figur an dem Durchmesser AB. Die Strecke AC ist parallel zur Strecke HD, da sie mit dem Durchmesser AB jeweils den Winkel α einschließen.
Da die 4 Punkte H, A, C und D auf einem Kreisbogen liegen und die Strecken AC und HD parallel sind, müssen die Strecken AH und CD gleich lang sein (da die entsprechenden Kreisbögen gleich lang sind).
Durch analoge Symmetrieüberlegungen sind die Strecken AC, CD, DE, EF, FB, BL, LK, KJ, JH und HA gleich lang und ACDEFBLKJH ist ein regelmäßiges Zehneck mit dem Innenwinkel 2α. Somit muss α = 144°/2 = **72°** sein.



30. Acht aufeinanderfolgende dreiziffrige positive ganze Zahlen haben die folgende Eigenschaft:
Jede von ihnen ist durch ihre letzte Ziffer teilbar.
Wie groß ist die Ziffernsumme der kleinsten der acht Zahlen?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Jede Zahl ist durch ihre letzte Ziffer teilbar. Das heißt, 0 kann als letzte Ziffer nicht vorkommen. Die letzten Ziffern der 8 Zahlen sind somit entweder zwischen 1 bis 8 oder zwischen 2 bis 9. Zieht man jeweils die entsprechende Einerstelle von den Zahlen ab, erhält man bei allen 8 Zahlen dieselbe Zahl mit der letzten Ziffer 0. Diese muss ebenfalls durch alle 8 Ziffern (entweder 1 bis 8 oder 2 bis 9) teilbar sein, insbesondere durch $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$ (und somit auch durch 6 und 8). Die kleinste Zahl, die das erfüllt ist 840. Jedes Vielfache davon ist zumindest 4-stellig. 840 ist durch 9 nicht teilbar, somit bleiben die Zahlen 841 bis 848, die kleinste hat die **Ziffernsumme 13**.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2020
23. 3. 2020

Kategorie: Student, 11. – 13. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

Mit meiner Unterschrift gebe ich das Einverständnis, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

Ort, Datum　　　　Unterschrift

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest, gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

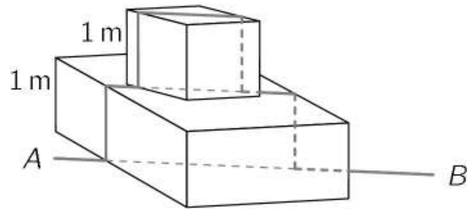
Känguru der Mathematik 2020
Gruppe Student (11. – 13. Schulstufe)
Österreich – 23. 3. 2020

- 3 Punkte Beispiele -

1. Was ist die Summe der letzten beiden Ziffern des Produkts $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$?

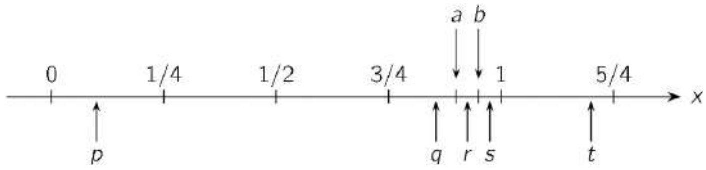
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 16

2. Eine Ameise spaziert täglich entlang eines 5 m langen geraden ebenen Weges von A nach B. Eines Tages liegen auf ihrem Weg wie abgebildet zwei Quader, die jeweils 1 m hoch sind. Die Ameise spaziert nun von oben gesehen entlang desselben geraden Weges, außer dass sie nun, statt in der Ebene zu gehen, an den beiden Hindernissen senkrecht nach oben und dann wieder nach unten klettert (siehe Abbildung). Wie lang ist ihr Weg nun in Metern?



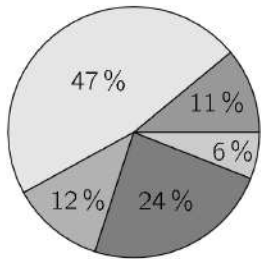
(A) 7 (B) 9 (C) $5+4\sqrt{2}$ (D) $9-2\sqrt{2}$ (E) $9+\sqrt{2}$

3. René markiert zwei Punkte a und b auf einer Zahlengeraden. Welcher der Punkte p, q, r, s, t auf der Zahlengeraden kann das Produkt $a \cdot b$ sein?



(A) p (B) q (C) r (D) s (E) t

4. Im Kreisdiagramm ist dargestellt, wie die Schülerinnen und Schüler einer Schule in die Schule kommen. Ungefähr doppelt so viele kommen mit dem Fahrrad wie mit öffentlichen Verkehrsmitteln. Zu Fuß kommen ungefähr gleich viele wie mit dem Auto. Welcher Prozentsatz kommt mit dem Moped?



(A) 6 % (B) 11 % (C) 12 % (D) 24 % (E) 47 %

5. Wie groß ist der Wert des Ausdrucks $\frac{1010^2+2020^2+3030^2}{2020}$?

(A) 2020 (B) 3030 (C) 4040 (D) 6060 (E) 7070

6. Die Summe der fünf dreiziffrigen Zahlen auf der Tafel ist 2664. Wie groß ist $A+B+C+D+E$?

$$\begin{array}{r} ABC \\ +\,BCD \\ +\,CDE \\ +\,DEA \\ +\,EAB \\ \hline 2664 \end{array}$$

(A) 4 (B) 14 (C) 24 (D) 34 (E) 44

7. Es seien a, b und c ganze Zahlen mit $1 \leq a \leq b \leq c$ und $abc = 1\,000\,000$. Was ist der größtmögliche Wert von b?

(A) 100 (B) 250 (C) 500 (D) 1000 (E) 2000

8. Es wiegen *D* Hunde zusammen *K* Kilogramm, und *E* Elefanten gleich viel wie *M* Hunde. Wie viel wiegt ein Elefant?

(A) $D \cdot K \cdot E \cdot M$ (B) $\frac{D \cdot K}{E \cdot M}$ (C) $\frac{K \cdot E}{D \cdot M}$ (D) $\frac{K \cdot M}{D \cdot E}$ (E) $\frac{D \cdot M}{K \cdot E}$

9. Zwei Spielwürfel haben je zwei rote, zwei blaue und zwei weiße Seiten. Die Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide dieselbe Farbe zeigen?

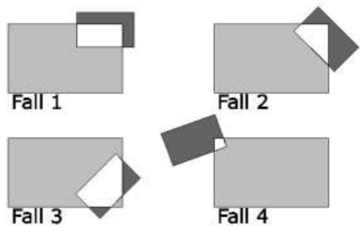
(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{9}$ (E) $\frac{1}{3}$

10. Welche der folgenden Zahlen ist für keine ganze Zahl n durch 3 teilbar?

(A) $5n+1$ (B) n^2 (C) $n(n+1)$ (D) $6n-1$ (E) n^3-2

- 4 Punkte Beispiele -

11. Ein großes und ein kleines Rechteck liegen teilweise überdeckt. Wir bezeichnen mit *G* den Flächeninhalt jenes Teils des großen Rechtecks, der nicht mit dem kleinen Rechteck überlappt. Mit *K* bezeichnen wir den Flächeninhalt jenes Teils des kleinen Rechtecks, der nicht mit dem großen Rechteck überlappt. In welchem der rechts abgebildeten Fälle ist der Wert von *G* – *K* am größten?

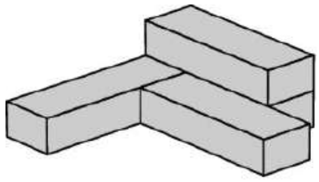


(A) im Fall 1 (B) im Fall 2 (C) im Fall 3 (D) im Fall 4

(E) Der Wert von *G* – *K* ist in allen Fällen gleich groß.

12. Auf einem Tisch liegen fünf Münzen mit der Seite „Kopf“ nach oben. In jedem Schritt werden genau drei dieser Münzen umgedreht.
Wie viele Schritte sind mindestens notwendig, bis alle Münzen mit der Seite „Zahl“ nach oben liegen?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
(E) Es ist nicht möglich, dass alle Münzen mit der Seite „Zahl“ nach oben zu liegen kommen.

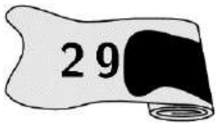
13. Vier identische Quader werden zusammengeklebt, um das abgebildete Objekt zu erzeugen. Danach wird die gesamte Oberfläche des Objekts gefärbt. Wie viel Farbe wird benötigt, wenn man für einen Quader genau 1 Liter Farbe benötigen würde?



(A) 2,5 Liter (B) 3 Liter (C) 3,25 Liter (D) 3,5 Liter (E) 4 Liter

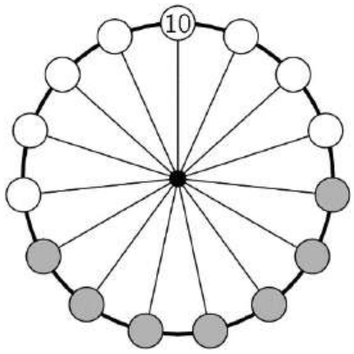
14. Es seien a, b und c beliebige ganze Zahlen. Welche der folgenden Zahlen kann keinesfalls der Wert des Terms $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ sein?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 6 (E) 8

15. Die ersten beiden Ziffern einer 100-ziffrigen Zahl z sind 2 und 9.
Aus wie vielen Ziffern besteht die Zahl z^2?



(A) 101 (B) 199 (C) 200 (D) 201 (E) Es kann nicht bestimmt werden.

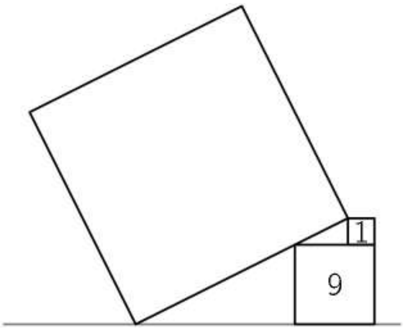
16. Entlang eines Rads sind 15 Zahlen angeschrieben. Nur die Zahl 10 ist zu sehen. Die Summe von jeweils 7 aufeinanderfolgenden Zahlen am Rad ist immer gleich (wie zum Beispiel jene in den grauen Feldern). Wir addieren alle 15 Zahlen. Wie viele der Zahlen 75, 216, 365 und 2020 sind mögliche Summen?



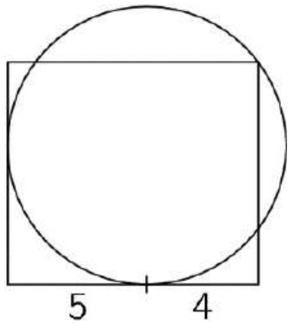
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

17. Eine Folge f_n ist gegeben durch $f_1=1$, $f_2=3$ und $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$ für $n\geq 1$.
Wie viele der ersten 2020 Folgenglieder sind gerade?
(A) 673 (B) 674 (C) 1010 (D) 1011 (E) 1347

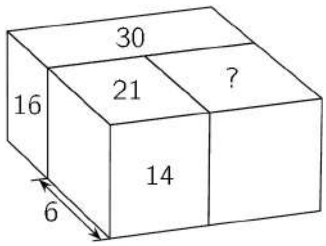
18. Ein Quadrat wird wie unten abgebildet auf zwei weitere Quadrate gelegt. Die Zahlen in den kleinen Quadraten geben jeweils deren Flächeninhalte an.
Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Quadrats?
(A) 49 (B) 80 (C) 81 (D) 82 (E) 100



19. Gegeben sind ein Rechteck und ein Kreis, der wie rechts abgebildet zwei Seiten des Rechtecks berührt und durch einen Eckpunkt des Rechtecks geht. Ein Berührpunkt ist 5 Einheiten von einem Eckpunkt und 4 vom daneben liegenden entfernt. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks?
(A) 27π (B) 25π (C) 72 (D) 63 (E) keine dieser Zahlen

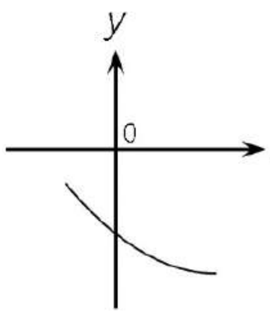


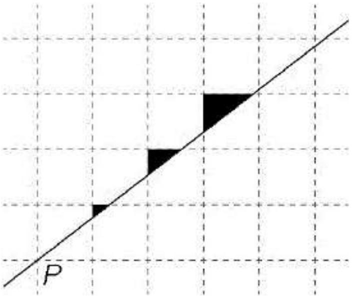
20. Drei Quader werden wie abgebildet zu einem großen Quader zusammengefügt. Einer der Quader hat die Breite 6, und die Flächeninhalte einiger Seitenflächen sind gleich 14, 16, 21 und 30 (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Flächeninhalt der Seitenfläche mit dem Fragezeichen?
(A) 18 (B) 24 (C) 28 (D) 30
(E) kann aus der Angabe nicht eindeutig bestimmt werden



- 5 Punkte Beispiele -

21. Von einer Parabel mit der Gleichung $y=ax^2+bx+c$ ist ein Stück dargestellt.
Welcher der folgenden Ausdrücke ist positiv?
(A) c (B) $b+c$ (C) ac (D) bc (E) ab



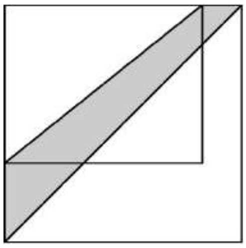


22. Ein mikroskopisch kleines, de facto unsichtbar winziges Känguru zeichnet auf einem Blatt Papier mit quadratischem Raster eine Gerade durch den Gitterpunkt *P* und färbt drei Dreiecke wie abgebildet.

Welches der folgenden Verhältnisse kann dem Verhältnis der Flächeninhalte der drei gefärbten Dreiecke entsprechen?

(A) $1:2:3$ (B) $1:2:4$ (C) $1:3:9$ (D) $1:4:8$ (E) keines dieser Verhältnisse

23. Aus einem rechteckigen Garten entsteht durch Vergrößern der einen Seite um $20\ \%$ und der anderen Seite um $50\ \%$ ein Garten in der Form eines Quadrats (siehe Abbildung). Das graue Flächenstück zwischen den Diagonalen des Rechtecks und des Quadrats beträgt $30\ m^2$.



Wie groß war die Fläche des ursprünglichen Gartens?

(A) $60\ m^2$ (B) $65\ m^2$ (C) $70\ m^2$ (D) $75\ m^2$ (E) $80\ m^2$

24. Eine große Zahl *N* ist durch alle ganzen Zahlen von 2 bis 11 teilbar, mit zwei Ausnahmen. Susanne schreibt die beiden Ausnahmen auf ein Blatt Papier.

Welche der folgenden Möglichkeiten könnte auf dem Blatt stehen?

(A) 2 und 3 (B) 4 und 5 (C) 6 und 7 (D) 7 und 8 (E) 10 und 11

25. In der Früh bietet ein Eissalon 16 Sorten Eis an. Anna möchte 2 verschiedene Kugeln auswählen. Abends sind einige Sorten bereits ausverkauft, und Bella möchte aus den verbleibenden Sorten 3 verschiedene Kugeln auswählen. Anna und Bella haben gleich viele Kombinationen zur Auswahl.

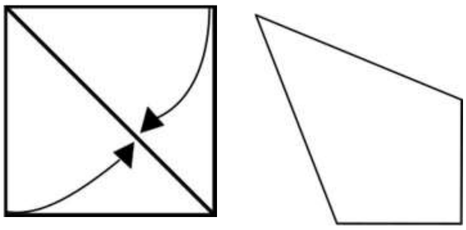
Wie viele Sorten sind am Abend ausverkauft?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

26. Tony hat 71 Murmeln in seiner Schachtel. Er darf in einem Zug jeweils genau 30 Murmeln aus der Schachtel nehmen oder genau 18 Murmeln in die Schachtel zurücklegen. Er darf so viele Züge machen, wie er möchte. Was ist die kleinste Anzahl von Murmeln in der Schachtel, die er erreichen kann?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

27. Wajda nimmt ein Blatt Papier mit der Seitenlänge 1 und faltet wie abgebildet zwei Seiten zur Diagonale, wodurch er die dargestellte viereckige Form erhält. Wie groß ist die Fläche dieses Vierecks?



(A) $2-\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\frac{7}{10}$ (E) $\frac{3}{5}$

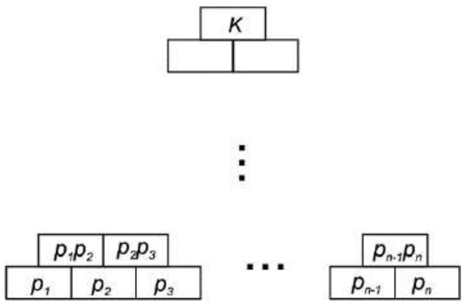
28. Von einem würfelförmigen Eisberg befinden sich genau 90 % des Volumens unter Wasser. Nur eine Würfelecke ragt aus dem Wasser. Die Längen der drei nur teilweise sichtbaren Kantenstücke sind 24 m, 25 m und 27 m.

Wie lang ist eine Würfelkante?

(A) 30 m (B) 33 m (C) 34 m (D) 35 m (E) 39 m

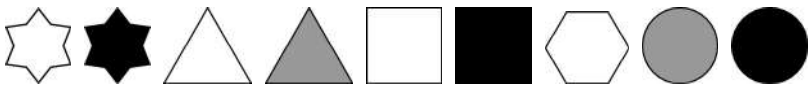
29. Auf den Ziegeln der unteren Zeile der abgebildeten Zahlenmauer sind *n* verschiedene Primzahlen p_1 bis p_n angeschrieben. Das Produkt von den Zahlen in zwei nebeneinander liegenden Ziegeln wird auf dem jeweils darüber liegenden Ziegel angeschrieben, und auf dem obersten Ziegel steht die Zahl $K = {p_1}^{\alpha_1}\ {p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_n}^{\alpha_n}$. Wir wissen, dass $\alpha_2 = 8$ gilt.

Wie viele Zahlen auf der Ziegelmauer sind durch p_4 teilbar?



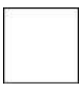
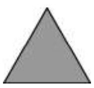
(A) 4 (B) 16 (C) 24 (D) 28 (E) 36

30. Adam und Britt versuchen herauszufinden, welche der folgenden Figuren die Lieblingsfigur von Carl ist.



Adam weiß, dass Britt von Carl die Form seiner Lieblingsfigur erfahren hat. Britt weiß, dass Adam von Carl deren Farbe erfahren hat. Es findet das folgende Gespräch statt: Adam: „Ich weiß nicht, was Carls Lieblingsfigur ist, aber ich weiß, dass es Britt auch nicht weiß.“ Britt: „Zuerst wusste ich nicht, was Carls Lieblingsfigur ist, aber jetzt weiß ich es.“ Adam: „Jetzt weiß ich es auch.“

Welche ist Carls Lieblingsfigur?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Känguru 2020 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Es ist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2880$, also ist die Summe der letzten zwei Ziffern gleich **8**.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Beim Bewerb ist es mühsam, das ganze Produkt im Kopf auszurechnen, man kann es sich aber erleichtern. Die beiden 1er sind irrelevant. Ein 2er und ein 5er ergeben zusammen einen Faktor 10, also endet die Zahl mit 0.

   Vom verbliebenen Produkt $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ interessiert uns nur die letzte Ziffer, also können wir nach jeder Multiplikation alle Ziffern außer der Einerziffer „wegwerfen“ (der Experte sagt dazu: „modulo 10 rechnen“ und schreibt zum Beispiel $38 \equiv 8$) und berechnen auf diese Art $3 \cdot 4 = 12 \equiv 2$, dann $2 \cdot 4 = 8$, dann $8 \cdot 3 = 24 \equiv 4$, und schließlich $4 \cdot 2 = 8$. Die vorletzte Ziffer ist also 8.

2. Die waagrechten Strecken auf den Quadern sind in Summe genau gleich lang wie die waagrechte Strecke am Boden war. Zusätzlich zum früheren Weg muss die Ameise also nur die Quader hinauf und wieder hinunter klettern, und legt dabei 4 m zusätzlich zurück. Insgesamt ist ihre Strecke daher $5\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m} =$ **9 m**.

3. Wir sehen, dass a und b beide „etwas“ kleiner als 1 sind. Wenn man irgendeine reelle Zahl x mit einer Zahl multipliziert, die „etwas kleiner als 1“ ist, ist das Ergebnis „etwas“ kleiner als x. Wenn man also a mit b multipliziert, dann ist das Ergebnis etwas kleiner als a und auch etwas kleiner als b. Das schließt einmal die Möglichkeiten r, s und t aus.

   Nun vermuten wir noch, dass p viel zu klein ist. Das können wir auch verifizieren: Sowohl a als auch b sind mindestens $3/4$ groß, somit ist ihr Produkt mindestens $9/16 = 0{,}5625$. Aber p ist kleiner als $1/4$.

   Deswegen kann nur $\boldsymbol{q}$ das Produkt $a \cdot b$ sein.

4. Zu Fuß und mit dem Auto kommen ungefähr gleich viele, und die einzigen zwei Kreisstücke, die relativ ähnlich groß sind, sind 11% und 12%. Von den verbliebenen ist nur 47% etwa doppelt so groß wie 24%, der Faktor zwischen den anderen beiden Kombinationen ist viel größer. Daher kommt der größte Anteil von 47% mit dem Fahrrad (sehr umweltbewusst!), 24% mit öffentlichen Verkehrsmitteln, jeweils etwa 11% bis 12% zu Fuß bzw. mit dem Auto, und somit bleiben **6%**, die mit dem Moped anreisen.

5. Natürlich können wir das mit einem großen Taschenrechner einfach ausrechnen und erhalten **7070**.

   Ohne Taschenrechner behelfen wir uns am besten damit, dass wir zuerst herausheben und dann kürzen:

$$\begin{aligned}\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020} &= \frac{1010 \cdot 1010 + 1010 \cdot 1010 \cdot 2 \cdot 2 + 1010 \cdot 1010 \cdot 3 \cdot 3}{1010 \cdot 2} \\ &= \frac{1010 \cdot 1010 \cdot (1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3)}{1010 \cdot 2} \\ &= \frac{1010 \cdot 1010 \cdot 14}{1010 \cdot 2} \\ &= 1010 \cdot 7 = \mathbf{7070}.\end{aligned}$$

6. An der Einer-, Zehner- und Hunderterstelle kommt beim Addieren jeweils dieselbe Summe $S = A + B + C + D + E$, plus ein eventueller Übertrag von der vorigen Stelle, heraus.

   Aus der Einerstelle von 2664 folgt daher, dass auch die Einerstelle von S gleich 4 ist. Die Zehnerstelle von 2664 setzt sich zusammen aus derselben Einerstelle von S und dem Übertrag, also ist der Übertrag (der der Zehnerstelle von S entspricht) gleich 2. Daher ist $S =$ **24**, wie wir auch leicht überprüfen können: $24 + 240 + 2400 = 2664$.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Alternativ können wir auch umgekehrt überlegen, dass 2664 sich zusammensetzt aus $S + 10S + 100S = 111S$. Also ist $S = 2664/111 = 24$.

7. Nehmen wir an, b ist bereits so groß wie möglich. Wenn b echt kleiner als c wäre, könnten wir $b' = c' = \sqrt{bc}$ setzen, dann ist weiterhin $ab'c' = abc = 1\,000\,000$ und $1 \le a \le b \le c$ erfüllt, also hätten wir eine Möglichkeit mit einem größeren b gefunden. In einer optimalen Lösung ist also $b = c$.

Wegen $b^2 = bc = 1\,000\,000/a$ ist b^2 umso größer, je kleiner a ist. Wegen $1 \leq a$ ist daher $b^2 \leq 1\,000\,000$ und somit $b \leq 1\,000$. Tatsächlich ist $a = 1$ und $b = c = 1\,000$ eine mögliche Belegung der Zahlen, also ist **1000** der größtmögliche Wert von b.

8. Ein einzelner Hund wiegt $\frac{K}{D}$. Daher wiegen M Hunde zusammen $\frac{K}{D} \cdot M$, das entspricht laut Angabe dem Gewicht von E Elefanten. Um das Gewicht eines einzelnen Elefanten zu erhalten, müssen wir das daher noch durch E dividieren, und erhalten $\boldsymbol{\frac{K \cdot M}{D \cdot E}}$.

9. Wir stellen uns vor, dass wir die zwei Würfel nacheinander würfeln. Der erste Würfel hat ein beliebiges Ergebnis, und nun berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Würfel dasselbe Ergebnis zeigen wird. Egal, wie der erste Würfel fällt, der zweite Würfel hat zwei Seiten, die die passende Farbe haben, also ist die Wahrscheinlichkeit jedenfalls $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Natürlich können wir auch mit etwas weniger Tricks rechnen: Die Wahrscheinlichkeit, dass beide rot sind, ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide blau sind, gleich $\frac{1}{9}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass beide weiß sind, ebenso. In Summe ist die Wahrscheinlichkeit daher $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$.

10. Für jedes n ist $\boldsymbol{6n - 1}$ um 1 kleiner als ein Vielfaches von 6 (und damit insbesondere ein Vielfaches von 3), kann also nie selbst durch 3 teilbar sein.

    Für die anderen vier Terme finden wir Werte von n, für die das Ergebnis durch 3 teilbar ist, beispielsweise $5 \cdot 1 + 1 = 6$, $3^2 = 9$, $3 \cdot 4 = 12$ und $2^3 - 2 = 6$.

11. Wir bezeichnen mit g den gesamten Flächeninhalt des großen Rechtecks und mit k den gesamten Flächeninhalt des kleinen Rechtecks, sowie mit u den Flächeninhalt des überlappenden Bereichs. Dann gilt $G = g - u$ und $K = k - u$, also $G - K = (g - u) - (k - u) = g - k$, also hängt der Wert nur von den Flächen der beiden Rechtecke ab und ist somit **in allen Fällen gleich groß**.

12. Mit **drei** Schritten ist es möglich: Wir nennen die Münzen A, B, C, D, E. Im ersten Schritt drehen wir Münzen A, B und C um, im zweiten Schritt Münzen A, B und D, und im dritten Schritt Münzen A, B und E.

    Mit einem Schritt ist es eindeutig nicht möglich, weil dabei mindestens zwei Münzen gar nicht berührt wurden. Mit zwei Schritten kann es nicht gehen, weil danach in Summe 6 Mal eine Münze gewendet wurde, wobei aber jede Münze mindestens ein Mal gewendet werden muss. Damit müssen 5 der 6 Münzdrehungen dazu verwendet werden, jede der Münze ein Mal umzudrehen, und mit der sechsten wird eine Münze wieder zurückumgedreht.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wir können auch ganz allgemein zeigen, dass es mit einer geraden Anzahl von Schritten nie gehen kann: Nach einer geraden Anzahl von Schritten ist die Anzahl der Münzdrehungen, die durchgeführt wurden, ein Vielfaches von 6, also gerade. Wenn wir umgekehrt zusammenzählen, wie oft bis zum Ende jede Münze gewendet wurde, muss jede Münze ungerade oft gewendet worden sein, und die Summe von fünf ungeraden Zahlen wäre ungerade.

13. Wir zählen die Flächeninhalte der zusammengeklebten Stellen zusammen.

    Der vordere Quader und der linke kleben an einer Stelle in Größe der kleinsten Seite zusammen, also fällt diese Fläche zwei Mal weg (einmal die kleine Seite vom vorderen Quader und einmal ein Stück der Seitenfläche vom linken Quader).

    Die beiden rechten hinteren Quader kleben entlang ihrer Ober- bzw. Unterseite zusammen, also fällt diese Fläche zwei Mal weg.

    Zuletzt klebt der rechte hintere untere Quader über seine gesamte Seitenlänge an zwei anderen Quadern, womit auch die Fläche dieser Seite in Summe genau zwei Mal wegfällt.

    Insgesamt ersparen wir uns damit das Färben von genau einer Quaderoberfläche, und benötigen daher **3 Liter**.

14. Jeder der quadratischen Terme hat einen Wert von 0 oder 1 oder mindestens 4. Wir behaupten, dass deswegen **1** nicht erreicht werden kann. Damit die Summe 1 ist, müsste genau einer der drei Terme gleich 1 und die anderen beiden Terme gleich 0 sein. Immer, wenn ein Term gleich 0 ist, sind die beiden darin

enthaltenen Zahlen aber gleich. Sind zwei Terme gleich 0, müssen sogar alle drei Zahlen gleich sein, dann wäre aber auch der dritte Term gleich 0.

Für die anderen Werte finden wir jeweils mögliche Belegungen für a, b und c, die diesen Wert ergeben:

- $(5-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 = 0$,
- $(4-3)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 = 2$,
- $(8-7)^2 + (7-6)^2 + (6-8)^2 = 6$ und
- $(3-1)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 = 8$.

15. Die Zahl beträgt mindestens $29 \cdot 10^{98}$ (wenn alle abgedeckten Ziffern gleich 0 sind) und ist kleiner als $30 \cdot 10^{98}$ (selbst wenn alle abgedeckten Ziffern gleich 9 sind). Für die Quadrate dieser beiden Abschätzungen gilt $(29 \cdot 10^{98})^2 = 29^2 \cdot 10^{196} = 841 \cdot 10^{196}$ und $(30 \cdot 10^{98})^2 = 30^2 \cdot 10^{196} = 900 \cdot 10^{196}$. Beide diese Grenzen haben **199 Ziffern**, also auch das irgendwo dazwischen liegende tatsächliche Quadrat der Zahl.

16. Wenn man zunächst 7 benachbarte Zahlen A, B, C, D, E, F, G betrachtet und danach die Auswahl um eine Stelle verschiebt (also eine Zahl H hinzufügt und A entfernt), ergibt sich aus $A+B+C+D+E+F+G = B+C+D+E+F+G+H$, dass $A = H$ gelten muss. Dies gilt überall, also ist jede Zahl gleich groß wie die Zahl, zu der man gelangt, wenn man 7 Schritte entlang des Rades geht.

    Es zeigt sich, wenn man irgendwo beginnt und immer 7 Schritte weiter springt, erreicht man nach einigen Runden alle Zahlen am Rad. Also sind alle Zahlen gleich groß, in diesem Fall alle Zahlen gleich 10. Die Summe ist daher gleich 150, daher ist **keine der vier angegebenen Summen möglich**.

17. Die Zahlen f_1 und f_2 sind beide ungerade. Daher ist f_3 als Summe von zwei ungeraden Zahlen gerade, dann f_4 als Summe von f_2 (ungerade) und f_3 (gerade) wieder ungerade, und schließlich f_5 als Summe von f_3 (gerade) und f_4 (ungerade) ebenfalls ungerade.

    Ab hier wiederholt sich das nun immer wieder: Die Zahlen f_3, f_6, f_9, ... sind gerade, alle anderen ungerade. Von den Zahlen an den Stellen von 1 bis $2019 = 3 \cdot 673$ ist daher genau ein Drittel gerade, also 673 Zahlen. Die Zahl f_{2020} ist ungerade. Daher sind **673** der ersten 2020 Folgenglieder gerade.

18. Das kleine und das mittlere Quadrat haben Seitenlängen von 1 und 3. Die beiden gebildeten Dreiecke sind einander ähnlich (alle Seiten paarweise zueinander parallel). Da die kürzeste Seite des großen Dreiecks genau drei Mal so lang ist wie kürzeste Seite vom kleinen Dreieck, sind auch die anderen beiden Seiten jeweils drei Mal so groß wie die des kleinen Dreiecks. Das kleine Dreieck hat eine Höhe von 1 und eine Breite von 2, also hat das große eine Höhe von 3 und eine Breite von 6.

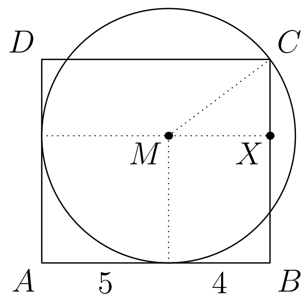
    Zeichnen wir den Lotfußpunkt von der aufliegenden Ecke des großen Quadrats auf den Boden ein, so hat das Dreieck darunter eine Höhe von $1 + 3 = 4$ und eine Breite von $2 + 6 = 8$. Die Fläche des großen Quadrats beträgt nach Satz von Pythagoras daher $4^2 + 8^2 =$ **80**.

19. Wir zeichnen den Mittelpunkt M und einige Hilfslinien und -punkte zusätzlich ein, siehe Abbildung.

    Wir sehen aus der Entfernung zwischen A und den Berührpunkten, dass der Kreis einen Radius von 5 hat.

    Da auch MC ein Radius des Kreises ist, gilt $MC = 5$. Aus Parallelverschiebung folgt $MX = 4$. Im Dreieck MXC erkennen wir daher das pythagoräische Tripel $3^2 + 4^2 = 5^2$, also ist $CX = 3$. (Wir können alternativ auch $CX = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ direkt ausrechnen.)

    Das Rechteck hat daher eine Höhe von 8 und eine Breite von 9, also einen Flächeninhalt von **72**.



20. Die obere Seite des linken vorderen Quaders hat eine Fläche von 21 und eine der beiden Seitenlängen beträgt 6, also ist die andere Seitenlänge gleich 3,5. Die Vorderseite dieses Quaders hat eine Fläche von 14 und dieselbe Seitenlänge von 3,5, also ist die Höhe (und damit gleichzeitig die Höhe aller Quader) gleich 4.

    Die linke Seite des hinteren Quaders hat eine Fläche von 16 und eine Höhe von 4, also beträgt auch die Breite 4. Die Oberseite hat eine Fläche von 30 und eine Seitenlänge von 4, also ist die Länge gleich 7,5.

    Vom rechten vorderen Quader hat die Oberfläche daher eine Breite von $7{,}5 - 3{,}5 = 4$ und eine Länge von 6, also beträgt die Fläche **24**.

21. Da der Schnittpunkt der Parabel mit der y-Achse unterhalb der x-Achse liegt, folgt sofort, dass c negativ ist. Da die Parabel nach oben offen ist, muss a positiv sein. Das Minimum der Parabel ist rechts der y-Achse, daher muss b negativ sein. Somit sind c, $b + c$, ac und ab alle negativ, und **bc positiv**.

22. Jedes Mal, wenn man auf der Gerade um 1 nach rechts geht, geht man um $1 - x$ nach oben für eine recht kleine reelle Zahl x. Die Höhe des ersten schwarzen Dreiecks beträgt daher x, die Höhe des zweiten Dreiecks beträgt $2x$ und die Höhe des dritten Dreiecks beträgt $3x$. Die drei Dreiecke sind ähnlich, da ihre Seiten zueinander paarweise parallel sind. Das Verhältnis der Flächen entspricht daher dem Verhältnis der Quadrate der Seitenlängen, also $1 : 4 : 9$, das ist **keines dieser Verhältnisse**.

23. Wir berechnen zunächst die Fläche des weißen Dreiecks links oben im Verhältnis zum großen Quadrat. Die Höhe beträgt $\frac{2}{3}$ der Höhe des Quadrats und die Breite $\frac{5}{6}$ der Gesamtbreite, also ist die Fläche gleich $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$ der Gesamtfläche. Die graue Fläche macht nach Abzug der beiden weißen Dreiecke daher $1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{18} = \frac{4}{18}$ der Gesamtfläche aus.

    Wenn vier Achtzehntel der Gesamtfläche gleich $30\,\mathrm{m}^2$ sind, dann macht die gesuchte Fläche des Rechtecks, die doppelt so groß wie das zuerst berechnete Dreieck ist und somit zehn Achtzehntel beträgt, insgesamt $30\,\mathrm{m}^2 : 4 \cdot 10 =$ **$75\,\mathrm{m}^2$** aus.

24. Erste Überlegung: Wenn die Zahl nicht durch 2 teilbar ist, ist sie auch nicht durch 4, 6, 8 und 10 teilbar, also können nicht wie in (A) vorgeschlagen 2 und 3 die einzigen Ausnahmen sein. Ebenso wäre eine Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist, auch nicht durch 8 teilbar, das schließt (B) aus.

    Zweite Überlegung: Eine Zahl, die durch 2 und durch 3 teilbar ist, ist (weil 2 und 3 teilerfremd sind) auch durch 6 teilbar, daher ist (C) nicht möglich. Ebenso ist eine Zahl, die durch 2 und 5 teilbar ist, auch durch 10 teilbar, was (E) ausschließt.

    Eine Zahl, für die 7 und 8 die einzigen Ausnahmen sind, finden wir tatsächlich, beispielsweise $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Tatsächlich gibt es nur sehr wenige Möglichkeiten, was auf dem Blatt stehen kann, wenn Susanne genau zwei Zahlen aufschreibt. Wir unterscheiden Fälle nach der kleinsten aufgeschriebenen Zahl.

    Die Zahl 2 kann nicht auf dem Zettel stehen, weil gemäß obiger Überlegungen sonst schon mehr als zwei Zahlen ausgenommen wären. Ebenso kann 3 nie auf dem Zettel stehen, weil dann auch 6 und 9 dort stehen müssten, ebenfalls zu viele Ausnahmen.

    Wenn 4 auf dem Zettel steht, muss auch 8 stehen, dafür gibt es Möglichkeiten, beispielsweise $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

    Wenn 5 auf dem Zettel steht, muss auch 10 stehen, das ist ebenfalls möglich, beispielsweise für $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.

    Ab jetzt betrachten wir nur noch Fälle, in denen keine Zahl kleiner als 6 auf dem Zettel steht. Somit ist die Zahl durch 2, 3, 4 und 5 teilbar, und damit auch durch 6 und 10, daher können diese beiden Zahlen nicht mehr am Zettel auftauchen.

    Es bleiben die Möglichkeiten $\{7, 8\}$, $\{7, 9\}$, $\{7, 11\}$, $\{8, 9\}$, $\{8, 11\}$ und $\{9, 11\}$ übrig, für die wir jeweils mögliche Zahlen N finden.

    Insgesamt gibt es daher folgende Möglichkeiten: $\{4, 8\}$, $\{5, 10\}$, $\{7, 8\}$, $\{7, 9\}$, $\{7, 11\}$, $\{8, 9\}$, $\{8, 11\}$ und $\{9, 11\}$.

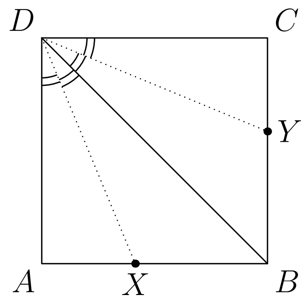
25. Es gibt $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 8 \cdot 15$ Möglichkeiten, zwei aus 16 Sorten auszuwählen. Nun suchen wir eine Anzahl a, sodass $\binom{a}{3} = \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ denselben Wert ergibt, also $a(a-1)(a-2) = 6 \cdot 8 \cdot 15$. Etwas Herumprobieren liefert schnell die Lösung $a = 10$ Sorten, also waren **6 Sorten ausverkauft**.

26. In jedem Zug kann er $5 \cdot 6$ Murmeln herausnehmen oder $3 \cdot 6$ Murmeln hinzufügen, also bleibt der Rest bei Division durch 6 immer gleich. Zu Beginn hat er $71 = 11 \cdot 6 + 5$ Murmeln, also kann er nie weniger als 5 haben.

    Tatsächlich ist 5 erreichbar: Indem er zuerst drei Mal 18 Murmeln hinzufügt und dann zwei Mal 30 Murmeln entfernt, kann er die Anzahl um 6 verringern. Wiederholt er das oft genug, erreicht er irgendwann **5 Murmeln**.

27. Wir bezeichnen einige Punkte wie in der Abbildung zu sehen.

Die Winkelsymmetrale teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, also gilt $AX : XB = 1 : \sqrt{2}$. Für die Länge XB gilt daher



$$\begin{aligned} XB &= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-2}{1-2} \\ &= 2-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Die Fläche von XBD beträgt (berechnet als „Grundlinie mal Höhe Halbe“) daher $(2-\sqrt{2}) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$, und die gesuchte Fläche ist wegen der Symmetrie doppelt so groß, also $\mathbf{2-\sqrt{2}}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Die Fläche von $DAX + DCY$ beträgt $2 \cdot \frac{DA \cdot AX}{2} = AX$ (wegen Symmetrie und wegen $DA = 1$), und es gilt $AX = \tan(22{,}5^\circ)$. Wir wissen, dass $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, und aus dem Halbwinkelsatz folgt

$$\tan(22{,}5^\circ) = \frac{1-\cos(45^\circ)}{\sin(45^\circ)} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1,$$

daher gilt für die gesuchte Fläche $DXBY = 1 - DAX - DCY = 1 - (\sqrt{2}-1) = \mathbf{2-\sqrt{2}}$.

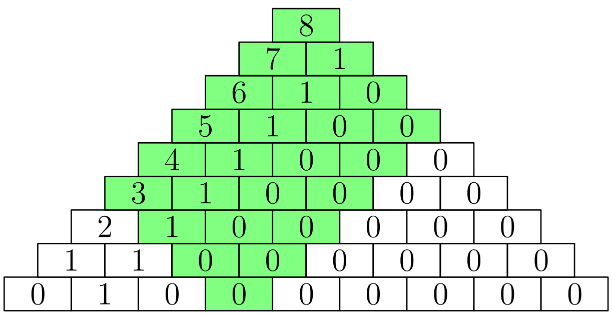
28. Wir betrachten das aus dem Wasser ragende Stück als Pyramide, wobei die Seiten mit 24 m und 25 m die Grundfläche aufspannen und die Seite mit 27 m die Höhe bildet. Die Grundfläche beträgt somit (laut Flächenformel für ein rechtwinkeliges Dreieck) $\frac{24\text{m}\cdot 25\text{m}}{2} = (12 \cdot 25)\text{m}^2$, und das Volumen (laut Volumenformel für die Pyramide) $\frac{(12\cdot 25)\text{m}^2 \cdot 27\text{m}}{3} = (12 \cdot 25 \cdot 9)\text{m}^3$.

Dies sind nur 10%, daher hat der ganze Eisberg ein Volumen von $10 \cdot (12 \cdot 25 \cdot 9)\text{m}^3 = (2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3)\text{m}^3$, und somit eine Seitenlänge von $(2 \cdot 3 \cdot 5)\text{m} = \mathbf{30\,m}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Man beobachte, wie wir immer nur das kürzen oder ausmultiplizeren, was gerade leicht im Kopf geht, und uns damit das Ausrechnen vieler großer Zahlen ersparen.

29. Wir zählen zunächst die Vielfachheit des Primfaktors p_2 auf jedem Ziegel. Dabei halten wir zunächst fest, dass die Vielfachheit jeweils der Summe der Vielfachheiten auf den beiden darunterliegenden Ziegeln entspricht.



In der untersten Reihe enthält nur der zweite Ziegel von links genau einen Faktor p_2. In der zweiten Zeile von unten enthalten der erste und zweite Ziegel von links jeweils einen Faktor p_2. In der dritten Zeile enthält der erste, der auf beiden darunterliegenden aufliegt, $1+1=2$ Faktoren p_2, der zweite Ziegel einen

Faktor p_2, und der Rest keinen. In der vierten Zeile enthält der linkeste Ziegel $2 + 1 = 3$ Faktoren p_2, der zweite Ziegel einen Faktor p_2, und der Rest keinen. Dies setzt sich fort: In Zeile k enthält der erste Ziegel $k - 1$ Faktoren p_2, der zweite Ziegen einen Faktor p_2, und der Rest keinen.

Wenn im obersten Ziegel genau 8 Faktoren p_2 enthalten sind, hat die Pyramide daher genau 9 Reihen.

Durch p_4 teilbar sind genau jene Ziegel, die in dem Rechteck liegen, wenn man vom Ziegel p_4 in der untersten Reihe zuerst schräg nach links oben bis zum Rand, und von dort dem Rand entlang bis zur Spitze geht, bzw. vom Ziegel p_4 in der untersten Reihe schräg nach rechts oben bis zum Rand und von dem Rand entlang bis zur Spitze. Dieses Rechteck ist, wenn man die Ziegel auf dem ersten dieser beiden Wege zählt, 4 Ziegel breit und 6 Ziegel hoch, enthält also **24 Ziegel**.

30. Adam kennt die Farbe. Wenn die Farbe weiß wäre, könnte es aus seiner Sicht sein, dass die Form das Sechseck ist, und dann könnte Britt bereits alles wissen, da es nur ein einziges Sechseck gibt. Daraus, dass Adam sich sicher ist, dass Britt noch nicht die Lieblingsfigur kennt, können wir nach der ersten Aussage schließen, dass die Farbe *nicht* weiß ist.

    Dies schließt auch Britt und weiß nun, dass die Farbe grau oder schwarz ist. Diese Information hilft ihr offensichtlich weiter, wie wir aus ihrer Aussage schließen können. Wäre die Form der Kreis gewesen, dann wäre sie immer noch unentschlossen, ob es der graue oder der schwarze Kreis ist. Also ist die Form entweder der Stern, oder das Dreieck, oder das Quadrat. In allen drei Fällen kann sie aus der Information, dass die Farbe nicht weiß ist, die genaue Figur schließen.

    Somit erfahren wir und Adam aus dieser Aussage, dass es eine dieser drei Formen sein muss. Diese Information wiederum scheint Adam geholfen zu haben. Wäre die Farbe schwarz, dann wäre er jetzt immer noch unentschlossen zwischen dem schwarzen Stern oder dem schwarzen Quadrat. Da Adam die Figur nun aber mit Sicherheit sagen kann, muss die Farbe grau und die Figur somit das **graue Dreieck** sein.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wenn wir mit diesem Wissen unsere Überlegungen noch einmal überprüfen, sehen wir: Adam hat von Carl erfahren, dass die Farbe grau ist, also kann es aus seiner Sicht noch das graue Dreieck oder der graue Kreis sein, und er weiß somit, dass Britt entweder „Dreieck“ oder „Kreis“ genannt bekommen hat. In beiden Fällen kennt sie die genaue Figur noch nicht.

    Britt erfährt zu Beginn von Carl, dass die Figur ein Dreieck ist, also schwankt sie noch zwischen weißem und grauem Dreieck und weiß daher, dass Adam entweder „weiß“ oder „grau“ genannt bekommen hat.

    Britt schließt aus Adams erster Aussage wie oben beschrieben, dass es nicht weiß ist, und kennt nun die genaue Figur. Adam kann daraus, dass die Farbinformation nützlich war, schließen, dass es nicht der Kreis ist, und kennt nun ebenfalls alles.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2021
18. 3. 2021

Kategorie: Felix, 1. – 2. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

11	12	13	14	15

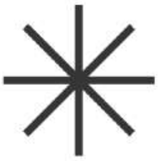
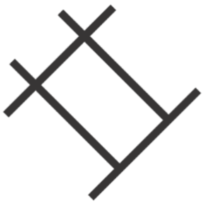
pwc

Information über den
Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

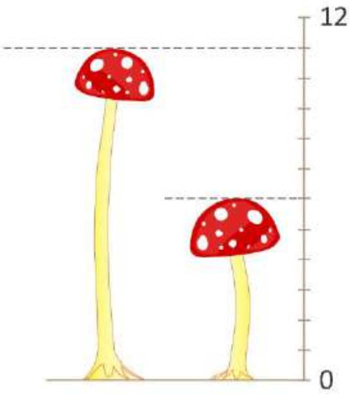
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

- 3 Punkte Beispiele -

1. Ein Känguru legt drei dieser Stöckchen zu verschiedenen Figuren zusammen.
Welche der abgebildeten Figuren kann das Känguru legen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

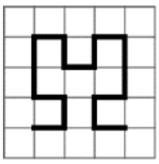
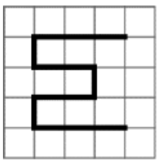
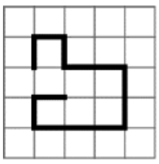
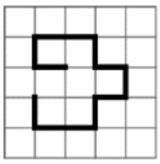
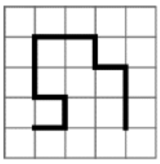
2. Im Bild siehst du 2 Pilze.



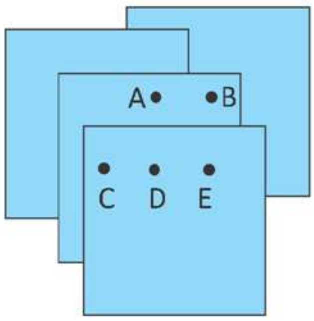
Um wie viel ist der größere Pilz höher als der kleinere Pilz?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 11 (E) 17

3. Welcher dieser fünf Wege ist am längsten?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Vier gleich große Papierzettel werden wie im Bild übereinandergelegt.



Michael möchte durch alle 4 Zettel gleichzeitig ein Loch stechen. Jeder Punkt ist mit einem Buchstaben beschriftet.

Durch welchen Punkt muss er das Loch stechen?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

5. Ella zieht dieses T-Shirt an und stellt sich vor einen Spiegel.

Wie sieht sie die Zahl im Spiegel?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

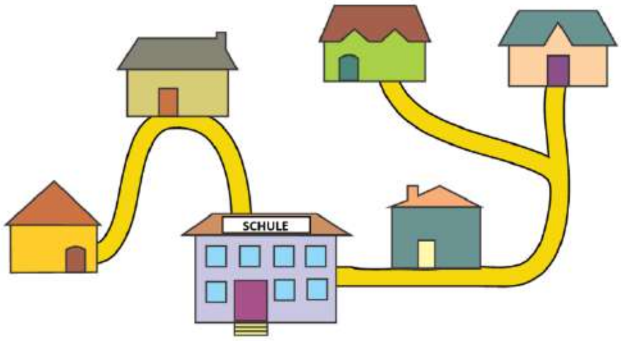
6. Tom verschlüsselt Wörter, indem er die Tabelle rechts benützt.
Zum Beispiel verschlüsselt er das Wort PIZZA zu A2-A4-C1-C1-B2.

Welches Wort verschlüsselt Tom zu B3-B2-C4-D2?

	A	B	C	D
1	B	K	Z	E
2	P	A	F	H
3	S	M	R	W
4	I	N	T	L

(A) MAZE (B) MASK (C) MILK (D) MATE (E) MATH

7. Die 5 Kinder Doris, Ali, Leo, Eva und Otto wohnen in den 5 Häusern (siehe Bild). Jedes Kind wohnt in einem anderen Haus. Um in die Schule zu kommen, gehen die Kinder entlang der Straße. Dabei gehen Doris und Ali an Leos Haus vorbei. Eva geht an Ottos Haus vorbei.

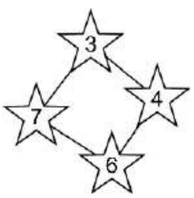


In welchem Haus wohnt Eva?

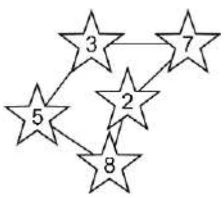
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

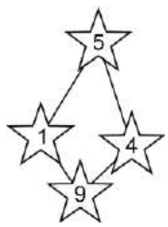
8. Im Känguru-Sternbild haben alle Sterne eine Zahl, die größer als 3 ist.
Wenn du alle Zahlen der Sterne zusammenzählst, erhältst du 20.

Welches Bild zeigt das Känguru-Sternbild?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

9. Der pinke Turm ist höher als der rote Turm, jedoch niedriger als der grüne Turm.
Der schwarze Turm ist höher als der grüne Turm.

Welche Farbe hat der höchste Turm?

(A) pink (B) grün (C) rot (D) schwarz (E) nicht lösbar

10. Julia hat zwei Vasen mit Blumen (siehe Bild).

Sie möchte in jeder Vase die gleiche Anzahl derselben Blumen haben.

Sie lässt jede Blume in ihrer Vase und kauft neue dazu.

Wie viele Blumen muss sie mindestens kaufen?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

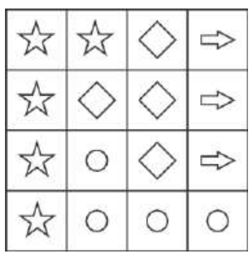
- 5 Punkte Beispiele -

11. Kangie isst genau 2 Äpfel oder genau 3 Mangos an einem Tag.
An Montagen, Mittwochen und Freitagen isst er nur Äpfel.
An Dienstagen und Donnerstagen isst er nur Mangos.
An Samstagen und Sonntagen isst er nichts.

Wie viele Früchte isst Kangie insgesamt in zwei Wochen?

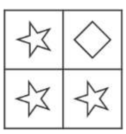
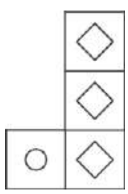
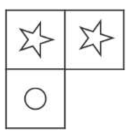
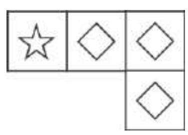
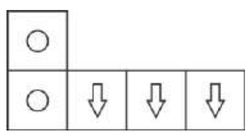
(A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 24

12. Maria baut dieses Quadrat.



Sie verwendet vier der fünf Figuren A bis E.

Welche Figur verwendet sie nicht?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Diese Karten 2 3 4 5 6 werden auf zwei Schachteln verteilt. Zählst du die Zahlen auf den Karten in jeder Schachtel zusammen, so erhältst du dieselbe Zahl.

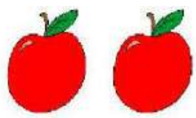
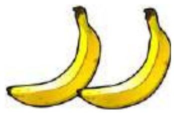
Welche Karten sind gemeinsam mit der Karte 4 in einer Schachtel?

(A) nur 3 (B) nur 5 (C) nur 6 (D) 2 und 3 (E) nicht lösbar

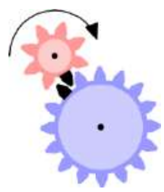
14. Jedes Mal, wenn die Hexe 3 Äpfel hat, verwandelt sie diese in eine Banane.
Jedes Mal, wenn sie 3 Bananen hat, verwandelt sie diese in einen Apfel.

Die Hexe startet mit 4 Äpfeln und 5 Bananen.

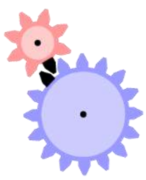
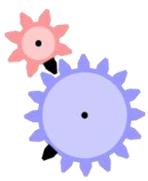
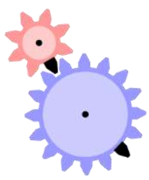
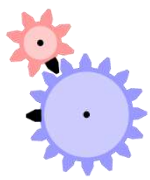
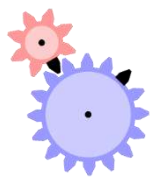
Was erhält sie nach allen Verwandlungen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

15. Das Bild zeigt zwei Zahnräder. Jedes davon hat einen schwarzen Zahn.



Wo sind die schwarzen Zähne, nachdem das kleine Zahnrad eine Umdrehung in Pfeilrichtung gemacht hat?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

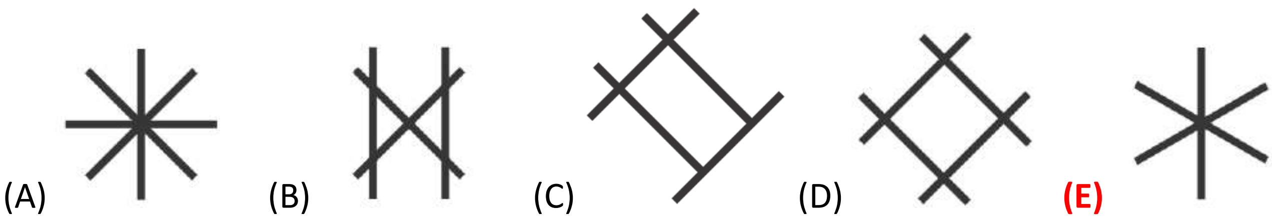
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

– Lösungsvektor –

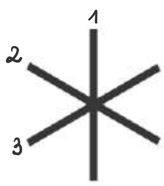
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E	B	A	D	A	E	B	B	D	D	E	D	C	A	C

– 3 Punkte Beispiele –

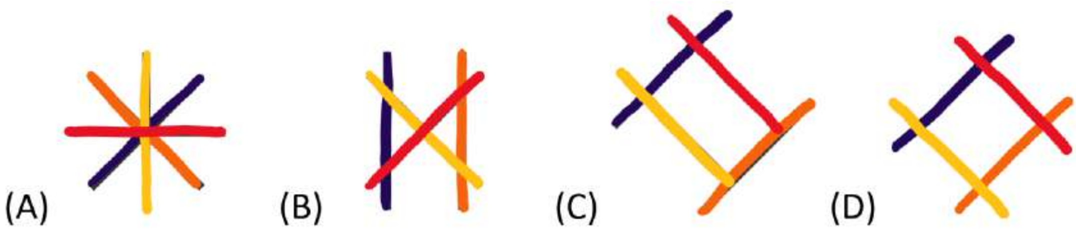
1. Ein Känguru legt drei dieser Stöckchen zu verschiedenen Figuren zusammen. Welche der abgebildeten Figuren kann das Känguru legen?



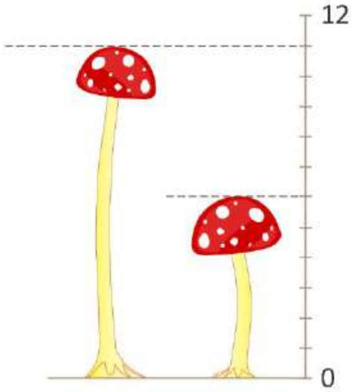
Hier kann die Anzahl der Stöckchen abgezählt werden. Bei der abgebildeten Figur **E** sind dies drei Stöckchen.



Die Figur „E“ ist die einzige, die ich aus 3 verschiedenen Stöcken legen kann, alle anderen benötigen 4 – siehe Farben.



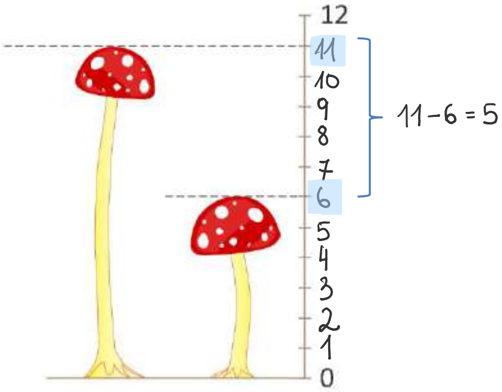
2. Im Bild siehst du 2 Pilze.



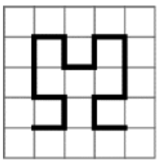
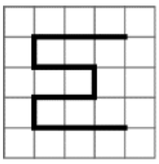
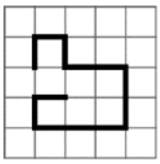
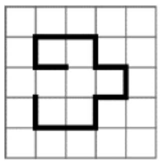
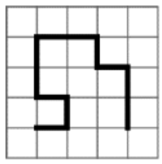
Um wie viel ist der größere Pilz höher als der kleinere Pilz?

(A) 4 **(B)** 5 (C) 6 (D) 11 (E) 17

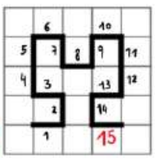
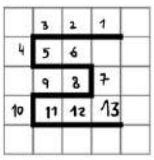
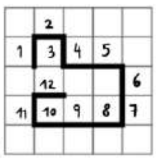
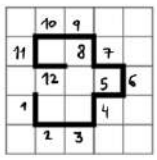
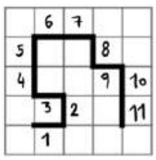
Der größere Pilz ist 11 Einheiten hoch. Der kleinere Pilz ist 6 Einheiten hoch.
Der größere Pilz ist somit $11 - 6 = \mathbf{5}$ Einheiten hoch.



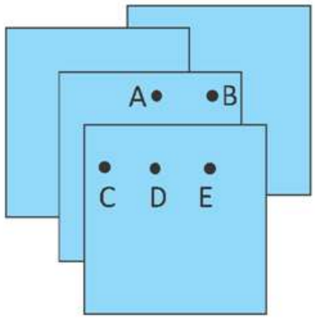
3. Welcher dieser fünf Wege ist am längsten?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Hier kann die Länge des Weges entlang der Kästchen gezählt werden. Den längsten Weg findet man in der **Abbildung A**.

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Vier gleich große Papierzettel werden wie im Bild übereinandergelegt.

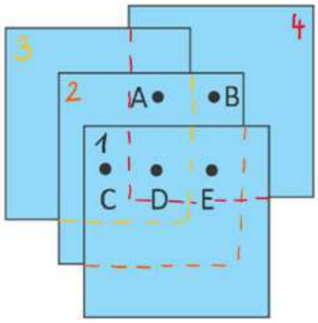


Michael möchte durch alle 4 Zettel gleichzeitig ein Loch stechen. Jeder Punkt ist mit einem Buchstaben beschriftet.

Durch welchen Punkt muss er das Loch stechen?

(A) A (B) B (C) C **(D)** D (E) E

Hier kann nach dem Ausschlussprinzip vorgegangen werden. Dazu können die verdeckten Kanten ergänzt werden.



Die Punkte A und B liegen nicht auf dem Zettel 1. Michael würde somit an diesen Stellen kein Loch in den Zettel stechen.
Im Punkt C würde er kein Loch in den Zettel 4 stechen.
Im Punkt E würde er kein Loch in den Zettel 3 stechen.
Der Punkt, durch den in alle Papierzettel ein Loch gestochen werden kann, ist **Punkt D**.

5. Ella zieht dieses T-Shirt an und stellt sich vor einen Spiegel.

Wie sieht sie die Zahl im Spiegel?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Wenn Ella vor dem Spiegel steht, sieht sie die Zahl seitenverkehrt.
Die Zahlen 1 und 2 können im Spiegel also nie so aussehen wie auf dem T-Shirt selbst.
(D) und (E) können also ausgeschlossen werden.

Bei den Zahlen (B) und (C) stimmt die Reihenfolge nicht.

Somit ist die richtige **Antwort A**.

6. Tom verschlüsselt Wörter, indem er die Tabelle rechts benützt.
Zum Beispiel verschlüsselt er das Wort PIZZA zu A2-A4-C1-C1-B2.

Welches Wort verschlüsselt Tom zu B3-B2-C4-D2?

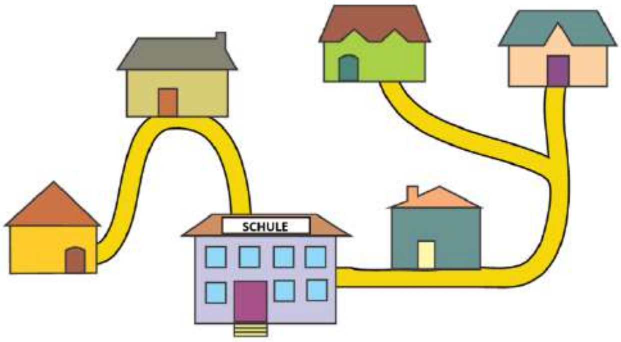
1	B	K	Z	E
2	P	A	F	H
3	S	M	R	W
4	I	N	T	L
	A	B	C	D

(A) MAZE (B) MASK (C) MILK (D) MATE **(E) MATH**

Tom verschlüsselt: B3-B2-C4-D2

1	B	K	Z	E
2	P	A	F	H
3	S	M	R	W
4	I	N	T	L
	A	B	C	D

7. Die 5 Kinder Doris, Ali, Leo, Eva und Otto wohnen in den 5 Häusern (siehe Bild). Jedes Kind wohnt in einem anderen Haus. Um in die Schule zu kommen, gehen die Kinder entlang der Straße. Dabei gehen Doris und Ali an Leos Haus vorbei. Eva geht an Ottos Haus vorbei.



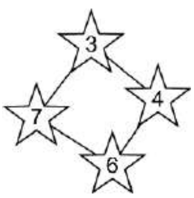
In welchem Haus wohnt Eva?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

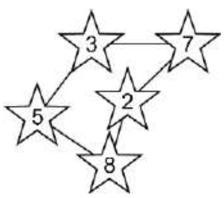
Doris und Ali gehen am selben Haus vorbei - folglich gehören den beiden das grüne und hellorange Haus. Ali bewohnt das grau-blaue Haus.
Eva geht an Ottos Haus vorbei, ihr Haus ist also weiter von der Schule entfernt, als das von Otto. Ihr gehört somit **das gelbe Haus**.

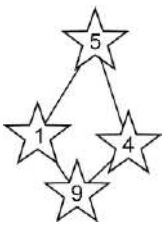
8. Im Känguru-Sternbild haben alle Sterne eine Zahl, die größer als 3 ist.
Wenn du alle Zahlen der Sterne zusammenzählst, erhältst du 20.

Welches Bild zeigt das Känguru-Sternbild?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

Summe = alle Zahlen zusammengezählt:

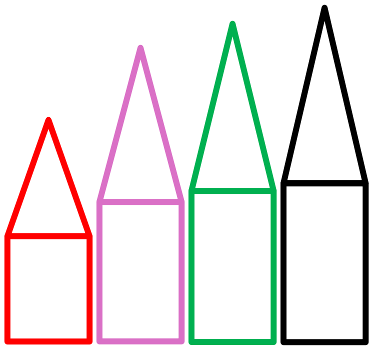
(A) 20 **(B) 20** **(C) 25** **(D) 19** **(E) 20**

Die Sternbilder A und E beinhalten jeweils einen Stern, der kleiner gleich 3 ist, folglich kommt **nur B als Lösung** in Frage.

9. Der pinke Turm ist höher als der rote Turm, jedoch niedriger als der grüne Turm. Der schwarze Turm ist höher als der grüne Turm.

Welche Farbe hat der höchste Turm?

(A) pink (B) grün (C) rot **(D) schwarz** (E) nicht lösbar



10. Julia hat zwei Vasen mit Blumen (siehe Bild).

Sie möchte in jeder Vase die Sie möchte in jeder Vase die gleiche Anzahl derselben Blumen haben.

Sie lässt jede Blume in ihrer Vase und kauft neue dazu.

Wie viele Blumen muss sie mindestens kaufen?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 **(D) 6** (E) 8

Julia hat drei verschiedene Arten von Blumen. Sie muss für eine Vase immer genau so viele Blumen einer Sorte nachkaufen, dass sie gleich der Anzahl der Blumen in der anderen Vase sind.

In Vase 1 sind zwei weiße Blumen, in Vase 2 vier. Sie muss **2 weiße** Blumen kaufen.
In Vase 1 sind vier graue Blumen, in Vase 2 nur eine. Sie muss **3 graue** Blumen kaufen.
In Vase 1 sind zwei schwarze Blumen, in Vase 2 drei. Sie muss **1 schwarze** Blume kaufen.
Das ergibt in Summe 6 Blumen.

11. Kangie isst genau 2 Äpfel oder genau 3 Mangos an einem Tag.
An Montagen, Mittwochen und Freitagen isst er nur **Äpfel**.
An Dienstagen und Donnerstagen isst er nur **Mangos**.
An Samstagen und Sonntagen isst er nichts.

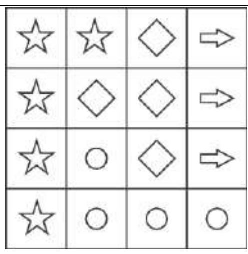
Wie viele Früchte isst Kangie insgesamt in zwei Wochen?

(A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 20 **(E) 24**

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
2	**3**	**2**	**3**	**2**	0	0

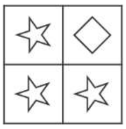
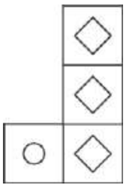
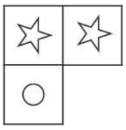
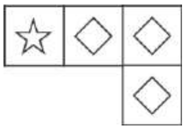
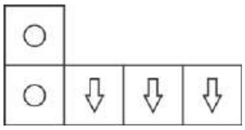
In einer Woche isst Kangie 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12 Früchte.
In 2 Wochen also **24 Früchte.**

12. Maria baut dieses Quadrat.

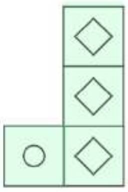
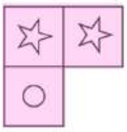
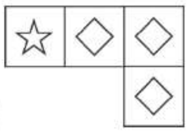
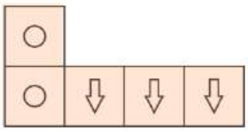


Sie verwendet vier der fünf Figuren A bis E.

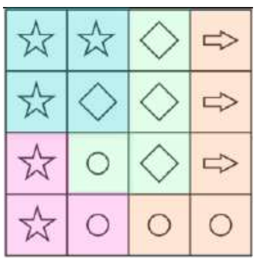
Welche Figur verwendet sie nicht?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Maria hat diese Bausteine.

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Sie kann die Bausteine so hinlegen:



Baustein (D) passt nicht.

13. Diese Karten 2 3 4 5 6 werden auf zwei Schachteln verteilt. Zählst du die Zahlen auf den Karten in jeder Schachtel zusammen, so erhältst du dieselbe Zahl.

Welche Karten sind gemeinsam mit der Karte 4 in einer Schachtel?

(A) nur 3 (B) nur 5 **(C)** nur 6 (D) 2 und 3 (E) nicht lösbar

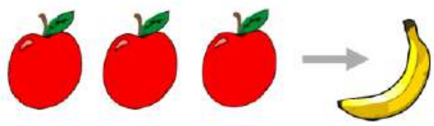
In jeder Schachtel brauchen wir das gleiche Rechenergebnis.
2 + 3 + 4 + 5 + 6 ergibt zusammen 20.
Das heißt, in jeder Schachtel muss sich die Gesamtzahl 10 ergeben.

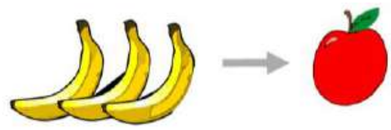
4 + 6 = 10

Als Kontrolle: 2 + 3 + 5 = 10

Nur mit **Karte 6** erhalten wir das Ergebnis 10. Also muss (C) die Lösung sein.

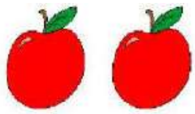
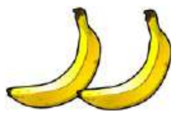
14. Jedes Mal, wenn die Hexe 3 Äpfel hat, verwandelt sie diese in eine Banane.
Jedes Mal, wenn sie 3 Bananen hat, verwandelt sie diese in einen Apfel.



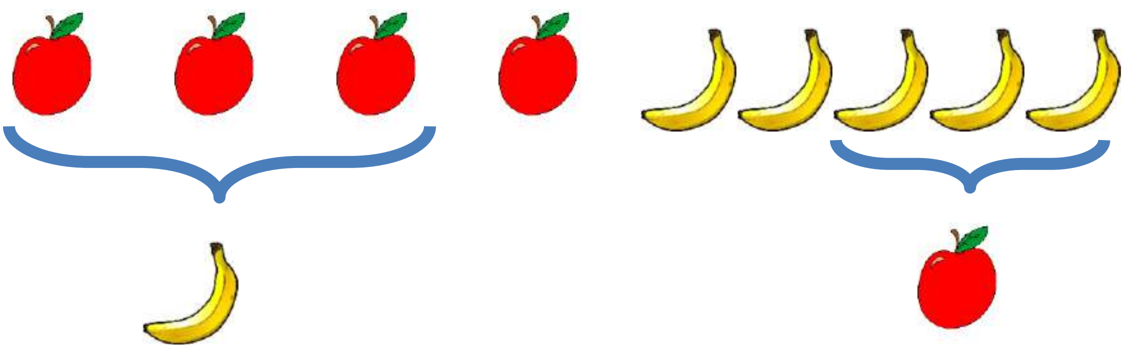


Die Hexe startet mit 4 Äpfeln und 5 Bananen.

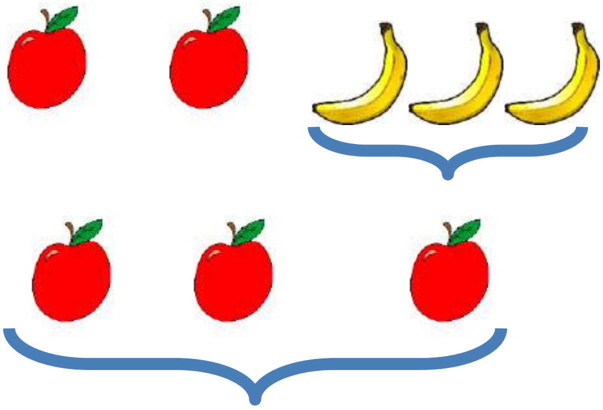
Was erhält sie nach allen Verwandlungen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Die Hexe verwandelt zuerst 3 der 4 Äpfel in 1 Banane und 3 der 5 Bananen in 1 Apfel.

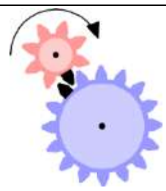


Nun hat die Hexe 3 Bananen und 2 Äpfel.
Die Bananen ersetzt sie wieder durch einen Apfel.
Damit hat sie nun 3 Äpfel.

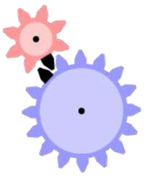
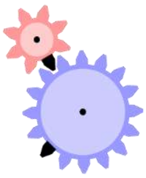
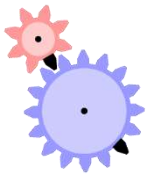
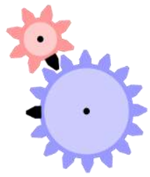
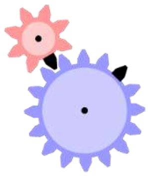


Diese wandelt sie wieder in **eine Banane** um. **(Antwort A)**

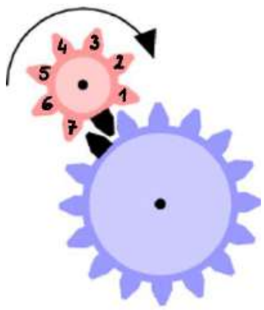
15. Das Bild zeigt zwei Zahnräder. Jedes davon hat einen schwarzen Zahn.



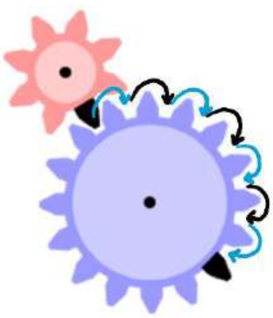
Wo sind die schwarzen Zähne, nachdem das kleine Zahnrad eine Umdrehung in Pfeilrichtung gemacht hat?

(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Hier können die roten Zähne auf dem kleinen Rad gezählt werden.
Das Rad dreht sich also 7 Zähne weiter.



Bei **Antwort C** sieht man, dass sich das Rad um sieben Zahnlücken weitergedreht hat.



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2021
18. 3. 2021

Kategorie: Écolier, Schulstufe: 3. – 4.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

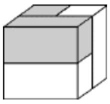
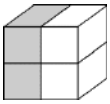
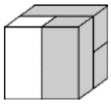
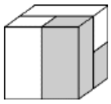
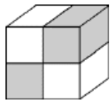
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

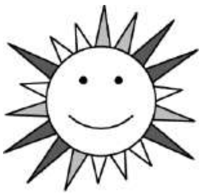
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Écolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

- 3 Punkte Beispiele -

1. Erik hat diese vier kleinen Bausteine: 
Welchen dieser Würfel kann er mit den vier Bausteinen bauen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Auf einer Schnur sind Plastikfische aufgefädelt (siehe Bild).
Die Schnur wird gespannt.
Wie viele Fische zeigen jetzt mit ihren Köpfen zum Ring?
(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

3. Anna malt diese Sonne: 
Welches der folgenden Bilder ist Teil ihrer Sonne?

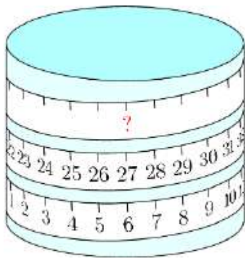
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Die Puzzleteile müssen passend zu einem Rechteck zusammengebaut werden. Dadurch bildet sich eine Rechnung.

Welches Ergebnis liefert diese Rechnung?
(A) 6 (B) 15 (C) 18 (D) 24 (E) 33

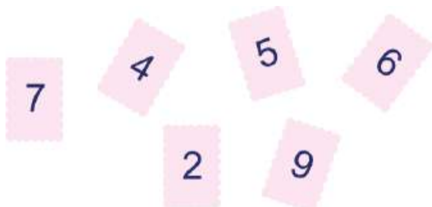
5. Eine Turmuhr schlägt nur zu jeder vollen Stunde. Um ein Uhr schlägt sie 1 Mal, um zwei Uhr schlägt sie 2 Mal, um drei Uhr schlägt sie 3 Mal, und so weiter.
Wie viele Schläge ertönen zwischen halb sieben und halb zwölf?
(A) 36 (B) 38 (C) 45 (D) 51 (E) 57

6. Ein Maßband wird rund um eine Rolle gewickelt.



Welche Zahl steht dann an der Stelle des Fragezeichens?
(A) 33 (B) 42 (C) 48 (D) 53 (E) 69

7. Irene hat sechs Zahlenkarten (siehe Bild). Sie bildet mit drei verschiedenen Karten die größte dreistellige Zahl, die sie mit zwei geraden und einer ungeraden Ziffer bilden kann.
Welche Zahl bildet Irene?
(A) 762 (B) 792 (C) 964 (D) 967 (E) 972



8. Ein Koala frisst zum Mittagessen von zwei Zweigen. Jeder Zweig hat 20 Blätter. Zuerst frisst der Koala ein paar Blätter des ersten Zweigs. Danach frisst er vom zweiten Zweig so viele Blätter, wie auf dem ersten Zweig noch übrig waren.
Wie viele Blätter sind am Ende auf den zwei Zweigen insgesamt noch übrig?
(A) 10 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 30

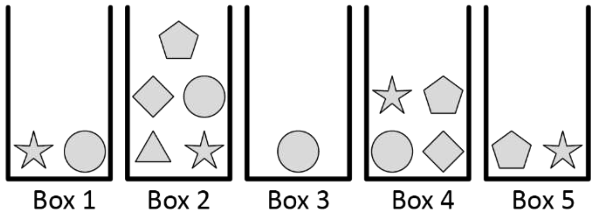
- 4 Punkte Beispiele -

9. Wie viele Sonnenblumen zeigen in die gleiche Richtung wie eine ihrer Nachbarblumen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

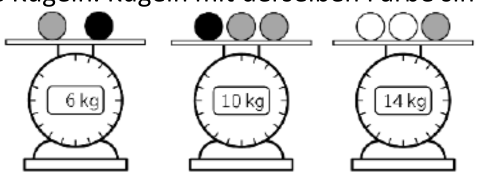
10. Ein Zauberer verwandelt eine rote und eine gelbe Blume in insgesamt 20 Sterne. Aus der roten Blume entstehen um 6 Sterne mehr als aus der gelben Blume.
In wie viele Sterne verwandelt er die rote Blume?
(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 14

11. Sofie möchte fünf verschiedene Formen aus den Boxen nehmen.

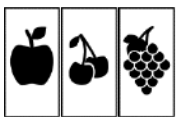
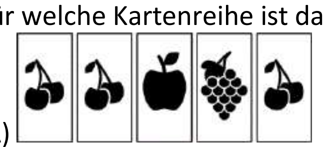
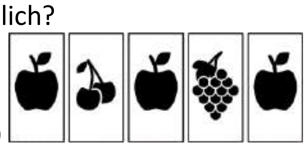
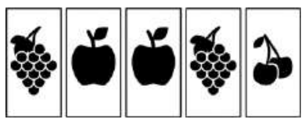
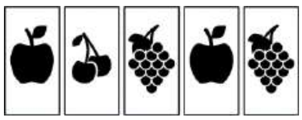
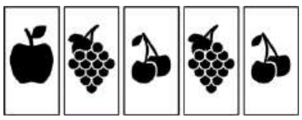


Sie darf aus jeder Box nur eine Form nehmen.
Welche Form muss sie aus der Box 4 nehmen?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

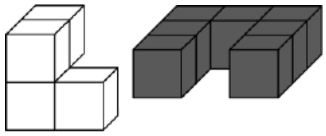
12. Rosa hat weiße, graue und schwarze Kugeln. Kugeln mit derselben Farbe sind gleich schwer.



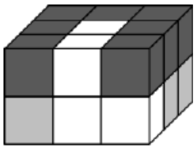
Wie viel wiegt eine weiße Kugel?
(A) 3 kg (B) 4 kg (C) 5 kg (D) 6 kg (E) 7 kg

13. Lisa hat drei Arten von Karten: 
Sie legt 5 Karten in einer Reihe auf. Danach vertauscht sie zwei dieser fünf Karten. Dann liegen alle Karten, die dasselbe Obst zeigen, nebeneinander.
Für welche Kartenreihe ist das nicht möglich?
(A)  (B)  (C) 
(D)  (E) 

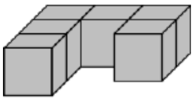
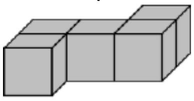
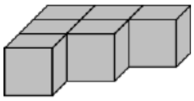
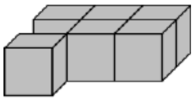
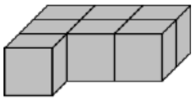
14. Aus kleinen Würfeln werden drei Bausteine (weiß, schwarz, grau) gebildet. Rechts siehst du den weißen und den schwarzen Baustein.



Alle drei werden zu dieser Figur zusammengesetzt, sodass an jeder Stelle zwei Würfel übereinander sind:



Welcher der fünf Bausteine ist der passende graue Teil?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

15. Eva hat diese 5 Sticker: 

Sie klebt einen Sticker auf jedes der 5 Felder

1	2	3	4	5

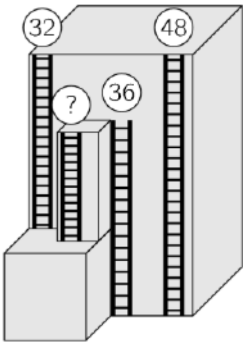
.

Sie klebt  auf Feld 1,  direkt zwischen  und .  ist nicht auf Feld 5.

Auf welches Feld klebt Eva  ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16. An einem Gebäude sind vier Feuerleitern angebracht. Bei drei der Feuerleitern ist die Höhe in Metern angegeben (siehe Bild).

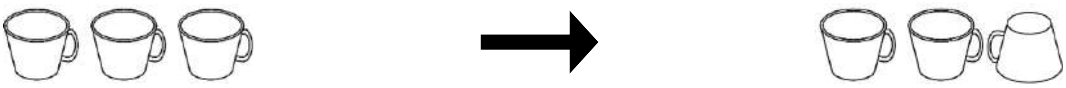


Wie lang ist die kürzeste Leiter?

(A) 12 m (B) 14 m (C) 16 m (D) 20 m (E) 22 m

- 5 Punkte Beispiele -

17. Nora spielt mit 3 Tassen. Sie stellt die 3 Tassen mit der Öffnung nach oben auf den Tisch (linkes Bild). Danach dreht sie die linke Tasse um, und legt sie rechts von den beiden anderen Tassen hin (rechtes Bild).

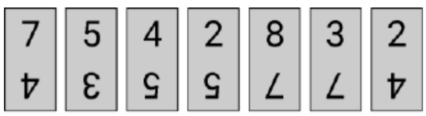


Wie stehen die Tassen, wenn sie das noch weitere 9 Mal macht?

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

18. Sieben Karten sind so angeordnet, wie im Bild zu sehen.

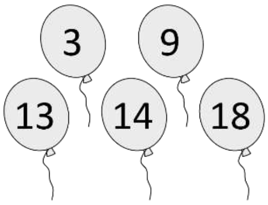


Man zählt alle Zahlen der oberen Reihe zusammen. Das macht man auch mit den Zahlen der unteren Reihe. Bei einer Karte muss man beide Zahlen vertauschen, damit die Ergebnisse der oberen und unteren Reihe gleich sind. Bei welcher Karte muss man die beiden Zahlen vertauschen?

(A) A (B) C (C) D (D) F (E) G

19. In der Kassa eines Eissalons liegt Wechselgeld. Jeder Eisbecher kostet gleich viel. Es werden 6 Eisbecher verkauft. Nun liegen 70 Euro in der Kassa. Nach insgesamt 16 verkauften Eisbechern liegen 120 Euro in der Kassa.
Wie viel Wechselgeld war vor dem Verkauf des ersten Eisbechers in der Kassa?
(A) 20 Euro (B) 30 Euro (C) 40 Euro (D) 50 Euro (E) 60 Euro

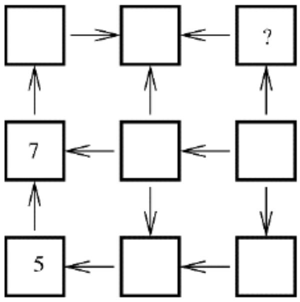
20. Mia wirft drei Pfeile auf Ballons. Wenn sie einen Ballon trifft, erhält sie so viele Punkte, wie die Zahl auf dem Ballon angibt (siehe Bild). Sie erzielt insgesamt 30 Punkte.



Welche Punktezahl ist auf dem Ballon gestanden, den Mia sicher getroffen hat?
(A) 3 (B) 9 (C) 13 (D) 14 (E) 18

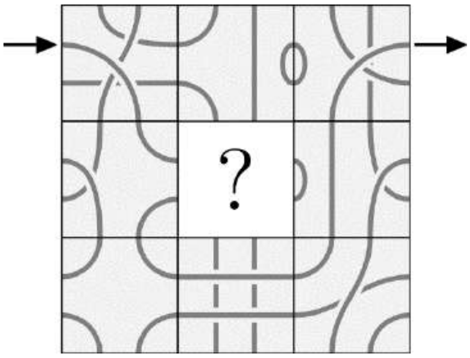
21. In einer Schachtel liegen weniger als 50 Kekse. Wenn man die Kekse auf 2, 3 oder 4 Kinder aufteilt, bekommt jedes Kind gleich viele Kekse. Hätte man 6 Kekse mehr in der Schachtel, dann könnte man alle Kekse auf 7 Kinder so aufteilen, dass jedes Kind gleich viele Kekse bekommt.
Wie viele Kekse sind in der Schachtel?
(A) 12 (B) 24 (C) 30 (D) 36 (E) 48

22. Lena möchte die Zahlen 1 bis 9 in die Felder eintragen. Die Pfeile zeigen immer von einer kleineren zu einer größeren Zahl. Lena hat die Zahlen 5 und 7 bereits eingetragen.



Welche Zahl muss sie in das Feld mit dem Fragezeichen schreiben?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

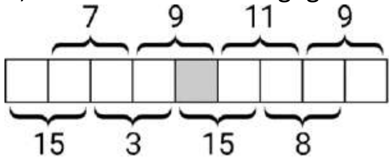
23. Eine Linie des dargestellten Musters beginnt beim linken Pfeil und endet, wenn man ihrem Verlauf folgt, beim rechten Pfeil.



Ein Stück des Musters fehlt.
Welches der fünf Stücke passt?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

24. Die Zahlen 1 bis 9 werden auf die Felder aufgeteilt. In jedes Feld wird eine Zahl geschrieben. Zählt man die Zahlen von zwei benachbarten Feldern zusammen, so erhält man die angegebenen Werte (siehe Bild).



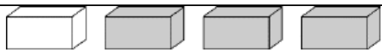
Welche Zahl wird in das graue Feld geschrieben?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

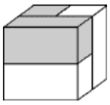
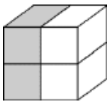
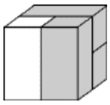
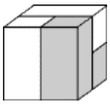
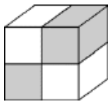
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Ecolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
C	C	B	B	C	C	C	D	C	D	E	C	D	E	D	D	B	E	C	A	D	D	B	D

– 3 Punkte Beispiele –

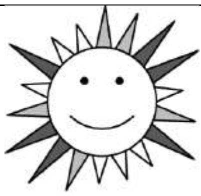
1. Erik hat diese vier kleinen Bausteine: 
Welchen dieser Würfel kann er mit den vier Bausteinen bauen?

(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Würfel C ist die richtige Antwort, da das der einzige Würfel ist, der aus drei grauen und einem weißen Baustein besteht.

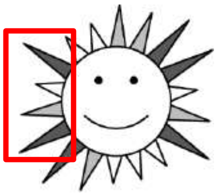
2. Auf einer Schnur sind Plastikfische aufgefädelt (siehe Bild).
Die Schnur wird gespannt.
Wie viele Fische zeigen jetzt mit ihren Köpfen zum Ring?
(A) 3 (B) 5 **(C) 6** (D) 7 (E) 8

Diese sechs Fische zeigen mit ihren Köpfen zum Ring, wenn die Schnur gespannt ist.

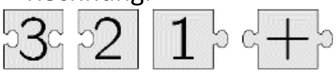
3. Anna malt diese Sonne: 
Welches der folgenden Bilder ist Teil ihrer Sonne?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Teil B befindet sich auf der linken Seite der Sonne:



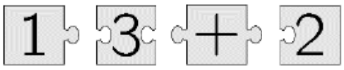
4. Die Puzzleteile müssen passend zu einem Rechteck zusammengebaut werden. Dadurch bildet sich eine Rechnung.



Welches Ergebnis liefert diese Rechnung?

(A) 6 (B) 15 (C) 18 (D) 24 (E) 33

Du musst die Teile in dieser Reihenfolge zusammenbauen:



Es ergibt sich die Rechnung 13 + 2 = **15**.

5. Eine Turmuhr schlägt nur zu jeder vollen Stunde. Um ein Uhr schlägt sie 1 Mal, um zwei Uhr schlägt sie 2 Mal, um drei Uhr schlägt sie 3 Mal, und so weiter.

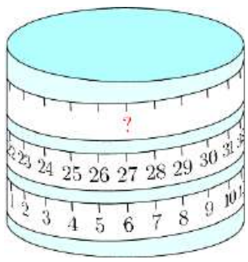
Wie viele Schläge ertönen zwischen halb sieben und halb zwölf?

(A) 36 (B) 38 (C) 45 (D) 51 (E) 57

Die Uhr schlägt um sieben Uhr 7 Mal, um acht Uhr 8 Mal, um neun Uhr 9 Mal, um zehn Uhr 10 Mal und um elf Uhr 11 Mal.

Somit 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = **45** Mal.

6. Ein Maßband wird rund um eine Rolle gewickelt.



Welche Zahl steht dann an der Stelle des Fragezeichens?

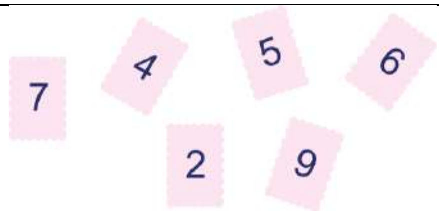
(A) 33 (B) 42 (C) 48 (D) 53 (E) 69

Man sieht, dass die Zahl in der mittleren Reihe immer um 21 größer ist als die Zahl in der unteren Reihe. Somit muss auch die Zahl in der obersten Reihe um 21 größer sein als die Zahl direkt darunter in der mittleren Reihe. Es ergibt sich 27 + 21 = **48**.

7. Irene hat sechs Zahlenkarten (siehe Bild). Sie bildet mit drei verschiedenen Karten die größte dreistellige Zahl, die sie mit zwei geraden und einer ungeraden Ziffer bilden kann.

Welche Zahl bildet Irene?

(A) 762 (B) 792 (C) 964 (D) 967 (E) 972



Die größte Zahl der sechs Zahlen muss an der Hunderterstelle stehen (9). Danach dürfen nur mehr gerade Zahlen kommen. Die größte gerade Zahl ist 6 und steht an der Zehnerstelle, die zweitgrößte gerade Zahl ist 4 und steht an der Einerstelle.

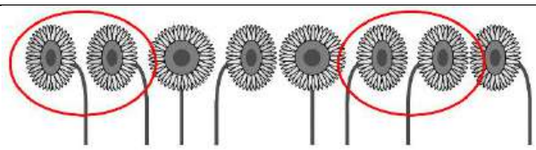
8. Ein Koala frisst zum Mittagessen von zwei Zweigen. Jeder Zweig hat 20 Blätter. Zuerst frisst der Koala ein paar Blätter des ersten Zweigs. Danach frisst er vom zweiten Zweig so viele Blätter, wie auf dem ersten Zweig noch übrig waren.
Wie viele Blätter sind am Ende auf den zwei Zweigen insgesamt noch übrig?
(A) 10 (B) 12 (C) 16 **(D) 20** (E) 30

Zählst du die Blätter, die er vom ersten Zweig frisst, und die Blätter, die er vom zweiten Zweig frisst, zusammen, ergibt sich immer 20. Somit frisst er 20 und 20 sind noch an den beiden Zweigen.

– 4 Punkte Beispiele –

9. Wie viele Sonnenblumen zeigen in die gleiche Richtung wie eine ihrer Nachbarblumen?

(A) 2 (B) 3 **(C) 4** (D) 5 (E) 6

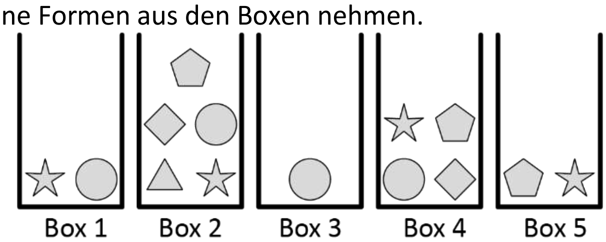


Es gibt insgesamt **4** Blumen, die in die gleiche Richtung wie ihre Nachbarblume sehen.

10. Ein Zauberer verwandelt eine rote und eine gelbe Blume in insgesamt 20 Sterne. Aus der roten Blume entstehen um 6 Sterne mehr als aus der gelben Blume.
In wie viele Sterne verwandelt er die rote Blume?
(A) 9 (B) 10 (C) 12 **(D) 13** (E) 14

13 Sterne – 6 Sterne = 7 Sterne
13 Sterne + 7 Sterne = 20 Sterne

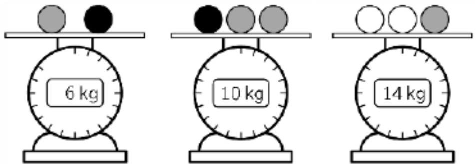
11. Sofie möchte fünf verschiedene Formen aus den Boxen nehmen.



Sie darf aus jeder Box nur eine Form nehmen.
Welche Form muss sie aus der Box 4 nehmen?
(A) ☆ (B) ○ (C) ⬠ (D) △ **(E)** ◇

Aus Box 3 muss Sofie die Form ○ nehmen. Somit muss sie aus Box 1 die Form ☆ nehmen. Dadurch muss sie aus Box 5 die Form ⬠ nehmen. In Box 4 sind dadurch bis auf die Form ◇ schon alle Formen besetzt. Dadurch muss Sofie die Form ◇ aus Box 4 nehmen.

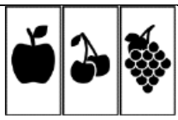
12. Rosa hat weiße, graue und schwarze Kugeln. Kugeln mit derselben Farbe sind gleich schwer.



Wie viel wiegt eine weiße Kugel?

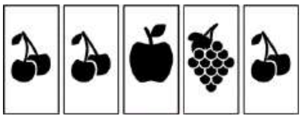
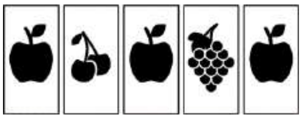
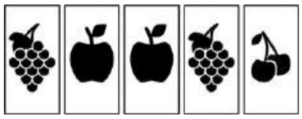
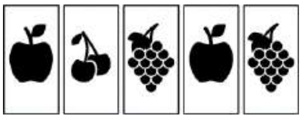
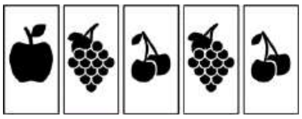
(A) 3 kg (B) 4 kg **(C) 5 kg** (D) 6 kg (E) 7 kg

Die Waage in der Mitte hat eine graue Kugel mehr als die linke Waage und zeigt 4 kg mehr an. Dadurch muss eine graue Kugel 4 kg wiegen. Da die erste Waage 6 kg anzeigt, muss die schwarze Kugel 6 kg – 4kg = 2kg wiegen.
Da die rechte Waage 14 kg anzeigt und die graue Kugel 4 kg wiegt, wiegen zwei weiße Kugeln 14 kg – 4 kg = 10 kg.
Eine weiße Kugel wiegt 10 kg : 2 = **5 kg**.

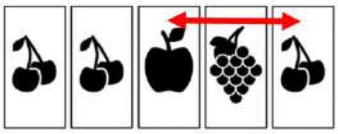
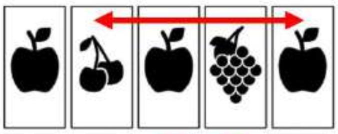
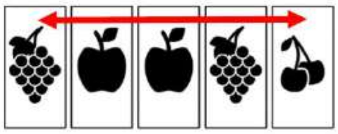
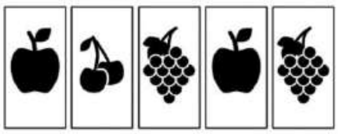
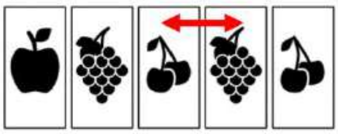
13. Lisa hat drei Arten von Karten: 

Sie legt 5 Karten in einer Reihe auf. Danach vertauscht sie zwei dieser fünf Karten. Dann liegen alle Karten, die dasselbe Obst zeigen, nebeneinander.

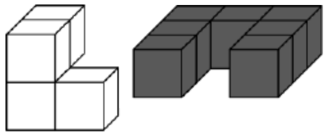
Für welche Kartenreihe ist das nicht möglich?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

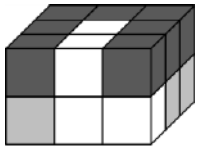
Man muss folgende Karten vertauschen, damit alle Karten, die dasselbe Obst zeigen, nebeneinanderliegen. Nur bei D geht das nicht.

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

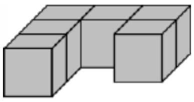
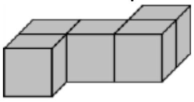
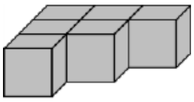
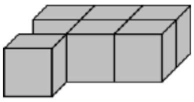
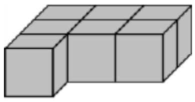
14. Aus kleinen Würfeln werden drei Bausteine (weiß, schwarz, grau) gebildet.
Rechts siehst du den weißen und den schwarzen Baustein.



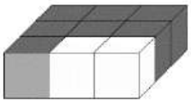
Alle drei werden zu dieser Figur zusammengesetzt, sodass an jeder Stelle zwei Würfel übereinander sind:



Welcher der fünf Bausteine ist der passende graue Teil?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Die untere Reihe der Figur hat zwei weiße Würfel. Der Rest muss graue Würfel sein und so aussehen:



Somit ist der graue Teil E die richtige Lösung.

15. Eva hat diese 5 Sticker: 

Sie klebt einen Sticker auf jedes der 5 Felder

1	2	3	4	5

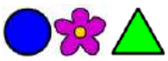
.

Sie klebt  auf Feld 1,  direkt zwischen  und .  ist nicht auf Feld 5.

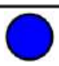
Auf welches Feld klebt Eva  ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D) 4** (E) 5

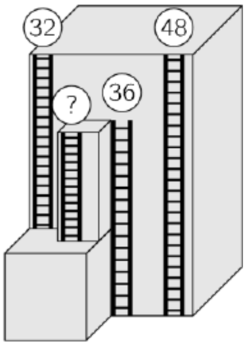
Eva klebt zuerst den Apfel so auf:

Blume, Kreis und Dreieck muss sie so  oder so  aufkleben. Der Stern darf nicht auf Feld 5, und muss deshalb auf Feld 2.

Die Blume kann somit Eva somit nur auf Feld vier kleben.

Den Kreis kann Eva  auf Feld 3 und  auf Feld 5 kleben, oder umgekehrt.

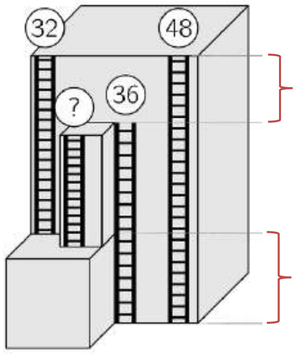
16. An einem Gebäude sind vier Feuerleitern angebracht. Bei drei der Feuerleitern ist die Höhe in Metern angegeben (siehe Bild).



Wie lang ist die kürzeste Leiter?

(A) 12 m (B) 14 m (C) 16 m **(D) 20 m** (E) 22 m

Man kann sich folgende Abstände ausrechnen:



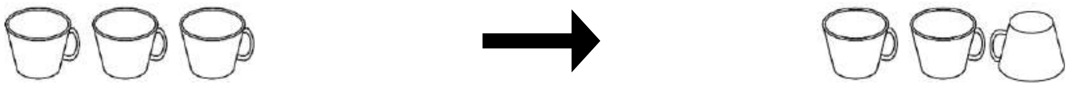
48 m – 36 m = 12 m

48 m – 32 m = 16 m

Die kürzeste Leiter muss deshalb 48 m – 12 m – 16 m = **20 m** hoch sein.
Du kannst auch so rechnen: 36 m – 16 m = 20 m oder 32 m – 12 m = 20 m.

5 Punkte Beispiele

17. Nora spielt mit 3 Tassen. Sie stellt die 3 Tassen mit der Öffnung nach oben auf den Tisch (linkes Bild). Danach dreht sie die linke Tasse um, und legt sie rechts von den beiden anderen Tassen hin (rechtes Bild).



Wie stehen die Tassen, wenn sie das noch weitere 9 Mal macht?

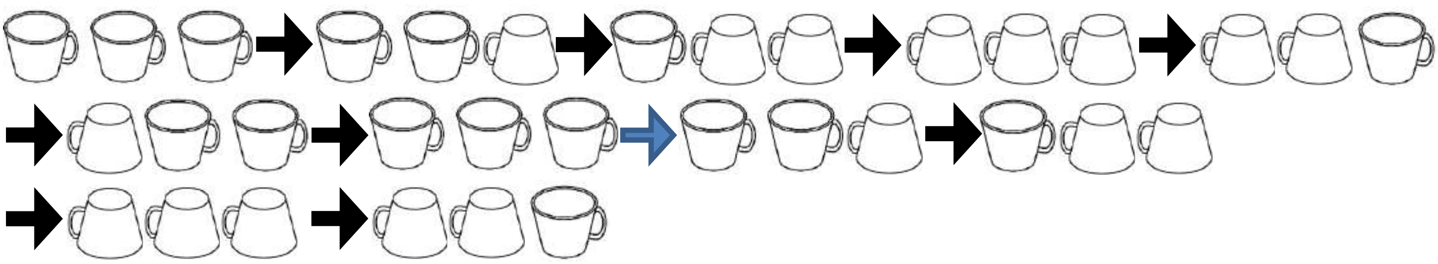
(A) 

(B) 

(C) 

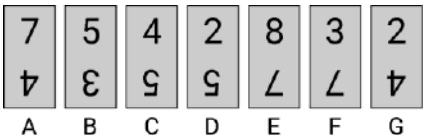
(D) 

(E) 



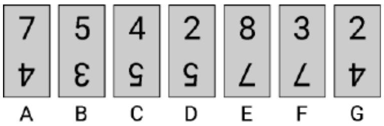
Dreht man die Tassen 6 Mal um ist man wieder bei der Ausgangslage, da man 3 Tassen hat. Wiederholt man den Vorgang 3 weiter Male sind alle Tassen umgedreht. Da man den Vorgang aber 10 Mal gesamt ausführt und dies eine Zahl ist die sich nicht durch 3 Teilen lässt muss die hintere Tasse anderes stehen.

18. Sieben Karten sind so angeordnet, wie im Bild zu sehen.



Man zählt alle Zahlen der oberen Reihe zusammen. Das macht man auch mit den Zahlen der unteren Reihe. Bei einer Karte muss man beide Zahlen vertauschen, damit die Ergebnisse der oberen und unteren Reihe gleich sind.
Bei welcher Karte muss man die beiden Zahlen vertauschen?

(A) A (B) C (C) D (D) F **(E) G**



= 31

= 35

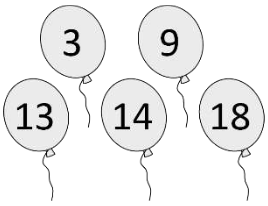
Man zählt zuerst die Zahlen jeder der beiden Reihen zusammen, um anschließend den Werteunterschied der beiden Reihen zu bestimmen (35 – 31 = 4). Damit die Summe der beiden Reihen gleich ist, muss man die 4 auf beide gleichmäßig verteilen (4 : 2 = 2). Man muss sich also auf die Suche nach einer Karte machen, bei der die beiden Zahlen darauf einen Unterschied von 2 haben. Dafür würde die Karte B und G in Frage kommen. Da die obere Reihe aber die kleinere Summe hat, muss die kleinere Zahl gegen die größere getauscht werden = G.

19. In der Kassa eines Eissalons liegt Wechselgeld. Jeder Eisbecher kostet gleich viel. Es werden 6 Eisbecher verkauft. Nun liegen 70 Euro in der Kassa. Nach insgesamt 16 verkauften Eisbechern liegen 120 Euro in der Kassa.
Wie viel Wechselgeld war vor dem Verkauf des ersten Eisbechers in der Kassa?

(A) 20 Euro (B) 30 Euro **(C) 40 Euro** (D) 50 Euro (E) 60 Euro

Man kann berechnen wie viel 10 Eisbecher kosten, da man einen Kassenstand nach 16 und 6 verkauften Eisbechern hat. 120 € - 70 € = 50 €, 10 Eisbecker kosten somit 50 €. 50 € : 10 = 5 und somit kostet 1 Eisbecher 5 €. Um nun das Wechselgeld zu berechnen muss man von den 70 € die 6 Eisbecher abziehen. 5 € · 6 = 30 €.
6 Eisbecher kosten 30 €. 70 € - 30 € = **40 €**

20. Mia wirft drei Pfeile auf Ballons. Wenn sie einen Ballon trifft, erhält sie so viele Punkte, wie die Zahl auf dem Ballon angibt (siehe Bild). Sie erzielt insgesamt 30 Punkte.



Welche Punktezahl ist auf dem Ballon gestanden, den Mia sicher getroffen hat?

(A) 3 (B) 9 (C) 13 (D) 14 (E) 18

Um auf 30 Punkte zu kommen, kann Mia entweder 18 + 9 + 3 = 30 getroffen haben oder 14 + 13 + 3 = 30. In beiden Fällen hat sie den Ballon mit der 3 getroffen.

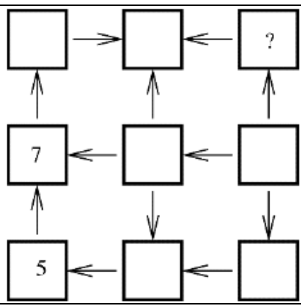
21. In einer Schachtel liegen weniger als 50 Kekse. Wenn man die Kekse auf 2, 3 oder 4 Kinder aufteilt, bekommt jedes Kind gleich viele Kekse. Hätte man 6 Kekse mehr in der Schachtel, könnte man alle Kekse auch auf 7 Kinder so aufteilen, dass jedes Kind gleich viele Kekse bekommt.

Wie viele Kekse sind in der Schachtel?

(A) 12 (B) 24 (C) 30 **(D) 36** (E) 48

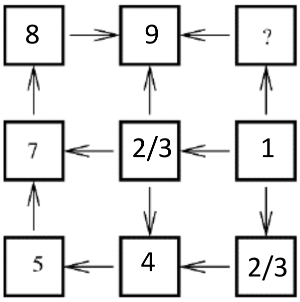
Die gesuchte Zahl muss durch 2, 3 und 4 ohne Rest teilbar sein und sie muss kleiner als 50 sein. Durch die Teilung durch 7 bekommt man eine weitere Information, da es nicht so viel Zahlen gibt, die dadurch in Frage kommen: 56, 49 und 42. Die Zahl 56 kann es nicht sein, da man 6 abziehen muss und dann sind es genau 50 Kekse und nicht kleiner als 50. Bei 49 – 6 = 43, erkennt man, dass 43 durch keine der Zahlen 2, 3 und 4 ohne Rest teilbar ist. Nimmt man 42 – 6 = **36**, so kann man beim Überprüfen von 36 sehen, dass es sich durch 2, 3 und 4 ohne Rest teilen lässt.

22. Lena möchte die Zahlen 1 bis 9 in die Felder eintragen. Die Pfeile zeigen immer von einer kleineren zu einer größeren Zahl. Lena hat die Zahlen 5 und 7 bereits eingetragen.



Welche Zahl muss sie in das Feld mit dem Fragezeichen schreiben?

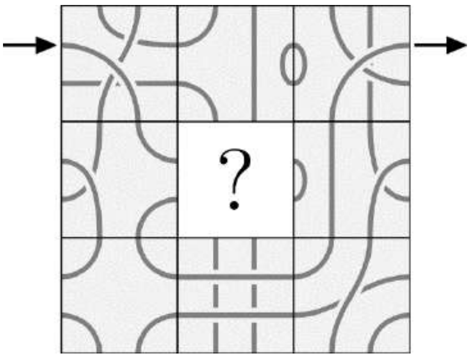
(A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D) 6** (E) 8



Man beginnt bei der ersten Spalte, da es genau zwei Zahlen (8 und 9) gibt, die erlaubt und größer als 7 sind. Schaut man nun auch auf die erste Reihe, dann muss die zweite Zahl größer als die erste sein. Um dies zu erfüllen muss die erste 8 sein und die zweite 9.

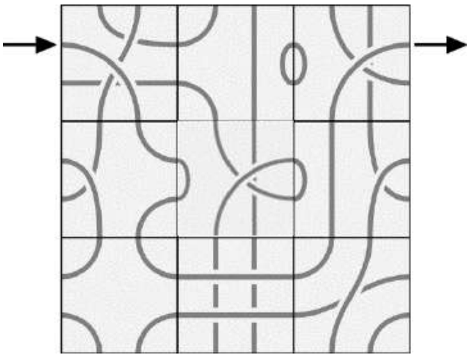
In der zweiten Reihe muss die letzte Zahl die kleinste (1) sein, da alle anderen Zahlen größer sind. Nun kann man sich die letzte Reihe anschauen: Die Zahl in der zweiten Spalte muss kleiner als 5 sein (4, 3 oder 2), aber größer als die Zahl in der letzten Spalte und als in der zweiten Reihe (4). Damit bleibt beim ? nur mehr die **6**.

23. Eine Linie des dargestellten Musters beginnt beim linken Pfeil und endet, wenn man ihrem Verlauf folgt, beim rechten Pfeil.



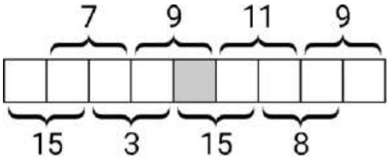
Ein Stück des Musters fehlt. Welches der fünf Stücke passt?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 



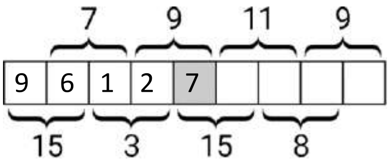
Bei beiden anderen Stücken geht die Linie zwar weiter, aber man kommt nicht beim Pfeil heraus.

24. Die Zahlen 1 bis 9 werden auf die Felder aufgeteilt. In jedes Feld wird eine Zahl geschrieben. Zählt man die Zahlen von zwei benachbarten Feldern zusammen, so erhält man die angegebenen Werte (siehe Bild).



Welche Zahl wird in das graue Feld geschrieben?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D) 7** (E) 8



Man nimmt die größte Zahl und zerlegt sie: 15 = 9 + 6 = 8 + 7. Da man nur zwei der Zahlen von 1 bis 9 verwenden darf, gibt es nur diese zwei Möglichkeiten. Das zweite und dritte Kästchen müssen gemeinsam 7 ergeben. Daher kann hier nur 9 und 6 kommen.

6 + 1 = 7; 1 + 2 = 3; 2 + **7** = 9

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2021
18. 3. 2021

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5. – 6.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

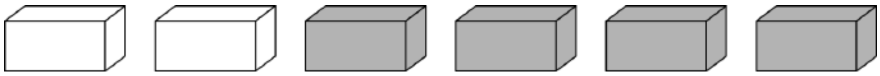
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

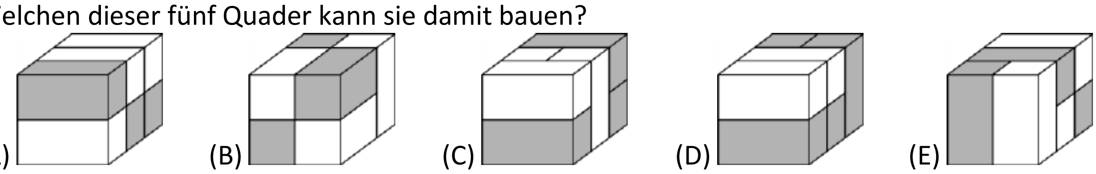
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

- 3 Punkte Beispiele -

1. Elisa hat diese sechs kleinen Bausteine.



Welchen dieser fünf Quader kann sie damit bauen?

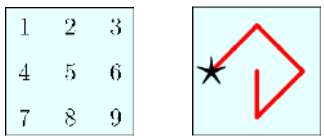


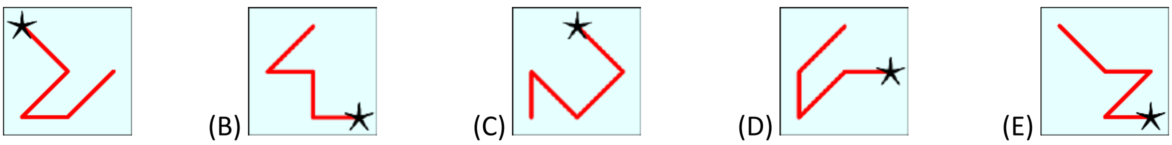
(A) (B) (C) (D) (E)

2. In der Abbildung siehst du Kinder Hände halten. Wie oft treffen zwei linke Hände aufeinander?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

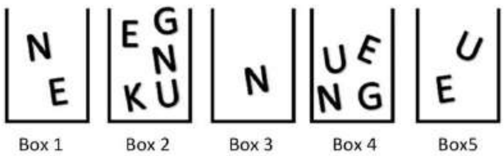
3. In ein Quadrat werden die Ziffern 1 bis 9 geschrieben.
Mona erzeugt mit Hilfe der Ziffern Zahlen, indem sie beim Stern startet, den Streckenzügen folgt und alle Ziffern, die auch auf den Strecken liegen, der Reihe nach ihrem Auftreten aufschreibt. Das Beispiel zeigt die Zahl 42685.
Mit welcher der folgenden Streckenzügen erzeugt Mona die größte Zahl?





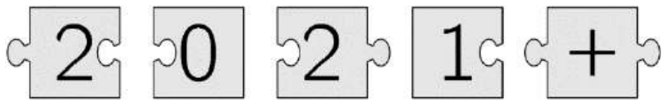
(A) (B) (C) (D) (E)

4. Sofie möchte mit den Buchstaben, die sich in den Boxen befinden, das Wort KENGU schreiben. Sie darf aus jeder Box nur einen Buchstaben verwenden.
Welchen Buchstaben muss Sofie aus der Box 4 verwenden?



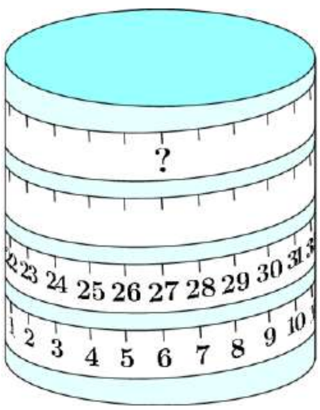
(A) K (B) E (C) N (D) G (E) U

5. Wenn du die fünf Puzzleteile korrekt zu einem Rechteck zusammenbaust, entsteht eine Addition.



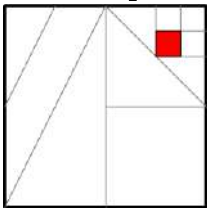
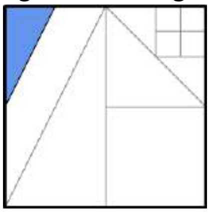
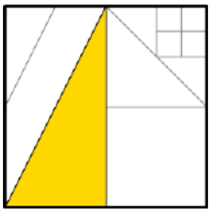
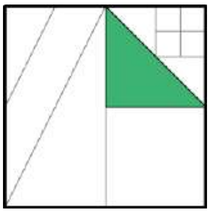
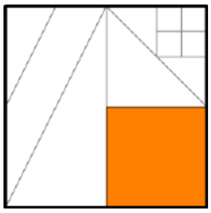
Wie lautet das Ergebnis der Addition?
(A) 22 (B) 32 (C) 41 (D) 122 (E) 203

6. Ein Maßband wird rund um eine Rolle gewickelt.
Welche Zahl steht dann an der Stelle des Fragezeichens?
(A) 53 (B) 60 (C) 69 (D) 77 (E) 81



7. Karin möchte die Wände ihres Zimmers grün streichen. Da die grüne Farbe zu dunkel ist, mischt sie diese mit weißer Farbe.
Bei welcher der folgenden Mischungen erhält sie das dunkelste Grün?
(A) 1 Teil grün und 3 Teile weiß
(B) 2 Teile grün und 6 Teile weiß
(C) 3 Teile grün und 9 Teile weiß
(D) 4 Teile grün und 12 Teile weiß
(E) Alle vier Mischungen sind gleich dunkel.

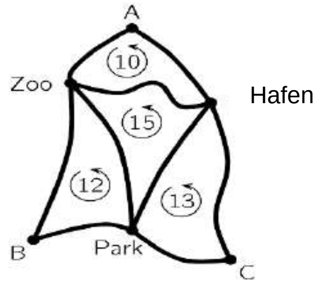
8. Innerhalb eines Quadrats sind viele Strecken eingezeichnet. Die Endpunkte der Strecken sind entweder Eckpunkte oder Mittelpunkte anderer Strecken in dieser Figur. Ein Achtel des Flächeninhalts des großen Quadrats ist eingefärbt. Welche der dargestellten Figuren ist die gesuchte?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

9. Auf einem Papierstreifen steht die Zahl 5021972970. Julian zerschneidet den Streifen zweimal so, dass er drei Zettel mit je einer Zahl erhält. Welche ist die kleinste Summe, die er bei Addition der drei Zahlen auf den drei Zetteln erhalten kann?

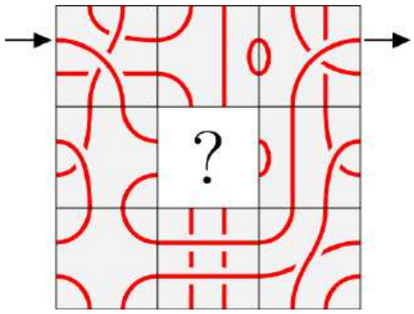
(A) 3244 (B) 3444 (C) 5172 (D) 5217 (E) 5444



10. Auf dem Plan sieht man sechs Busstationen. Der Rundkurs A – Zoo – Hafen – A ist 10 km lang. Der Rundkurs B – Park – Zoo – B ist 12 km lang. Der Rundkurs C – Hafen – Park – C ist 13 km lang. Der Rundkurs Zoo – Park – Hafen - Zoo ist 15 km lang.

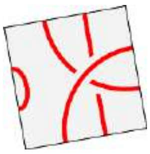
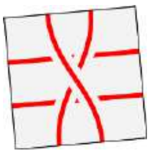
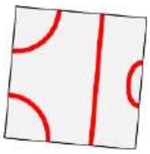
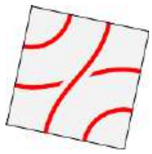
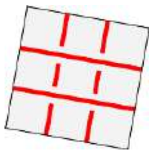
Wie lange ist die äußere Rundstrecke A – Zoo – B –Park – C – Hafen - A?

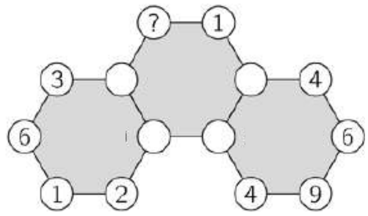
(A) 18 km (B) 20 km (C) 25 km (D) 35 km (E) 50 km



11. Eine Linie des dargestellten Musters beginnt beim linken Pfeil und endet, wenn man ihrem Verlauf folgt, beim rechten Pfeil. Ein Stück des Musters fehlt.

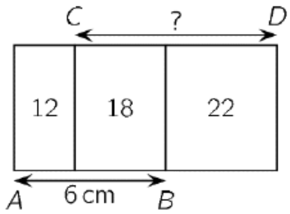
Welches der 5 Musterstücke kann nicht das fehlende Stück sein?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 



12. Die Zeichnung zeigt drei miteinander verbundene Sechsecke. Bei allen Eckpunkten wurden Zahlen geschrieben, jedoch sind einige Zahlen nicht sichtbar. Bei jedem Sechseck beträgt die Summe der sechs Zahlen 30. Welche Zahl steht in der Ecke mit dem Fragezeichen?

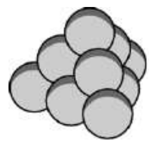
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

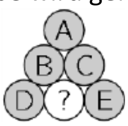


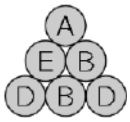
13. Drei Rechtecke mit der gleichen Länge werden wie gezeigt angeordnet. Die Zahlen in den Rechtecken stehen für die Maßzahl des jeweiligen Flächeninhalts in cm^2.
Wenn die Strecke AB 6 cm lang ist, wie lang ist dann die Strecke CD?

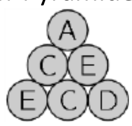
(A) 7 cm (B) 7,5 cm (C) 8 cm (D) 8,2 cm (E) 8,5 cm

14. Eine dreiseitige Pyramide wird mit 10 gleich großen Kugeln gebaut (siehe Abbildung rechts). Auf jede der kleinen Kugeln wird genau einer der Buchstaben A, B, C, D oder E geschrieben. Jeder Buchstabe wird genau zweimal verwendet. Drei der vier Flächen der Pyramide sehen wie folgt aus:





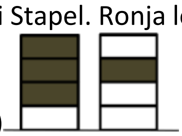
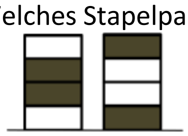
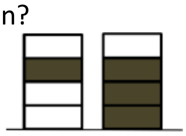




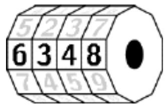
Welcher Buchstabe steht auf der Kugel mit dem Fragezeichen?

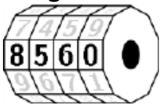
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

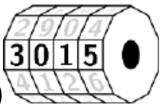
15. Ronja hat vier helle und Wanja hat vier dunkle Spielsteine. Abwechselnd legen sie ihre Steine und erzeugen so zwei Stapel. Ronja legt den ersten Spielstein. Welches Stapelpaar kann nicht ihr Ergebnis sein?

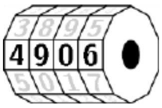
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

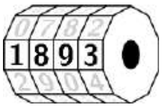
16. Philipp sperrt sein Fahrrad mit einem vierstelligen drehbaren Fahrradschloss ab. Auf jedem dieser Räder gibt es die Ziffern von 0 bis 9. Jetzt zeigt sein Schloss die Kombination 6348 (siehe Abbildung rechts). Er dreht jedes Rad in die gleiche Richtung und gleich weit. Welche der angezeigten Zahlenkombinationen kann sicher nicht der Code von Philipps Fahrradschloss sein?

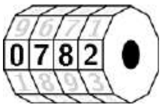


(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

- 5 Punkte Beispiele -

17. In einer Kiste befinden sich 20 Äpfel und 20 Birnen. Carl nimmt ohne hinzusehen 20 Früchte aus der Kiste. Danach nimmt Luca die restlichen 20 Früchte. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?

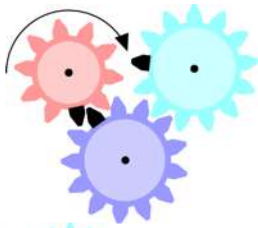
(A) Carl hat zumindest eine Birne.
(B) Carl hat gleich viele Äpfel und Birnen.
(C) Carl hat genau so viele Äpfel wie Luca.
(D) Carl hat genau so viele Birnen wie Luca Äpfel hat.
(E) Carl hat genau so viele Birnen wie Luca.

18. Ann, Bob, Carina, Daniel und Ed sitzen an einem runden Tisch. Daniel sitzt neben Ed, Ann sitzt nicht neben Bob, und Bob sitzt nicht neben Daniel. Wer sitzt neben Carina?

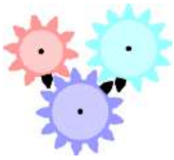
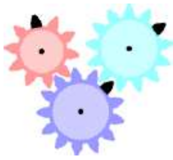
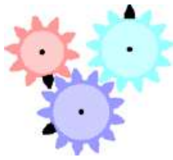
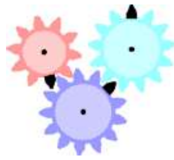
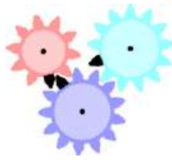
(A) Ann und Bob (B) Bob und Daniel (C) Daniel und Ed (D) Ed und Ann (E) nicht bestimmbar

19. Maurice fragt einen Koch um das Rezept für Muffins.
Für 100 Stück braucht er: 25 Eier, 4 l Milch, 5 kg Mehl und 1 kg Butter.
Maurice hat 6 Eier, 500 ml Milch, 400 g Mehl und 200 g Butter zur Verfügung.
Wie viel Stück kann er höchstens zubereiten, wenn er sich genau an das Rezept hält?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15



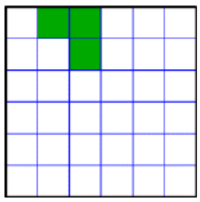
20. Das Bild zeigt drei Zahnräder mit jeweils einem schwarzen Zahn (siehe Abbildung rechts). Das kleine Zahnrad wird einmal vollständig im Uhrzeigersinn gedreht. Welche Abbildung zeigt die Positionen der schwarzen Zähne nach einer vollen Umdrehung des kleinen Zahnrades?


(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

21. Ein Apfel und eine Orange wiegen genau so viel wie eine Birne und ein Pfirsich. Ein Apfel und eine Birne wiegen weniger als eine Orange und ein Pfirsich. Eine Birne und eine Orange wiegen weniger als ein Apfel und ein Pfirsich. Welche Frucht ist am schwersten?

(A) der Apfel (B) die Orange (C) der Pfirsich (D) die Birne (E) nicht lösbar

22. Im großen Quadrat sind drei Felder gefärbt (siehe Abbildung). Durch zusätzliches Färben von weiteren Feldern soll insgesamt ein großes Muster aus 36 Feldern entstehen, das vier Symmetrieachsen hat.
Wie viele Felder müssen noch mindestens gefärbt werden, damit so ein Muster entsteht?



(A) 1 (B) 9 (C) 12 (D) 13 (E) 21

23. Drei Piraten werden gefragt, wie viele Münzen und Diamanten ihr Freund Graubart hat. Ihre Antworten sind:
Pirat 1: „Graubart hat genau 8 Münzen. Er hat genau 6 Diamanten."
Pirat 2: „Graubart hat genau 7 Münzen. Er hat genau 4 Diamanten."
Pirat 3: „Graubart hat genau 7 Münzen. Er hat genau 7 Diamanten."
Jeder Pirat sagt einen wahren und einen falschen Satz. Wie viele Münzen und Diamanten hat Graubart insgesamt?

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

24. Ein Würfel hat die Kantenlänge 7 cm. Auf jeder seiner Seitenflächen werden die beiden Diagonalen rot eingezeichnet. Danach wird dieser Würfel in kleine Würfel mit der Kantenlänge 1 cm zerschnitten. Auf wie vielen der kleinen Würfel ist auf mindestens einer Seitenfläche mindestens eine Diagonale eingezeichnet?

(A) 54 (B) 62 (C) 70 (D) 78 (E) 86

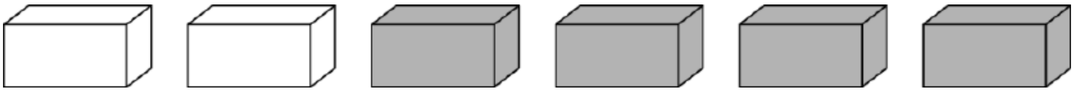
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Lösungen

– Lösungsvektor –

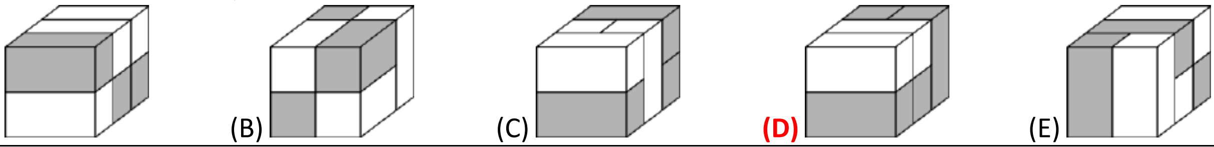
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	A	E	D	B	C	E	D	B	B	D	B	C	A	E	C	D	A	B	A	C	E	C	B

– 3 Punkte Beispiele –

1. Elisa hat diese sechs kleinen Bausteine.



Welchen dieser fünf Quader kann sie damit bauen?



(A) (B) (C) **(D)** (E)

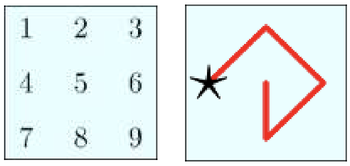
Lösung: Elisas fertiges Bauwerk muss 4 graue und 2 weiße Bausteine enthalten, dies ist nur beim Quader **D** der Fall.

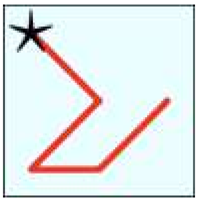
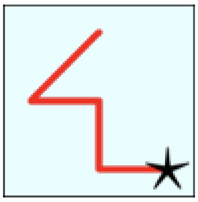
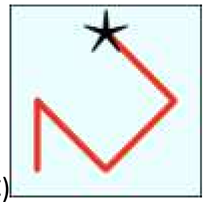
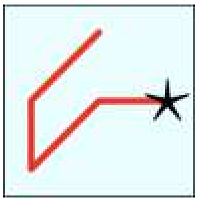
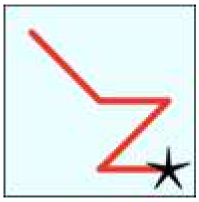
2. In der Abbildung siehst du Kinder Hände halten. Wie oft treffen zwei linke Hände aufeinander?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Nur das Mädchen im grünen Kleid und der Bub mit dem hellblauen T-Shirt halten einander jeweils mit der linken Hand. Nur einmal kann man im Bild sehen, dass zwei linke Hände aufeinander treffen, deshalb ist **A** die gesuchte Lösung.

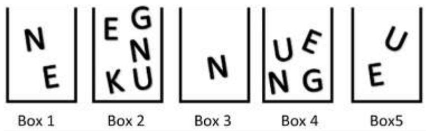
3. In ein Quadrat werden die Ziffern 1 bis 9 geschrieben.
Mona erzeugt mit Hilfe der Ziffern Zahlen, indem sie beim Stern startet, den Streckenzügen folgt und alle Ziffern, die auch auf den Strecken liegen, der Reihe nach ihrem Auftreten aufschreibt. Das Beispiel zeigt die Zahl 42685.
Mit welcher der folgenden Streckenzügen erzeugt Mona die größte Zahl?



(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Lösung: Die größtmögliche Zahl beginnt mit der Ziffer 9. Danach folgt die Ziffer 8. Die Lösung B und E stimmen in den ersten beiden Stellen überein, aber die dritte Stelle ist bei der Lösung E die Ziffer 6, bei B die Ziffer 5, somit liefert **E** die größte Zahl.

4. Sofie möchte mit den Buchstaben, die sich in den Boxen befinden, das Wort KENGU schreiben. Sie darf aus jeder Box nur einen Buchstaben verwenden.
Welchen Buchstaben muss Sofie aus der Box 4 verwenden?



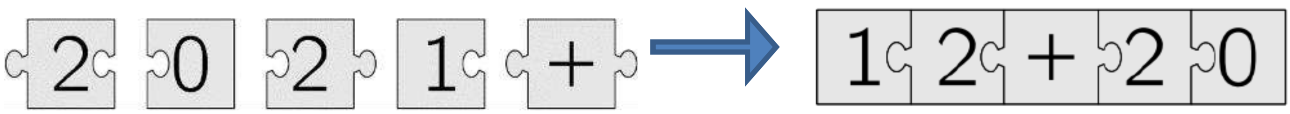
(A) K (B) E (C) N **(D)** G (E) U

Lösung: Den Buchstaben K gibt es nur in der Box 2, somit muss Sofie K aus der Box 2 nehmen, den Buchstaben E aus der Box 1, da sie den Buchstaben N, der sich auch in dieser Box befindet, nur in der Box 3 enthalten ist, und sie daher den Buchstaben N aus der Box 3 nehmen muss. Sofie muss den Buchstaben G aus der **Box 4** nehmen, da es sonst keine Box mehr gibt, in der der Buchstabe G enthalten ist. Den letzten Buchstaben U nimmt Sofie aus der Box 5.

5. Wenn du die fünf Puzzleteile korrekt zu einem Rechteck zusammenbaust, entsteht eine Addition.

Wie lautet das Ergebnis der Addition?
(A) 22 **(B)** 32 (C) 41 (D) 122 (E) 203

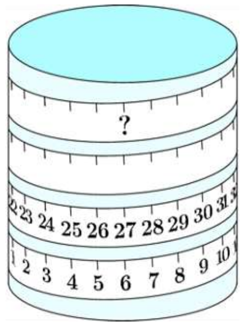
Lösung: Setzt man das Puzzle richtig zu einem Rechteck zusammen, entsteht folgende Addition:



Die Addition liefert 32, und **B** ist die richtige Lösung.

6. Ein Maßband wird rund um eine Rolle gewickelt.
Welche Zahl steht dann an der Stelle des Fragezeichens?

(A) 53 (B) 60 **(C)** 69 (D) 77 (E) 81



Lösung: Das Fragezeichnen liegt genau über den Zahlen 6 und 27. Die Differenz 27 – 6 = 21, das heißt, dass der Unterschied zwischen jeweils zweier Zahlen, die sich genau übereinander in zwei benachbarten Linien des Maßbandes befinden, 21 beträgt.
Durch die Berechnung: 6 + 21 + 21 + 21 erhält man 69 und **C** ist die richtige Lösung.

7. Karin möchte die Wände ihres Zimmers grün streichen. Da die grüne Farbe zu dunkel ist, mischt sie diese mit weißer Farbe.

Bei welcher der folgenden Mischungen erhält sie das dunkelste Grün?
(A) 1 Teil grün und 3 Teile weiß
(B) 2 Teile grün und 6 Teile weiß
(C) 3 Teile grün und 9 Teile weiß
(D) 4 Teile grün und 12 Teile weiß
(E) Alle vier Mischungen sind gleich dunkel.

Lösung: Alle vier Mischungen liefern das gleiche Ergebnis, Lösung **E.**

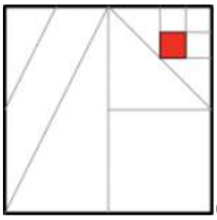
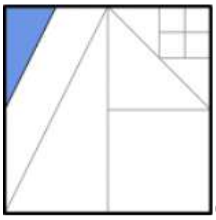
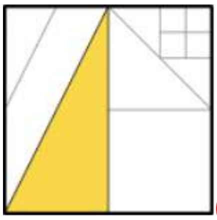
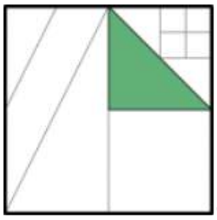
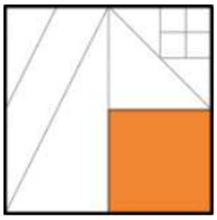
1 Teil grün und 3 Teile weiß

Multipliziert mit 2: 2 Teile grün und 6 Teile weiß

Multipliziert mit 3: 3 Teile grün und 9 Teile weiß

Multipliziert mit 4: 4 Teile grün und 12 Teile weiß

8. Innerhalb eines Quadrats sind viele Strecken eingezeichnet. Die Endpunkte der Strecken sind entweder Eckpunkte oder Mittelpunkte anderer Strecken in dieser Figur. Ein Achtel des Flächeninhalts des großen Quadrats ist eingefärbt. Welche der dargestellten Figuren ist die gesuchte?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Lösung: Wird das große Quadrat in vier gleich große Teile geteilt, dann besitzt jedes der vier kleinen Quadrate je ¼ des Flächeninhalts des großen Quadrates (siehe Bild 1). Wird ein kleines Quadrat durch die Diagonale in zwei gleich große Dreiecke geteilt, beträgt der Flächeninhalt jedes der Dreiecke 1/8 des Flächeninhalts des gegebenen Quadrats (Bild 2), die richtige Lösung ist **D**.

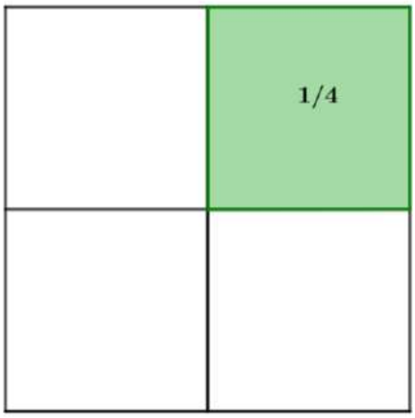


Bild 1

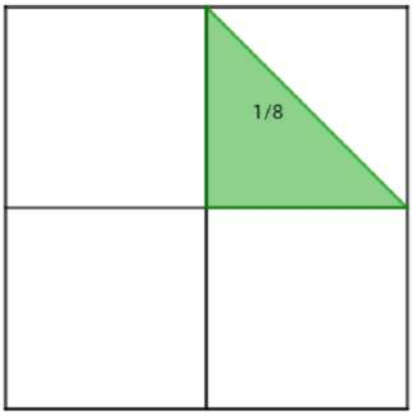


Bild 2

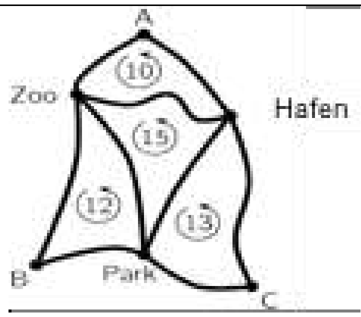
– 4 Punkte Beispiele –

9. Auf einem Papierstreifen steht die Zahl 5021972970. Julian zerschneidet den Streifen zweimal so, dass er drei Zettel mit je einer Zahl erhält. Welche ist die kleinste Summe, die er bei Addition der drei Zahlen auf den drei Zetteln erhalten kann?

(A) 3244 **(B)** 3444 (C) 5172 (D) 5217 (E) 5444

Lösung: Die vierstellige Zahl, die wir verwenden sollen, soll so klein wie möglich sein.
Deshalb 502 + 1972 + 970 = 3444

10. Auf dem Plan sieht man sechs Busstationen. Der Rundkurs A – Zoo – Hafen – A ist 10 km lang. Der Rundkurs B – Park – Zoo – B ist 12 km lang. Der Rundkurs C – Hafen – Park – C ist 13 km lang. Der Rundkurs Zoo – Park – Hafen - Zoo ist 15 km lang.



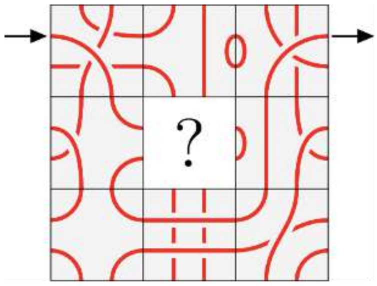
Wie lange ist die äußere Rundstrecke A – Zoo – B –Park – C – Hafen - A?

(A) 18 km (B) 20 km (C) 25 km (D) 35 km (E) 50 km

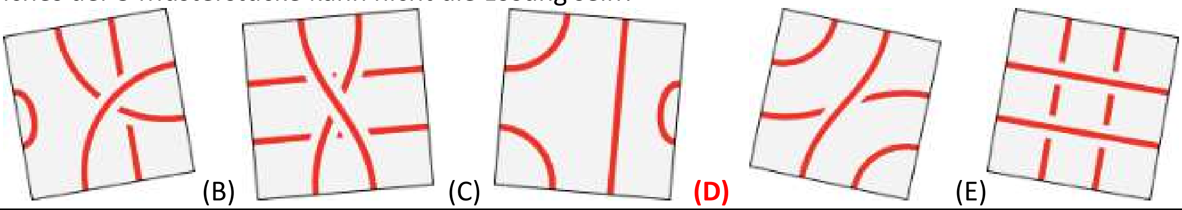
Lösung: Addiert man alle Längen der beschriebenen Rundkurse von A, B und C, erhält man die Gesamtlänge des äußeren Weges und des inneren Weges. Subtrahiert man danach die Länge des inneren Rundkurses (Zoo – Park – Hafen – Zoo), erhält man die gewünschte Länge. 10 + 12 + 13 – 15 = 20 km.

11. Eine Linie des dargestellten Musters beginnt beim linken Pfeil und endet, wenn man ihrem Verlauf folgt, beim rechten Pfeil. Ein Stück des Musters fehlt.

Welches der 5 Musterstücke passt nicht?



Welches der 5 Musterstücke kann nicht die Lösung sein?

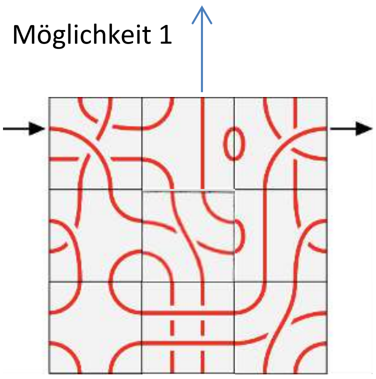


(A) (B) (C) (D) (E)

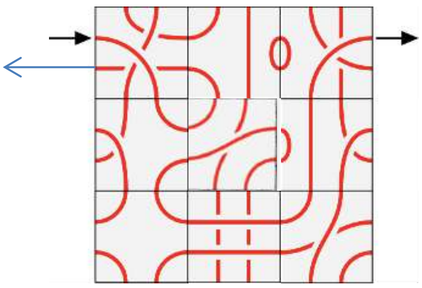
Lösung: Das Musterstück **D** führt nicht zum vorgegebenen Pfeil.

Im Folgenden werden die vier Möglichkeiten der Positionen des Teiles D im Muster dargestellt. Folgt man der roten Linie vom linken Pfeil, sieht man, dass keine der vier Möglichkeiten uns zu unsrem gewünschten Pfeil auf der rechten Seite führt.

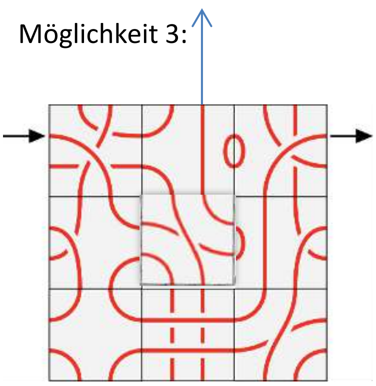
Möglichkeit 1



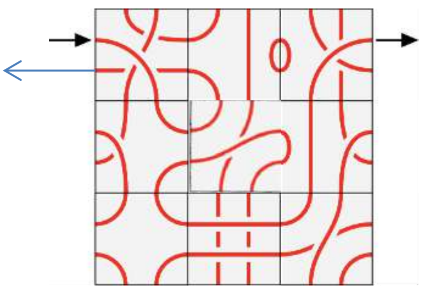
Möglichkeit 2:



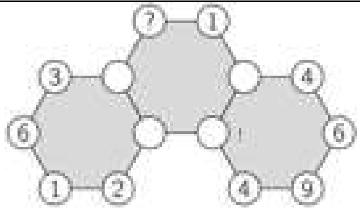
Möglichkeit 3:



Möglichkeit 4:



12. Die Zeichnung zeigt drei miteinander verbundene Sechsecke. Bei allen Eckpunkten wurden Zahlen geschrieben, jedoch sind einige Zahlen nicht sichtbar. Bei jedem Sechseck beträgt die Summe der sechs Zahlen 30. Welche Zahl steht in der Ecke mit dem Fragezeichen?



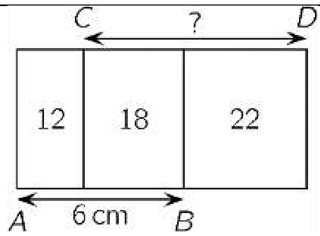
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Die Summe der sichtbaren Zahlen im linken Sechseck beträgt: 3 + 6 + 1 + 2 = 12. Das bedeutet, dass die Summe der beiden Zahlen, die nicht zu sehen sind, 30 – 12 = 18 beträgt. Die Summe der sichtbaren Zahlen im rechten Sechseck beträgt: 4 + 6 + 9 + 4 = 23. Die Summe der beiden nicht sichtbaren Zahlen beträgt: 30 – 23 = 7. Da die Summe aller sechs Ecken in jedem Sechseck 30 betragen soll, ergibt sich folgende Berechnung:

18 + 7 + 1 + ? = 30, und die gesuchte Zahl, die anstelle des Fragezeichens kann durch 30 – 26 = 4 errechnet werden.

B ist die richtige Lösung.

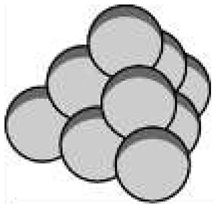
13. Drei Rechtecke mit der gleichen Länge werden wie gezeigt angeordnet. Die Zahlen in den Rechtecken stehen für die Maßzahl des jeweiligen Flächeninhalts in cm^2.
Wenn die Strecke AB 6 cm lang ist, wie lang ist dann die Strecke CD?

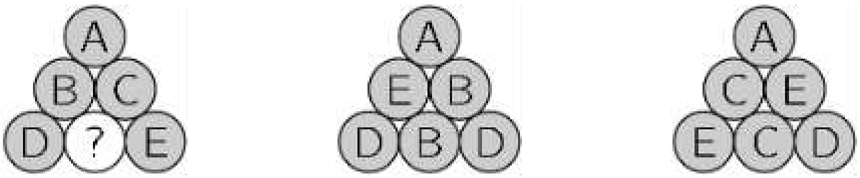


(A) 7 cm (B) 7,5 cm (C) 8 cm (D) 8,2 cm (E) 8,5 cm

Lösung: Der Flächeninhalt des Rechtecks mir der Länge AB beträgt: 12 + 18 = 30 cm^2. Die zugehörige Breite kann durch 30 / 6 = 5 cm errechnet werden. Der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Seitenlänge CD beträgt 18 + 22 = 40 cm^2. Beide Rechtecke haben die Breite 5 cm, somit kann die Länge CD durch 40/ 5 = 8 cm berechnet werden. Lösung: **C.**

14. Eine dreiseitige Pyramide wird mit 10 gleich großen Kugeln gebaut (siehe Abbildung rechts). Auf jede der kleinen Kugeln wird genau einer der Buchstaben A, B, C, D oder E geschrieben. Jeder Buchstabe wird genau zweimal verwendet. Drei der vier Flächen der Pyramide sehen wie folgt aus:

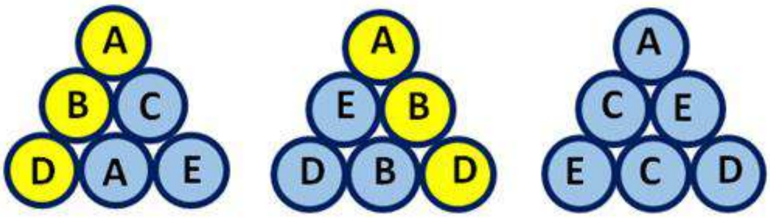




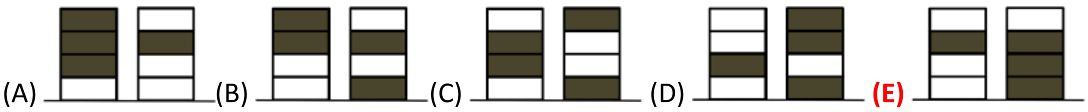
Welcher Buchstabe steht auf der Kugel mit dem Fragezeichen?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

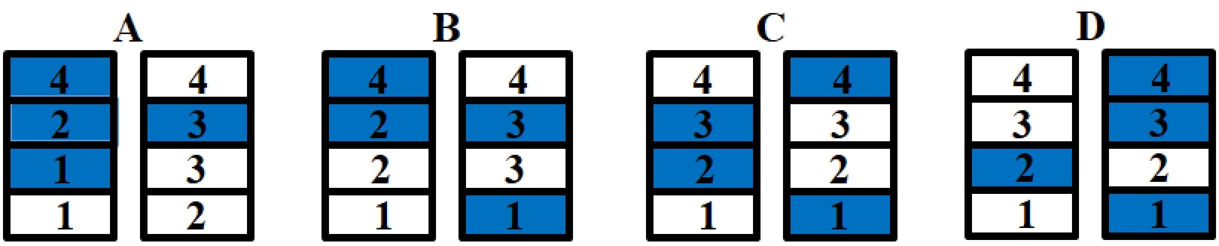
Lösung: Die Kugel an der Spitze mit dem Buchstaben A der Pyramide wird in allen drei Seitenflächen gezeigt. Da jeder der Buchstaben A, B, C, D und E genau zweimal verwendet wird, und der Buchstabe A nicht mehr auf einer der Seitenflächen zu sehen ist, muss der Buchstabe A auf der Kugel mit dem Fragezeichen stehen. In den folgenden Abbildungen werden die drei Seitenflächen nochmals dargestellt. Die gelben Kugeln mit den Buchstaben A, B und D bilden eine Kante der Pyramide, deshalb müssen auf beiden Kanten dieselben Buchstaben zu sehen sein.



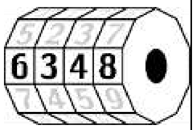
15. Ronja hat vier helle und Wanja hat vier dunkle Spielsteine. Abwechselnd legen sie ihre Steine und erzeugen so zwei Stapel. Ronja legt den ersten Spielstein. Welches Stapelpaar kann nicht ihr Ergebnis sein?



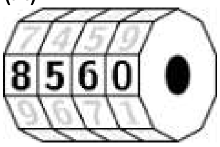
Lösung: Ronja beginnt und legt ihren ersten Spielstein. Da Wanja die die dunklen Spielsteine legt, und als letzte ihren Spielstein auf einen Stapel legen muss, muss einer der beiden Spielsteine ganz oben ein dunkler Spielstein sein. Bei der Lösung **E** sind jedoch beide Spielsteine weiß, somit kann E nicht das Ergebnis sein. Die übrigen Stapelpaare sind mögliche Lösungen. In der folgenden Graphik kannst du mögliche Spielvarianten nachvollziehen. Ronjas Spielsteine sind weiß, und ihre vier Spielzüge werden mit 1 bis 4 dargestellt, Wanjas Spielzüge werden mit den dunklen Spielsteinen dargestellt. Nur bei der Lösung **E** wäre Wanja nicht die letzte, die ihren Spielstein auf einen der beiden Stapel legt.

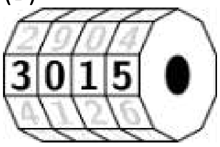


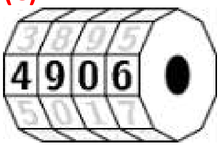
16. Philipp sperrt sein Fahrrad mit einem vierstelligen drehbaren Fahrradschloss ab. Auf jedem dieser Räder gibt es die Ziffern von 0 bis 9. Jetzt zeigt sein Schloss die Kombination 6348 (siehe Abbildung rechts). Er dreht jedes Rad in die gleiche Richtung und gleich weit.

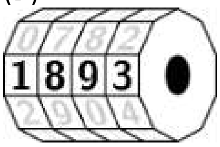


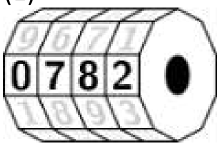
Welche der angezeigten Zahlenkombinationen kann sicher nicht der Code von Philipps Fahrradschloss sein?

(A)


(B)


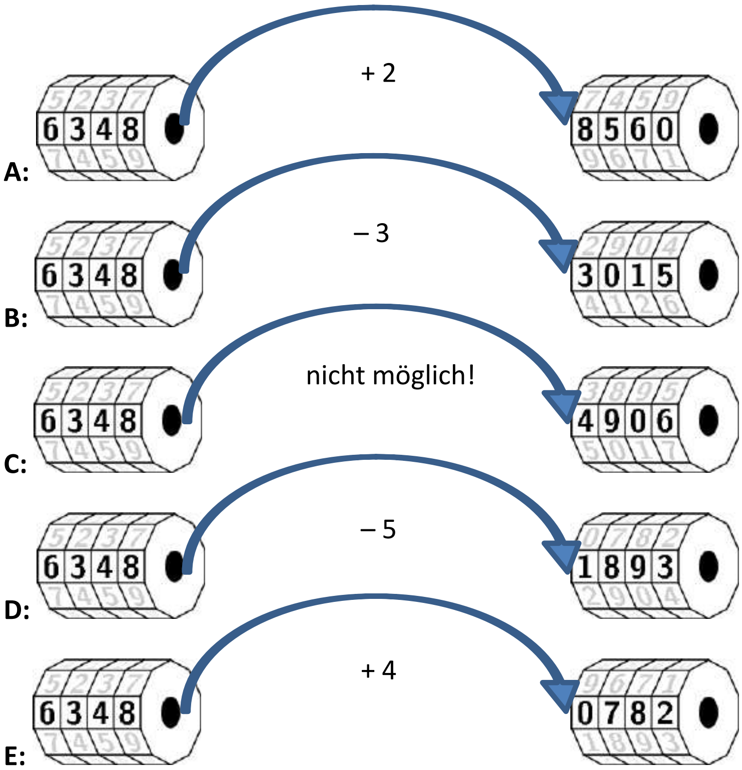
(C)


(D)


(E)


Lösung: Philipp hat die Möglichkeit die Ziffern in beide Richtungen zu drehen. Er muss aber jede Ziffer dann gleich weit drehen. Man kann bei A zum Beispiel zu jeder Zahl 2 addieren, dann erhält man die rechte Zifferenkombination. Richtige Ergebnisse beim Addieren oder Subtrahieren einer Zahl liefern auch die Zahlenkombinationen bei B, D und E.

Nur bei C funktioniert das Addieren oder Subtrahieren mit einer bestimmten Zahl nicht, deshalb kann Philipp diese Zahlenkombination nicht erreichen. Lösung: **C**



17. In einer Kiste befinden sich 20 Äpfel und 20 Birnen. Carl nimmt ohne hinzusehen 20 Früchte aus der Kiste. Danach nimmt Luca die restlichen 20 Früchte.

Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?

(A) Carl hat zumindest eine Birne.
(B) Carl hat gleich viele Äpfel und Birnen.
(C) Carl hat genau so viele Äpfel wie Luca.
(D) Carl hat genau so viele Birnen wie Luca Äpfel hat.
(E) Carl hat genau so viele Birnen wie Luca.

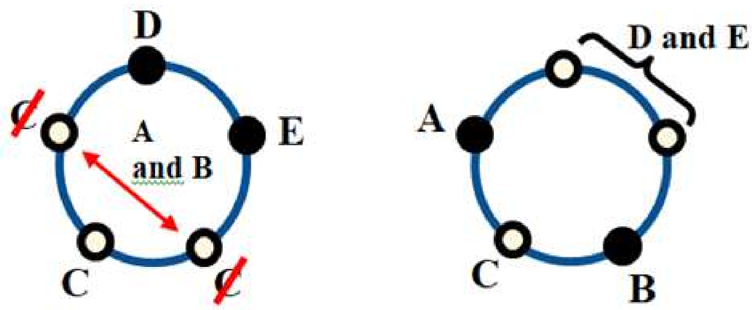
Lösung: Carl und Luca besitzen gemeinsam 20 Äpfel. Carl und Luca besitzen auch gemeinsam 20 Birnen. Das bedeutet, dass Carl genauso viele Birnen wie Luca Äpfel bekam. Die anderen Antworten sind nicht immer richtig.

18. Ann, Bob, Carina, Daniel und Ed sitzen an einem runden Tisch. Daniel sitzt neben Ed, Ann sitzt nicht neben Bob, und Bob sitzt nicht neben Daniel.

Wer sitzt neben Carina?

(A) Ann und Bob (B) Bob und Daniel (C) Daniel und Ed (D) Ed und Ann (E) nicht bestimmbar

Lösung: Daniel sitzt neben Ed, Ann nicht neben Bob und Bob nicht neben Daniel. Berücksichtigt man diese Bedingungen ergibt sich eine Sitzordnung, so wie im Bild zu sehen, und neben Carina sitzen Ann und Bob.
Daniel und Ed sitzen nebeneinander, so wie es in der Zeichnung zu sehen ist. Carina kann weder neben Daniel noch neben Ed sitzen, denn bleiben nur zwei Plätze für Ann und Bob, die nebeneinander sitzen müssten, jedoch sitzt Ann laut Voraussetzung nicht neben Bob, deshalb muss Carina den Platz nehmen, der jeweils einen freien Platz für Ann oder Bob bietet. Carina sitzt also zwischen Ann und Bob, und die Lösung **A** ist richtig.



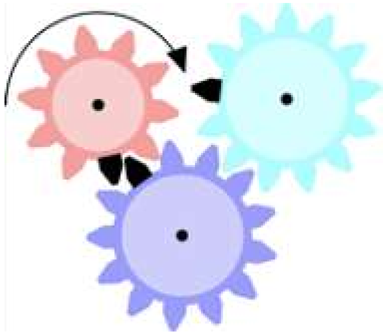
19. Maurice fragt einen Koch um das Rezept von Muffins.
Für 100 Stück braucht er: 25 Eier, 4 l Milch, 5 kg Mehl und 1 kg Butter.
Maurice hat 6 Eier, 500 ml Milch, 400 g Mehl und 200 g Butter zur Verfügung.

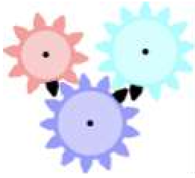
Wie viel Stück kann er höchstens zubereiten, wenn er sich genau an das Rezept hält?
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 15

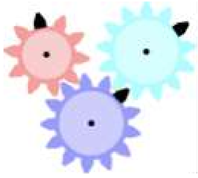
Lösung: Vergleicht man die Zutaten, die Maurice im Verhältnis hat, um 100 Muffins zu backen, ergeben sich folgende Verhältnisse: Eier: $\frac{6}{25} = \frac{24}{100}$, Milch: $\frac{0{,}5}{4} = \frac{12{,}5}{100}$, Mehl: $\frac{0{,}4}{5} = \frac{8}{100}$, und Butter: $\frac{0{,}1}{1} = \frac{20}{100}$. Daraus kann man erkennen, dass Maurice nur Mehl für 8 Muffins zu Hause hat und Lösung **B** ist richtig.

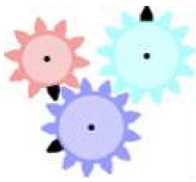
20. Das Bild zeigt drei Zahnräder mit jeweils einem schwarzen Zahn (siehe Abbildung rechts).
Das kleine Zahnrad wird einmal vollständig im Uhrzeigersinn gedreht.

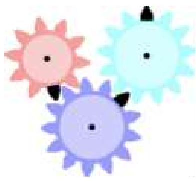
Welche Abbildung zeigt die Position der schwarzen Zähne nach einer vollen Umdrehung des kleinen Zahnrades?

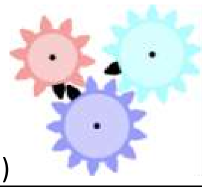



(A)


(B)


(C)


(D)


(E)

Lösung: Der schwarze Zahn des kleinen Zahnrads bewegt sich bei einer vollständigen Umdrehung genau um 10 Positionen im Uhrzeigersinn weiter. Daher bewegen sich auch die schwarzen Zähne der beiden anderen Zahnräder um 10 Positionen weiter, das unterste Zahnrad gegen den Uhrzeigersinn, das rechte obere Zahnrad im Uhrzeigersinn. Zählt man nun die 10 Positionen der beiden anderen Zahnräder in Hinblick auf ihre Bewegungsrichtung, ergibt sich die gesuchte Position **A**.

21. Ein Apfel und eine Orange wiegen genau so viel wie eine Birne und ein Pfirsich. Ein Apfel und eine Birne wiegen weniger als eine Orange und ein Pfirsich. Eine Birne und eine Orange wiegen weniger als ein Apfel und ein Pfirsich.

Welche Frucht ist am schwersten?
(A) der Apfel (B) die Orange (C) der Pfirsich (D) die Birne (E) nicht lösbar

Lösung: Die Lösung lässt sich durch Einbeziehung der Voraussetzungen durch mehrere Gleichungen lösen. Lösung: **C**

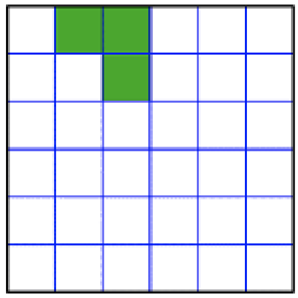
$\boldsymbol{Apfel + Orange = Birne + Pfirsich}$
$\boldsymbol{Apfel + Birne \ < \ Orange + Pfirsich}$ Addition der beiden Gleichungen ergibt:
$\boldsymbol{2\,Äpfel + Orange + Birne < Birne + Orange + 2\,Pfirsiche}$
Da die Orangen und die Birnen gleich schwer sind, können sie auf beiden Seiten der Ungleichung entfernt werden, und man erhält die Gleichung:
$2\,Äpfel < 2\,Pfirsiche$ Jetzt können beiden Seiten durch 2 dividiert werden und liefert die Beziehung zwischen Apfel und Pfirsich:
$\boldsymbol{1\,Apfel < 1\,Pfirsich}$

$\boldsymbol{Birne \ + Orange \ < \ Apfel + Pfirsich}$
$\boldsymbol{Apfel + Orange = Birne + Pfirsich}$ Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt
$\boldsymbol{Birne - Apfel < Apfel - Birne}$
Da die Subtraktion Birne – Apfel kleiner als Apfel – Birne ergibt, ist die Birne leichter als der Apfel.
$\boldsymbol{1\,Birne < 1\,Apfel}$

$\boldsymbol{Apfel + Birne < Orange + Pfirsich}$
$\boldsymbol{Apfel + Orange = Birne + Pfirsich}$ Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt
$\boldsymbol{Birne - Orange < Orange - Birne}$
Da die Subtraktion Birne – Orange kleiner als Orange – Birne ergibt, ist die Birne kleiner als die Orange
$\boldsymbol{1\,Birne < 1\,Orange}$

$$\boldsymbol{Apfel + Orange = Birne + Pfirsich}$$
$$\boldsymbol{Birne + Orange < Apfel + Pfirsich}$$ Addition der beiden Gleichungen ergibt:
$$\boldsymbol{Apfel + Birne + 2\,Orangen < Birne + Apfel + 2\,Pfirsiche}$$
Da die Äpfel und die Birnen gleich schwer sind, können sie auf beiden Seiten der Ungleichung entfernt werden, und man erhält die Gleichung:
$2\,Orangen < 2\,Pfirsiche$ Jetzt können beiden Seiten durch 2 dividiert werden und liefert die Beziehung zwischen Apfel und Pfirsich:
$$\boldsymbol{1\,Orange < 1\,Pfirsich}$$
Für unsere Früchte ergibt sich folgende Ungleichungsketten:
$$\boldsymbol{Birne < Apfel < Pfirsich}$$
$$\boldsymbol{Birne < Orange < Pfirsich}$$

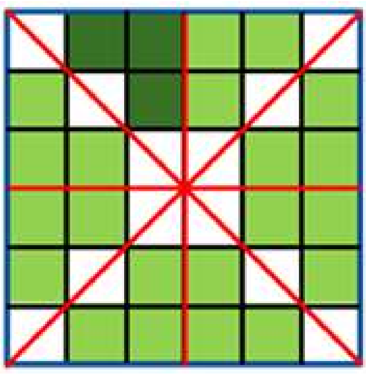
22. Im großen Quadrat sind drei Felder gefärbt (siehe Abbildung). Durch zusätzliches Färben von weiteren Feldern soll insgesamt ein großes Muster aus 36 Feldern entstehen, das vier Symmetrieachsen hat.



Wie viele Felder müssen noch mindestens gefärbt werden, damit so ein Muster entsteht?

(A) 1 (B) 9 (C) 12 (D) 13 **(E)** 21

Lösung: In der folgenden Zeichnung sieht man das Quadrat mit den 36 Feldern, die vier Symmetrieachsen und die gegebenen drei Felder, wie in der Angabe, dunkelgrün eingezeichnet. Um innerhalb der 36 Felder ein Muster mit genau vier Symmetrieachsen zu erhalten, müssen weitere 21 kleine Felder gefärbt werden. Diese sind hellgrün eingefärbt und liefern ein Muster mit vier Symmetrieachsen.
Lösung: **E**

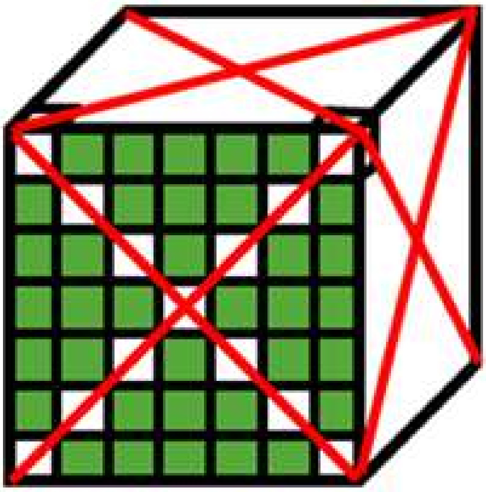


23. Drei Piraten werden gefragt, wie viele Münzen und Diamanten ihr Freund Graubart hat. Ihre Antworten sind:
Pirat 1: „Graubart hat genau 8 Münzen. Er hat genau 6 Diamanten."
Pirat 2: „Graubart hat genau 7 Münzen. Er hat genau 4 Diamanten."
Pirat 3: „Graubart hat genau 7 Münzen. Er hat genau 7 Diamanten."
Jeder Pirat sagt einen wahren und einen falschen Satz. Wie viele Münzen und Diamanten hat Graubart insgesamt?
(A) 11 (B) 12 **(C)** 13 (D) 14 (E) 15

Lösung: Wenn beim zweiten und dritten Pirat der erste Satz falsch wäre, dann müsste der zweite Satz wahr sein, das geht aber nicht, da beide eine verschieden große Anzahl von Diamanten als Antwort geben. Somit ist der erste Satz wahr, und Graubart besitzt genau 7 Münzen. Dann muss aber der erste Satz des ersten Piraten falsch sein, da er ja 8 Münzen angegeben hat, damit ist sein zweiter Satz wahr, und Graubart hat genau 6 Diamanten. Graubart hat somit genau 7 Münzen und genau 6 Diamanten, das sind also 13 Stück insgesamt, Lösung **C.**

24. Ein Würfel hat die Kantenlänge 7 cm. Auf jeder seiner Seitenflächen werden die beiden Diagonalen rot eingezeichnet. Danach wird dieser Würfel in kleine Würfel mit der Kantenlänge 1 cm zerschnitten. Auf wie vielen der kleinen Würfel ist auf mindestens einer Seitenfläche mindestens eine Diagonale eingezeichnet?
(A) 54 (B) 62 (C) 70 (D) 78 (E) 86

Lösung: Da der Würfel die Kantenlänge 7 cm besitzt, hat jede Seitenfläche hat 7 + 7 – 1 = 13 rote kleine Linien, dargestellt durch die weißen kleinen Quadrate (- 1 weil es beim kleine weißen Quadrat in der Mitte zwei kleine rote Linien gibt). Ein Würfel hat 6 Flächen, somit gibt es 13 · 6 - 2 · 8 = 62 kleine rote Linien. Die kleinen Quadrate in den 8 Eckpunkten haben 3 Linien, deshalb müssen von jedem Eckpunkt 2 Linien abgezogen werden. Lösung **B**



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2021
18. 3. 2021

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7. – 8.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. - 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. - 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

pwc

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

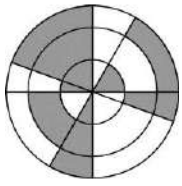
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

- 3 Punkte Beispiele -

1. Welches der folgenden Symbole für Sternzeichen hat eine Symmetrieachse?

(A)  Schütze (B)  Skorpion (C)  Löwe (D)  Wassermann (E)  Widder

2. Die abgebildete Figur besteht aus 3 Kreisen mit gemeinsamem Mittelpunkt. Diese werden von 4 Durchmessern dieser Kreise geschnitten.
Wie viel Prozent der Gesamtfläche der Figur sind grau gefärbt?



(A) 30 % (B) 35 % (C) 40 % (D) 45 % (E) 50 %

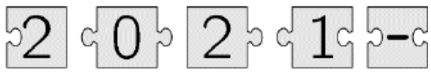
3. Welches Ergebnis liefert die folgende Rechnung: $\frac{20 \cdot 21}{2+0+2+1}$?

(A) 42 (B) 64 (C) 80 (D) 84 (E) 105

4. Wie viele vierstellige Zahlen haben folgende Eigenschaft: Die Ziffern sind aufeinanderfolgend und von links nach rechts aufsteigend.

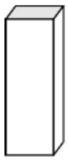
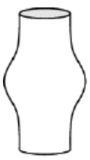
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

5. Wenn man das Puzzle richtig zusammensetzt, erhält man ein Rechteck, auf dem eine Rechnung steht. Wie lautet das Ergebnis dieser Rechnung?



(A) -100 (B) -8 (C) -1 (D) 199 (E) 208

6. Die folgenden fünf Vasen haben dieselbe Höhe und fassen jeweils einen Liter. In jede Vase wird ein halber Liter Wasser gefüllt. In welcher Vase steht das Wasser am höchsten?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Lukas addierte die beiden zweistelligen Zahlen und erhielt die korrekte Lösung 137.
Welches Ergebnis wird Lukas bei der Addition der beiden vierstelligen Zahlen erhalten?

AB	ABAB
+ CD	+ CDCD
137	?

(A) 13 737 (B) 13 837 (C) 14 747 (D) 23 737 (E) 137 137

8. 24 Kinder spielen Räuber und Polizist. Es gibt 5-mal so viele Räuber wie Polizisten. Wie viele Polizisten gibt es?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

9. Ein Fahrradschloss besteht aus vier Rädern, die mit den Ziffern von 0 bis 9 beschriftet sind. Derzeit ist das Fahrrad abgesperrt, und der rechts abgebildete Code ist zu sehen.
Wenn man jedes der Räder um 180° dreht, lässt sich das Schloss öffnen.
Mit welcher Zahlenkombination lässt sich das Schloss öffnen?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

10. Bernd ist 5 cm größer als Anton, aber 10 cm kleiner als Chris. David ist 10 cm größer als Chris, aber 5 cm kleiner als Emil. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) Anton und Emil sind gleich groß.
(B) Anton ist 10 cm größer als Emil.
(C) Anton ist 10 cm kleiner als Emil.
(D) Anton ist 30 cm größer als Emil.
(E) Anton ist 30 cm kleiner als Emil.

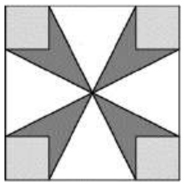
- 4 Punkte Beispiele -

11. Eine rechteckige Schokoladentafel besteht aus gleich großen quadratischen Stückchen. Nick bricht zwei ganze Reihen ab und isst alle 12 quadratischen Stückchen, die er erhält. Jan bricht vom Rest eine ganze Reihe ab und isst die 9 Stückchen, die er erhält. Wie viele quadratische Stückchen bleiben noch übrig?

(A) 72 (B) 63 (C) 54 (D) 45 (E) 36

12. Ein Gefäß wiegt 560 g, wenn es zu einem Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Dasselbe Gefäß wiegt 740 g, wenn es zu vier Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Wie viel wiegt das leere Gefäß?

(A) 60 g (B) 112 g (C) 180 g (D) 300 g (E) 500 g



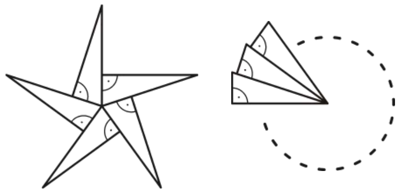
13. Der Flächeninhalt des großen Quadrats beträgt 16 cm^2. Die Fläche der vier kleinen hellgrauen Quadrate ist jeweils 1 cm^2. Welchen Flächeninhalt hat die dunkelgraue Blume?

(A) 3 cm² (B) $\frac{7}{2}$ cm² (C) 4 cm² (D) $\frac{11}{2}$ cm² (E) 6 cm²

14. Costa stellt in seinem Garten eine Bretterwand auf. Er verwendet dafür 9 Bretter, die jeweils 40 cm breit sind. Je zwei benachbarte Bretter überlappen sich gleich weit (siehe Abbildung). Die Bretterwand ist insgesamt 3,4 m breit. Um wie viel cm überlappen sich je zwei benachbarte Bretter?

(A) 2,4 cm (B) 2,5 cm (C) 3 cm (D) 4,8 cm (E) 5 cm

15. Aus identischen rechtwinkligen Dreiecken werden Sterne gebastelt. Die Dreiecke liegen immer lückenlos und nicht überlappend aneinander. Legt man 5 dieser Dreiecke an ihren größeren spitzen Winkeln zusammen, erhält man den rechts abgebildeten Stern. Legt man die Dreiecke an ihren kleineren spitzen Winkeln zusammen, erhält man einen zweiten Stern – in der Abbildung siehst du so einen begonnenen Stern. Wie viele Dreiecke benötigt man für den gesamten zweiten Stern?

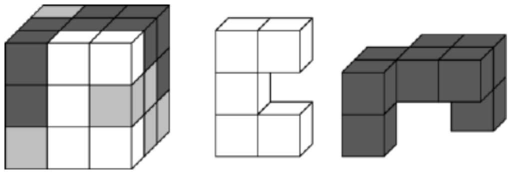


(A) 10 (B) 12 (C) 18 (D) 20 (E) 24

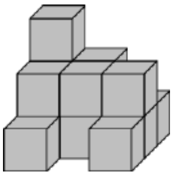
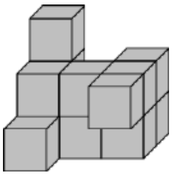
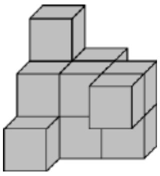
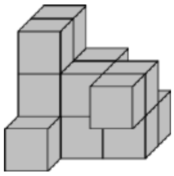
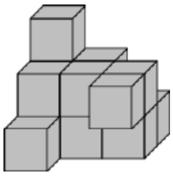
16. Bei einem Quiz gibt es 10 Fragen. Für eine richtige Antwort bekommt man 8 Punkte dazu. Für eine falsche Antwort werden 4 Punkte abgezogen. Fragen, die nicht beantwortet werden, werden mit 0 Punkten bewertet. Eric nimmt an diesem Quiz teil und erreicht 60 Punkte. Wie viele Fragen hat er nicht beantwortet?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

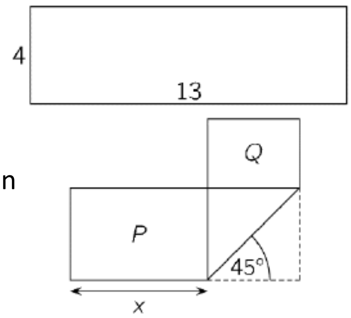
17. Aus kleinen 1x1x1-Würfeln werden drei Bausteine (weiß, schwarz, grau) gebildet. Sie lassen sich zum abgebildeten 3x3x3-Würfel zusammensetzen. Der weiße und der schwarze Baustein sind rechts davon abgebildet.



Welcher der fünf Bausteine ist der passende graue Teil?


(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

18. Markus faltet ein rechteckiges Blatt Papier, das 13 cm lang und 4 cm breit ist (siehe Abbildung). Es entstehen zwei kleine Rechtecke, P und Q, wobei der Flächeninhalt des Rechtecks P doppelt so groß wie jener von Q ist. Wie lang ist die Strecke x?



(A) 5 cm (B) 5,5 cm (C) 6 cm (D) 6,5 cm (E) $4\sqrt{2}$ cm

19. In einer Schüssel befinden sich doppelt so viele Äpfel wie Birnen. Christy und Lily teilen sich das Obst so, dass Christy doppelt so viele Früchte wie Lily erhält. Eine dieser Aussagen ist immer richtig. Welche?

(A) Christy bekommt zumindest eine Birne.
(B) Christy bekommt doppelt so viele Äpfel wie Birnen.
(C) Christy bekommt doppelt so viele Äpfel wie Lily.
(D) Christy bekommt so viele Äpfel wie Lily Birnen.
(E) Christy bekommt genauso viele Birnen wie Lily Äpfel.

20. Ein Fußball besteht aus weißen Sechsecken und schwarzen Fünfecken (siehe Abbildung). Der Fußball hat 12 Fünfecke. Wie viele Sechsecke hat er?

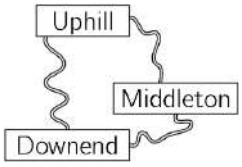
(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

- 5 Punkte Beispiele -

21. In einem bestimmten Bruch mit positivem Zähler und positivem Nenner wird der Zähler um 40 % vergrößert. Um wieviel Prozent muss der Nenner verkleinert werden damit der neue Bruch doppelt so groß wie der ursprüngliche Bruch wird?

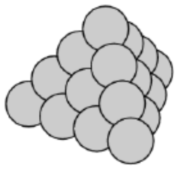
(A) 10 % (B) 20 % (C) 30 % (D) 40 % (E) 50 %

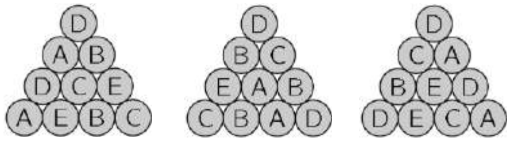
22. Drei Dörfer sind mit Straßen verbunden (siehe Abbildung). Fährt man von Downend nach Uphill mit dem Umweg über Middleton, so fährt man um 1 km weiter als auf der direkten Verbindung. Fährt man von Downend nach Middleton mit dem Umweg über Uphill, so fährt man um 5 km weiter als auf der direkten Verbindung. Fährt man von Uphill nach Middleton mit dem Umweg über Downend, so fährt man um 7 km weiter als auf der direkten Verbindung. Welche Länge besitzt die kürzeste der drei direkten Verbindungen?



(A) 1 km (B) 2 km (C) 3 km (D) 4 km (E) 5 km

23. Mit 20 gleich großen Kugeln wird eine dreiseitige Pyramide gebaut. (siehe Abbildung). Auf jede der kleinen Kugeln wird genau einer der Buchstaben A, B, C, D oder E geschrieben. Jeder Buchstabe wird genau viermal verwendet. Drei der vier Flächen der Pyramide sind abgebildet. Welcher Buchstabe steht auf der Kugel in der Mitte der nicht abgebildeten Fläche?





(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

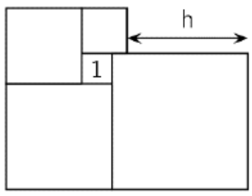
24. Die 6-ziffrige Zahl 1ABCDE wird mit 3 multipliziert und ergibt die 6-ziffrige Zahl ABCDE1.
Wie groß ist die Ziffernsumme des Ergebnisses?

(A) 24 (B) 27 (C) 30 (D) 33 (E) 36

25. An einem Mathematik-Bewerb haben weniger als 30 Schüler teilgenommen. 4 Beispiele waren zu lösen. $\frac{1}{3}$ der Teilnehmer konnte genau 1 Beispiel nicht lösen. $\frac{1}{4}$ der Teilnehmer konnte genau 2 Beispiele nicht lösen. $\frac{1}{6}$ der Teilnehmer konnte genau 3 Beispiele nicht lösen. $\frac{1}{8}$ der Teilnehmer konnte kein Beispiel lösen.
Wie viele Teilnehmer konnten alle Beispiele lösen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

26. Fünf verschieden große Quadrate werden, so wie in der Abbildung zu sehen, angeordnet. Der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats beträgt 1 cm².
Welche Länge besitzt h?

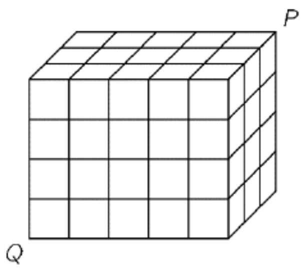


(A) 3 cm (B) 3,5 cm (C) 4 cm (D) 4,2 cm (E) 4,5 cm

27. 2021 Kängurus werden der Reihe nach aufgestellt und von 1 bis 2021 nummeriert. Jedes Känguru ist entweder rot, grau oder blau gefärbt. Bei drei beliebig aufeinanderfolgenden Kängurus kommen immer alle drei Farben vor. Bruce tippt auf die Farben einiger Kängurus und sagt: „Känguru 2 ist grau, Känguru 20 ist blau, Känguru 202 ist rot, Känguru 1002 ist blau und das letzte Känguru mit der Nummer 2021 ist grau.“ Bruce hat sich nur einmal geirrt. Bei welcher Nummer hat er sich geirrt?

(A) 2 (B) 20 (C) 202 (D) 1002 (E) 2021

28. Ein Quader mit den Maßen 3 x 4 x 5 besteht aus 60 kleinen Würfeln. Eine Termite frisst sich entlang der Raumdiagonale vom Eckpunkt P zum Eckpunkt Q. Diese Raumdiagonale hat mit keiner der Kanten der kleinen Würfel Schnittpunkte.
Durch wie viele kleine Würfel muss sich die Termite durchfressen?



(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

29. In einer Stadt leben 2021 Personen, davon sind 21 Ritter und die übrigen 2000 sind Schurken. Ritter sagen immer die Wahrheit und Schurken lügen immer. Ein Zauberer bildet aus 2020 von ihnen 1010 Paare. Jede Person eines Paares beschreibt die andere Person entweder als Ritter oder als Schurke. 2000 Personen werden als Ritter bezeichnet und 20 Personen als Schurken.
Wie viele Paare bestehen aus zwei Schurken?

(A) 980 (B) 985 (C) 990 (D) 995 (E) 1000

30. Bei einem Turnier mit sechs Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft ein Spiel. In jeder Runde werden drei Spiele gleichzeitig gespielt. Ein TV-Sender hat bereits entschieden, welche Spiele er in welcher Runde übertragen wird. Wir sehen die ausgewählten Spiele in der abgebildeten Tabelle.
In welcher Runde wird das Team D gegen das Team F spielen?

	im TV
Runde 1	**A-B**
Runde 2	**C-D**
Runde 3	**A-E**
Runde 4	**E-F**
Runde 5	**A-C**

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

– Lösungsvektor –

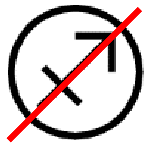
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	E	D	B	A	A	B	D	B	E	D	E	C	B	D	B	E	C	E	D	C	C	D	B	C	C	B	C	D	A

– 3 Punkte Beispiele –

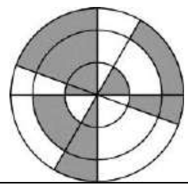
1. Welches der folgenden Symbole für Sternzeichen hat eine Symmetrieachse?

(A)  Schütze (B)  Skorpion (C)  Löwe (D)  Wassermann (E)  Widder

Symbol **A (Schütze)** hat eine Spiegelachse entlang des Schafts des Pfeils (rote Linie).

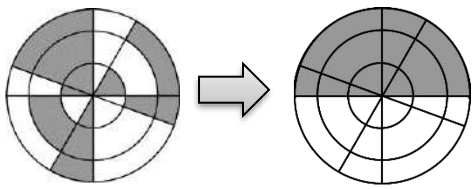


2. Die abgebildete Figur besteht aus 3 Kreisen mit gemeinsamem Mittelpunkt. Diese werden von 4 Durchmessern dieser Kreise geschnitten.
Wie viel Prozent der Gesamtfläche der Figur sind grau gefärbt?



(A) 30 % (B) 35 % (C) 40 % (D) 45 % (E) 50 %

Für jede grau gefärbte Fläche gibt es ein weißes Gegenstück. Es gibt also gleich viele graue wie weiße Flächen, sprich **50 %** ist grau gefärbt.



3. Welches Ergebnis liefert die folgende Rechnung: $\frac{20 \cdot 21}{2+0+2+1}$?

(A) 42 (B) 64 (C) 80 (D) 84 (E) 105

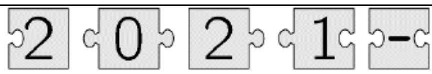
Der Nenner beträgt 2+0+2+1 = 5. Nun kann man kürzen: 20/5 = 4. Es bleibt 4 · 21 = **84**

4. Wie viele vierstellige Zahlen haben folgende Eigenschaft: Die Ziffern sind aufeinanderfolgend und von links nach rechts aufsteigend.

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

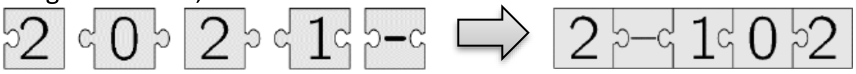
Es gibt 10 Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Eine mehrstellige Zahl kann nicht mit 0 beginnen, bleiben also die Ziffern 1 bis 9 als Anfangsziffern. 6 ist die höchste Anfangsziffer, bei der noch 3 weitere Ziffern für eine vierstellige Zahl übrigbleiben. Die Anfangsziffern können also nur von 1 bis 6 sein und die **6** Zahlen lauten: 1234, 2345, 3456, 4567, 5678, 6789.

5. Wenn man das Puzzle richtig zusammensetzt, erhält man ein Rechteck, auf dem eine Rechnung steht. Wie lautet das Ergebnis dieser Rechnung?

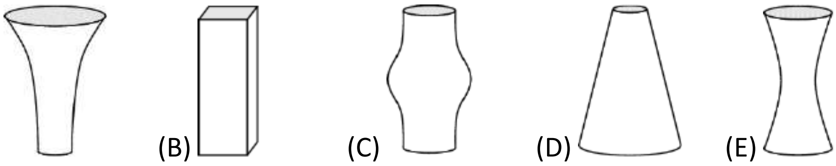


(A) −100 (B) −8 (C) −1 (D) 199 (E) 208

Setzt man das Puzzle richtig zusammen, erhält man 2 − 102 = −100



6. Die folgenden fünf Vasen haben dieselbe Höhe und fassen jeweils einen Liter. In jede Vase wird ein halber Liter Wasser gefüllt. In welcher Vase steht das Wasser am höchsten?



(A) (B) (C) (D) (E)

Die Vasen werden mit einem halben Liter gefüllt. Vasen B, C und E sind symmetrisch, deshalb muss in diesen Vasen das Wasser bis zur Hälfte stehen. Die Entscheidung fällt zwischen A und D. Da Vase A einen schmäleren, langen Hals hat, wird das Wasser über die Hälfte steigen. Vase D ist unten größer, das Wasser bleibt unter der Hälfte. In **Vase A** steht das Wasser also am höchsten.

7. Lukas addierte die beiden zweistelligen Zahlen und erhielt die korrekte Lösung 137. Welches Ergebnis wird Lukas bei der Addition der beiden vierstelligen Zahlen erhalten?

$$\begin{array}{r} AB \\ +\,CD \\ \hline 137 \end{array} \qquad \begin{array}{r} ABAB \\ +\,CDCD \\ \hline ? \end{array}$$

(A) 13 737 **(B)** 13 837 (C) 14 747 (D) 23 737 (E) 137 137

Wir können das Beispiel lösen, ohne Ziffern für die Buchstaben einzusetzen. Aufgrund der linken Addition wissen wir, dass AB+CD = 137. Für die Addition der Einer- und Zehnerstellen der vierstelligen Zahl erhält man also 137, die 1 ist weiterzuschreiben für die Hunderterstelle (in Grafik angedeutet). Auch für die Hunderter- und Tausenderstelle der vierstelligen Addition ergibt sich 137 und mit der weitergezählten 1, 137 + 1 = 138. Das Ergebnis ist also **13837**.

$$\begin{array}{r} AB\,AB \\ +\,CD\,CD \\ \hline ? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 137 \\ +\,137 \\ \hline 13837 \end{array}$$

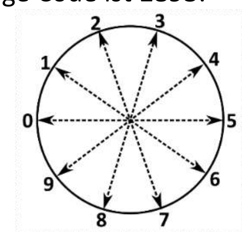
8. 24 Kinder spielen Räuber und Polizist. Es gibt 5-mal so viele Räuber wie Polizisten. Wie viele Polizisten gibt es?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 4 (E) 5

Die Anzahl der Räuber (R) und die Anzahl der Polizisten (P) ergibt zusammen 24 Kinder: R+P = 24. Es gibt 5-mal so viele Räuber wie Polizisten: 5 · P = R. Es folgt: 5 · P+P = 6 · P = 24. Daher gibt es also **4** Polizisten.

9. Ein Fahrradschloss besteht aus vier Rädern, die mit den Ziffern von 0 bis 9 beschriftet sind. Derzeit ist das Fahrrad abgesperrt, und der rechts abgebildete Code ist zu sehen. Wenn man jedes der Räder um 180° dreht, lässt sich das Schloss öffnen. Mit welcher Zahlenkombination lässt sich das Schloss öffnen?

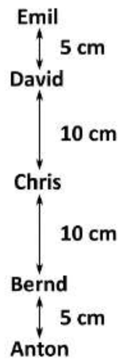
Die 10 Ziffern 0 bis 9 sind gleichmäßig auf einem Ring angeordnet (siehe Abbildung). Den richtigen Code kann man sich mit Hilfe dieser Grafik leicht überlegen, indem man schaut welche Zahlen gegenüberliegen, 1 gegenüber von 6, 8 gegenüber von 3, 9 gegenüber von 4 und 3 gegenüber von 8. Der richtige Code ist **1893**.
Weitere Überlegung: Eine 180° Drehung entspricht der Hälfte einer ganzen Kreisdrehung, die Ziffern werden zu den Ziffern auf der anderen Seite der eingezeichneten Pfeile. Eine halbe Kreisdrehung entspricht bei 10 Ziffern also einer Verschiebung des Schlosses um 5 Ziffern.
6 − 5 = 1; 3 + 5 = 8; 4 + 5 = 9; 8 − 5 = 3. Der richtige Code ist **1893**.



10. Bernd ist 5 cm größer als Anton, aber 10 cm kleiner als Chris. David ist 10 cm größer als Chris, aber 5 cm kleiner als Emil. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) Anton und Emil sind gleich groß. (B) Anton ist 10 cm größer als Emil.
(C) Anton ist 10 cm kleiner als Emil. (D) Anton ist 30 cm größer als Emil.
(E) Anton ist 30 cm kleiner als Emil.

Bernd ist größer als Anton: A<B. Bernd ist kleiner als Chris: A<B<C. David ist größer als Chris: A<B<C<D, David ist kleiner als Emil: A<B<C<D<E. Die gesamte Größendifferenz beträgt 5 + 10 + 10 + 5 = 30. Anton muss also **30 cm kleiner** sein als Emil.

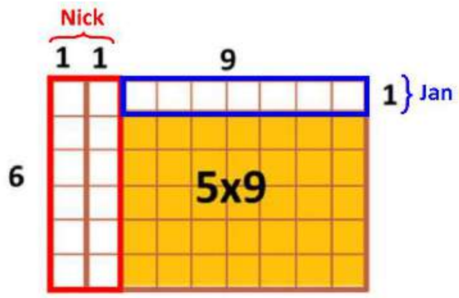


– 4 Punkte Beispiele –

11. Eine rechteckige Schokoladentafel besteht aus gleich großen quadratischen Stückchen. Nick bricht zwei ganze Reihen ab und isst alle 12 quadratischen Stückchen, die er erhält. Jan bricht vom Rest eine ganze Reihe ab und isst die 9 Stückchen, die er erhält. Wie viele quadratische Stückchen bleiben noch übrig?

(A) 72 (B) 63 (C) 54 **(D)** 45 (E) 36

Die Grafik verdeutlicht die einzelnen Schritte: Da Nick 12 Stückchen erhält, wenn er 2 ganze Reihen abbricht, muss eine dieser Reihen 6 Stückchen lang sein (rot). Jan bricht vom Rest der Tafel eine ganze Reihe ab, die allerdings 9 Stückchen lang ist (also länger als eine Reihe von Nick, blau). Jan kann also nicht von der gleichen Seite abgebrochen haben wie Nick, sondern hat von der zweiten Seite der Tafel abgebrochen. Die verbliebene Tafel muss so lang sein wie Jans Reihe, und um eine Reihe weniger breit als Nicks Reihe: 9 Stückchen · 5 Stückchen = **45**.

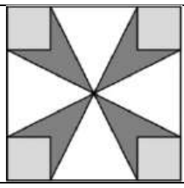


12. Ein Gefäß wiegt 560 g, wenn es zu einem Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Dasselbe Gefäß wiegt 740 g, wenn es zu vier Fünftel mit Wasser gefüllt ist. Wie viel wiegt das leere Gefäß?

(A) 60 g (B) 112 g (C) 180 g (D) 300 g **(E)** 500 g

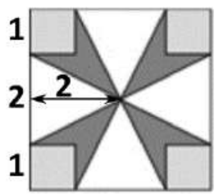
Der Unterschied zwischen dem ersten Füllstand und dem zweiten Füllstand beträgt 4/5 − 1/5 = 3/5. Eine 3/5 Füllung Wasser muss also 740 − 560 = 180 g wiegen. Eine 1/5 Füllung Wasser muss daher 180/3 = 60 g wiegen. Das leere Gefäß wiegt also 560 − 60 = **500 g**.

13. Der Flächeninhalt des großen Quadrats beträgt 16 cm^2. Die Fläche der vier kleinen hellgrauen Quadrate ist jeweils 1 cm^2. Welchen Flächeninhalt hat die dunkelgraue Blume?



(A) 3 cm^2 (B) $\frac{7}{2}$ cm^2 **(C)** 4 cm^2 (D) $\frac{11}{2}$ cm^2 (E) 6 cm^2

Da der Flächeninhalt des großen Quadrats 16 cm^2 beträgt, muss eine Seite des große Quadrats 4 cm lang sein. Da der Flächeninhalt der kleinen Quadrate jeweils 1 cm^2 beträgt, haben sie eine Seitenlänge von 1 cm. Die Basis eines weißen Dreiecks ist daher 4 – 1 − 1 = 2 cm lang. Da die Figur symmetrisch ist, ist die Höhe eines dieser Dreiecke ebenfalls 4/2 = 2 cm. Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt dann $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ cm^2. Die dunkelgraue Blume muss also einen Flächeninhalt von 16 – 4 · 1 – 4 · 2 = **4 cm^2** haben.

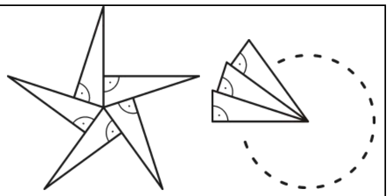


14. Costa stellt in seinem Garten eine Bretterwand auf. Er verwendet dafür 9 Bretter, die jeweils 40 cm breit sind. Je zwei benachbarte Bretter überlappen sich gleich weit (siehe Abbildung). Die Bretterwand ist insgesamt 3,4 m breit. Um wie viel cm überlappen sich je zwei benachbarte Bretter?

(A) 2,4 cm (B) 2,5 cm (C) 3 cm (D) 4,8 cm (E) 5 cm

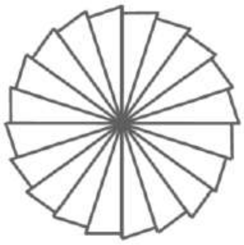
Stellt man alle 9 Bretter nebeneinander, würde man eine Gesamtbreite von 9 · 40 = 360 cm erhalten. Costa hat nur eine Breite von 340 cm erhalten. Die Überlappungen machen also 360 − 340 = 20 cm aus. 9 Bretter nebeneinander können sich 8-mal überlappen. Eine Überlappung muss also 20/8 = **2,5 cm** lang sein.

15. Aus identischen rechtwinkligen Dreiecken werden Sterne gebastelt. Die Dreiecke liegen immer lückenlos und nicht überlappend aneinander. Legt man fünf dieser Dreiecke an ihren größeren spitzen Winkeln zusammen, erhält man den rechts abgebildeten Stern. Legt man die Dreiecke an ihren kleineren spitzen Winkeln zusammen, erhält man einen zweiten Stern – in der Abbildung siehst du so einen begonnenen Stern. Wie viele Dreiecke benötigt man für den gesamten zweiten Stern?



(A) 10 (B) 12 (C) 18 (D) 20 (E) 24

Im 5-eckigen Stern ergeben die 5 großen spitzen Winkel einen vollen Kreis. Ein voller Kreis entspricht einem Winkel von 360°. Ein großer spitzer Winkel muss also 360/5 = 72° haben. Für den kleineren spitzen Winkel des rechtwinkeligen Dreiecks gilt dann, dass er 90 − 72 = 18° beträgt. Legt man die Dreiecke an ihren kleineren spitzen Winkeln zusammen, benötigt man daher insgesamt **20 Dreiecke** (20 · 18 = 360°) um einen vollen Stern zu legen.

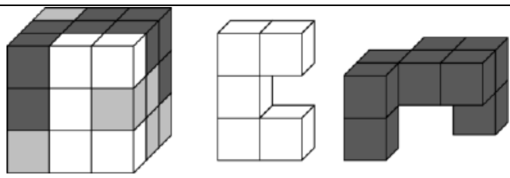


16. Bei einem Quiz gibt es 10 Fragen. Für eine richtige Antwort bekommt man 8 Punkte dazu. Für eine falsche Antwort werden 4 Punkte abgezogen. Fragen, die nicht beantwortet werden, werden mit 0 Punkten bewertet. Eric nimmt an diesem Quiz teil und erreicht 60 Punkte. Wie viele Fragen hat er nicht beantwortet?

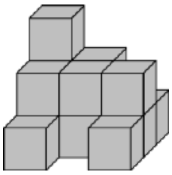
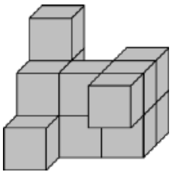
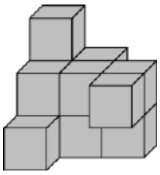
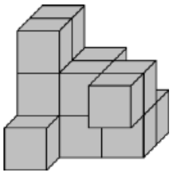
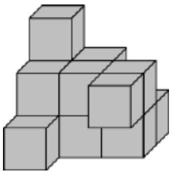
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Da Eric 60 Punkte erreicht hat, muss er mindestens 8 Fragen richtig beantwortet haben (7 · 8 = 56 Punkte und damit auf jeden Fall zu wenig). Er kann nicht alle Fragen richtig beantwortet haben (10 · 8 = 80 Punkte). Eric hat also entweder 8 oder 9 Fragen beantwortet. Da 60 nicht durch 8 teilbar ist, muss er auch mindestens 1 falsche Antwort gegeben und Punkteabzug kassiert haben. Man kommt zu dem eindeutigen Ergebnis 8 · 8 – 4 = 60 Punkte. Eric hat also 8 Fragen richtig, 1 Frage falsch und **1 Frage nicht beantwortet**.

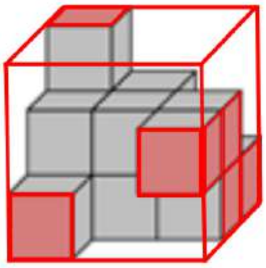
17. Aus kleinen 1×1×1-Würfeln werden drei Bausteine (weiß, schwarz, grau) gebildet. Sie lassen sich zum abgebildeten 3×3×3-Würfel zusammensetzen. Der weiße und der schwarze Baustein sind rechts davon abgebildet.



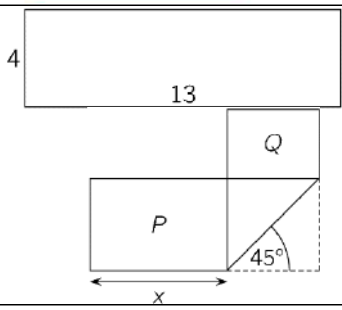
Welcher der fünf Bausteine ist der passende graue Teil?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Wir suchen einen Teil, der an der vorderen Seite 2 kleine Außenflächen hat, an der oberen Seite 1 kleine Außenfläche hat und an der rechten Seite 4 kleine Außenflächen hat. Das passt nur zu **Teil E**.

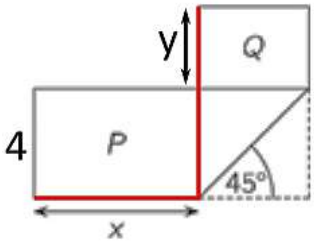


18. Markus faltet ein rechteckiges Blatt Papier, das 13 cm lang und 4 cm breit ist (siehe Abbildung). Es entstehen zwei kleine Rechtecke, P und Q, wobei der Flächeninhalt des Rechtecks P doppelt so groß wie jener von Q ist. Wie lang ist die Strecke x?



(A) 5 cm (B) 5,5 cm **(C)** 6 cm (D) 6,5 cm (E) $4\sqrt{2}$ cm

Das Rechteck P hat zwei Seiten: die Seite x ist unbekannt, die zweite Seite ist 4 cm lang. Der Flächeninhalt von P berechnet sich also mit 4 · x. Für das Rechteck Q gilt: eine Seite ist ebenfalls 4 cm lang, die zweite Seite ist unbekannt, y. Der Flächeninhalt von Q berechnet sich dann mit 4 · y. Wir wissen weiters, dass der Flächeninhalt von P doppelt so groß ist wie jener von Q, also 4 · x = 2 · 4 · y. Somit muss die Seite x doppelt so lang sein wie die Seite y, oder x = y/2. Die 13 cm lange Seite des ursprünglichen Rechtecks (rot in Skizze) setzt sich nun zusammen aus
x + 4 + (x/2) = 13. Es folgt x = **6 cm** lang.



19. In einer Schüssel befinden sich doppelt so viele Äpfel wie Birnen. Christy und Lily teilen sich das Obst so, dass Christy doppelt so viele Früchte wie Lily erhält. Eine dieser Aussagen ist immer richtig. Welche?

(A) Christy bekommt zumindest eine Birne.
(B) Christy bekommt doppelt so viele Äpfel wie Birnen.
(C) Christy bekommt doppelt so viele Äpfel wie Lily.
(D) Christy bekommt so viele Äpfel wie Lily Birnen.
(E) Christy bekommt genauso viele Birnen wie Lily Äpfel.

Beginnen wir mit einem speziellen Fall. Nehmen wir an, Christy bekommt alle Äpfel aber keine Birnen, und Lily alle Birnen aber keine Äpfel. Bei diesem Fall trifft nur **Aussage E** zu, weil Christy 0 Birnen hat und Lily 0 Äpfel hat.
Gilt diese Aussage allgemein? Nehmen wir an, Christy ersetzt eine gewisse Anzahl ihrer Äpfel durch die gleiche Anzahl an Birnen von Lily. Dann gilt doch, dass Lily die gleiche Anzahl an Äpfeln besitzt, wie Christy Birnen. Die größtmögliche Anzahl an Äpfel, die Christy durch Birnen ersetzen kann, ist die Hälfte aller Äpfel, denn es gibt halb so viele Birnen wie Äpfel. **In jedem Fall bekommt Lily die gleiche Anzahl an Äpfeln wie Christy Birnen.**

20. Ein Fußball besteht aus weißen Sechsecken und schwarzen Fünfecken (siehe Abbildung). Der Fußball hat 12 Fünfecke. Wie viele Sechsecke hat er?

(A) 12 (B) 15 (C) 18 **(D)** 20 (E) 24

1. Lösungsweg: Der Fußball besteht aus 12 Fünfecken. Auf der Skizze sieht man 6 Fünfecke, also eine Hälfte des Fußballs. Auf dieser Hälfte sieht man auch 10 Sechsecke. Der ganze Fußball hat also doppelt so viele Sechsecke, nämlich **20**.

2. Lösungsweg: Alle Fünfecke haben zusammen 12 · 5 = 60 Kanten. 1 Sechseck teilt sich Kanten mit 3 Fünfecken. Es gibt also 60/3 = **20** Sechsecke.

Hinweis: Bei einem Fußball handelt es sich um ein "abgestumpftes Ikosaeder" (griechisch: *eíkosi* = zwanzig; ein Ikosaeder ist ein geometrischer Körper, der aus **20 gleichseitigen Dreiecken** besteht **und 12 Ecken besitzt**). Die Fünfecke entstehen durch das "Abstumpfen" = Abschneiden der 12 Ecken, und aus den 20 Dreiecken entstehen dadurch 20 Sechsecke.

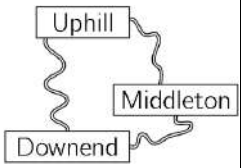
5 Punkte Beispiele

21. In einem bestimmten Bruch mit positivem Zähler und positivem Nenner wird der Zähler um 40 % vergrößert. Um wieviel Prozent muss der Nenner verkleinert werden damit der neue Bruch doppelt so groß wie der ursprüngliche Bruch wird?

(A) 10 % (B) 20 % **(C)** 30 % (D) 40 % (E) 50 %

Der ursprüngliche Bruch sei $\frac{z}{n}$. Nun wird der Zähler, z, um 40 % vergrößert also mit 1,4 multipliziert und der Nenner, n, gleichzeitig mit einem unbekannten Faktor x multipliziert, sodass gilt: $\frac{z \cdot 1{,}4}{n \cdot x} = \frac{z}{n} \cdot \frac{1{,}4}{x} = \frac{z}{n} \cdot 2$. Es muss also $\frac{1{,}4}{x} = 2$ sein und daher x = 0,7. Der neue Nenner ist also 70 % des alten Nenners n, bzw. n wurde um **30 %** verkleinert.

22. Drei Dörfer sind mit Straßen verbunden (siehe Abbildung). Fährt man von Downend nach Uphill mit dem Umweg über Middleton, so fährt man um 1 km weiter als auf der direkten Verbindung. Fährt man von Downend nach Middleton mit dem Umweg über Uphill, so fährt man um 5 km weiter als auf der direkten Verbindung. Fährt man von Uphill nach Middleton mit dem Umweg über Downend, so fährt man um 7 km weiter als auf der direkten Verbindung. Welche Länge besitzt die kürzeste der drei direkten Verbindungen?



(A) 1 km (B) 2 km **(C)** 3 km (D) 4 km (E) 5 km

Bezeichnen wir den Weg von Uphill nach Downend mit x, den Weg von Downend nach Middleton mit y und den Weg von Middleton nach Uphill mit z. Mit Hilfe der Angabe können wir drei Gleichungen aufstellen:

$$x + 1 = y + z \qquad \text{(I)}$$
$$y + 5 = x + z \qquad \text{(II)}$$
$$z + 7 = x + y \qquad \text{(III)}$$

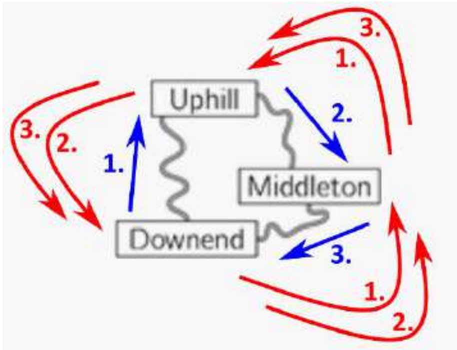
Lösungsweg 1

Löst man dieses Gleichungssystem, erhält man die Streckenlängen. Ein möglicher Beginn ist, alle 3 Gleichungen zu addieren. Man erhält die Gleichung x + y + z = 13, in die wir einsetzen können.

Wir wissen: y + z = x + 1. Durch Einsetzen: x + x + 1 = 13. Die Strecke von Uphill nach Downend ist 6 km.
Wir wissen: x + z = y + 5. Durch Einsetzen: y + y + 5 = 13. Die Strecke von Downend nach Middleton ist 4 km.
Wir wissen: x + y = z + 7. Durch Einsetzen: z + z + 7 = 13. Die Strecke von Middleton nach Uphill ist **3 km**. Das ist die kürzeste Strecke.

Lösungsweg 2
Durch Umformen von (I) erhält man y + z – x = 1 oder (y – x) + z = 1 (A).
Aus (II) erhält man x + z – y = 5 oder (x – y) + z = 5 (B).
Aus den beiden Gleichungen sieht man, das (x – y) und (y – x) Gegenzahlen sind nämlich (+2) und (–2), weil 5 – 1 = 4 ist. (x – y) muss dabei +2 sein. Die neue Gleichung (B) lautet: 2 + z = 5 und daher z = 3 km.
Auf die gleiche Art erhält man aus (I) (z – x) + y = 1 und aus (III) (x – z) + y = 7 und kann schließen, dass (x – z) den Wert +3 haben muss. Die Gleichung 3 + y = 7 liefert y = 4 km.
Aus (II) und (III) erhält auf die gleiche Art (z – y) + x = 5 und (y – z) + x = 7 mit (+1) als Wert für (y – z). Aus der Gleichung 1 + x = 7 erhält man für x den Wert 6 km.
Die kürzeste der drei direkten Verbindungen ist also z mit **3 km.**

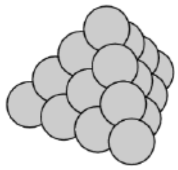
Lösungsweg 3 – ohne Gleichungssystem
Nehmen wir an, eine Person möchte von Downend im Kreis nach Downend fahren. Das kann sie auf dem direkten Weg machen, oder indem sie stattdessen immer die entsprechenden Umwege fährt. In der Skizze sind alle direkten Wege rot, und alle Umwege für diese Wege blau gekennzeichnet.:



1. die Person startet in Downend und fährt über Middleton nach Uphill (das ist der Umweg, statt direkt von Downend nach Uphill zu fahren)
2. die Person ist jetzt in Uphill und fährt über Downend nach Middleton (das ist der Umweg, statt direkt von Uphill nach Middleton zu fahren)
3. die Person ist jetzt in Middleton und fährt über Uphill zurück nach Downend (das ist der Umweg, statt direkt von Middleton zurück nach Downend zu fahren)

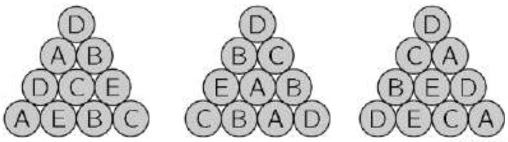
Fährt man alle Umwege für die Strecke (Downend-Uphill-Middleton-Downend) ist man also nicht 1 Mal im Kreis gefahren, sondern sogar 2 Mal, wie die roten Pfeile zeigen und hat dabei einen gesamten Umweg von 1+5+7 = 13 km gemacht. Es gilt also 2 Kreise = 1 Kreis + 13 km. Das heißt, 1 Kreis von Downend-Uphill-Middleton-Downend muss 13 km lang sein. Die Strecke von Downend nach Uphill ist 1 km kürzer als der Umweg. Die 13 km teilen sich also in 6 km für die Strecke Downend-Uphill und 7 km für die Strecke Downend-Middleton-Uphill. Die Strecke Uphill-Middleton ist 7 km kürzer als der Umweg. Die 13 km teilen sich also in 3 km für die Strecke Uphill-Middleton und 10 km für die Strecke Uphill-Downend-Middleton. Die Strecke Middleton-Downend muss also 13-6-3 = 4 km lang sein. Die kürzeste der drei Verbindungen ist **3 km** lang.

23. Mit 20 gleich großen Kugeln wird eine dreiseitige Pyramide gebaut. (siehe Abbildung). Auf jede der kleinen Kugeln wird genau einer der Buchstaben A, B, C, D oder E geschrieben. Jeder Buchstabe wird genau viermal verwendet. Drei der vier Flächen der Pyramide sind abgebildet. Welcher Buchstabe steht auf der Kugel in der Mitte der nicht abgebildeten Fläche?



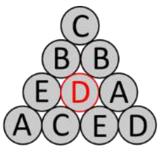
(A) A (B) B (C) C **(D)** D (E) E

Die Pyramide besteht aus 20 Kugeln. Von oben nach unten gibt es: 1 oberste Kugel, 3 Kugeln in der nächsten Ebene, 6 Kugeln in der dritten Ebene und 10 Kugeln in der untersten Ebene. Die Kugeln an den Kanten der Pyramide gehören zu jeweils 2 Seitenflächen, diese Buchstaben kommen in jeder Ebene also doppelt vor. Folgende Buchstaben sind pro Ebene zu sehen:



	A	B	C	D	E
				I	
	I	I	I		
	I	I	I	I	II
	II	II	II	I	II
gesamt:	4	4	4	3	4

Die einzige Kugel, die man nicht sieht, ist also die vierte Kugel des **Buchstaben D**. Die vierte Seitenfläche schaut wie folgt aus:



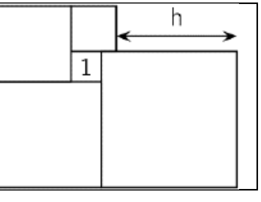
24. Die 6-ziffrige Zahl 1ABCDE wird mit 3 multipliziert und ergibt die 6-ziffrige Zahl ABCDE1.
Wie groß ist die Ziffernsumme des Ergebnisses?
(A) 24 **(B)** 27 (C) 30 (D) 33 (E) 36

Die Multiplikation lautet: 1ABCDE · 3 = ABCDE1. Jeder Buchstabe steht für eine andere Ziffer.
E · 3 muss also eine Zahl mit der Einer – Stelle 1 ergeben, dies gilt nur für E = 7 bzw. 7 · 3 = 21 (2 anschreiben für die Zehner-Stelle).
D · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf E − 2 = 7 − 2 = 5 endet, dies gilt für D = 5 bzw. 5 · 3 = 15 (1 anschreiben für die Hunderter-Stelle).
C · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf D − 1 = 5 − 1 = 4 endet, dies gilt für C = 8 bzw. 8 · 3 = 24 (2 anschreiben für die Tausender-Stelle).
B · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf C − 2 = 8 − 2 = 6 endet, dies gilt für B=2 bzw. 2 · 3 = 6.
A · 3 muss nun eine Zahl ergeben, die auf B = 2 endet, dies gilt für A = 4 bzw. 4 · 3 = 12.
Die korrekte Rechnung lautet also 142857 · 3 = 428571, und die Ziffernsumme der Zahl ist 4 + 2 + 8 + 5 + 7 + 1 = **27**.

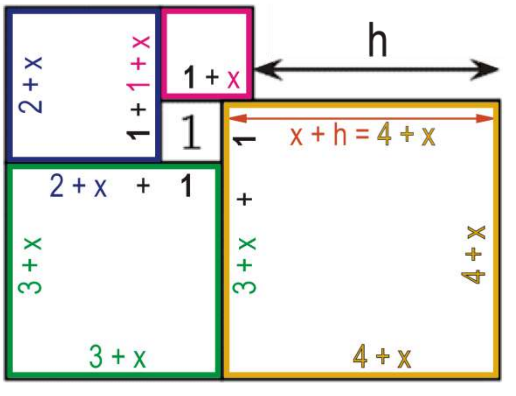
25. An einem Mathematik-Bewerb haben weniger als 30 Schüler teilgenommen. 4 Beispiele waren zu lösen. $\frac{1}{3}$ der Teilnehmer konnte genau 1 Beispiel nicht lösen. $\frac{1}{4}$ der Teilnehmer konnte genau 2 Beispiele nicht lösen. $\frac{1}{6}$ der Teilnehmer konnte genau 3 Beispiele nicht lösen. $\frac{1}{8}$ der Teilnehmer konnte kein Beispiel lösen.
Wie viele Teilnehmer konnten alle Beispiele lösen?
(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Wir kennen nicht die Gesamtanzahl aller Schüler, nur dass sie kleiner als 30 gewesen ist. Wir wissen aber, dass $\frac{1}{3}$ der Schüler genau 1 Beispiel gelöst haben, $\frac{1}{4}$ der Schüler genau 2 Beispiele, $\frac{1}{6}$ der Schüler genau 3 Beispiele und $\frac{1}{8}$ der Schüler gar kein Beispiel. Da es keine halben Schüler gibt, suchen wir also eine Teilnehmerzahl, die durch 3, 4, 6 und 8 teilbar und kleiner als 30 ist. Das gilt nur für die Zahl 24. Das heißt, 8 Schüler haben 1 Beispiel gelöst, 6 Schüler 2 Beispiele, 4 Schüler 3 Beispiele und 3 Schüler gar kein Beispiel. 8 + 6 + 4 + 3 = 21 Schüler.
24 − 21= **3 Schüler** haben also alle Beispiele gelöst.

26. Fünf verschieden große Quadrate werden, so wie in der Abbildung zu sehen, angeordnet.
Der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats beträgt 1 cm².
Welche Länge besitzt h?
(A) 3 cm (B) 3,5 cm **(C)** 4 cm (D) 4,2 cm (E) 4,5 cm



Da der Flächeninhalt des kleinsten Quadrats 1 cm^2 ist, ist seine Seite 1 cm lang. Die Seitenlänge des nächst größeren Quadrats oberhalb kann man nun als 1 + x bezeichnen. Die Seitenlänge des Quadrats links davon, setzt sich nun aus 1 + 1 + x = 2 + x zusammen. Die Seitenlänge des Quadrats unterhalb folglich aus 2 + x + 1 = 3 + x und die Seitenlänge des rechten Quadrats entspricht 3 + x + 1 = 4 + x.
4 + x entspricht gleichzeitig h+x, h muss also **4 cm** lang sein.



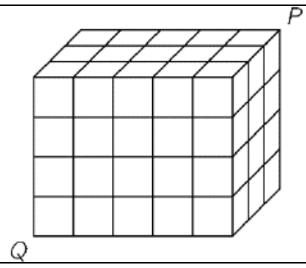
27. 2021 Kängurus werden der Reihe nach aufgestellt und von 1 bis 2021 nummeriert. Jedes Känguru ist entweder rot, grau oder blau gefärbt. Bei drei beliebig aufeinanderfolgenden Kängurus kommen immer alle drei Farben vor. Bruce tippt auf die Farben einiger Kängurus und sagt: „Känguru 2 ist grau, Känguru 20 ist blau, Känguru 202 ist rot, Känguru 1002 ist blau und das letzte Känguru mit der Nummer 2021 ist grau." Bruce hat sich nur einmal geirrt. Bei welcher Nummer hat er sich geirrt?

(A) 2 (B) 20 (C) 202 (D) 1002 (E) 2021

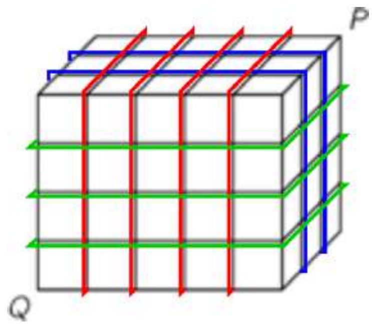
Wenn bei drei beliebig aufeinanderfolgenden Kängurus alle 3 Farben vertreten sein sollen, ist das nur möglich, wenn es eine festgelegte, sich wiederholende Reihenfolge der Farben gibt. Känguru 1 muss also die Farbe von Känguru 4, 7, 10 usw. haben. Känguru 2 muss die Farbe von Känguru 5, 8, 11 usw. haben. Känguru 3 muss die Farbe von Känguru 6, 9, 12 usw. haben. Man kann die Kängurus also in 3 Zahlengruppen aufteilen. Kängurus mit den Zahlen, die durch 3 teilbar sind, müssen die gleiche Farbe haben. Kängurus mit den Zahlen, die durch 3 geteilt 1 Rest ergeben, müssen die gleiche Farbe haben. Kängurus mit den Zahlen, die durch 3 geteilt 2 Rest ergeben, müssen die gleiche Farbe haben. Bruce tippt darauf, dass Känguru 2 und Känguru 2021 grau ist. Für beide Zahlen gilt, dass sie durch 3 geteilt 2 Rest ergeben, die Kängurus müssen also die gleiche Farbe haben. Da er sich nur bei genau 1 Känguru geirrt hat, muss sein Tipp also richtig sein, und beide Kängurus sind grau. Bei Känguru 20 hat er blau getippt. Die Zahl 20 durch 3 geteilt ergibt aber auch 2 Rest, gehört also zur gleichen Zahlengruppe wie 2 und 2021 und **Känguru 20** müsste auch grau sein. Dieser Tipp ist somit der falsche.

28. Ein Quader mit den Maßen 3×4×5 besteht aus 60 kleinen Würfeln. Eine Termite frisst sich entlang der Raumdiagonale vom Eckpunkt P zum Eckpunkt Q. Diese Raumdiagonale hat mit keiner der Kanten der kleinen Würfel Schnittpunkte. Durch wie viele kleine Würfel muss sich die Termite durchfressen?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12



Die Termite frisst sich entlang der Raumdiagonale von P nach Q. Da diese Diagonale keine Schnittpunkte mit den Kanten der kleinen Würfel hat, frisst sich die Termite in einer Seitenfläche eines Würfels hinein und aus einer anderen Seitenfläche heraus. 1 durchfressener Würfel entspricht also 1 Abschnitt. Jedes Mal, wenn sich die Termite durch die Seitenfläche eines kleinen Würfels frisst, kommt sie in einen neuen Abschnitt. In der Abbildung sind die einzelnen Abschnitte dargestellt. Rot, wenn die Termite von rechts nach links frisst, Grün, wenn die Termite von oben nach unten frisst, und Blau, wenn die Termite von hinten nach vorne frisst. Es ist dabei nicht wichtig, welcher Würfel wo genau durchfressen wird, sondern durch wie viele Abschnitte sich die Termite frisst. Denn die Zahl der Abschnitte entspricht ja den durchfressenen Würfeln. Es sind 9 unterschiedliche Abschnitte (4 Rote + 3 Grüne + 2 Blaue) und der Anfangswürfel, durch den sich die Termite frisst. Insgesamt also 9 + 1 = **10 Würfel**.



29. In einer Stadt leben 2021 Personen, davon sind 21 Ritter und die übrigen 2000 sind Schurken. Ritter sagen immer die Wahrheit und Schurken lügen immer. Ein Zauberer bildet aus 2020 von ihnen 1010 Paare. Jede Person eines Paares beschreibt die andere Person entweder als Ritter oder als Schurke. 2000 Personen werden als Ritter bezeichnet und 20 Personen als Schurken.
Wie viele Paare bestehen aus zwei Schurken?

(A) 980 (B) 985 (C) 990 (D) 995 (E) 1000

Bei Paaren aus Rittern (R) und Schurken (S) können 3 verschiedene Paarungen zustande kommen: R+R, S+S und R+S. Treffen 2 Ritter aufeinander, werden sie wahrheitsgemäß sagen, dass der andere ein Ritter ist. Treffen 2 Schurken aufeinander, werden sie jeweils lügen und sagen, dass der andere ein Ritter ist. Wenn ein Ritter einen Schurken trifft, wird der Ritter wahrheitsgemäß sagen, dass er einen Schurken trifft und der Schurke wird sagen, dass er einen Schurken getroffen hat. Nur bei der Paarung R+S werden also Personen als Schurken bezeichnet. Da 20 Personen als Schurken beschrieben wurden, hat es also 20/2 = 10 Paare R+S gegeben. Es verbleiben noch 2000 − 10 = 1990 Schurken, die man zu 1990/2 = **995 Paaren** S+S zusammenlegen kann.

30. Bei einem Turnier mit sechs Mannschaften spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft ein Spiel. In jeder Runde werden drei Spiele gleichzeitig gespielt. Ein TV – Sender hat bereits entschieden, welche Spiele er in welcher Runde übertragen wird. Wir sehen die ausgewählten Spiele in der abgebildeten Tabelle.
In welcher Runde wird das Team D gegen das Team F spielen?

	im TV
Runde 1	**A-B**
Runde 2	**C-D**
Runde 3	**A-E**
Runde 4	**E-F**
Runde 5	**A-C**

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Von Mannschaft A werden die drei Spiele A-B, A-C und A-E im TV gezeigt.

Schritt rot: Die Spiele A-D und A-F werden nicht gezeigt und müssen in Runde 2 und Runde 4 stattfinden. Da in Runde 2 schon C-D spielt, muss hier A-F spielen. In Runde 4 spielt also A-D. In Runde 2 müssen außerdem noch die Mannschaften B-E spielen. In Runde 4 müssen noch die Mannschaften B-C spielen.

	im TV	nicht übertragen	
Runde 1	**A-B**	**C-E**	**D-F**
Runde 2	**C-D**	**A-F**	**B-E**
Runde 3	**A-E**	**B-D**	**C-F**
Runde 4	**E-F**	**A-D**	**B-C**
Runde 5	**A-C**	**D-E**	**B-F**

Schritt blau: Nun wissen wir, wann Mannschaft E die Spiele A-E, B-E und E-F spielt. Die Spiele C-E und D-E müssen also in Runde 1 und Runde 5 stattfinden. Da in Runde 5 schon A-C spielt, kann hier nur D-E spielen. In Runde 1 spielt daher C-E und das verbleibende Spiel in Runde 1 heißt D-F. Das Team D spielt also in **Runde 1** gegen F.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2021
18. 3. 2021

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9. – 10.

Vor- und Zuname:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

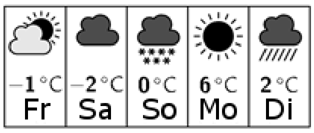
Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

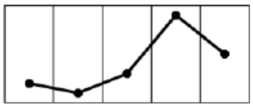
- 3 Punkte Beispiele -

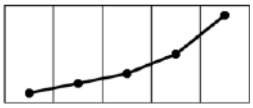
1. Jedes Jahr ist der dritte Donnerstag im März der Känguru-Tag. Die Känguru-Tage der kommenden Jahre sind im Folgenden aufgelistet. Dabei ist ein Fehler passiert. Welcher Eintrag ist falsch?

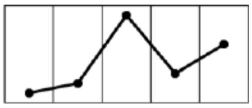
(A) 17. März 2022 (B) 16. März 2023 (C) 14. März 2024 (D) 20. März 2025 (E) 19. März 2026

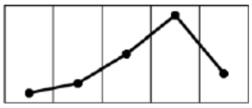
2. Jenny sieht in ihrer Wetter-App die vorhergesagten Höchsttemperaturen der nächsten fünf Tage, siehe Grafik. Wie sieht der dazu passende Graph aus?

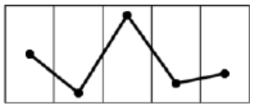


(A) 

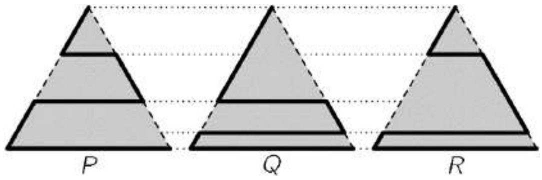
(B) 

(C) 

(D) 

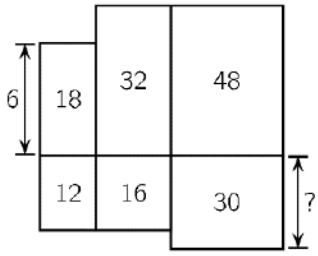
(E) 

3. In drei deckungsgleichen gleichseitigen Dreiecken sind jeweils Pfade (dicke Linien) vom oberen zum rechten unteren Eckpunkt eingezeichnet (siehe Abbildung).
Welche Aussage über die Längen P, Q und R der Pfade ist wahr?



(A) $P < Q < R$ (B) $P < R < Q$
(C) $P < Q = R$ (D) $P = R < Q$ (E) $P = Q = R$

4. Sechs Rechtecke sind wie in der Abbildung zu sehen angeordnet. Das linke obere Rechteck ist 6 cm hoch. Die Zahlen in den Rechtecken geben deren jeweilige Fläche in cm^2 an. Wie hoch ist das rechte untere Rechteck?

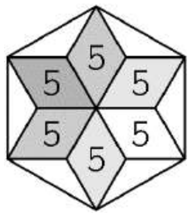


(A) 4 cm (B) 5 cm (C) 6 cm (D) $7{,}5$ cm (E) 10 cm

5. Zur Halbzeit eines Handballspiels führt das Gast-Team, der Zwischenstand ist 9:14. In der zweiten Hälfte dominiert das Heim-Team. Es erzielt doppelt so viele Tore wie das Gast-Team und gewinnt insgesamt mit einem Tor Unterschied.
Wie lautet der Endstand des Spiels?

(A) 20:19 (B) 21:20 (C) 22:21 (D) 23:22 (E) 24:23

6. Sechs deckungsgleiche Rhomben mit jeweils $5\ \mathrm{cm}^2$ Flächeninhalt bilden einen Stern. Verbindet man die Spitzen des Sterns, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck (siehe Abbildung).
Welche Fläche hat das Sechseck?

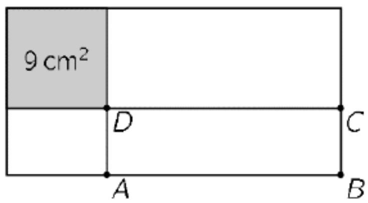


(A) $36\ \mathrm{cm}^2$ (B) $40\ \mathrm{cm}^2$ (C) $45\ \mathrm{cm}^2$ (D) $48\ \mathrm{cm}^2$ (E) $60\ \mathrm{cm}^2$

7. Adam, Bob und Conny sind gleich alt und Mitglieder einer Band. Die übrigen 3 Band-Mitglieder sind 19, 20 beziehungsweise 21 Jahre alt.
Wie alt ist Conny, wenn das durchschnittliche Alter aller Bandmitglieder 21 ist?

(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

8. Ein Rechteck mit Umfang 30 cm wird durch eine waagrechte und eine senkrechte Linie in vier Teilfiguren zerlegt, von denen eine ein Quadrat mit Flächeninhalt $9\ \mathrm{cm}^2$ ist (siehe Abbildung).
Welchen Umfang hat das Rechteck $ABCD$?



(A) 14 cm (B) 16 cm (C) 18 cm (D) 21 cm (E) 24 cm

9. Es gibt sechs dreistellige Zahlen, die jede der Ziffern 1, 3 und 5 genau einmal enthalten.
Wie viele dieser sechs Zahlen sind Primzahlen?

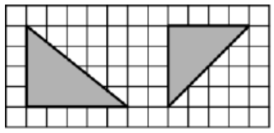
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

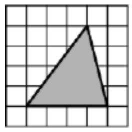
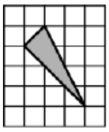
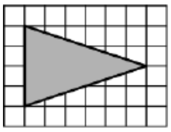
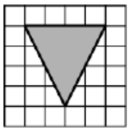
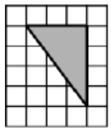
10. Klein-Känguru sucht nach einer besonderen Zahl. Es erhält dasselbe Resultat, wenn es $\frac{1}{10}$ von dieser Zahl abzieht oder wenn es diese Zahl mit $\frac{1}{10}$ multipliziert. Wie lautet die gesuchte Zahl?

(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{11}{100}$ (E) $\frac{1}{9}$

- 4 Punkte Beispiele -

11. Alex zeichnet drei Dreiecke auf kariertes Papier. Zwei von ihnen sind rechts abgebildet. Folgendes ist noch bekannt: Genau zwei der Dreiecke besitzen gleichen Flächeninhalt, genau zwei von ihnen sind gleichschenkelig und genau zwei der Dreiecke sind rechtwinkelig. Welches könnte das dritte Dreieck sein?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

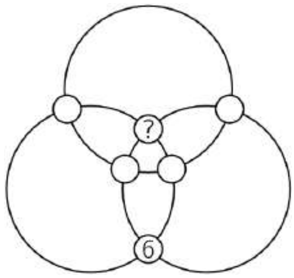
12. Tom besitzt 10 Wunderkerzen derselben Größe. Er zündet die erste an. Als nur mehr ein Zehntel der Kerze übrig ist, zündet er die zweite Kerze an. Als nur mehr ein Zehntel dieser übrig ist, zündet er die dritte an und so weiter. Die Wunderkerzen brennen mit derselben Geschwindigkeit entlang der ganzen Länge der Kerze. Eine Wunderkerze brennt für 2 Minuten. Wie lange dauert es, bis alle 10 Wunderkerzen abgebrannt sind?

(A) 18 min 20 s (B) 18 min 12 s (C) 18 min (D) 17 min (E) 16 min 40 s

13. Andrea steigt acht Stufen hinauf. In jedem Schritt nimmt sie entweder eine Stufe oder zwei Stufen auf einmal. Die sechste Stufe kann sie nicht benutzen, weil sie kaputt ist.
Auf wie viele verschiedene Arten kann Andrea die achte Stufe erreichen?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

14. Drei Ringe schneiden einander. Jeder Schnittpunkt ist durch einen kleinen Kreis markiert. In diese Kreise sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass die Summe aller Zahlen entlang jedes Rings gleich groß ist. Die Zahl 6 ist bereits eingetragen (siehe Abbildung).
Welche Zahl muss im Kreis mit dem Fragezeichen stehen?

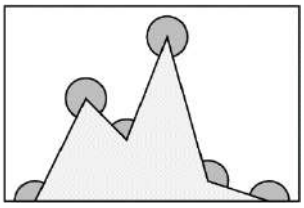


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Die Zahl 2021 hat Rest 5 bei Division durch 6, durch 7, durch 8 und durch 9.
Wie viele positive ganze Zahlen, die kleiner als 2021 sind, haben ebenfalls diese Eigenschaft?

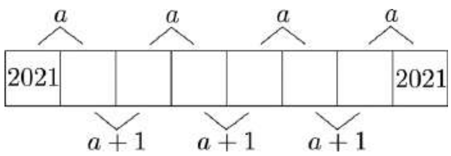
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) keine

16. Wie groß ist die Summe der sechs markierten Winkel in der Abbildung?



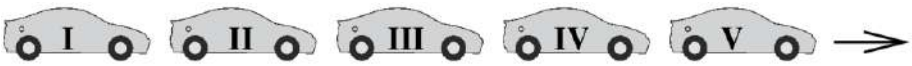
(A) 360° (B) 900° (C) 1080° (D) 1120° (E) 1440°

17. Der abgebildete Streifen ist in 8 Felder unterteilt.
Jedes Feld enthält eine Zahl. Die Summe zweier benachbarter Zahlen ist entweder a oder $a+1$, wie abgebildet.
Die Zahlen im ersten und im achten Feld sind jeweils 2021.
Welchen Wert hat a?

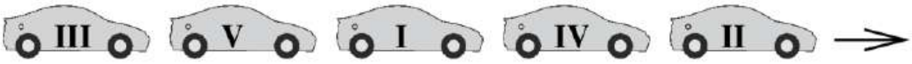


(A) 4041 (B) 4042 (C) 4043 (D) 4044 (E) 4045

18. Fünf Autos nehmen an einem Rennen teil. Dieses Bild zeigt ihre Startaufstellung:



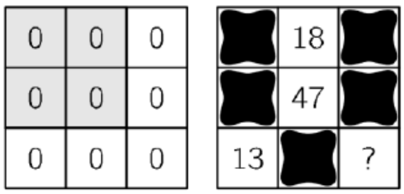
Die Autos erreichen das Ziel in folgender Reihenfolge:



Bei jedem Überholmanöver überholt stets ein Auto genau ein anderes Auto.
Wie viele Überholmanöver hat es in diesem Rennen mindestens gegeben?

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

19. Jedes Feld eines 3×3 Quadrates wird zu Beginn mit der Zahl 0 beschriftet. Danach wählen wir ein beliebiges 2×2 Teilquadrat (zum Beispiel das in der linken Abbildung grau markierte Teilquadrat) und erhöhen jeden Eintrag um jeweils 1. Nachdem wir diesen Vorgang einige Male wiederholt haben, erhalten wir die rechts dargestellte Beschriftung. Unglücklicherweise sind einige Einträge nicht sichtbar.
Welche Zahl steht in dem Feld mit dem Fragezeichen?



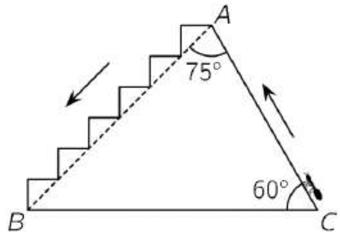
(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 19

20. Bei einem Teamwettbewerb starten fünf Teams mit 9, 15, 17, 19 beziehungsweise 21 Mitgliedern. Jedes Team besteht entweder nur aus Mädchen oder nur aus Burschen. Alle Mitglieder eines Teams starten gleichzeitig. Nach dem Start des ersten Teams ist unter den noch auf den Start Wartenden die Anzahl der Mädchen dreimal so groß wie die Anzahl der Burschen.
Aus wie vielen Personen besteht jenes Team, das bereits gestartet ist?

(A) 9 (B) 15 (C) 17 (D) 19 (E) 21

- 5 Punkte Beispiele -

21. Eine Ameise klettert vom Punkt C geradlinig zum Punkt A hoch und krabbelt danach über die Treppe wieder hinunter zum Punkt B (siehe Abbildung).
Wie groß ist das Verhältnis der Länge der Strecke CA zur Länge des Pfades AB entlang der Treppe?



(A) $1 : 1$ (B) $1 : 2$ (C) $1 : 3$ (D) $1 : \sqrt{2}$ (E) $1 : \sqrt{3}$

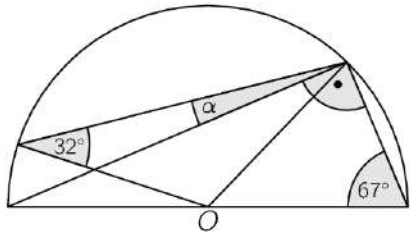
22. Es ist bekannt, dass $a + b + c = 0$ ist und $abc = 78$.
Wie groß ist der Wert von $(a + b)(b + c)(c + a)$?

(A) -156 (B) -39 (C) 78 (D) 156 (E) ein anderer Wert

23. Es sei N die kleinste Zahl, deren Ziffernsumme 2021 ist. Wie groß ist die Ziffernsumme von $N + 2021$?

(A) 10 (B) 12 (C) 19 (D) 2021 (E) 2026

24. Die Abbildung zeigt einen Halbkreis mit Mittelpunkt O.
Die Größen einiger Winkel sind gegeben.
Wie groß ist der Winkel α?

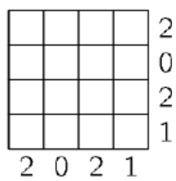


(A) $9°$ (B) $11°$ (C) $16°$ (D) $17{,}5°$ (E) $18°$

25. 2021 Bälle werden in einer Reihe aufgelegt und von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 2021 beschriftet. Jeder Ball ist in einer der vier Farben grün, rot, pink oder blau gefärbt. Unter beliebigen fünf aufeinanderfolgenden Bällen befinden sich immer genau ein roter, ein pinker und ein blauer Ball. Rechts von jedem roten Ball befindet sich ein pinker Ball. Die Bälle mit den Nummern 2 und 20 sind grün.
Welche Farbe hat der Ball mit der Nummer 2021?

(A) Grün (B) Rot (C) Pink (D) Blau (E) Das ist nicht eindeutig bestimmbar.

26. In einer 4×4 Tabelle müssen einige der Felder schwarz angemalt werden. Die Zahlen neben und unter der Tabelle zeigen, wie viele Zellen genau in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte schwarz angemalt werden müssen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Tabelle anzumalen?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) mehr als 5

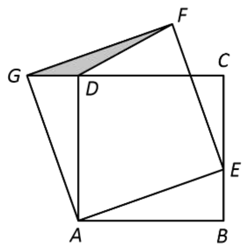
27. Wie viele vierstellige positive ganze Zahlen gibt es, für die das Produkt ihrer Ziffern jeweils gleich 100 ist?

(A) 6 (B) 12 (C) 16 (D) 18 (E) 24

28. Drei Spieler schreiben je 10 Wörter auf. Jeder Spieler bekommt drei Punkte für jedes Wort, das kein anderer Spieler aufgeschrieben hat. Wenn genau ein weiterer Spieler dasselbe Wort aufgeschrieben hat, bekommen beide Spieler je einen Punkt. Für Wörter, die alle drei Spieler aufgeschrieben haben, bekommt kein Spieler einen Punkt. Als die Spieler ihre Punkte berechnen, stellen sie fest, dass jeder eine andere Anzahl an Punkten erzielt hat. Samuel hat mit 19 am wenigsten Punkte und Johannes am meisten.
Wie viele Punkte hat Johannes erzielt?

(A) 20 (B) 21 (C) 23 (D) 24 (E) 25

29. Das Quadrat *ABCD* besitzt einen Flächeninhalt von 16 und das graue Dreieck *DFG* besitzt einen Flächeninhalt von 1 (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates *AEFG*?



(A) 17 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21

30. Christina besitzt acht Münzen, deren Massen in Gramm acht verschiedene positive ganze Zahlen sind.
Wenn Christina auf jede Seite einer Balkenwaage jeweils zwei Münzen legt, so ist die Seite, auf der sich die schwerste dieser vier Münzen befindet, immer die schwerere.
Wie viele Gramm wiegt die schwerste der acht Münzen mindestens?

(A) 8 (B) 12 (C) 34 (D) 128 (E) 256

Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

Lösungsvektor

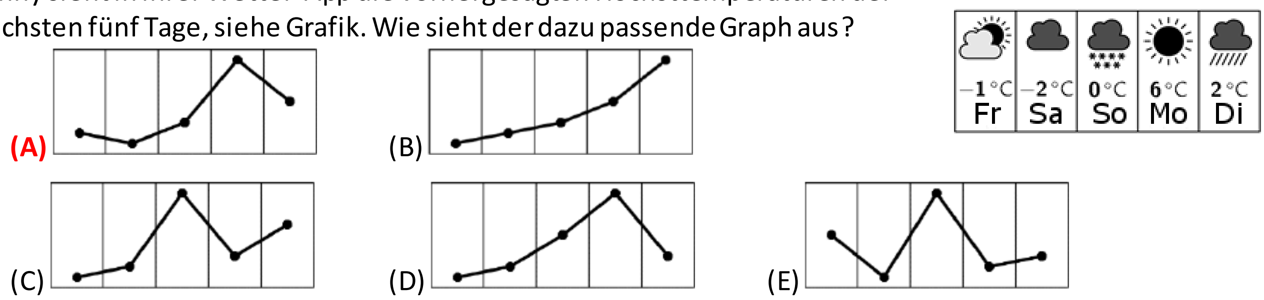
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	A	B	B	B	C	D	C	A	E	D	B	C	A	A	C	E	E	C	E	E	E	A	A	D	D	D	E	B	C

3 Punkte Beispiele

1. Jedes Jahr ist der dritte Donnerstag im März der Känguru-Tag. Die Känguru-Tage der kommenden Jahre sind im Folgenden aufgelistet. Dabei ist ein Fehler passiert. Welcher Eintrag ist falsch?
(A) 17. März 2022 (B) 16. März 2023 **(C)** 14. März 2024 (D) 20. März 2025 (E) 19. März 2026

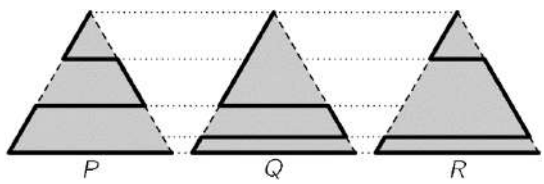
Im Jahr 2024 ist der 7. März der erste, der 14. März der zweite und erst der 21. März der dritte Donnerstag im Monat März, also ist **(C)** falsch.

2. Jenny sieht in ihrer Wetter-App die vorhergesagten Höchsttemperaturen der nächsten fünf Tage, siehe Grafik. Wie sieht der dazu passende Graph aus?



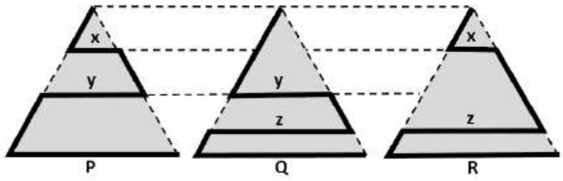
Wir können aus den in der App angezeigten Temperaturen ablesen, bei welchen Tagen der Punkt in der Grafik höher oder tiefer im Vergleich zu den anderen Tagen sein muss. Von Freitag auf Samstag sinkt die Temperatur, somit muss der zweite Wert niedriger als der erste sein, das schließt (B), (C) und (D) schon einmal aus. In (E) ist einerseits Montag nicht der wärmste Tag und anderseits Dienstag wärmer als Montag, was beides Ausschließungsgründe sind. Also passt nur **(A)**: von Freitag auf Samstag wird es kälter, dann steigt es an bis zum Höchstwert am Montag und sinkt am Dienstag wieder leicht ab.

3. In drei deckungsgleichen gleichseitigen Dreiecken sind jeweils Pfade (dicke Linien) vom oberen zum rechten unteren Eckpunkt eingezeichnet (siehe Abbildung).
Welche Aussage über die Längen P, Q und R der Pfade ist wahr?



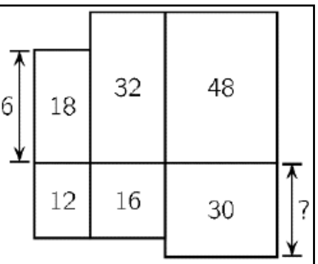
(A) $P < Q < R$ **(B)** $P < R < Q$
(C) $P < Q = R$ (D) $P = R < Q$ (E) $P = Q = R$

Die Teile der Pfade entlang der Seiten der drei gleichseitigen Dreiecke sind jeweils gleich lang. Folglich müssen nur die inneren Teile des Pfades (in der folgenden Abbildung mit x, y und z bezeichnet) verglichen werden, wobei $x < y < z$ gilt. Betrachtet man nun die Pfade in den einzelnen Dreiecken, stellt man fest, dass
$x + y < y + z < y + z$ gilt und damit $\boldsymbol{P} < \boldsymbol{R} < \boldsymbol{Q}$ ist.

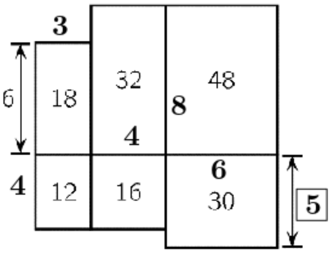


4. Sechs Rechtecke sind wie in der Abbildung zu sehen angeordnet. Das linke obere Rechteck ist 6 cm hoch. Die Zahlen in den Rechtecken geben deren jeweilige Fläche in cm^2 an. Wie hoch ist das rechte untere Rechteck?

(A) 4 cm (B) 5 cm (C) 6 cm (D) 7,5 cm (E) 10 cm



Beim linken oberen Rechteck kann man mit Hilfe der Fläche und der gegebenen Seitenlänge die Breite von 3 cm berechnen. Damit wiederum kann man die Höhe (4 cm) des „16er"-Rechtecks berechnen und geht auf diese Weise weiter vor. Schlussendlich gelangt man mit dem Wissen, dass die Breite des „30er"-Rechtecks 6 cm beträgt, zur Lösung, dass die Höhe desselben **5 cm** beträgt.



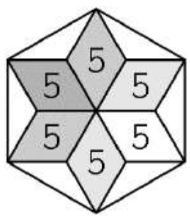
5. Zur Halbzeit eines Handballspiels führt das Gast-Team, der Zwischenstand ist 9:14.
In der zweiten Hälfte dominiert das Heim-Team. Es erzielt doppelt so viele Tore wie das Gast-Team und gewinnt insgesamt mit einem Tor Unterschied.
Wie lautet der Endstand des Spiels?

(A) 20:19 (B) 21:20 (C) 22:21 (D) 23:22 (E) 24:23

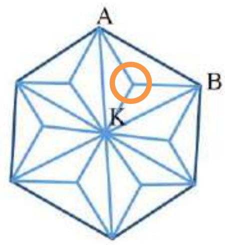
Sei x die Anzahl der Tore, die in der zweiten Hälfte vom Gast-Team erzielt werden. Dann gilt für die Spielendstand die Gleichung $9 + 2x - 1 = 14 + x$. Das „-1" drückt das eine Tor Unterschied des Heim-Teams aus.
Löst man die Gleichung, erhält man als Ergebnis $x = 6$. Das Gast-Team hat in der zweiten Spielhälfte also 6 Tore geschossen, was aufgrund der 14 Tore zur Halbzeit insgesamt 20 geschossene Tore macht. Das Heim-Team hat folglich $9 + 2 \cdot 6 = 21$ Tore geschossen, also lautet der Spiel-Endstand **21:20**.
Alternativlösung und Anmerkung: Man könnte auch zur richtigen Antwort kommen, indem man die Antwortmöglichkeiten betrachtet und damit das Torverhältnis in der zweiten Spielhälfte berechnet. Bei (A) wäre dies beispielsweise 11:5, was dem Satz „Es erzielt doppelt so viele Tore wie das Gast-Team" widerspricht. Auf die selbe Möglichkeit lassen sich die Distraktoren (C), (D) und (E) ausschließen und **(B)** bestätigen.

6. Sechs deckungsgleiche Rhomben mit jeweils $5\ \mathrm{cm}^2$ Flächeninhalt bilden einen Stern. Verbindet man die Spitzen des Sterns, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck (siehe Abbildung).
Welche Fläche hat das Sechseck?

(A) $36\ \mathrm{cm}^2$ (B) $40\ \mathrm{cm}^2$ (C) $45\ \mathrm{cm}^2$ (D) $48\ \mathrm{cm}^2$ (E) $60\ \mathrm{cm}^2$



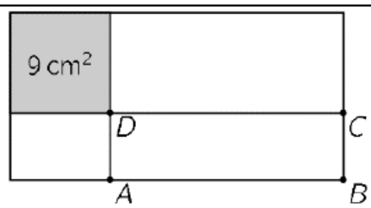
Die spitzen Winkel der Rhomben haben jeweils $60°$ (in der Mitte des Sterns stoßen die sechs Rhomben zusammen und somit hat einer dieser Winkel $360 : 6 = 60°$). Zeichnet man die langen Diagonalen der Rhomben ein, erhält man 18 deckungsgleiche, gleichschenkelige Dreiecke. Dass die 6 Dreiecke außerhalb des Sterns tatsächlich deckungsgleich mit jenen innerhalb sind, kann man sich beispielsweise wie folgt überlegen: Die stumpfen Winkel der Rhomben betragen je $120°$ (folgt direkt aus den $60°$), also muss auch der von den Schenkeln des äußeren Dreiecks eingeschlossene Winkel 120° betragen (wie im eingezeichneten orangen Bereich erkennbar). Folglich sind sowohl die beiden Schenkel als auch der von ihnen eingeschlossene Winkel in allen 18 Dreiecken gleich. Ein Dreieck hat die Fläche $2{,}5\ \text{cm}^2$, also erhält man als Gesamtfläche des Sechsecks $18 \cdot 2{,}5\ \text{cm}^2 = \mathbf{45\ cm^2}$.



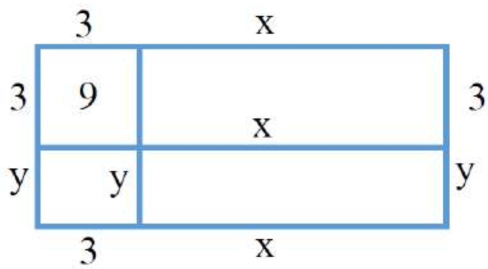
7. Adam, Bob und Conny sind gleich alt und Mitglieder einer Band. Die übrigen 3 Band-Mitglieder sind 19, 20 beziehungsweise 21 Jahre alt.
Wie alt ist Conny, wenn das durchschnittliche Alter aller Bandmitglieder 21 ist?
(A) 19 (B) 20 (C) 21 **(D)** 22 (E) 23

Sei a das Alter von Adam, Bob und Conny. Dann kann man mit $\frac{3a+19+20+21}{6} = 21$ berechnen, dass $a = \mathbf{22}$.
Alternativlösungen: Einfach ist es auch, gleich das Gesamtalter der Bandmitglieder zu berechnen ($6 \cdot 21 = 126$), davon die gegebenen Alter abziehen ($126 - 19 - 20 - 21 = 66$) und dies dann durch drei zu dividieren.
Ebenso sind logische Überlegungen möglich, wie beispielsweise: „Das Durchschnittsalter der anderen 3 Band-Mitgliedern ist 20 Jahre und da das Gesamtdurchschnittsalter 21 ist, müssen Adam, Bob und Conny ein Alter von 22 Jahren haben.“

8. Ein Rechteck mit Umfang 30 cm wird durch eine waagrechte und eine senkrechte Linie in vier Teilfiguren zerlegt, von denen eine ein Quadrat mit Flächeninhalt $9\ \text{cm}^2$ ist (siehe Abbildung).
Welchen Umfang hat das Rechteck $ABCD$?
(A) 14 cm (B) 16 cm **(C)** 18 cm (D) 21 cm (E) 24 cm



Das Quadrat hat eine Seitenlänge von 3 cm. Bezeichnet man die eingezeichneten unbekannten Teillängen mit x und y (siehe Abbildung rechts), erhält man für den Umfang des großen Rechtecks die Gleichung $30 = 4 \cdot 3 + 2x + 2y$.
Der Umfang des Rechtecks ABCD beträgt $2x + 2y$, was aus der oberen Gleichung ermittelt werden kann:
$2x + 2y = \mathbf{18cm}$.



9. Es gibt sechs dreistellige Zahlen, die jede der Ziffern 1, 3 und 5 genau einmal enthalten.
Wie viele dieser sechs Zahlen sind Primzahlen?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Egal, wie man die Ziffern 1, 3 und 5 zu einer dreistelligen Zahl anordnet, beträgt die Ziffernsumme dieser Zahl 9. Es gilt: Eine Zahl hat bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme. Das bedeutet, dass alle dieser Zahlen schon sicher durch 9 teilbar sind, was ausschließt, dass eine dieser Zahlen eine Primzahl ist.

10. Klein-Känguru sucht nach einer besonderen Zahl. Es erhält dasselbe Resultat, wenn es $\frac{1}{10}$ von dieser Zahl abzieht oder wenn es diese Zahl mit $\frac{1}{10}$ multipliziert. Wie lautet die gesuchte Zahl?

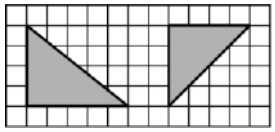
(A) $\frac{1}{100}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{11}{100}$ **(E)** $\frac{1}{9}$

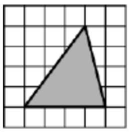
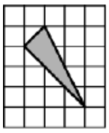
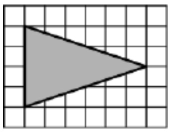
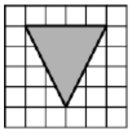
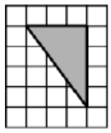
Sei x die gesuchte, besondere Zahl. Wenn man die Charakteristika dieser besonderen Zahl in eine Gleichung schreibt und löst, erhält man das Ergebnis $x = \mathbf{\frac{1}{9}}$.

$$x - \frac{1}{10} = x \cdot \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 10x - 1 = x \quad \Leftrightarrow \quad 9x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{9}$$

– 4 Punkte Beispiele –

11. Alex zeichnet drei Dreiecke auf kariertes Papier. Zwei von ihnen sind rechts abgebildet. Folgendes ist noch bekannt: Genau zwei der Dreiecke besitzen gleichen Flächeninhalt, genau zwei von ihnen sind gleichschenkelig und genau zwei der Dreiecke sind rechtwinkelig. Welches könnte das dritte Dreieck sein?



(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Beide in der Angabe gegebenen Dreiecke sind rechtwinkelig, daher darf das gesuchte Dreieck nicht rechtwinkelig sein. Damit scheiden die Dreieck (B) und (E) aus: In Dreieck (B) schließen die Dreiecksseiten durch den linken Eckpunkt mit den Gitterlinien 45°-Winkel ein, in Dreieck (E) ist eine Seite waagrecht, eine senkrecht.
Weiters ist genau eines der gegebenen Dreiecke gleichschenkelig, daher muss auch das gesuchte Dreieck gleichschenkelig sein. Damit scheidet Dreieck (A) (Seitenlängen $4, \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}, \sqrt{3^2+4^2} = 5$) aus.
Das Dreieck (C) hat den Flächeninhalt 12, während die gegebenen Dreiecke die Flächeninhalte 10 bzw. 8 haben. Weil das gesuchte Dreieck denselben Flächeninhalt wie eines der gegebenen Dreiecke haben muss, kommt nur mehr **(D)** als Lösung in Frage. Dieses hat wie das rechte gegebene Dreieck den Flächeninhalt 8.

12. Tom besitzt 10 Wunderkerzen derselben Größe. Er zündet die erste an. Als nur mehr ein Zehntel der Kerze übrig ist, zündet er die zweite Kerze an. Als nur mehr ein Zehntel dieser übrig ist, zündet er die dritte an und so weiter. Die Wunderkerzen brennen mit derselben Geschwindigkeit entlang der ganzen Länge der Kerze. Eine Wunderkerze brennt für 2 Minuten. Wie lange dauert es, bis alle 10 Wunderkerzen abgebrannt sind?

(A) 18 min 20 s **(B)** 18 min 12 s (C) 18 min (D) 17 min (E) 16 min 40 s

Während des Abbrennens aller 10 Wunderkerzen brennen 9-mal für ein Zehntel der gesamten Brenndauer von 2 Minuten = 120 Sekunden einer Wunderkerze je zwei Wunderkerzen gleichzeitig. Daher reduziert sich die Zeit des Abbrennens um $9 \cdot \frac{120 \text{ s}}{10} = 108 \text{ s} = 1 \text{ min } 48 \text{ s}$, sie beträgt daher statt 20 min nur
18 min 12 s.

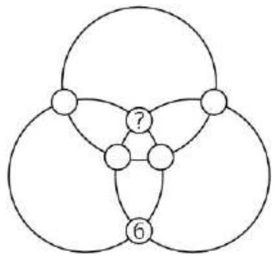
13. Andrea steigt acht Stufen hinauf. In jedem Schritt nimmt sie entweder eine Stufe oder zwei Stufen auf einmal. Die sechste Stufe kann sie nicht benutzen, weil sie kaputt ist.
Auf wie viele verschiedene Arten kann Andrea die achte Stufe erreichen?

(A) 6 (B) 7 **(C)** 8 (D) 9 (E) 10

Weil die sechste Stufe kaputt ist und Andrea in jedem Schritt nur ein oder zwei Stufen auf einmal nehmen kann, ist die achte Stufe für sie nur von der siebenten Stufe aus und die siebente Stufe nur von der fünften Stufe aus erreichbar. Daher kann Andrea die achte Stufe unter den gegebenen Bedingungen auf gleich viele verschiedene Arten erreichen wie die fünfte Stufe.
Steigt sie zuerst auf die erste Stufe, dann bleiben für sie noch vier Stufen in Einser- und Zweierschritten zu überwinden. Dafür hat sie insgesamt 5 Möglichkeiten:
Entweder sie steigt jeweils eine Stufe hinauf (1 Möglichkeit), oder sie macht zwei Einserschritte und einen Zweierschritt in beliebiger Reihenfolge (3 Möglichkeiten), oder sie macht zwei Zweierschritte (1 Möglichkeit).
Steigt sie zuerst auf die zweite Stufe, dann hat sie für den Rest 3 Möglichkeiten: Entweder sie macht drei Einserschritte (1 Möglichkeit), oder sie macht einen Einserschritt und einen Zweierschritt und überspringt damit entweder die dritte oder die vierte Stufe (2 Möglichkeiten).
Andrea kann also die fünfte und damit auch die achte Stufe auf $5 + 3 =$ **8 verschiedene Arten** erreichen.
Anmerkung: Alternativ kann man die Anzahl der verschiedenen Arten die fünfte Stufe zu erreichen auch folgendermaßen bestimmen:
Die fünfte Stufe wird ausschließlich mit Einserschritten erreicht (1 Möglichkeit).
Zum Erreichen der fünften Stufe wird genau einmal durch einen Zweierschritt eine der Stufen 1 bis 4 übersprungen (4 Möglichkeiten).
Die fünfte Stufe wird durch zwei Zweierschritte und einen Einerschritt erreicht. Der Einserschritt kann dabei vor, zwischen oder nach den Zweierschritten gemacht werden (3 Möglichkeiten).
Insgesamt ergibt das wiederum 8 Möglichkeiten.

14. Drei Ringe schneiden einander. Jeder Schnittpunkt ist durch einen kleinen Kreis markiert. In diese Kreise sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, dass die Summe aller Zahlen entlang jedes Rings gleich groß ist. Die Zahl 6 ist bereits eingetragen (siehe Abbildung).
Welche Zahl muss im Kreis mit dem Fragezeichen stehen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5



Wir bestimmen zuerst die „Ringsumme" S aller Zahlen entlang eines Ringes.
Die Summe der Zahlen 1 bis 6 ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Weil jede Zahl in zwei der drei Ringe vorkommt, erhält man, wenn man die drei „Ringsummen" zusammenzählt, die Gleichung $3 \cdot S = 2 \cdot 21 = 42$ beziehungsweise $S = 14$.
Jede der beiden Zahlen 4 und 5 kommt mit 6 gemeinsam in einem der drei Ringe vor, aber wegen $4 + 5 + 6 > 14$ nicht beide im selben Ring durch 6. Daher stehen 4 und 5 in zwei der vier kleinen Kreise am oberen Ring.
Im Ring mit den Zahlen 4 und 6 ist die Differenz zur Ringsumme 14 gleich 4, im Ring mit den Zahlen 5 und 6 ist die Differenz zur Ringsumme 14 gleich 3.
Sowohl zur Bildung der Restsumme 4 als auch zur Bildung der Restsumme 3 unter Verwendung von zwei der noch verbleibenden drei Zahlen 1, 2, 3 wird der Summand 1 benötigt. Daher muss im Kreis mit dem Fragezeichen beim zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise durch 6 **die Zahl 1** stehen.
Alternative 1: Die Summe aller sechs verwendeten Zahlen ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.
Wie oben gezeigt wurde, ist jede „Ringsumme" gleich 14. Weil die Kreise mit der Zahl 6 und mit dem Fragezeichen genau jene zwei Kreise sind, die nicht zum oberen Ring gehören, ist die Summe $6+?$ dieser zwei Zahlen gleich $21 - 14 = 7$.
Daher muss im Kreis mit dem Fragezeichen die Zahl 1 stehen.
Alternative 2: Wenn man die Paare (Summe der zwei Zahlen) der Kreise, die je zwei Ringe gemeinsam haben, zu u, v und w substituiert, erhält man $u + v = v + w = w + u$, also $u = v = w$
und wegen $u + v + w = 21$ (siehe vorherige Lösung) gilt $u = w = v = 7$. Insbesondere: $? = 7 - 6 = 1$.

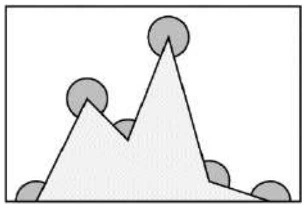
15. Die Zahl 2021 hat Rest 5 bei Division durch 6, durch 7, durch 8 und durch 9.
Wie viele positive ganze Zahlen, die kleiner als 2021 sind, haben ebenfalls diese Eigenschaft?

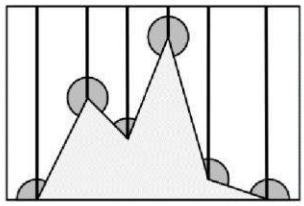
(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) keine

Eine Zahl hat (wie 2021) genau dann bei jeder der Divisionen durch 6, 7, 8 und 9 den Rest 5, wenn die um 5 kleinere Zahl durch 6, 7, 8 und 9 ohne Rest teilbar ist. Umgekehrt hat jede positive ganze Zahl, die um 5 größer ist als eine durch 6, 7, 8 und 9 teilbare Zahl, die geforderte Eigenschaft.
Wegen $6 = 2 \cdot 3, 8 = 2^3, 9 = 3^2$ gilt $\mathrm{kgV}(6, 7, 8, 9) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$. Daher haben alle positiven ganzen Zahlen der Form $504 \cdot k + 5$ kleiner als 2021 die geforderte Eigenschaft. Das ist der Fall für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ und ergibt die **vier Zahlen** 5, 509, 1013 und 1517.

16. Wie groß ist die Summe der sechs markierten Winkel in der Abbildung?

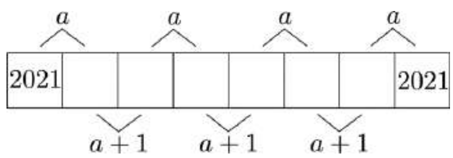
(A) 360° (B) 900° **(C)** 1080° (D) 1120° (E) 1440°





Wir legen durch den Scheitel jedes markierten Winkels eine Normale zur oberen Seite des Rechtecks.
Dadurch wird der Bereich über den 5 Seiten des im Rechteck eingezeichneten Streckenzugs in fünf Trapeze mit jeweils zwei rechten Winkeln zerlegt; darüber hinaus erhalten wir am linken und rechten Rand des Rechtecks zwei kleinere Rechtecke.
Jeder der sechs markierten Winkel wird dadurch in zwei Teilwinkel zerlegt:
In den zwei Rechtecken links und rechts liegt jeweils genau ein 90°-Teilwinkel.
Die beiden Teilwinkel in den 5 Trapezen ergänzen sich jeweils auf 180°.
Daher ist die Summe der sechs markierten Winkel $2 \cdot 90° + 5 \cdot 180° = \mathbf{1080}°$.

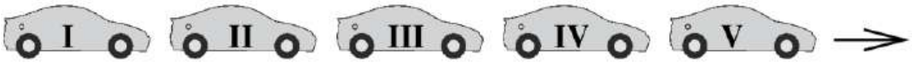
17. Der abgebildete Streifen ist in 8 Felder unterteilt.
Jedes Feld enthält eine Zahl. Die Summe zweier benachbarter Zahlen ist entweder a oder $a + 1$, wie abgebildet.
Die Zahlen im ersten und im achten Feld sind jeweils 2021.
Welchen Wert hat a?



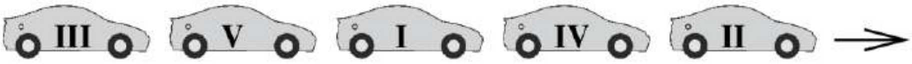
(A) 4041 (B) 4042 (C) 4043 (D) 4044 **(E)** 4045

Wir berechnen die Summe aller Zahlen im Streifen auf zwei Arten.
Beachten wir die Zahlen über dem Streifen, so ergibt sich als Summe $4a$.
Beachten wir die Zahlen unter dem Streifen, so ergibt sich als Summe $3(a + 1) + 2 \cdot 2021 = 3a + 4045$.
Das ergibt die Gleichung $4a = 3a + 4045$ mit der Lösung $\boldsymbol{a} = \mathbf{4045}$.
Alternative 1: Weil von links nach rechts die Summe benachbarter Zahlen abwechselnd a und $a + 1$ ist, ist die dritte Zahl gleich 2022, die vierte Zahl um 1 kleiner als die zweite Zahl, die fünfte Zahl gleich 2023 und letztlich die siebente Zahl gleich 2024. Daher gilt $a = 2024 + 2021 = 4045$
Alternative 2: Aufgrund der Symmetrie des Streifens ist auch die dritte Zahl von rechts gleich 2022, die fünfte Zahl von rechts (= vierte Zahl von links) gleich 2023. Damit ergibt sich $a + 1 = 2 \cdot 2023 = 4046, a = 4045$.

18. Fünf Autos nehmen an einem Rennen teil. Dieses Bild zeigt ihre Startaufstellung:



Die Autos erreichen das Ziel in folgender Reihenfolge:

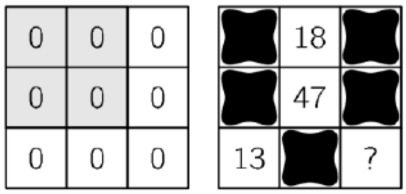


Bei jedem Überholmanöver überholt stets ein Auto genau ein anderes Auto.
Wie viele Überholmanöver hat es in diesem Rennen mindestens gegeben?

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

Sechs Überholmanöver reichen aus, um die Reihenfolge im Ziel herzustellen, etwa so:
Zuerst überholt Wagen 2 alle vor ihm liegenden Autos (3 Überholmanöver, Reihenfolge 1-3-4-5-2).
Dann überholt Wagen 4 Wagen 5 (1 Überholmanöver, Reihenfolge 1-3-5-4-2).
Zuletzt überholt Wagen 1 die Wagen 3 und 5 (2 Überholmanöver; Reihenfolge wie im Ziel 3-5-1-4-2).

19. Jedes Feld eines 3×3 Quadrates wird zu Beginn mit der Zahl 0 beschriftet. Danach wählen wir ein beliebiges 2×2 Teilquadrat (zum Beispiel das in der linken Abbildung grau markierte Teilquadrat) und erhöhen jeden Eintrag um jeweils 1. Nachdem wir diesen Vorgang einige Male wiederholt haben, erhalten wir die rechts dargestellte Beschriftung. Unglücklicherweise sind einige Einträge nicht sichtbar.
Welche Zahl steht in dem Feld mit dem Fragezeichen?



(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 19

Das zentrale Feld des 3×3 Quadrates (mit der Zahl 47) gehört zu jedem beliebigen 2×2 Teilquadrat, daher werden insgesamt 47-mal Einträge um 1 erhöht. 18-mal betrifft das eines der beiden oberen 2×2 Teilquadrate, daher werden 29-mal die Einträge in einem der beiden unteren 2×2 Teilquadrate um 1 erhöht. 13-mal betrifft das das linke untere 2×2 Teilquadrat, als werden 16-mal alle Zahlen im rechten unteren 2×2 Teilquadrat erhöht; im Feld mit dem Fragezeichen steht also die Zahl **16**.

20. Bei einem Teamwettbewerb starten fünf Teams mit 9, 15, 17, 19 beziehungsweise 21 Mitgliedern. Jedes Team besteht entweder nur aus Mädchen oder nur aus Burschen. Alle Mitglieder eines Teams starten gleichzeitig. Nach dem Start des ersten Teams ist unter den noch auf den Start Wartenden die Anzahl der Mädchen dreimal so groß wie die Anzahl der Burschen.
Aus wie vielen Personen besteht jenes Team, das bereits gestartet ist?

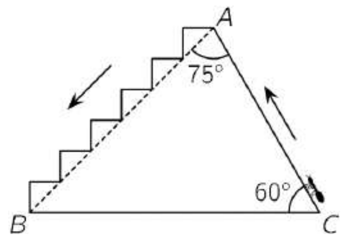
(A) 9 (B) 15 (C) 17 (D) 19 (E) 21

Insgesamt hat der Wettbewerb 81 TeilnehmerInnen. Wenn nach dem Start des ersten Teams noch dreimal so viele Mädchen wie Burschen auf den Start warten, dann bedeutet das, dass nach dem Start des ersten Teams noch eine durch 4 teilbare Anzahl von TeilnehmerInnen auf den Start warten. Daher startet zuerst das Team mit 17 oder 21 Mitgliedern.
Im ersten Fall warten noch 64 Personen auf den Start, von ihnen müssten ein Viertel, also 16 Burschen sein, was aufgrund der gegebenen Teamgrößen nicht möglich ist.
Im zweiten Fall warten noch 60 Personen – 15 Burschen und 45 Mädchen – auf den Start. Das ist möglich, wenn die Teams mit 9, 17 und 19 Mitgliedern Mädchenteams sind. Somit besteht das schon gestartete Team aus **21 Personen**.

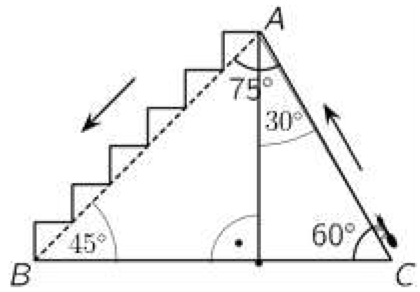
5 Punkte Beispiele

21. Eine Ameise klettert vom Punkt C geradlinig zum Punkt A hoch und krabbelt danach über die Treppe wieder hinunter zum Punkt B (siehe Abbildung). Wie groß ist das Verhältnis der Länge der Strecke CA zur Länge des Pfades AB entlang der Treppe?

(A) $1:1$ (B) $1:2$ (C) $1:3$ (D) $1:\sqrt{2}$ **(E)** $1:\sqrt{3}$



Wegen der Winkelsumme $180°$ im Dreieck erkennen wir, dass die strichlierte Linie *BA* die Steigung 1 bzw. den Steigungswinkel $45°$ hat. Zeichnet man in A die Höhe ein, erhält man rechts ein Dreieck mit den Winkeln $90°$, $60°$ und $30°$ - ein „halbes gleichseitiges Dreieck".
Wählen wir für die Strecke CA die Länge 2, dann hat die Höhe des gleichseitigen Dreiecks die Länge $\sqrt{3}$.
Die Länge des Treppenweges von A nach B ist zwei Mal diese Höhe.
Wir erhalten für das Verhältnis der Wege:
CA : Länge des Pfades entlang der Treppe $= 2 : 2\sqrt{3} = \mathbf{1 : \sqrt{3}}$



22. Es ist bekannt, dass $a+b+c=0$ ist und $abc=78$. Wie groß ist der Wert von $(a+b)(b+c)(c+a)$?

(A) -156 (B) -39 (C) 78 (D) 156 **(E)** ein anderer Wert

Wegen $a+b+c=0$ gilt: $a+b=-c$, $b+c=-a$ und $c+a=-b$.
Wir erhalten wegen der Angabe $abc=78$, dass
$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)=(-c)\cdot(-a)\cdot(-b)=-78$, also **(E), ein anderer Wert** als (A) - (D).
Bemerkung: Zahlentripel mit dieser Eigenschaft sind zum Beispiel:
$\left(\frac{13}{\sqrt[3]{5}},-\frac{3}{\sqrt[3]{5}},-\frac{10}{\sqrt[3]{5}}\right)$ oder $\left(\frac{27}{\sqrt[3]{9}},-\frac{26}{\sqrt[3]{9}},-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

23. Es sei N die kleinste Zahl, deren Ziffernsumme 2021 ist. Wie groß ist die Ziffernsumme von $N+2021$?

(A) 10 (B) 12 (C) 19 (D) 2021 (E) 2026

Damit eine Zahl mit großer Ziffernsumme möglichst klein wird, muss sie möglichst wenige Stellen haben. Dies erreicht man, indem man am Ende der Zahl nur 9 setzt.
Die Ziffernsumme von 2021 ist 5, das ist dann die erste Ziffer von N.
Es ist nicht nötig, die Anzahl der Stellen von N zu bestimmen, denn wenn man 1 zu N addiert, erhält man ein Zahl mit 6 als erster Stelle und alle anderen Stellen sind 0. Addiert man nun noch 2020, dann erhält man $N + 2021 = 60000\ldots0002020$. Also nur drei Stellen sind verscheiden von 0 und die gesuchte Ziffernsumme beträgt $\mathbf{10}$.
Berechnung von N:
Wegen

$$2021 = 2\cdot 1000 + 2\cdot 10 + 1 = 2\cdot(999+1) + 2\cdot(9+1) + 1 =$$
$$= 9\cdot(2\cdot 111 + 2) + 2 + 2 + 1 = 9\cdot 224 + 5$$

hat die Zahl N 225 Stellen: vorne 5 und dann 224 Mal die Ziffer 9. $N = 6\cdot 10^{224} - 1$und daher gilt

$$N+2021=(N+1)+2020=6\cdot 10^{224}+2020=6\ \underbrace{000\ldots000}_{2020\text{ Mal }0}\ 2020$$

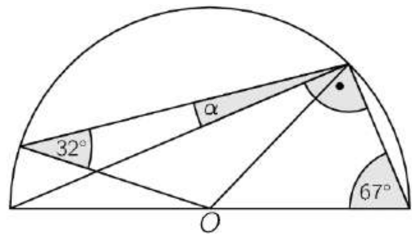
Bemerkung: Bei der Suche nach der kleinsten Zahl N bei gegebener Ziffernsumme ist die erste Ziffer immer die Ziffernsumme bzw. davon die Ziffernsumme etc.
Zum Beispiel hat die kleinste Zahl mit Ziffernsumme 5789 links die Ziffer 2, da

$$5789\xrightarrow[\text{Ziffernsumme}]{}29\xrightarrow[\text{Ziffernsumme}]{}11\xrightarrow[\text{Ziffernsumme}]{}2$$

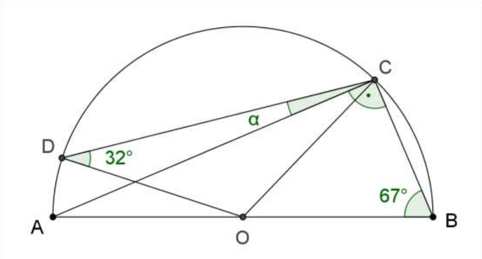
Es gilt: Eine Zahl hat bei Division durch 9 denselben Rest wie ihre Ziffernsumme.
Daraus folgt auch die bekannte 9er-Teilbarkeitsregel

24. Die Abbildung zeigt einen Halbkreis mit Mittelpunkt O.
Die Größen einiger Winkel sind gegeben.
Wie groß ist der Winkel α?

(A) 9° (B) 11° (C) 16° (D) 17,5° (E) 18°



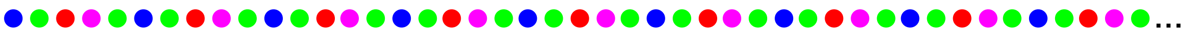
Wegen des Halbkreises sind die Dreiecke BCO und CDO gleichschenkelig mit jeweils zwei gleichen Winkeln.
Wir erhalten $\alpha+90^\circ=32^\circ+67^\circ \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha=9^\circ}$.



25. 2021 Bälle werden in einer Reihe aufgelegt und von links nach rechts mit den Zahlen 1 bis 2021 beschriftet. Jeder Ball ist in einer der vier Farben grün, rot, pink oder blau gefärbt. Unter beliebigen fünf aufeinanderfolgenden Bällen befinden sich immer genau ein roter, ein pinker und ein blauer Ball. Rechts von jedem roten Ball befindet sich ein pinker Ball. Die Bälle mit den Nummern 2 und 20 sind grün.
Welche Farbe hat der Ball mit der Nummer 2021?

(A) Grün (B) Rot (C) Pink (D) Blau (E) Das ist nicht eindeutig bestimmbar.

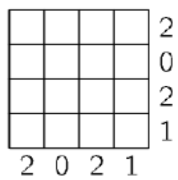
Da unter fünf aufeinander folgenden Bällen genau einer rot, einer pink und einer blau ist, müssen die beiden anderen grün sein.
Aus dieser Eigenschaft folgt auch, dass sich die Farben periodisch wiederholen mit Periodenlänge 5.
Da der 20. Ball grün ist, muss auch der 5. Ball grün sein, wegen des 2. Balls auch der 7.
Wegen der Nachbarschaft von rot und pink müssen diese zwischen 2. und 5. Ball liegen.
Somit ist die Reihenfolge fix:
Blau, grün, rot, pink, grün, blau, grün, rot, pink, grün, blau, grün, rot, pink, grün, blau, …



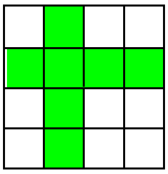
Der letzte Ball hat die gleiche Farbe wie der erste Ball, da $2021=1+5\cdot 404$, ist also **blau**.

26. In einer 4×4 Tabelle müssen einige der Felder schwarz angemalt werden. Die Zahlen neben und unter der Tabelle zeigen, wie viele Zellen genau in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte schwarz angemalt werden müssen.
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Tabelle anzumalen?

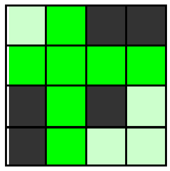
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) mehr als 5



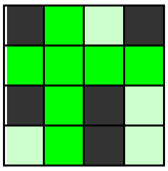
Diese Aufgabe lässt sich durch systematisches Probieren lösen. Eine Möglichkeit ist, die nicht angemalten Felder in der ersten Zeile zu variieren:



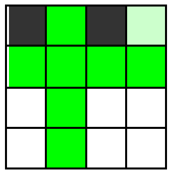
Wegen der beiden 0 in der Angabe, dürfen nur neun der 16 Fehler bemalt werden. Das ist bereits eine starke Einschränkung.
Die grünen Felder dürfen nicht bemalt werden.



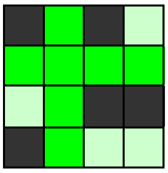
Fall 1: Wird das linke obere Feld auch nicht bemalt, dann müssen die beiden anderen in der ersten Spalte und ersten Zeile bemalt werden. Damit ist die vierte Zeile und vierte Spalte fixiert – es gibt nur eine Möglichkeit.

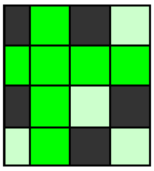


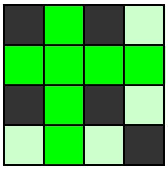
Fall 2: Das dritte Feld in der ersten Zeile bleibt frei. Dann müssen die unteren beiden Felder in der dritten Spalte bemalt werden, die unteren beiden in der 4. Spalte bleiben frei. Zuletzt muss das dritte Feld in der ersten Spalte bemalt werden.



Fall 3: Das letzte Feld in der ersten Zeile bleibt frei. Nun muss in jeder der drei noch zu belegenden Spalten genau ein weiteres Feld bemalt werden. Da in der letzten Zeile genau ein Feld bemalt wird (bzw. in der dritten Zeile ein weiteres nicht bemalt) gibt es folgende drei Möglichkeiten.







Insgesamt gibt es also **fünf Möglichkeiten**.

27.	Wie viele vierstellige positive ganze Zahlen gibt es, für die das Produkt ihrer Ziffern jeweils gleich 100 ist?				
	(A) 6	(B) 12	(C) 16	**(D)** 18	(E) 24

Mithilfe der Primfaktorenzerlegung von $100 = 2^2 \cdot 5^2$ erhält man zwei Varianten für derartige Zahlen: Da alle Ziffern kleiner als 10 sein müssen (und 0 ist auch verboten), müssen zwei der Ziffern 5 sein. Für die restlichen beiden Ziffern gibt es zwei Möglichkeiten: 2 Mal die Ziffer 2 oder eine Ziffer 4 und die andere Ziffer 1.
Wir müssen noch zählen, wie viele Möglichkeiten es jeweils gibt:
Zwei Mal Ziffer 2 und 2 Mal Ziffer 5: Dafür gibt es sechs Möglichkeiten.
Von den vier Stellen müssen zwei ausgewählt werden, an denen man die Ziffer 2 (bzw. 5) setzt, die restlichen werden mit der anderen Ziffer belegt. Dafür gibt es folgende sechs Möglichkeiten:
2255, 2525, 2552, 5225, 5252, 5522.
Bemerkung: Dies ist analog zur Aufgabe
„Wie viele Verbindungsstrecken haben vier Punkte, die ein Viereck bilden?“
Man muss zwei Punkte auswählen, die man verbindet. Die Strecken sind die vier Seiten und die zwei Diagonalen – also sechs Möglichkeiten.
Im zweiten Fall gibt es zwölf Möglichkeiten: Wir können die Ziffer 1 an vier verschiedene Stellen setzen, für die Ziffer 4 haben wir dann nur mehr drei freie Stellen, die übrigen beiden Stellen werden mit der Ziffer 5 belegt.
Diese zwölf Zahlen lauten:
1455, 1545, 1554, 4155, 4515, 4551, 5145, 5154, 5415, 5451, 5514, 5541.
Es gibt also insgesamt **18 Zahlen** mit der gewünschten Eigenschaft.

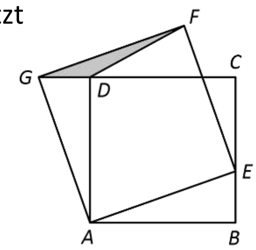
28. Drei Spieler schreiben je 10 Wörter auf. Jeder Spieler bekommt drei Punkte für jedes Wort, das kein anderer Spieler aufgeschrieben hat. Wenn genau ein weiterer Spieler dasselbe Wort aufgeschrieben hat, bekommen beide Spieler je einen Punkt. Für Wörter, die alle drei Spieler aufgeschrieben haben, bekommt kein Spieler einen Punkt. Als die Spieler ihre Punkte berechnen, stellen sie fest, dass je der eine andere Anzahl an Punkten erzielt hat. Samuel hat mit 19 am wenigsten Punkte und Johannes am meisten.
Wie viele Punkte hat Johannes erzielt?

(A) 20 (B) 21 (C) 23 (D) 24 **(E)** 25

Für die Zahl 19 gibt es nur zwei Möglichkeiten, diese Zahl als Summe von 10 Zahlen aus der Menge $\{3,1,0\}$ darzustellen: $19 = 6 \cdot 3 + 1 + 3 \cdot 0 = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ (weil $4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 < 19$ und $7 \cdot 3 + 3 \cdot 0 > 19$).
Die erste Variante würde aber bedeuten, dass alle drei Spieler für drei Wörter keine Punkte bekommen. Johannes müsste 7 Mal 3 Punkte erhalten, also mit niemandem ein weiteres Wort gemeinsam. Der dritte Spieler hätte aber dann mit Samuel ein Wort gemeinsam und würde ebenfalls 19 Punkte erhalten – im Widerspruch zur Information, dass alle drei Punktesummen verschieden sind.
Wir wissen daher, dass Samuel fünf Mal 3 Punkte, vier Mal 1 Punkt und einmal 0 Punkte erhalten hat.
Daraus folgt, dass alle drei Spieler für neun Wörter Punkte bekommen haben.
Die Frage ist nun, mit wem hat Samuel *ein* Wort gemeinsam (1 Punkt)?
Wäre das bei beiden Spielern je 2 Mal der Fall, dann würden die beiden anderen Spieler gleich viel Punkte erhalten – sie hätten sicher gleich oft 3 Punkte (hätten sie kein Paar gemeinsamer Wörter, würden beide 23 Punkte erhalten, bei einem Paar nur mehr 21, bei zwei Paaren nur 19 wie Samuel)
Samuel muss also mit einem Spieler drei Paare gemeinsam haben und mit einem eines.
Jener, der drei Paare mit Samuel gemeinsam hat, kann maximal $6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 21$ Punkte erhalten. Würde dieser mit dem anderen Spieler auch ein gemeinsames Paar haben, könnte er nicht mehr Punkte als Samuel haben. Also muss der zweitbeste Spieler 21 Punkte und nur mit Samuel gemeinsame Wortpaare haben.
Johannes, der Sieger, hat also einmal 0 Punkte, einmal 1 Punkt (er hat nur mit Samuel nur ein Wortpaar) und daher acht Mal 3 Punkte, also insgesamt **25 Punkte** erhalten.

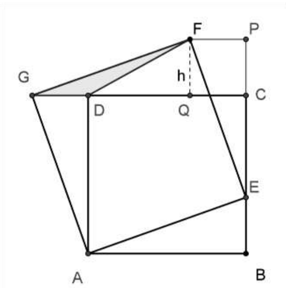
29. Das Quadrat *ABCD* besitzt einen Flächeninhalt von 16 und das graue Dreieck *DFG* besitzt einen Flächeninhalt von 1 (siehe Abbildung).
Wie groß ist der Flächeninhalt des Quadrates *AEFG*?

(A) 17 **(B)** 18 (C) 19 (D) 20 (E) 21



Wir erkennen, dass die Dreiecke *ABE* und *ADG* kongruente rechtwinkelige Dreiecke sind.
Hilfreich ist es, das Dreieck *ADG* parallel zu verschieben und erhalten *EPF*.
Wir erkennen, dass $DG = BE = PF = CQ = CP = QF$
Da $QF = h$ die Höhe des schraffierten Dreiecks und GD die gleich lange Basis ist, erhalten wir wegen der Dreiecksfläche :

$$A_{DFG} = 1 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$



Für die Seitenlänge a des Quadrats $ABCD$ gilt $a = 4$, da der Flächeninhalt 16 beträgt.
Mit dem Satz von Pythagoras in ADG erhalten wir die Seitenlänge und die Fläche des Quadrats $AEFG$:

$$A_{AEFG} = AG^2 = AD^2 + DG^2 = 16 + 2 = \mathbf{18}.$$

30. Christina besitzt acht Münzen, deren Massen in Gramm acht verschiedene positive ganze Zahlen sind.
Wenn Christina auf jede Seite einer Balkenwaage jeweils zwei Münzen legt, so ist die Seite, auf der sich die schwerste dieser vier Münzen befindet, immer die schwerere.
Wie viele Gramm wiegt die schwerste der acht Münzen mindestens?

(A) 8 (B) 12 **(C)** 34 (D) 128 (E) 256

Die Bedingung muss für jede Vierergruppe von Münzen gelten.
Betrachten wir zunächst die vier leichtesten Münzen. Wären diese 1g, 2g, 3g und 4g schwer, so wäre wegen 2+3=1+4 die Bedingung verletzt. Die schwerste der vier muss also zumindest 5g schwer sein.
Wir wählen also die vier leichtesten mit 1g, 2g, 3g, 5g.
Wenn wir nun eine fünfte Münze dazu nehmen – welche Masse m_5 ist dafür mindestens notwendig?
Betrachten wir den „worst case“: die beiden schwersten der übrigen vier sind „Gegner“ der neuen Münze – diese hat als „Partner“ die leichteste mit 1g
Wir erhalten: $3 + 5 < 1 + m_5$ als Bedingung:
Die kleinste Möglichkeit für m_5, die Masse der fünften Münze, ist also 3g+5g=8g
Analog gilt für m_6, dass $5 + 8 < 1 + m_6$ – also wählen wir optimal $m_6 = 13$g.
Analog gilt für m_7, dass $8 + 13 < 1 + m_7$ – also wählen wir optimal $m_7 = 21$g,
und schließlich gilt für m_8, dass $13 + 21 < 1 + m_8$ – also wählen wir optimal $m_8 = \mathbf{34g}$
Bemerkung: Diese Folge $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ ist die berühmte FIBONACCI-Folge, die bei vielen mathematischen Problemen die Lösung ist und auch in der Natur häufig auftritt.
Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/*Fibonacci-Folge*.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2021
18. 3. 2021

Kategorie: Student, Schulstufe: 11. – 13.

Vor- und Zuname:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

Mit meiner Unterschrift gebe ich das Einverständnis, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

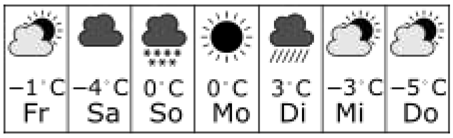
Ort, Datum Unterschrift

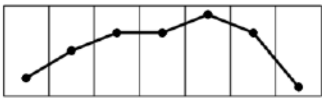
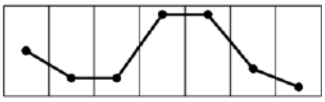
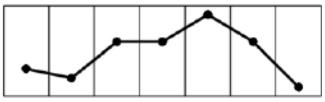
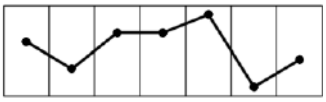
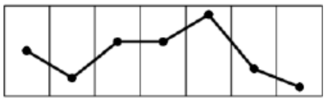
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2021
Gruppe Student (11., 12. und 13. Schulstufe)
Österreich – 18. 3. 2021

- 3 Punkte Beispiele -

1. Paula sieht in ihrer Wetter-App die vorhergesagten Höchsttemperaturen der nächsten sieben Tage, siehe Grafik.
Wie sieht der dazu passende Graph aus?



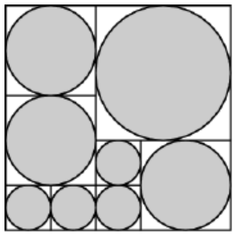
(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

2. Wie viele ganze Zahlen befinden sich im Intervall $\left(20-\sqrt{21}, 20+\sqrt{21}\right)$?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

3. Ein Würfel mit Kantenlänge 1 cm wird in zwei identische Quader zerschnitten.
Wie groß ist die Oberfläche eines solchen Quaders?

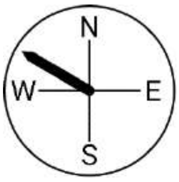
(A) $\frac{3}{2}$ cm² (B) 2 cm² (C) 3 cm² (D) 4 cm² (E) 5 cm²

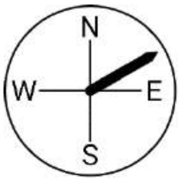


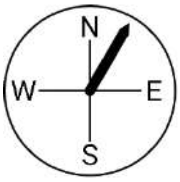
4. Ein großes Quadrat wird wie abgebildet in kleine Quadrate geteilt. Ein grauer Kreis wird in jedes kleine Quadrat eingeschrieben. Welcher Anteil der Fläche des großen Quadrats ist grau?

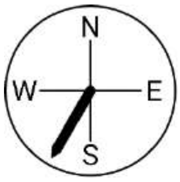
(A) $\frac{8\pi}{9}$ (B) $\frac{13\pi}{16}$ (C) $\frac{3}{\pi}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{\pi}{4}$

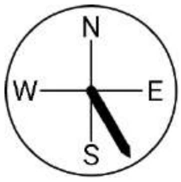
5. Nach dem gestrigen Sturm steht der Fahnenmast vor unserer Schule schief. Betrachtet man ihn von Nordwest, so sieht man ihn nach rechts geneigt. Auch bei Betrachtung von Ost erscheint er nach rechts geneigt.
Welche der fünf Ansichten von oben könnte den Fahnenmast zeigen?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

6. Für ein rechteckiges Blatt Papier mit der Länge x und der Breite y gilt $x > y$. Das Blatt kann man auf zwei Arten zu einem Drehzylinder zusammenrollen.
Wie groß ist das Verhältnis des Volumens des höheren Zylinders zum Volumen des niedrigeren Zylinders?

(A) $y^2 : x^2$ (B) $y : x$ (C) $1 : 1$ (D) $x : y$ (E) $x^2 : y^2$

7. Es sei $x = \frac{\pi}{4}$. Welcher der folgenden Ausdrücke hat den größten Wert?

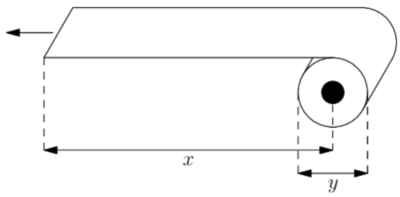
(A) x^4 (B) x^2 (C) x (D) $\sqrt{x}$ (E) $\sqrt[4]{x}$

8. Max schreibt dreistellige Zahlen auf und verwendet dabei nur die Ziffern 1, 3 und 5. Er darf dabei Ziffern auch mehrmals verwenden. Wie viele verschiedene Zahlen kann er bilden, die durch 3 teilbar sind?

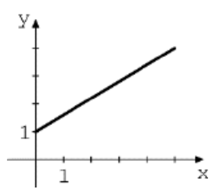
(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 18 (E) 27

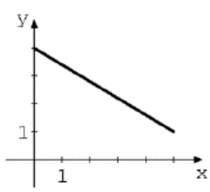
9. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten (p, q), $(3p, q)$ und $(2p, 3q)$ mit $p, q > 0$?

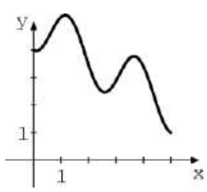
(A) $\frac{pq}{2}$ (B) pq (C) $2pq$ (D) $3pq$ (E) $4pq$

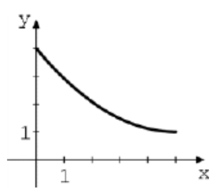


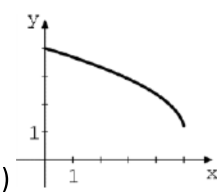
10. Ein verspielter Hund schnappt sich das Ende einer Toilettenpapierrolle und läuft mit konstanter Geschwindigkeit davon. Welche der folgenden Funktionskurven beschreibt am besten die Dicke y der Rolle als Funktion des abgerollten Teils x?



(A)


(B)


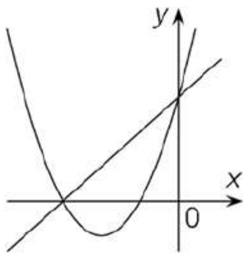
(C)


(D)


(E)

- 4 Punkte Beispiele -

11. Die Gleichung der abgebildeten Parabel lautet $y = ax^2 + bx + c$ für gewisse (paarweise verschiedene) reelle Werte von a, b und c.
Welche der folgenden Gleichungen könnte die Gleichung der abgebildeten Geraden sein?



(A) $y = bx + c$ (B) $y = cx + b$ (C) $y = ax + b$ (D) $y = ax + c$ (E) $y = cx + a$

12. Zwei Mengen A und B sind jeweils die Vereinigung zweier offener Intervalle, mit $A = (0,1) \cup (2,3)$ und $B = (1,2) \cup (3,4)$. Welche der folgenden Mengen ist die Menge aller Zahlen der Form $a + b$ mit $a \in A$ und $b \in B$?

(A) $(1,7)$ (B) $(1,5) \cup (5,7)$ (C) $(1,3) \cup (3,7)$ (D) $(1,3) \cup (3,5) \cup (5,7)$ (E) keine dieser Mengen

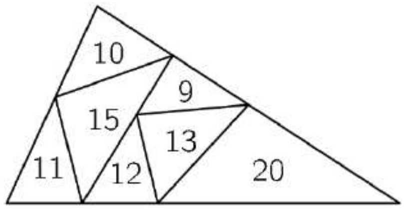
13. Wie viele positive dreiziffrige Zahlen haben die Eigenschaft, dass die Umkehrung der Reihenfolge ihrer Ziffern den Wert der Zahl um 99 erhöht?

(A) 8 (B) 64 (C) 72 (D) 80 (E) 81

14. Die positiven ganzen Zahlen von 1 bis 1000 werden in irgendeiner Reihenfolge angeschrieben. Dann werden alle Summen von je drei nebeneinander stehenden Zahlen berechnet.
Höchstens wie viele dieser 998 Summen können ungerade sein?

(A) 997 (B) 996 (C) 995 (D) 994 (E) 993

15. Ein großes Dreieck wird wie abgebildet in kleinere Dreiecke geteilt. Die Zahl im Inneren jedes kleinen Dreiecks gibt jeweils den Umfang des Dreiecks an.
Wie groß ist der Umfang des großen Dreiecks?

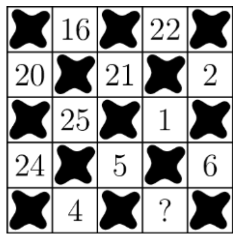


(A) 31 (B) 34 (C) 41 (D) 62 (E) eine andere Zahl

16. Für jede positive ganze Zahl N bezeichnen wir mit $p(N)$ das Produkt der Ziffern von N (in üblicher Dezimalschreibweise). So gilt zum Beispiel $p(23) = 2 \cdot 3 = 6$.
Was ist der Wert von $p(10) + p(11) + p(12) + \cdots + p(99) + p(100)$?

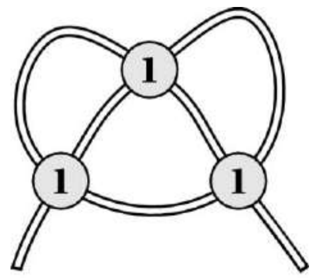
(A) 2025 (B) 4500 (C) 5005 (D) 5050 (E) eine andere Zahl

17. In jedem Feld des abgebildeten 5 x 5 Quadrats befindet sich eine Zahl, aber einige dieser Zahlen sind verdeckt. Die Summen der Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte sind gleich.
Welche Zahl befindet sich im Feld mit dem Fragezeichen?



(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 18 (E) 23

18. Eine Schnur liegt wie abgebildet auf einem Tisch. Wie im Bild zu sehen ist, ist sie teilweise durch drei Münzen verdeckt. Unter jeder Münze ist es gleich wahrscheinlich,



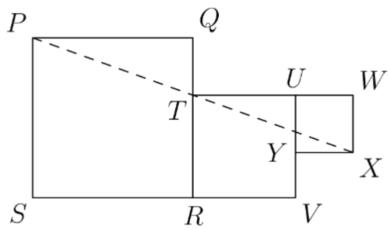
dass die Schnur so  oder so  liegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Schnur einen Knoten gibt, wenn man an beiden Enden anzieht?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{3}{8}$

19. Welcher Anteil aller Teiler von 7! ist ungerade?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{6}$

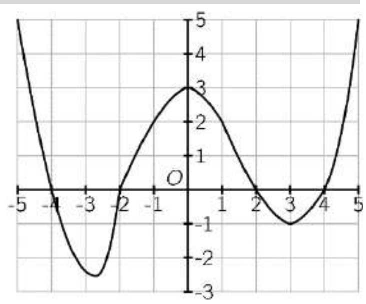
20. In der Figur sehen wir drei Quadrate *PQRS*, *TUVR* und *UWXY*. Sie liegen Seite an Seite so, dass die Punkte *P*, *T* und *X* auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Der Flächeninhalt von *PQRS* ist 36 und der von *TRVU* ist 16.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks *PXV*?



(A) $14\frac{2}{3}$ (B) $15\frac{1}{3}$ (C) 16 (D) $17\frac{2}{3}$ (E) 18

- 5 Punkte Beispiele -

21. In der Figur sehen wir den Graph einer Funktion $f\colon [-5,5] \to \mathbb{R}$.
Wie viele verschiedene Lösungen hat die Gleichung $f\big(f(x)\big) = 0$?

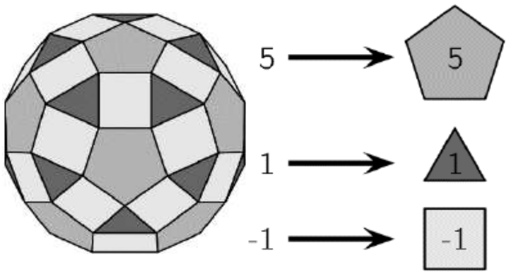


(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 8

22. Auf einem Tisch liegen sieben Spielkarten mit den Werten 1, 2, 7, 9, 10, 15 und 19. Zwei Spieler nehmen abwechselnd je eine Karte, bis nur noch eine Karte am Tisch liegt. Wir wissen, dass die Summe der Kartenwerte eines Spielers genau doppelt so groß ist wie die Summe der Kartenwerte des anderen Spielers.
Welche Karte liegt noch auf dem Tisch?

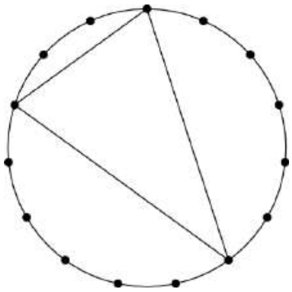
(A) 7 (B) 9 (C) 10 (D) 15 (E) 19

23. Zwölf Seitenflächen des abgebildeten 3D-Objekts sind regelmäßige Fünfecke. Alle übrigen Seitenflächen sind entweder gleichseitige Dreiecke oder Quadrate. Jede fünfseitige Fläche grenzt an 5 quadratische Flächen, jede dreieckige Fläche grenzt an drei quadratische Flächen. Johann schreibt die Zahl 5 auf jede fünfseitige Fläche, die Zahl 1 auf jede dreieckige Fläche und die Zahl -1 auf jede quadratische Fläche.
Wie groß ist die Summe aller Zahlen auf dem Objekt?



(A) 20 (B) 50 (C) 60 (D) 80 (E) 120

24. Auf einem Kreis befinden sich 15 Punkte in regelmäßigen Abständen. Wir können jeweils drei dieser Punkte zu einem Dreieck verbinden. Zwei derartige Dreiecke gelten als gleich, wenn sie kongruent sind, also wenn eines aus dem anderen durch eine Drehung und/oder Spiegelung hervorgeht.
Wie viele verschiedene Dreiecke kann man bilden?

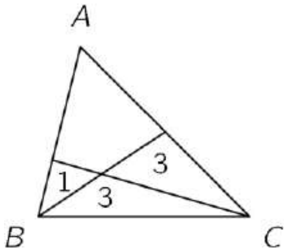


(A) 19 (B) 23 (C) 46 (D) 91 (E) 455

25. Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(1) = 2$ und $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Bestimme den Wert von $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \cdots + \frac{f(2021)}{f(2020)}$.

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 2020 (E) eine andere Zahl

26. Ein Dreieck *ABC* wird wie abgebildet durch zwei Strecken in vier Teile geteilt. Die Flächeninhalte der kleinen Dreiecke betragen 1, 3 und 3.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*?

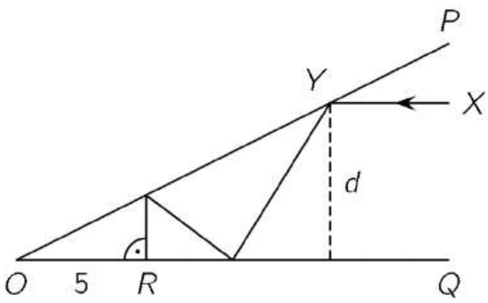


(A) 12 (B) 12,5 (C) 13 (D) 13,5 (E) 14

27. Für jede reelle Zahl k sei $M(k)$ der maximale Wert von $|4x^2 - 4x + k|$ für x im Intervall $[-1,1]$.
Was ist der kleinste Wert, den $M(k)$ annimmt?

(A) 4 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 5 (D) $\frac{11}{2}$ (E) 8

28. *OP* und *OQ* stellen ebene Spiegel dar, die einen spitzen Winkel einschließen. Ein zu *QO* paralleler Lichtstrahl *XY* trifft in *Y* auf den Spiegel *OP* und wird gespiegelt. Er trifft dann auf den Spiegel *OQ*, wird wieder gespiegelt, trifft wieder auf *OP* und wird gespiegelt, und trifft schließlich in *R* im rechten Winkel auf *OQ* (siehe Skizze). Der Abstand *OR* beträgt 5 cm. Wie groß ist der Abstand *d*, in dem der Lichtstrahl *XY* über dem Spiegel *OQ* verläuft?

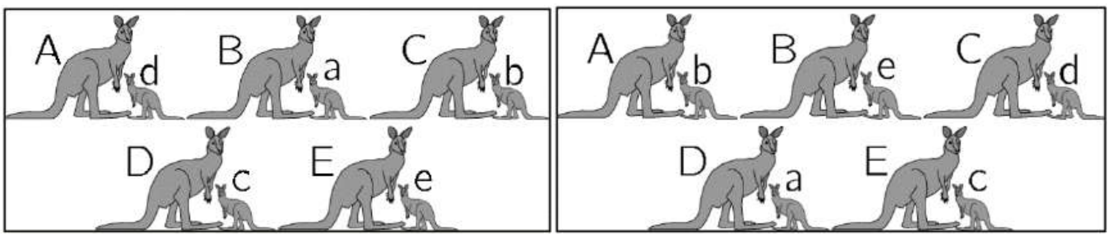


(A) 4 cm (B) $4\sqrt{2}$ cm (C) 5 cm (D) $5\sqrt{2}$ cm (E) 10 cm

29. Anton und Bernd werfen wiederholt eine faire Münze. Bei Kopf gewinnt Anton einen Punkt, bei Zahl Bernd. Das Spiel endet, sobald einer der beiden einen Vorsprung von drei Punkten hat und damit gewinnt. Nach einiger Zeit liegt Anton um einen Punkt in Führung.
Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Wahrscheinlichkeit, dass er das Spiel gewinnt?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{6}$

30. Fünf Kängurus mit den Namen A, B, C, D und E haben jeweils ein Kind. Die Kinder heißen a, b, c, d und e. Im linken Bild stehen genau zwei Kinder neben ihrer jeweiligen Mutter. Im rechten Bild stehen genau drei Kinder neben ihrer jeweiligen Mutter.
Wer ist die Mutter von a?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Känguru 2021 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Wir können aus den in der App angezeigten Temperaturen ablesen, an welchen Tagen der Punkt in der Grafik höher oder tiefer als an welchen anderen Tagen sein muss.

   Von Freitag auf Samstag sinkt die Temperatur, somit muss der zweite Wert niedriger als der erste sein, das schließt (A) schon einmal aus.

   Sonntag und Montag sind gleich warm, müssen also auf gleicher Höhe sein, was (B) ausschließt.

   Der Mittwoch liegt von der Temperatur her zwischen Freitag und Samstag, während in (C) der erste Tag kälter ist als der sechste.

   Der kälteste Tag ist der Donnerstag, somit muss der letzte Wert am niedrigsten sein. Dies spricht gegen (D).

   Bei **(E)** können wir überprüfen, dass alle Vergleiche zwischen Tagen korrekt sind.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Wir können auch zuerst die Tage nach absteigender Temperatur ordnen und erhalten die Reihenfolge Dienstag, Sonntag = Montag, Freitag, Mittwoch, Samstag, Donnerstag. Dann gehen wir in den fünf möglichen Grafiken jeweils von oben nach unten (also suchen den höchsten Punkt, dann den zweithöchsten, und so weiter) und schauen, ob wir dieselbe Reihenfolge erhalten.

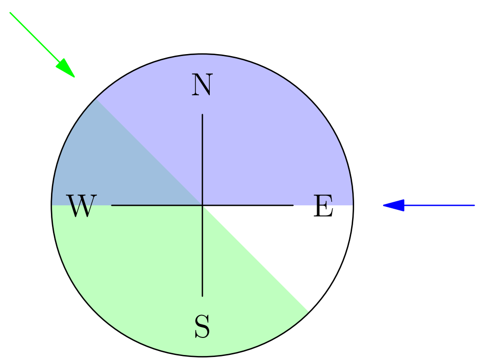
2. Der Wert von $\sqrt{21}$ liegt wegen $4^2 = 16 < 21 < 25 = 5^2$ zwischen den ganzen Zahlen 4 und 5 (konkret $\sqrt{21} \approx 4{,}583$), also liegt $20 - \sqrt{21}$ zwischen 15 und 16, während $20 + \sqrt{21}$ zwischen 24 und 25 liegt. Die ganzen Zahlen im Intervall $(20 - \sqrt{21}, 20 + \sqrt{21})$ sind daher 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, also **9** Stück.

3. Ein solcher Quader hat eine Grundfläche der Form $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$, eine ebensolche obere Fläche, und vier Seitenflächen mit jeweils $1\,\text{cm} \times 0.5\,\text{cm}$. Insgesamt beträgt die Oberfläche daher $2 \cdot 1\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} + 4 \cdot 1\,\text{cm} \cdot 0.5\,\text{cm} = 2 \cdot 1\,\text{cm}^2 + 4 \cdot 0.5\,\text{cm}^2 = 4\,\text{cm}^2$.

4. Da die Quadrate und die darin enthaltenen Kreise alle nur unterschiedlich vergrößerte oder verkleinerte Varianten derselben Figur sind, und das Flächenverhältnis sich beim zentrischen Strecken nicht ändert, genügt es, für ein einziges Quadrat und einen darin eingeschriebenen Kreis das Verhältnis zu berechnen.

   Wir wählen nun Zahlen, mit denen es sich leicht rechnen lässt, daher betrachten wir einen Kreis mit Radius $r = 1$, der einem Quadrat mit Seitenlänge $s = 2$ eingeschrieben ist. Die Fläche des Kreises beträgt $r^2\pi = 1^2\pi = \pi$ und die Fläche des Quadrates beträgt $s^2 = 2^2 = 4$. Deren Verhältnis ist daher $\frac{\pi}{4}$.

5. Betrachtet man den Fahnenmast von Nordwest (grüner Pfeil), so muss er im hier grün dargestellten Bereich sein, andernfalls würde er nach links geneigt erscheinen. Bei der Betrachtung von Osten (blauer Pfeil) muss er im blau gefärbten Bereich liegen, um nach rechts geneigt zu erscheinen. Er kann also nur im sowohl blau als auch grün gefärbten Sektor zwischen West und Nordwest liegen, wie es in **(A)** der Fall ist.



6. Das Volumen eines Zylinders berechnet sich als „Grundfläche mal Höhe“. Für den höheren Zylinder beträgt die Höhe x, während die Grundfläche ein Kreis mit Umfang y ist. Da ein Kreisumfang U sich aus dem Radius r berechnet als $U = 2r\pi$, erhalten wir $r = \frac{U}{2\pi} = \frac{y}{2\pi}$. Die Fläche A beträgt dann $A = r^2\pi = (\frac{y}{2\pi})^2 \cdot \pi = y^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$. Insgesamt ergibt sich somit ein Volumen von $V_h = x \cdot y^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$.

   Für den anderen Zylinder sind die Rollen von x und y vertauscht, also beträgt sein Volumen $V_n = y \cdot x^2 \cdot \frac{1}{4\pi}$. Betrachtet man das Verhältnis der beiden, so kürzt die Konstante $\frac{1}{4\pi}$ sich weg, und es bleibt ein Verhältnis von $V_h : V_n = xy^2 : yx^2$, oder gekürzt $\mathbf{y : x}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Mit ein wenig Erfahrung kann man dieses „Herauskürzen" eines konstanten Faktors auch durchführen, ohne ihn überhaupt erst auszurechnen, indem wir nur unterscheiden, ob sich zwei Größen zueinander „linear" oder „quadratisch" (oder „kubisch" oder ...) verhalten. Dazu betrachten wir, wie die zweite Größe sich verändert, wenn die erste mit einer positiven reellen Zahl t multipliziert wird. Wird die zweite Größe ebenfalls mit t multipliziert (zum Beispiel: doppelter Radius bei einem Kreis ergibt doppelten Umfang), so sagen wir, die Größen verhalten sich linear. Wird die zweite Größe mit t^2 multipliziert (zum Beispiel: doppelter Radius ergibt vierfache Fläche), so sagen wir, sie verhalten sich quadratisch. Wird die Größe mit t^3 multipliziert (zum Beispiel: doppelte Seitenlänge eines Würfels ergibt achtfaches Volumen), so sagen wir, sie verhält sich kubisch. Auch andere Verhältnisse sind möglich, wobei diese drei (linear, quadratisch und kubisch für ein-, zwei- bzw. dreidimensionale Objekte) im Alltag am häufigsten auftreten.

Die Fläche eines Kreises verhält sich quadratisch zu seinem Radius, und der Radius verhält sich linear zum Umfang. Somit verhält sich auch die Fläche quadratisch zum Umfang, oder anders ausgedrückt: Wenn die Umfänge der Zylinder sich wie $y : x$ verhalten, verhalten ihre Grundflächen sich wie $y^2 : x^2$. Die Höhen sind genau gleich der jeweils anderen Seite des Blattes und verhalten sich daher wie $x : y$. Das Volumen verhält sich wie das Produkt dieser Verhältnisse, also wie $y^2x : x^2y = \mathbf{y : x}$.

7. Da $\pi < 4$ ist, liegt x zwischen 0 und 1. Für eine solche Zahl gilt, dass x^y umso größer ist, je kleiner y ist. Von den fünf zur Auswahl stehenden Hochzahlen 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{4}$ am kleinsten, also $x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$ am größten.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

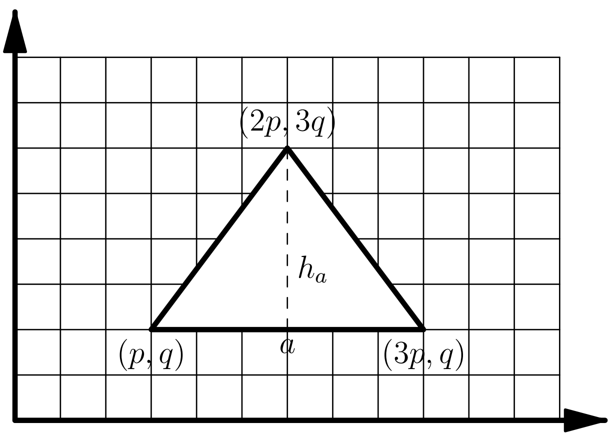
   Natürlich kann man (nach dem Wettbewerb) obige Überlegung auch mit einem Taschenrechner verifizieren und erhält

$$x = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785, \qquad x^4 \approx 0{,}381, \qquad x^2 \approx 0{,}617, \qquad \sqrt{x} \approx 0{,}886, \qquad \sqrt[4]{x} \approx 0{,}941.$$

8. Eine Zahl ist bekanntlich genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. Außer bei drei gleichen Ziffern (wo die Ziffernsumme das Dreifache dieser Ziffer beträgt) ist das nur möglich, wenn jede der Ziffern genau ein Mal vorkommt. (Sobald man zwei beliebige verschiedene Ziffern aus der Menge $\{1, 3, 5\}$ festlegt, kann man jeweils sofort ausrechnen, dass nur die dritte Ziffer die Summe auf eine durch drei teilbare Zahl ergänzt.)

   Es gibt also einerseits die drei Zahlen 111, 333 und 555, und andererseits sechs Möglichkeiten, drei verschiedene Ziffern anzuordnen, nämlich 135, 153, 315, 351, 513 und 531. Insgesamt existieren daher **9** solche Zahlen.

9. Die Fläche eines Dreiecks lässt sich auf viele Arten berechnen, unter anderen aber als „Grundlinie mal Höhe Halbe". Bei dieser Aufgabe sehen wir schnell, dass wir eine sehr bequeme Grundlinie zur Auswahl haben, die parallel zur x-Achse des Koordinatensystems (also waagrecht) verläuft, da die ersten beiden Punkte dieselbe y-Koordinate q haben. Die Länge a dieser Grundlinie beträgt $a = 3p - p = 2p$.



   Die dazugehörige Höhe h_a lässt sich als Abstand zu dieser Grundlinie direkt aus der Differenz der y-Koordinate des dritten Punktes zur Grundlinie ablesen, also $h_a = 3q - q = 2q$.

   Für die Fläche A des Dreiecks ergibt sich somit $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{2p \cdot 2q}{2} = \mathbf{2pq}$.

10. Wir gehen zunächst einmal davon aus, dass er doch ausreichend vorsichtig davonläuft, dass die Rolle nicht wie wild herumschaukelt. Die Dicke der Rolle ergibt sich aus der Anzahl der noch aufgewickelten Lagen. Um eine erste vollständige Lage abzuwickeln, muss der Hund relativ weit laufen. Die zweite Lage ist schon ein kleines Stückchen kürzer, weil der Radius kleiner geworden ist, und so weiter. Die letzte kurze Lage direkt am Karton ist ganz schnell abgewickelt.

    Der Durchmesser nimmt also die ganze Zeit über ab, wobei die Abnahme gegen Ende immer schneller wird. Ein solcher Verlauf ist in **(E)** dargestellt.

11. Zunächst betrachten wir die Parabel an der Stelle $x = 0$ und stellen fest, dass sie die y-Achse im Punkt $(0, c)$ schneidet. Eine Gerade geht genau dann dort durch die y-Achse, wenn ihr konstanter Term gleich c ist. Wegen $a \neq c$ und $b \neq c$ schließt das alle Möglichkeiten außer $y = ax + c$ und $y = bx + c$ aus.

    Von diesen beiden bemerken wir, dass die Gleichung $y = bx + c$ verdächtig ähnlich zu jener der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ aussieht. Schneiden wir die beiden, so erhalten wir aus $ax^2 + bx + c = bx + c$, was sich zu $ax^2 = 0$ vereinfacht, sofort die Doppellösung $x = 0$ (oder $a = 0$, was aber keine Parabel wäre). Tatsächlich ist $y = bx + c$ die Tangente an die Parabel im Punkt $(0, c)$ (wie wir auch verifizieren können, indem wir die Ableitung der Parabel berechnen und feststellen, dass diese an der Stelle $x = 0$ eine Steigung von b hat).

    Es bleibt somit nur die Möglichkeit $\mathbf{y = ax + c}$ übrig.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wir sollten (zumindest nach Ende des Wettbewerbes) dennoch noch darüber nachdenken, ob diese tatsächlich auch auftreten kann und für geeignete (paarweise verschiedene) a, b, c eine Figur wie in der gegebenen Abbildung erzeugt. Das Beispiel $a = 1$, $b = 4$, $c = 3$, also Parabel $y = x^2 + 4x + 3$ und Gerade $y = x + 3$, ist solch ein Beispiel, wie man durch Zeichnung oder Berechnung der Nullstellen leicht verifiziert.

    Im Anhang finden sich weitere Betrachtungen darüber, wie man alle möglichen Parabeln mit dieser Eigenschaft bestimmt, sowie über weitere interessante Eigenschaften solcher Parabeln.

12. Wir betrachten die vier Intervalle $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = (2, 3)$, $B_1 = (1, 2)$ und $B_2 = (3, 4)$ separat. Für $a \in A_1$ und $b \in B_1$ gilt $1 = 0 + 1 < a + b < 1 + 2 = 3$, also können wir alle Zahlen im Intervall $(1, 3)$ so bilden, aber keine anderen. Für $a \in A_2$ und $b \in B_1$ gilt $3 = 2 + 1 < a + b < 3 + 2 = 5$, aber auch für $a \in A_1$ und $b \in B_2$ gilt $3 = 0 + 3 < a + b < 1 + 4 = 5$, also können wir jeweils genau die Zahlen im Intervall $(3, 5)$ bilden. Für $a \in A_2$ und $b \in B_2$ schließlich gilt $5 = 2 + 3 < a + b < 3 + 4 = 7$, also können wir genau alle Zahlen im Intervall $(5, 7)$ so bilden. Die Vereinigung dieser Intervalle ergibt $\mathbf{(1, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 7)}$.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Wenn man mathematisch ganz ganz streng sein will, haben wir hier bislang nur bewiesen, dass keine Zahlen *außerhalb* dieser Vereinigung gebildet werden können und müssen jetzt für alle darin noch eine konkrete Konstruktionsvorschrift angeben. Dass man aber zum Beispiel die Zahl 2,77, die im Intervall $(1, 3)$ liegt, tatsächlich als Summe einer Zahl a aus dem Intervall $(0, 1)$ und einer Zahl b aus dem Intervall $(1, 2)$ bilden kann, ist wenig überraschend und daher verzichten wir hier auf einen mathematisch exakten Beweis.

13. Eine Erhöhung um 99 können wir, um es uns beim Rechnen etwas leichter zu machen, als eine Erhöhung um 100 gefolgt von einer Subtraktion von 1 sehen. Die Einerstelle der ursprünglichen Zahl kann nicht 0 sein, was wir auf verschiedene Arten leicht argumentieren können: Zum Beispiel ändert die mittlere Stelle sich beim Umkehren der Reihenfolge nicht; würde man von einer auf 0 endenden Zahl 1 abziehen, gäbe es aber einen Übertrag und die Zehnerstelle würde sich ebenfalls ändern. Andererseits ergäbe das Umkehren der Ziffernreihenfolge einer Zahl, die auf 0 endet, eine zweistellige (oder sogar einstellige) Zahl, die also sicher nicht größer als die ursprüngliche dreistellige Zahl ist.

    Somit gibt es beim Rechnen keine Überträge, sondern die Hunderterstelle erhöht sich um 1 und die Einerstelle verringert sich um 1. Andererseits sind Einer- und Hunderterstelle zwischen den beiden Zahlen auch vertauscht, also muss es sich um zwei aufeinanderfolgende Ziffern handeln. Ein mögliches solches Zahlenpaar wäre 485 und 584.

    Für die Hunderterziffer kommen dabei alle Ziffern von 1 bis 8 in Frage, die Einerziffer ist immer genau 1 höher. Für die Zehnerziffer ist jede Ziffer möglich, und alle Kombinationen sind möglich. Das ergibt insgesamt $8 \cdot 10 = \mathbf{80}$ solche Zahlen.

14. Da die genauen Zahlen irrelevant sind und nur zählt, ob eine Zahl gerade oder ungerade ist, betrachten wir Anordnungen von 500 „g“ und 500 „u“, die jeweils für eine beliebige gerade bzw. ungerade Zahl stehen. (Ob eine Zahl gerade oder ungerade ist, wird auch als „Parität“ dieser Zahl bezeichnet.)

    Nehmen wir an, es wäre möglich, dass alle 998 Summen ungerade sind. Da aus der Festlegung der ersten zwei Zahlen (zusammen mit der Forderung, dass alle Summen ungerade sein müssen) alle weiteren Paritäten eindeutig folgen, es für die ersten zwei Zahlen aber nur die vier Möglichkeiten „g, g“, „g, u“, „u, g“ und „u, u“ gibt, sehen wir, dass sich entweder ein Muster „…, u, g, g, u, g, g, …“ ergibt, das sich in beide Richtungen beliebig weit fortsetzt, oder ein Muster „…, u, u, u, u, u, u, …“.

    Im ersten Fall müssten aber etwa zwei Drittel der Zahlen von 1 bis 1000 gerade sein, was nicht der Fall ist, im zweiten Fall kämen überhaupt keine geraden Zahlen vor.

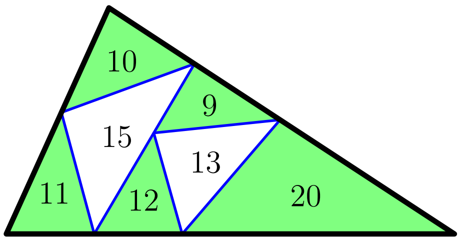
    Folglich ist es nicht möglich, dass alle 998 Summen ungerade sind. Wir schaffen aber eine Anordnung mit nur einem einzigen Fehler, indem wir die beiden Muster an der passenden Stelle zusammenfügen. Von links beginnen wir also mit einem sich wiederholenden Muster „u, g, g“, so lange, bis wir alle 500 geraden Zahlen verteilt haben. Zu diesem Zeitpunkt stehen 750 Zahlen in der Reihe. Den Rest füllen wir mit den verbleibenden 250 ungeraden Zahlen „u“ auf. Wir haben schon gezeigt, dass innerhalb jedes Musters alle Summen ungerade sind. Zu betrachten bleibt nur die Übergangsstelle zwischen erstem und zweitem Muster, die die Form

    …, u, g, g, u, g, g, u, g, g, u, u, u, u, u, u, u, u, u, …

    hat. Hier können wir leicht überprüfen, dass darin nur an einer Stelle (nämlich bei „g, u, u“) eine gerade Summe auftritt.

    Somit schaffen wir es, dass **997** der 998 Summen ungerade sind.

15. Wenn wir die Umfänge der hier grün dargestellten Dreiecke addieren, so haben wir jede Linie in der Figur genau ein Mal gezählt.

    Das ist etwas mehr, als wir haben wollen, nämlich genau um die blau markierten Linien zu viel. Deren Gesamtlänge lässt sich aber recht einfach ausrechnen: Sie entspricht genau dem Umfang der beiden weißen Dreiecke.

    Der Umfang des großen Dreiecks beträgt daher $11 + 12 + 20 + 9 + 10 - 15 - 13 = \mathbf{34}$.

16. Für alle Zahlen N, die auf 0 enden, ist $p(N) = 0$, daher können wir sie einfach weglassen.

    Für die verbleibenden Zahlen mit der Zehnerziffer 1 erhalten wir die Summanden $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$.

    Für die Zahlen mit der Zehnerziffer 2 erhalten wir die Summanden $2\cdot1+2\cdot2+\cdots+2\cdot9 = 2\cdot(1+2+\cdots+9) = 2 \cdot 45$.

    Dies wiederholt sich: Für jede Zehnerziffer k erhalten wir die Summanden $k \cdot 1 + k \cdot 2 + \cdots + k \cdot 9 = k \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = k \cdot 45$.

    Am Ende können wir noch ein weiteres Mal 45 herausheben und erhalten für die Summe S somit insgesamt:

$$\begin{aligned} S &= p(11) + \cdots + p(19) + p(21) + \cdots + p(29) + \cdots + p(91) + \cdots + p(99) \\ &= 1 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + \cdots + 9 \cdot 45 \\ &= (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot 45 \\ &= 45^2 = \mathbf{2025}. \end{aligned}$$

17. Wir bezeichnen die Zahlen hinter vier der Kleckse wie abgebildet mit a, b, c und d.

	16		22	
20	a	21	b	2
	25		1	
24	c	5	d	6
	4		?	

Da alle Zeilen- und Spaltensummen gleich sind, muss die Summe von zweiter und vierter Zeile minus die Summe von zweiter und vierter Spalte gleich 0 sein, also

$$(20 + a + 21 + b + 2) + (24 + c + 5 + d + 6) - (16 + a + 25 + c + 4) - (22 + b + 1 + d + ?) = 0$$
$$10 - ? = 0,$$

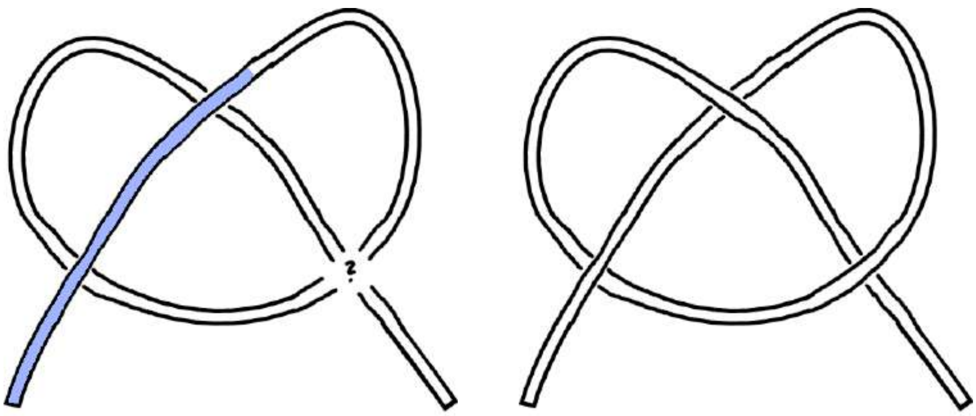
woraus sofort $? = \mathbf{10}$ folgt.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wenn man den schönen Trick nicht gleich sieht, kann man es sich – prinzipiell unter Ausnutzung derselben doppelt vorkommenden Kleckse – auch schrittweise herleiten. Die zweite Zeile hat eine Summe von $20 + a + 21 + b + 2 = 43 + a + b$, die zweite Spalte von $16 + a + 25 + c + 4 = 45 + a + c$. Da diese beiden gleich groß sein sollen und das a sich beim Gleichsetzen wegkürzt, folgt $b = c + 2$.

Für die vierte Zeile gilt nun $24 + c + 5 + d + 6 = 35 + c + d$ und für die vierte Spalte $22 + (c + 2) + 1 + d + ? = 25 + c + d + ?$. Setzt man diese gleich und kürzt, so ergibt sich $? = 10$.

18. Liegt der Teil der Schnur, der von links unten kommt (hier blau dargestellt), bei den beiden ersten Kreuzungen, die er passiert, jedes Mal oben, so kann man ihn nach oben wegheben, die Schlaufe darunter herausziehen und sieht, dass man keinen Knoten hat. Genau dasselbe (gespiegelt an der Ebene der Tischplatte sozusagen) passiert, wenn dieser Teil beide Male unten liegt. Falls die linke und die obere Kreuzung also gleich aussehen, gibt es keinen Knoten.



Dasselbe gilt, wenn die rechte und die obere Kreuzung gleich aussehen.

Einen Knoten könnte es also nur noch geben, wenn die obere Kreuzung eine der beiden Formen hat und die unteren beiden jeweils die andere. Tatsächlich sehen wir, dass es sich in diesem Fall um einen „normalen" einfachen Knoten handelt.

Insgesamt gibt es 8 Möglichkeiten, wie die Schnur liegen kann. Dabei sehen jeweils entweder alle drei Stellen gleich aus, oder zwei sehen gleich aus und die dritte anders. Davon erhalten wir nur bei jenen beiden Möglichkeiten, wo die unteren beiden Kreuzungen gleich aussehen und die obere anders, einen Knoten, was eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{8} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ ergibt.

19. Wir betrachten zunächst die Primfaktorisierung von 7! und erhalten $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

    Wir erhalten alle Teiler, wenn wir alle Möglichkeiten betrachten, eine Teilmenge dieser Faktoren (also bis zu vier Zweier, bis zu zwei Dreier, maximal einen Fünfer und maximal einen Siebener) zu multiplizieren. Davon sind genau jene gerade, die mindestens einen Zweier enthalten.

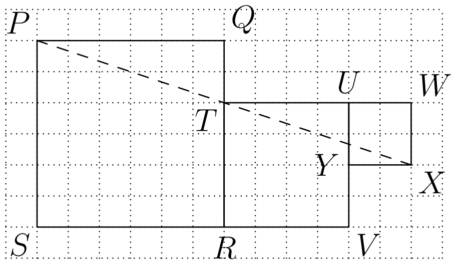
    Wenn wir diese Möglichkeiten systematisch aufschreiben, können wir zuerst alle aufschreiben, die vier Zweier enthalten, dann alle, die drei Zweier enthalten, dann alle mit zwei Zweiern, alle mit einem Zweier und schließlich alle ohne Zweier. Beim systematischen Aufschreiben der restlichen Kombinationen fällt uns aber vielleicht auf, dass wir jedes Mal dieselben – und damit insbesondere auch gleich viele – Kombinationen aus Dreiern, Fünfern und Siebenern aufschreiben. Wir haben also fünf gleich große Gruppen, von denen vier mindestens einen Zweier enthalten und die letzte nicht, womit genau $\mathbf{\frac{1}{5}}$ der Teiler ungerade ist.

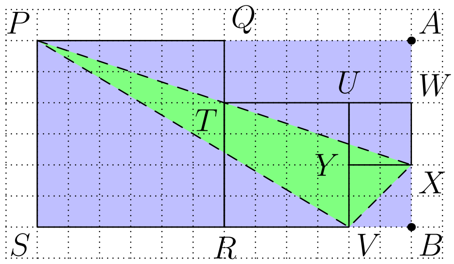
    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Die Anzahl der Teiler lässt sich genau über diese Idee des systematischen Aufschreibens auch leicht ausrechnen: Wir können 0, 1, 2, 3 oder 4 Zweier verwenden, 0, 1 oder 2 Dreier, 0 oder 1 Fünfer und 0 oder 1 Siebener, wobei alle Kombinationen daraus erlaubt sind. Das gibt $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 60$ Teiler.

    Dürfen wir keinen Zweier verwenden, bleiben $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten übrig.

20. Wir zeichnen die Skizze einmal auf kariertem Papier, wobei wir aus den Flächen sofort ausrechnen, dass die Seitenlängen von $PQRS$ und $TRVU$ gleich 6 bzw. 4 sind.

    Die Vermutung, dass die Seitenlänge von $UWXY$ gleich 2 ist, lässt sich durch Kästchenzählen leicht überprüfen: Gehen wir von T der Geraden PT weiter folgend um 6 nach rechts und um 2 nach unten (also genau um den Vektor PT), so landen wir am selben Punkt, wie wenn wir von U im 45°-Winkel (also entlang der Diagonale des Quadrats $UWXY$) um 2 nach rechts und um 2 nach unten gehen.

    Nun bleibt nur noch, die Fläche von PXV zu berechnen, wofür wir zwei weitere Gitterpunkte A und B wie abgebildet einzeichnen, und die Fläche nun aus mehreren leicht berechenbaren rechtwinkeligen Dreiecken und Rechtecken zusammensetzen. Konkret berechnen wir zuerst die gesamte Fläche des farbigen Rechtecks $PSBA$ und ziehen davon die drei blauen Dreiecke wieder ab, womit wir

    $$\begin{aligned}[PXV] &= [PSBA] - [PAX] - [VBX] - [PSV] \\ &= (12 \cdot 6) - \frac{12 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} - \frac{10 \cdot 6}{2} \\ &= 72 - 24 - 2 - 30 = \mathbf{16}\end{aligned}$$

    erhalten.

21. Wir überlegen zuerst, für welche Werte die Funktion gleich 0 wird und finden die einzigen vier Lösungen $f(-4) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$ und $f(4) = 0$. Damit $f(f(x)) = 0$ ist, muss demnach $f(x)$ gleich -4, -2, 2 oder 4 sein.

    - Für $f(x) = -4$ existieren keine Lösungen (da im Graph keine zu sehen sind und die Funktion außerhalb von $[-5, 5]$ gar nicht definiert ist).
    - Für $f(x) = -2$, also einen Schnitt der Funktion mit einer waagrechte Linie bei $y = -2$, existieren zwei Lösungen ungefähr bei $-3{,}3$ und bei $-2{,}3$. (Die genauen Werte sind nicht wichtig, nur die Anzahl der Lösungen.) Es gilt also zum Beispiel $f(f(-3{,}3)) = f(-2) = 0$.
    - Für $f(x) = 2$ existieren vier Lösungen, die wir auf dieselbe Art ablesen können, eine etwa bei $-4{,}4$, eine bei -1, eine bei $+1$ und eine etwa bei $4{,}6$.
    - Für $f(x) = 4$ schließlich existieren zwei Lösungen sehr nahe an -5 und 5.

    Insgesamt haben wir **8** Lösungen gefunden.

22. Wir nennen die beiden Spieler A und B und die Summe ihrer Kartenwerte a bzw. b, wobei $a = 2b$ gilt. Die Summe aller genommenen Karten $a + b = 2b + b = 3b$ ist durch 3 teilbar.

    Betrachten wir die Summe aller 7 Karten, so ist $1+2+7+9+10+15+19 = 63$ ebenfalls durch 3 teilbar, also muss die am Tisch verbliebene Karte einen durch 3 teilbaren Wert haben. Das schließt alles bis auf 9 und 15 aus.

    Nehmen wir an, 15 wäre die verbliebene Karte, dann wäre die Summe der genommenen Karten gleich $63 - 15 = 48$, also $a = 32$ und $b = 16$. Wir sehen schnell, dass wir hier keine tatsächliche Zuteilung der Karten finden: Die Karte 19 muss jedenfalls bei A landen, weil die Summe für B sonst schon mit dieser einen Karte zu hoch wäre. Es gibt aber keine Möglichkeit, zwei Karten auf die fehlenden $32 - 19 = 13$ zu kombinieren. (Auch viele andere Argumentationen, warum keine Zuordnung möglich ist, sind denkbar.)

    Somit muss die Karte **9** am Tisch bleiben, für die wir tatsächlich die Zuordnung $a = 7+10+19 = 36$ und $b = 1+2+15 = 18$ finden.

23. Die 12 Fünfecke haben in Summe $12 \cdot 5 = 60$ Kanten. Jedes Quadrat verwendet genau zwei davon, also existieren $60/2 = 30$ Quadrate.

    Bei jedem Quadrat grenzen zwei Kanten an Fünfecke und zwei an Dreiecke, somit gibt es auch 60 Kanten, die an Dreiecke grenzen. Jedes Dreieck benötigt 3 davon, also gibt es $60/3 = 20$ Dreiecke.

    Insgesamt erhalten wir als Summe der Zahlen auf der Oberfläche daher $12 \cdot 5 + 30 \cdot (-1) + 20 \cdot 1 = 60 - 30 + 20 =$ **50**.

24. Hier existieren zahlreiche Varianten, geschickt abzuzählen. Wichtig ist jeweils nur, alle Möglichkeiten zu finden und keine doppelt zu zählen.

    Wir bezeichnen als „Größe“ einer Dreiecksseite für diese Aufgabe die Anzahl der Punkte, um die man entlang vom Kreis weitergehen muss, um zum nächsten Eckpunkt zu kommen. Dabei sehen wir, dass die Summe der drei Größen immer 15 ergibt (eine ganze Runde um den Kreis). Weil Drehungen und Spiegelungen egal sind, suchen wir daher also eigentlich nur alle Arten, 15 als Summe von drei positiven ganzen Zahlen zu bilden.

    Wir machen eine Fallunterscheidung nach der größten auftretenden Zahl.

    - Es gibt keine Möglichkeit, die eine Zahl größer als 13 enthält, weil jede Zahl mindestens 1 sein muss und die Summe daher größer als 15 wäre.
    - Tritt 13 als größte Zahl auf, so existiert (bis auf Vertauschungen der Reihenfolge) nur die Möglichkeit $13 + 1 + 1$.
    - Tritt 12 auf, so existiert ebenfalls nur die Möglichkeit $12 + 2 + 1$.
    - Tritt 11 auf, so haben wir die Möglichkeiten $11 + 3 + 1$ und $11 + 2 + 2$.
    - Tritt 10 auf, so haben wir die Möglichkeiten $10 + 4 + 1$ und $10 + 3 + 2$.
    - Tritt 9 auf, so haben wir die Möglichkeiten $9 + 5 + 1$, $9 + 4 + 2$ und $9 + 3 + 3$.
    - Tritt 8 auf, so haben wir die Möglichkeiten $8 + 6 + 1$, $8 + 5 + 2$ und $8 + 4 + 3$.
    - Tritt 7 auf, so haben wir die Möglichkeiten $7 + 7 + 1$, $7 + 6 + 2$, $7 + 5 + 4$ und $7 + 4 + 4$.
    - Ist 6 die größte Zahl, so müssen wir nun erstmals darauf achten, dass wir keine Möglichkeiten mit einer größeren Zahl als 6 nochmals zählen, zum Beispiel $6+8+1$, was wir bereits als $8+6+1$ gezählt haben. Es bleiben somit nur $6 + 6 + 3$ und $6 + 5 + 4$, die wir noch nicht gesehen haben.
    - Mit 5 als größter Zahl gibt es nur die Möglichkeit $5 + 5 + 5$.
    - Kleiner als 5 kann die größte Zahl nicht sein, weil die Summe der drei Zahlen sonst kleiner als 15 wäre.

    Insgesamt haben wir daher $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 2 + 1 =$ **19** Möglichkeiten gefunden.

25. Wegen $f(x + 1) = f(x) \cdot f(1) = f(x) \cdot 2$ gilt

    $$\frac{f(x+1)}{f(x)} = 2$$

    für alle x. Daher haben alle Brüche $\frac{f(2)}{f(1)}$, $\frac{f(3)}{f(2)}$, $\frac{f(4)}{f(3)}$, $\ldots$, die in der gegebenen Summe auftreten, stets denselben Wert 2. Anhand der Nenner erkennen wir, dass es 2020 Brüche sind, daher beträgt die Summe **4040**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wenn uns die Rechenregeln für Exponentialfunktionen ein wenig geläufig sind – die bekannte Rechenregel $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ schaut der Bedingung ja auf den ersten Blick recht ähnlich –, dann vermuten wir recht schnell, dass $f(x) = 2^x$ eine mögliche Funktion sein könnte, und überprüfen dafür auch leicht, dass $f(1) = 2^1 = 2$ und $f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ tatsächlich erfüllt sind.

Dann gilt aber

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{2^{x+1}}{2^x} = 2$$

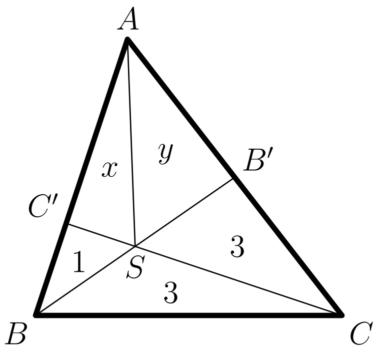
für alle x, also hat wie zuvor jeder Bruch den Wert 2.

Falls wir eine mögliche Funktion nicht gleich erraten (oder Sorge haben, die Lösung könnte nicht eindeutig sein), können wir auch die Funktionswerte an den benötigten Stellen ausrechnen. Dabei können wir für alle positiven ganzen Zahlen x die Rechenregel immer wieder anwenden und erhalten

$$f(x) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{x}) = f(1) \cdot f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{x-1}) = \cdots = \underbrace{f(1) \cdot f(1) \cdots f(1)}_{x} = (f(1))^x = 2^x.$$

Die Funktion hat für alle positiven ganzen Zahlen x also tatsächlich den Wert $f(x) = 2^x$. Mit ähnlichen Überlegungen können wir das sogar für alle rationalen Zahlen zeigen. Ob die Funktion an allen irrationalen Stellen ebenfalls so definiert ist, ist aber nicht eindeutig bestimmt.

26. Seien BB' und CC' die beiden Strecken und S ihr Schnittpunkt. Wir zeichnen wie abgebildet eine weitere Strecke SA ein und bezeichnen die Fläche $[C'SA]$ mit x und die Fläche $[B'SA]$ mit y.



Wir werden nun wiederholt nutzen, dass die Fläche eines Dreiecks sich als „Grundlinie mal Höhe Halbe“ berechnet. Haben zwei Dreiecke dieselbe Höhe, so verhalten sich ihre Flächen zueinander daher gleich wie ihre Grundlinien.

Da die Dreiecke BSC und $B'SC$ den gleichen Flächeninhalt und die gleiche Höhe durch C haben, müssen auch ihre Grundlinien gleich lang sein, also $BS = SB'$.

Für die Dreiecke BSA und $B'SA$, die damit gleich lange Grundlinien BS bzw. $B'S$ und auch die gleiche Höhe durch A haben, folgt, dass ihre Flächeninhalte gleich groß sein müssen, also $1 + x = y$.

Andererseits gilt für die Dreiecke CSB und $C'SB$, dass sie dieselbe Höhe durch B haben, aber eines drei Mal so groß ist wie das andere, also muss auch die Grundlinie CS drei Mal so lang sein wie die Grundlinie $C'S$.

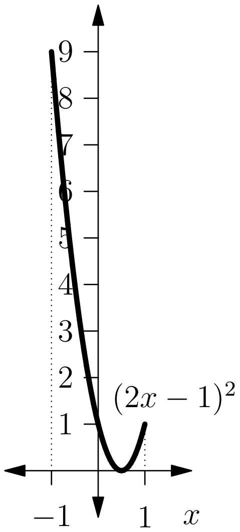
Dann folgt in den Dreiecken CSA und $C'SA$ mit derselben Höhe durch A aus dem Verhältnis der Grundlinien schließlich $[CSA] = 3 \cdot [C'SA]$, also $3 + y = 3 \cdot x$.

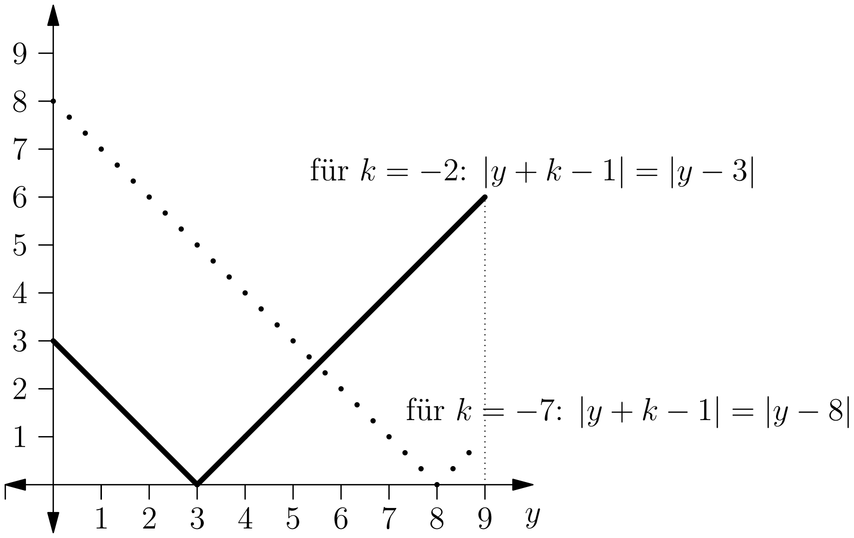
Lösen wir das Gleichungssystem $1+x = y$ und $3+y = 3x$, beispielsweise indem wir die beiden Gleichungen addieren, so erhalten wir $4+x+y = y+3x$, also $4 = 2x$, folglich $x = 2$ und $y = 1+x = 3$. Die Gesamtfläche ist dann $x + y + 3 + 3 + 1 =$ **12**.

27. Mit dem Trick, auf ein vollständiges Quadrat zu ergänzen, gilt

$$|4x^2 - 4x + k| = |4x^2 - 4x + 1 - 1 + k| = |(2x-1)^2 + k - 1|.$$

Dabei ist $(2x-1)^2$ eine nach oben offene Parabel, die die x-Achse bei $x = \frac{1}{2}$ berührt, siehe linke Abbildung. Für x im Intervall $[-1, 1]$ nimmt sie ihren größten Wert demnach am weitesten weg von ihrem Tiefpunkt an, also bei $x = -1$ mit $(2 \cdot (-1) - 1)^2 = (-3)^2 = 9$.



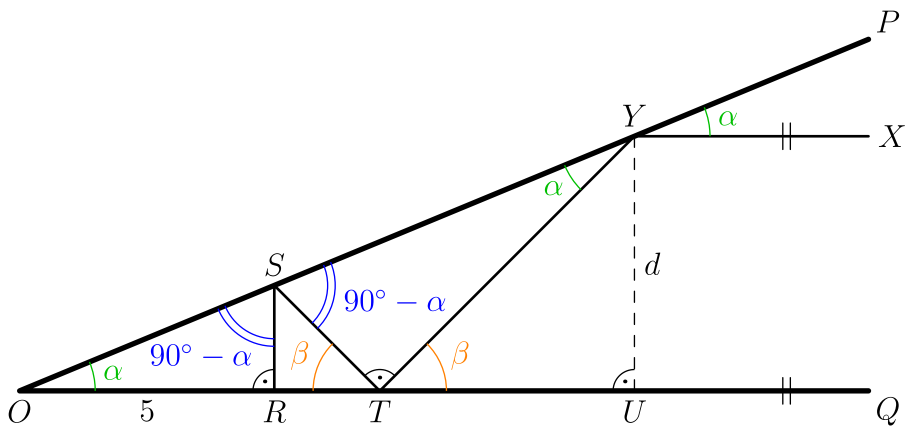


Der Ausdruck $(2x-1)^2$ nimmt also alle Werte von 0 bis 9 an, und wir können die Aufgabe dazu vereinfachen, dass $M(k)$ der maximale Wert von $|y + k - 1|$ für y im Intervall $[0, 9]$ ist.

Da k in diesem Kontext eine Konstante ist, ist $|y+k-1|$, wenn wir es als Funktion in y betrachten, einfach der Absolutwert einer Geraden (siehe rechte Abbildung), und daher erkennen wir, dass das Maximum entweder für $y = 0$ oder für $y = 9$ angenommen wird (oder für beide).

Am kleinsten wird dieses Maximum, wenn der „Knick“ in $|y + (k-1)|$ möglichst mittig zwischen 0 und 9 liegt, also für $(k-1) = -\frac{9}{2}$, somit $M(k)$ als Maximum von $|y - \frac{9}{2}|$, und es gilt $|0 - \frac{9}{2}| = |9 - \frac{9}{2}| = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$.

28. Wir bezeichnen die Punkte, wo der Strahl auf einen der Spiegel trifft, wie in der folgenden Abbildung.



Sei $\alpha := \sphericalangle ROS$. Da OQ und YX parallel sind, gilt wegen dem Parallelwinkelsatz $\sphericalangle XYP = \sphericalangle ROS = \alpha$, und wegen dem physikalischen Spiegelungsgesetz „Einfallswinkel ist gleich Ausfallswinkel“ ist auch $\sphericalangle TYS = \sphericalangle XYP = \alpha$.

Im rechtwinklingen Dreieck ORS gilt $\sphericalangle RSO = 90^\circ - \sphericalangle ROS = 90^\circ - \alpha$, und wegen dem Spiegelungsgesetz ist auch $\sphericalangle TSY = \sphericalangle RSO = 90^\circ - \alpha$.

Dann folgt aus der Winkelsumme im Dreieck STY sofort, dass der dritte Winkel $\sphericalangle YTS$ ein rechter Winkel sein muss, und die Dreiecke ORS und YTS sind ähnlich.

Wegen dem Spiegelungsgesetz gilt auch $\sphericalangle STR = \sphericalangle YTU =: \beta$. Da die Dreiecke STR und YTU darüber hinaus beide einen rechten Winkel haben, sind auch sie zueinander ähnlich.

Nutzen wir nun zuerst die Ähnlichkeit zwischen ORS und YTS und dann jene zwischen STR und YTU, so erhalten wir

$$OR : RS = YT : TS = YU : RS.$$

Daraus kürzt sich die Länge RS weg, und es bleibt $OR = YU$, also $d = \mathbf{5}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Tatsächlich können wir viel mehr ausrechnen (und damit auch etwas schrittweiser und ohne Benutzung von Verhältnissen zum Ziel kommen).

Rund um den Punkt T gilt $180° = \sphericalangle UTY + \sphericalangle YTS + \sphericalangle STR = \beta + 90° + \beta$, also $\beta = 45°$, womit SRT und YUT gleichschenkelige rechtwinkelige Dreiecke („Geodreiecke“) sind.

Sei $x := RS$. Im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck SRT gilt dann bekanntlich $TS = SR \cdot \sqrt{2} = x \cdot \sqrt{2}$.

Nun sind ORS und YTS ähnlich, also gilt

$$\begin{aligned} YT : OR = TS : RS \quad &\Longleftrightarrow \\ \frac{YT}{5} = \frac{x \cdot \sqrt{2}}{x} \quad &\Longleftrightarrow \\ YT = 5 \cdot \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dann gilt schließlich im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck YUT, dass

$$d = YU = \frac{YT}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5.$$

Übrigens können wir rund um den Punkt S auch noch $180° = \sphericalangle OSR + \sphericalangle RST + \sphericalangle TSY = 90° - \alpha + 45° + 90° - \alpha$ ablesen, also $\alpha = 22{,}5°$. Rein aus der Beschreibung, dass der Lichtstrahl zuerst parallel und nach drei Spiegelungen normal auf den Spiegel steht, lässt sich also sogar der Winkel zwischen den beiden Spiegeln eindeutig bestimmen, was zwar für die Lösung der Aufgabe nicht nötig, aber eine interessante Beobachtung ist.

29. Da das Spiel bei einem Vorsprung von drei Punkten endet, gibt es nur 7 mögliche Spielsituationen. Wir überlegen, wie groß in jeder dieser Situationen die Wahrscheinlichkeit ist, dass Anton gewinnt. Bei einem Vorsprung von +3 Punkten hat er bereits gewonnen, gewinnt also zu 100%. Bei einem Vorsprung von −3 Punkten, also einem Vorsprung für Bernd von 3 Punkten, hat Bernd gewonnen, also gewinnt Anton zu 0%. Bei einem Vorsprung von ±0 Punkten, also bei Gleichstand, ist es wegen der Symmetrie für beide gleich wahrscheinlich zu gewinnen, also jeweils 50%.

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass Anton bei einem Vorsprung von +1 Punkt gewinnt, mit x, und die Wahrscheinlichkeit, dass er bei einem Vorsprung von +2 Punkten gewinnt, mit y. Wegen der Symmetrie ist die Wahrscheinlichkeit bei einem Vorsprung von −1 und −2 Punkten gleich $100\% - x$ bzw. $100\% - y$. (Wenn Bernd einen Vorsprung von zwei Punkten hat, ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bernd gewinnt, gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass Anton gewinnt wenn Anton einen Vorsprung von zwei Punkten hat.)

Vorsprung von Anton:	+3	+2	+1	±0	−1	−2	−3
Gewinnchance für Anton:	100%	y	x	50%	$100\% - x$	$100\% - y$	0%

Um x und y herauszubekommen (wovon x in der Aufgabe gesucht ist), müssen wir jetzt irgendwie ein Gleichungssystem aufstellen, wofür es mehrere Möglichkeiten gibt.

Eine einfache Möglichkeit ist zu sagen, dass nach jedem Münzwurf die Wahrscheinlichkeit, um eine Spalte nach links oder nach rechts zu wandern, gleich groß ist (entweder Anton baut seinen Vorsprung um 1 aus oder verringert ihn um 1). Die Wahrscheinlichkeit, in irgendeiner Situation zu gewinnen, kann man immer ausrechnen, indem man alle von dort möglichen nächsten Schritte betrachtet und jeweils Gewinnwahrscheinlichkeit in diesem Fall mit der Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Falles multipliziert.

Wenn Anton mit $+1$ vorne liegt, tritt mit 50% Wahrscheinlichkeit ein, dass er seinen Vorsprung auf $+2$ ausbaut und dann eine Gewinnchance von y hat. Mit den restlichen 50% Wahrscheinlichkeit verliert er seinen Vorsprung, es herrscht also wieder Gleichstand, und er hat dann eine Gewinnchance von 50%. Also gilt $x = 50\% \cdot y + 50\% \cdot 50\%$, oder, statt in % in Zahlen zwischen 0 und 1 angeschrieben, $x = 0{,}5 \cdot y + 0{,}5 \cdot 0{,}5$.

Dieselbe Überlegung gilt bei einem Vorsprung von $+2$: In der Hälfte der Fälle gewinnt er im nächsten Zug, in der anderen Hälfte fällt er wieder zurück auf $+1$, also $y = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot x$.

Wenn wir beide Gleichungen noch mit 4 multiplizieren, um die lästigen Kommazahlen loszuwerden, bleibt uns das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x &= 2y + 1, \\ 4y &= 2 + 2x, \end{aligned}$$

das schnell gelöst ist, beispielsweise indem wir $y = \frac{2+2x}{4} = \frac{1+x}{2}$ aus der zweiten Gleichung in die erste einsetzen, $4x = (1 + x) + 1$ erhalten und daraus $x = \mathbf{\frac{2}{3}}$ ausrechnen.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Eine weitere (im Kern mathematisch identische) Möglichkeit, auf eine Gleichung für x zu kommen, besteht darin, von $+1$ aus einen Spielbaum zu betrachten. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% landen wir bei ± 0 mit einer Gewinnchance von 50%. Im anderen Fall betrachten wir auch noch den übernächsten Zug. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% wird der Vorsprung zuerst $+2$ und fällt dann wieder auf $+1$ zurück, womit die Gewinnchance wieder x ist. Mit einer Wahrscheinlichkeit von den restlichen 25% gewinnt Anton zwei Punkte nacheinander und damit das Spiel. Somit erhalten wir

$$x = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot x + 0{,}25 \cdot 1.$$

(Im Prinzip ist das dasselbe wie zuvor, nur, dass wir die zweite Gleichung bereits durch eine Überlegung eingesetzt haben, ohne y jemals explizit zu betrachten.)

Als weitere Möglichkeit können wir von $+1$ aus *immer* die nächsten zwei Züge betrachten. In einem von vier Fällen holt Anton zwei Punkte und gewinnt. In zwei von vier Fällen ($+1 - 1$ oder $-1 + 1$) ist der Vorsprung nach zwei Würfen wieder $+1$. Und im letzten der vier Fälle wendet sich das Blatt, Anton verliert zwei Punkte und Bernd liegt nun in Führung. Wir haben also

$$x = 0{,}25 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot x + 0{,}25 \cdot (1 - x),$$

woraus x sich wieder direkt ausrechnen lässt. (Diese Variante ist mathematisch ein klein wenig anders, weil wir die Symmetrieüberlegung zwischen -1 und $+1$ statt jene bei Gleichstand genutzt haben.)

30. Wenn im linken Bild zwei Kinder richtig stehen und drei falsch, dann müssen letztere drei reihum getauscht haben, also irgendein x zur Mutter von y, y zur Mutter von z und z zur Mutter von x; wir können leicht überprüfen, dass es keine andere Möglichkeit gibt, wie genau drei falsch stehen können.

    Um vom linken Bild zum rechten zu kommen, laufen zuerst einmal diese drei wieder nach Hause. Damit genau zwei falsch stehen, müssen nun zwei Kinder die Plätze tauschen.

    Wir sehen, dass kein Kind im rechten Bild gleich steht wie im linken, daher müssen die beiden, die ihre Plätze getauscht haben, genau jene zwei sein, die im linken Bild richtig gestanden sind.

    Wenn wir vergleichen, welches Kind zwischen linkem und rechtem Bild wohin gegangen ist, dann haben b und d die Plätze getauscht, also sind sie die beiden, die rechts falsch stehen und links richtig. (Wir sehen auch, dass a dorthin gegangen ist, wo zuvor c gestanden ist, c dorthin, wo e gestanden ist und e dorthin, wo a war, also sind sie die drei, die reihum getauscht haben.)

    Im rechten Bild stehen daher alle richtig bis auf b und d, also steht dort a bei seiner Mutter **D**.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Man kann auch eine Fallunterscheidung machen. Kein Kind steht rechts bei der gleichen Mutter wie links, also steht jedes Kind mindestens ein Mal falsch. Wir wissen aber auch, dass links zwei und rechts drei Kinder richtig stehen, also sind von den insgesamt 10 abgebildeten Paaren (in beiden Bildern zusammen) auch fünf korrekt, folglich steht jedes Kind auch ein Mal richtig.

    Also steht a entweder im linken Bild richtig bei B oder im rechten Bild richtig bei D.

Nehmen wir an, a steht im linken Bild richtig. Dann ist B die Mutter von a, also ist sie insbesondere nicht die Mutter von e, das im rechten Bild neben ihr steht.

Also steht e im linken Bild richtig bei E. Dann ist E nicht die Mutter von c im rechten Bild, also steht c links richtig bei D. Jetzt haben wir aber schon drei Kinder, die im linken Bild richtig stehen (nämlich a, e und c), was der Angabe widerspricht.

Folglich ist D die Mutter von a, und wir finden wie zuvor die Zuordnung A–d, B–e, C–b, D–a und E–c.

Anhang: Weitere Überlegungen zu Aufgabe 11

Aufgabe 11 bietet viele schöne Möglichkeiten für eine tiefere, über den Känguru-Wettbewerb deutlich hinausgehende Beschäftigung mit den Eigenschaften solcher Parabeln. Für Leute, die gerne noch ein bisschen weitertüfteln wollen, finden sich in diesem Anhang daher einige zusätzliche Gedanken rund um diese Aufgabe. Insbesondere wollen wir folgende Fragestellungen klären:

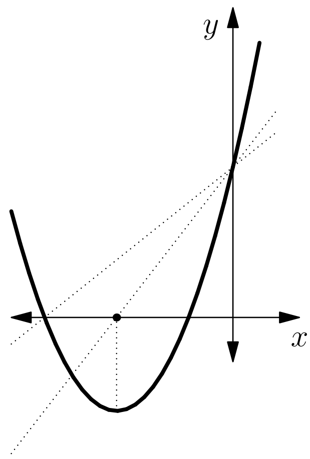
Lässt sich die Möglichkeit $y = bx + c$ auch durch graphische Überlegungen und Abschätzungen ausschließen?

Nehmen wir an, die dargestellte Gerade wäre $y = bx + c$.

Wenn eine Parabel zwei Nullstellen hat, muss $D = b^2 - 4ac > 0$ gelten, wobei D genau die Determinante aus der dritten Gleichung im obigen Gleichungssystem ist, also Schnitt von Parabel und x-Achse. Es gilt also $b > \frac{4ac}{b}$.

Die Symmetrieachse der Parabel liegt bei $x = \frac{-b}{2a}$, wie wir sehen, indem wir in derselben Gleichung die Determinante gleich 0 setzen.

Die Gerade $y = bx + c$ hat die Steigung b. Diese Steigung ist sicher kleiner als jene der Geraden, die den weiter rechts gelegenen Punkt $\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$ (Schnittpunkt der Symmetrieachse der Parabel mit der x-Achse) mit $(c, 0)$ verbindet, siehe Abbildung.



Letztere Steigung beträgt

$$\frac{c}{\frac{b}{2a}} = \frac{2ac}{b}.$$

Da diese Steigung positiv ist, gilt klarerweise auch

$$\frac{2ac}{b} < \frac{4ac}{b}.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$b < \frac{2ac}{b} < \frac{4ac}{b} < b,$$

ein Widerspruch.

Man bestimme alle Tripel (a, b, c), für die die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ und die Gerade $y = ax + c$ einander wie abgebildet schneiden.

Setzen wir zufällige Werte für a, b und c ein, so stellen wir fest, dass der Schnittpunkt von Parabel und $y = ax+c$ nicht immer auf der x-Achse liegt. Den Schnittpunkt von $y = ax + c$ mit der x-Achse erhalten wir, indem wir $y = 0$ setzen und $x = -\frac{c}{a}$ erhalten. Berechnen wir die Schnittpunkte von Parabel und Gerade, also die Lösungen von $ax^2 + bx + c = ax + c$, so erhalten wir $x = 0$ (den wir schon kennen) und $x = 1 - \frac{b}{a}$. Zuletzt erhalten wir wir die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse als $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, wobei $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ der linke davon ist.

Im Gleichungssystem

Schnittpunkt von Gerade und x-Achse:	$\overline{x} = -\dfrac{c}{a}$
Linker Schnittpunkt von Parabel und Gerade:	$\overline{x} = 1 - \dfrac{b}{a}$
Linker Schnittpunkt von Parabel und x-Achse:	$\overline{x} = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

mit drei Gleichungen und vier Unbekannten (wobei $\overline{x}$ die x-Koordinate des gemeinsamen Schnittpunktes mit der x-Achse ist) folgt aus dem Gleichsetzen der ersten beiden Gleichungen, dass Gerade und Parabel sich immer dann auf der x-Achse schneiden, wenn $b = a + c$ gilt. Setzt man dies in die dritte Gleichung ein und vereinfacht weiter, so ergibt sich, dass dies nur für $a \geq c$ der linke der beiden Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse ist, andernfalls der rechte. Weiters sehen wir noch, dass $c > 0$ ist (weil der Schnittpunkt mit der y-Achse oberhalb der x-Achse liegt), $a > 0$ (weil die Parabel nach oben geöffnet ist), und folglich auch $b > 0$ (weil die Parabel sonst vollständig oberhalb der x-Achse liegen würde und auch $b = a + c$ nicht erfüllt wäre).

Somit erhalten wir ein solches Bild immer dann (und nur dann), wenn wir zwei beliebige positive reelle Zahlen s und t mit $s < t$ wählen und $a = s$, $b = s + t$ und $c = t$ setzen (mit Schnittpunkt bei $\overline{x} = -\frac{t}{s}$), also beispielsweise $y = 4x^2 + 21x + 17$ für die Parabel und $y = 4x + 17$ für die Gerade.

(Dasselbe Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir das Steigungsdreieck der Geraden betrachten, das einerseits durch die Punkte $(0, c)$ und $(x_2, 0)$ mit $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ gegeben ist, andererseits gemäß der Geradengleichung gleich a sein muss, also $a = \frac{c}{x_2}$. Mathematisch ist das äquivalent dazu, im obigen Gleichungssystem sofort erste und dritte Gleichung gleichzusetzen.)

Wenn in der Angabe nicht gefordert wäre, dass a, b und c paarweise verschieden sein müssen, könnte es dann Werte (a, b, c) geben, für die eine der vier anderen Möglichkeiten $y = ax + b$, $y = cx + b$, $y = bx + a$ oder $y = cx + a$ die Parabel wie abgebildet schneidet?

Damit Gerade und Parabel sich auf der y-Achse schneiden, müssen ihre konstanten Terme übereinstimmen. Für die ersten zwei dieser vier Möglichkeiten müsste daher $b = c$ gelten, die Parabelgleichung wäre also $y = ax^2 + bx + b$.

- Für die Gerade $y = cx + b = bx + b$ ergibt sich wie zuvor, dass sie eine Tangente an die Parabel im Punkt $(0, b)$ ist.
- Für die Gerade $y = ax + b$ betrachten wir, dass es auf Grund des linken Schnittpunktes von Gerade und Parabel auf der y-Achse ein $\overline{x}$ geben muss, für das $0 = a\overline{x}^2 + b\overline{x} + b$ und $0 = a\overline{x} + b$ gleichzeitig erfüllt sind, was durch Vereinfachen und Einsetzen aber zu $0 = a\overline{x}^2 + b\overline{x} + b = \overline{x} \cdot (a\overline{x} + b) + b = x \cdot 0 + b$, somit zu $b = 0$ und der offensichtlich nicht zum Bild passenden Parabel $y = ax^2$ führt.

Für die dritte und vierte Möglichkeit müsste $a = c$ gelten, die Parabelgleichung wäre $y = ax^2 + bx + a$.

- Für die Gerade $y = bx + a$ ergibt sich wie zuvor, dass sie eine Tangente an die Parabel im Punkt $(0, a)$ ist.
- Für die Gerade $y = cx + a = ax + a$ ergibt sich, dass ihr Schnittpunkt mit der y-Achse bei $x = -1$ liegt. Eingesetzt in die Parabelgleichung folgt aber $0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + a = 2a - b$, also $b = 2a$. Damit wird die Parabelgleichung zu $x = ax^2 + 2ax + a = a \cdot (x + 1)^2$ und sie berührt die x-Achse daher in $x = -1$, statt sie in zwei Stellen zu schneiden.

Daher könnte man diese vier Möglichkeiten (von denen nur drei als Antwortmöglichkeiten auftreten) also sogar dann ausschließen, wenn nicht gegeben wäre, dass a, b und c paarweise verschieden sind. Diese Zusatzinformation macht die Aufgabe also etwas leichter, ist aber eigentlich gar nicht nötig.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Kategorie: Felix, 1. – 2. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 5.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 6. – 10.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 15.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

11	12	13	14	15

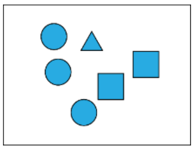
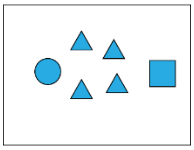
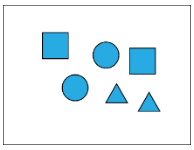
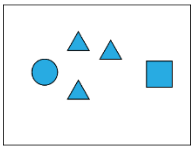
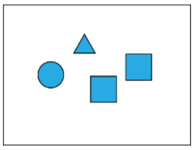
pwc

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

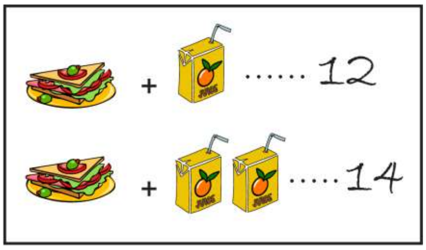
Känguru der Mathematik Österreich – 17. 3. 2022 Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)	Name:

- 3 Punkte Beispiele -

1. In welcher Box sind die meisten Dreiecke?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

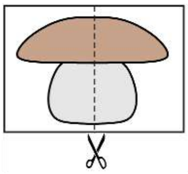
2. Ein Sandwich und ein Saft kosten zusammen 12 Euro.
Ein Sandwich und zwei Säfte kosten zusammen 14 Euro.



Wie viele Euro kostet ein Saft?

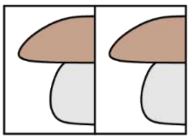
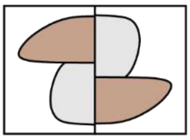
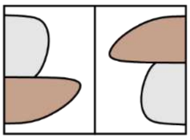
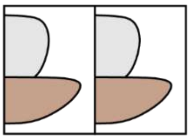
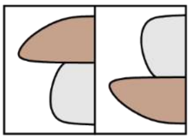
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3. Anna zerschneidet das Bild eines Pilzes in zwei Hälften.

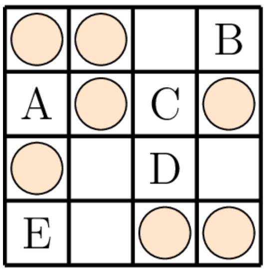


Dann legt sie die beiden Teile zu einem neuen Bild zusammen.

Wie kann das neue Bild aussehen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. In den vier Feldern einer Zeile müssen immer genau zwei Münzen liegen.
Auch in den vier Feldern untereinander müssen immer genau 2 Münzen liegen.

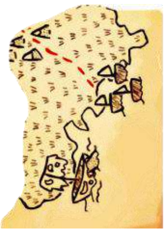
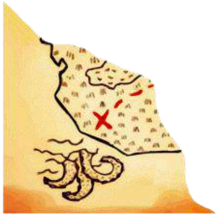
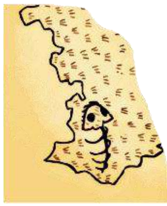
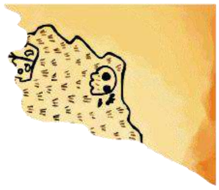


Auf welches Feld muss noch eine Münze gelegt werden?

(A) Feld A (B) Feld B (C) Feld C (D) Feld D (E) Feld E

5. Ein Affe hat ein Stück von Captain Jacks Karte abgerissen.

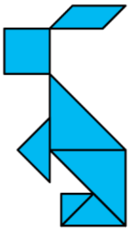
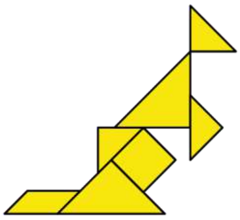
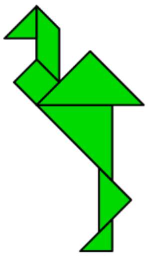
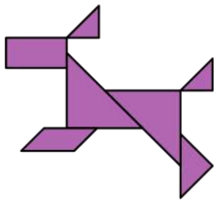
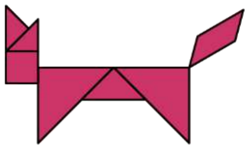
Wie sieht das Stück aus, das der Affe abgerissen hat?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

6. Diese fünf Tiere sind aus verschiedenen Formen gelegt.
Es gibt eine Form, die nur bei einem Tier verwendet wird.

Bei welchem Tier wird diese Form verwendet?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

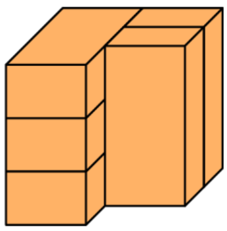
7. In jedem der fünf Körbe schläft ein Tier.
Der Koala und der Fuchs schlafen in Körben mit demselben Muster und derselben Form.
Das Känguru und der Hase schlafen in Körben mit demselben Muster.

Korb 1 Korb 2 Korb 3 Korb 4 Korb 5

In welchem Korb schläft die Maus?

(A) Korb 1 (B) Korb 2 (C) Korb 3 (D) Korb 4 (E) Korb 5

8. Das Bild zeigt 5 gleiche Bausteine.

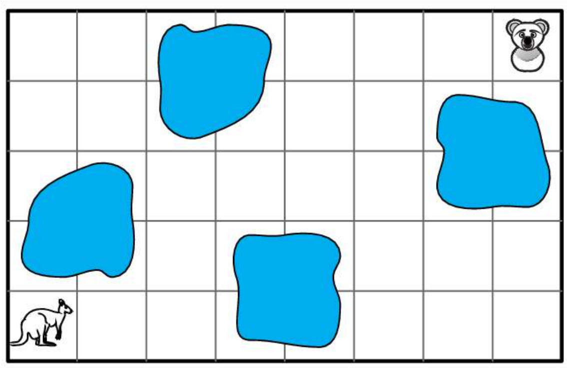


Wie viele der Bausteine berühren genau 3 andere?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

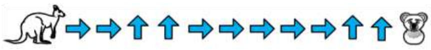
9. Das Känguru möchte den Koala besuchen.
Auf seinem Weg darf es durch kein Quadrat mit Wasser hüpfen.

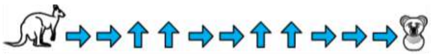
Jeder Pfeil entspricht dem Sprung auf ein Nachbarfeld.



Welchen Weg darf das Känguru nehmen?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

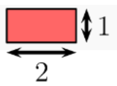
10. Carl schreibt eine fünfstellige Zahl auf.
Dann legt er auf jede der fünf Ziffern eine Form (siehe Bild).

Über verschiedene Ziffern legt er verschiedene Formen.
Über gleiche Ziffern legt er gleiche Formen.

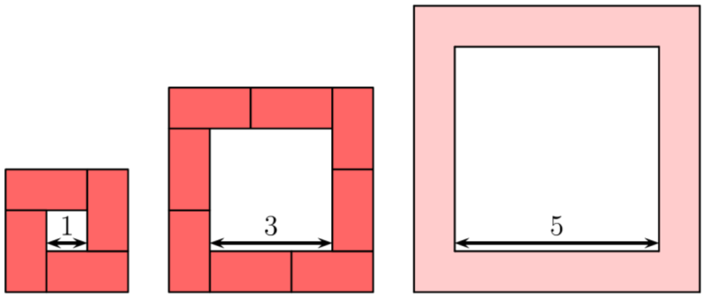
Welche Zahl hat Carl versteckt?

(A) 34426 (B) 34526 (C) 34423 (D) 34424 (E) 32446

- 5 Punkte Beispiele -

11. Katrin legt um jedes Quadrat einen Weg. Sie verwendet dabei solche Steine 

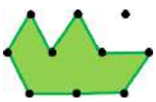
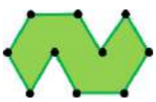
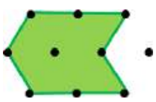
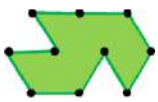
.



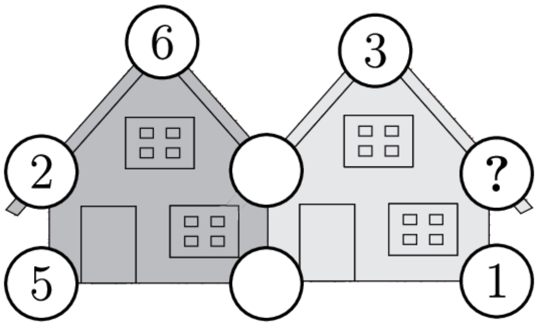
Wie viele solcher Steine braucht sie für den Weg um das Quadrat mit Seitenlänge 5?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 16

12. Unten siehst du fünf Rasenstücke.
Welches hat die kleinste Rasenfläche?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

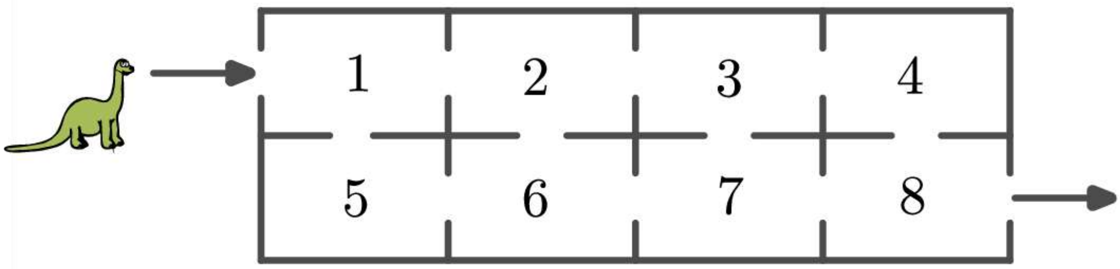
13. In jedem Haus ergeben die Zahlen in den fünf Kreisen zusammen 20.
Manche Zahlen sind gelöscht worden.



Für welche Zahl steht das Fragezeichen?

(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 9 (E) 14

14. Dino geht vom Eingang zum Ausgang.
Er darf nur einmal durch jeden Raum gehen.
Die Räume haben Nummern (siehe Bild).
Dino zählt alle Nummern der Räume zusammen, durch die er geht.



Was ist das größte Ergebnis, das Dino dabei erreichen kann?

(A) 27 (B) 29 (C) 32 (D) 34 (E) 36

15. Die drei Zebras Runa, Zara und Biba nehmen an einem Wettbewerb teil.
Siegerin ist das Zebra mit den meisten Streifen.

Runa hat 15 Streifen.
Zara hat 3 Streifen mehr als Runa.
Runa hat 5 Streifen weniger als Biba.

Wie viele Streifen hat die Siegerin?

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Level: Felix, Grades 1 – 2

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
15 starting points
each correct answer to questions 1. – 5.: 3 points
each correct answer to questions 6. – 10.: 4 points
each correct answer to questions 11. – 15.: 5 points
each question left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 15). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

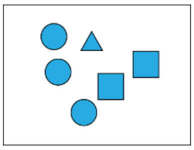
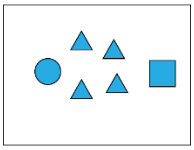
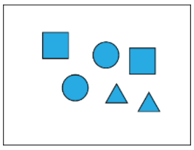
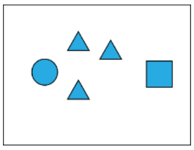
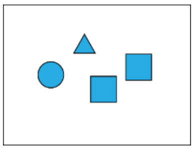
11	12	13	14	15

Information über den Känguruwettbewerb:
www.kaenguru.at

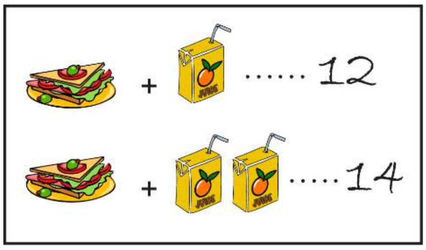
Känguru der Mathematik Österreich – 17. 3. 2022 Level Felix (Schulstufe 1 and 2)	Name:

- 3 Point Examples -

1. In which box are the most triangles?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

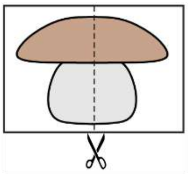
2. A sandwich and a juice cost 12 Euros together.
A sandwich and two juices cost 14 Euros together.



How many Euros does one juice cost?

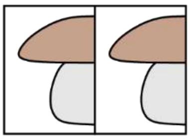
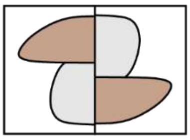
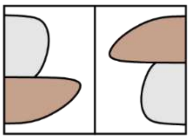
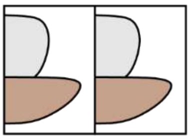
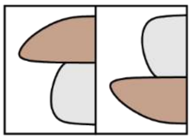
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

3. Anna cuts the picture of a mushroom in two halves.

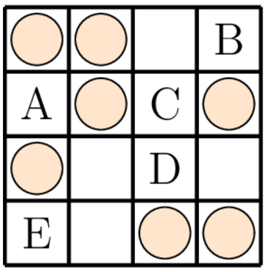


She then arranges the two pieces together to form a new picture.

What could this new picture look like?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. In the four squares of a row there always have to be exactly two coins.
In the four squares below each other there also always have to be exactly two coins.

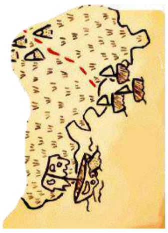
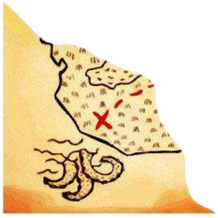
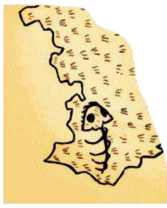
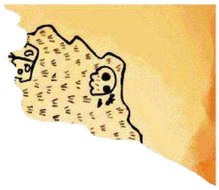


On which square does one more coin have to be placed?

(A) square A (B) square B (C) square C (D) square D (E) square E

5. A monkey has torn off a piece of Captain Jack‘s map.

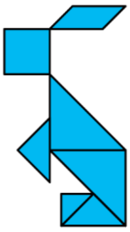
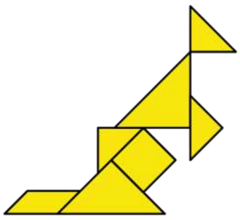
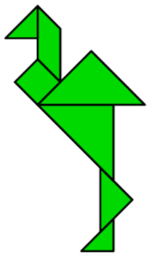
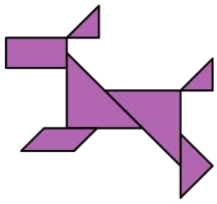
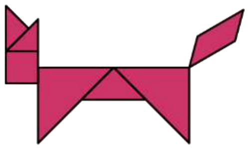
What does the piece the monkey has torn off look like?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Point Examples -

6. These five animals are made up from different shapes.
There is one shape which is only used on one animal.

On which animal is this shape used?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

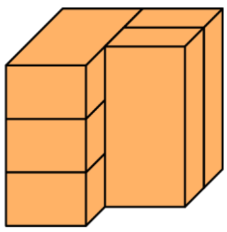
7. There is an animal asleep in each of the five baskets.
The koala and the fox sleep in baskets with the same pattern and the same shape.
The kangaroo and the rabbit sleep in baskets with the same pattern.

Basket 1 Basket 2 Basket 3 Basket 4 Basket 5

In which basket does the mouse sleep?

(A) Basket 1 (B) Basket 2 (C) Basket 3 (D) Basket 4 (E) Basket 5

8. The picture shows one object made up of 5 identical building blocks.

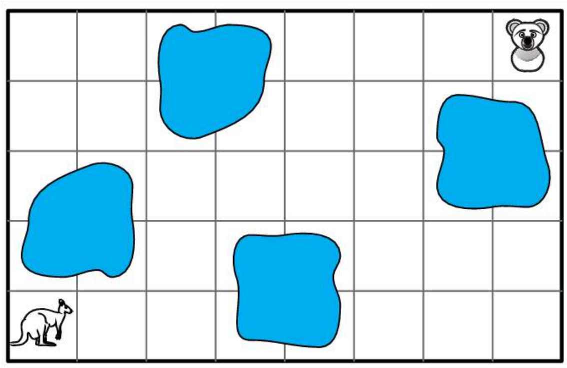


How many building blocks touch exactly 3 others?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

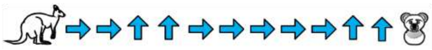
9. The kangaroo wants to visit the koala.
On its way it is not allowed to jump through a square with water.

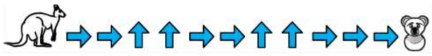
Each arrow shows one jump on to a neighbouring field.

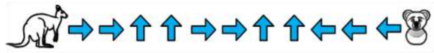


Which path is the kangaroo allowed to take?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

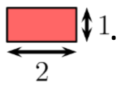
10. Carl writes down a five-digit number.
He then places a shape on each of the five digits (see picture).

He places different shapes on different digits.
He places the same shape on the same digits.

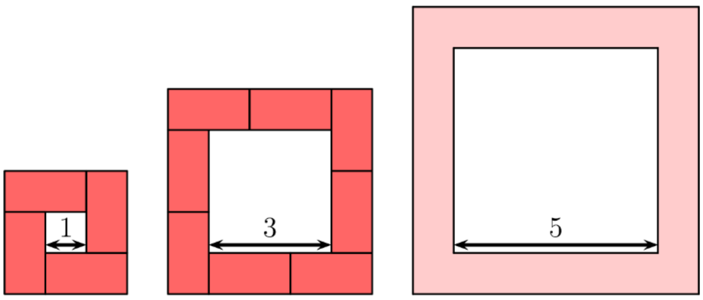
Which number did Carl hide?

(A) 34426 (B) 34526 (C) 34423 (D) 34424 (E) 32446

- 5 Point Examples -

11. Katrin forms a path around each square. For that she uses stones like this 

.

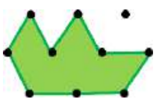
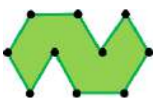
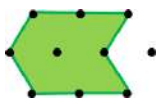
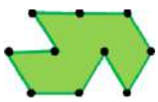


How many such stones does she need for a path around the square with side length 5?

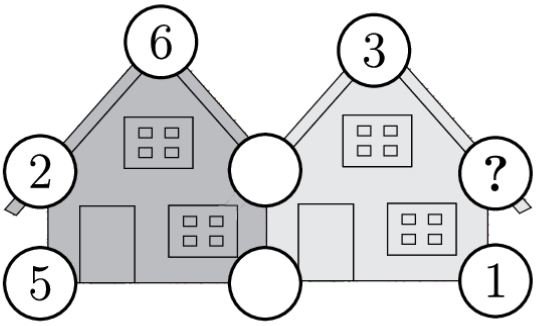
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 16

12. Below you see five pieces of lawn.

Which one has the smallest area of grass?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

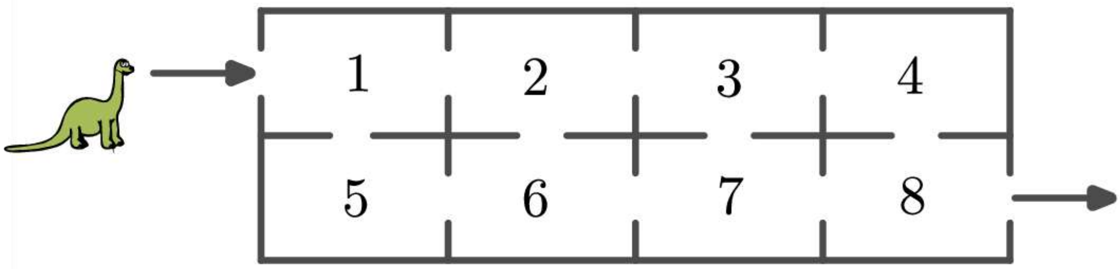
13. The numbers in the five circles around each house add up to 20.
Some numbers are missing.



Which number does the question mark stand for?

(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 9 (E) 14

14. Dino walks from the entrance to the exit.
He is only allowed to go through each room once.
The rooms have numbers (see diagram).
Dino adds up all the numbers of the rooms he walks through.



What is the biggest result he can get this way?

(A) 27 (B) 29 (C) 32 (D) 34 (E) 36

15. The three zebras Runa, Zara and Biba take part in a competition.
The winner is the zebra with the most stripes.

Runa has 15 stripes.
Zara has 3 stripes more than Runa.
Runa has 5 stripes less than Biba.

How many stripes does the winner have?

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 22

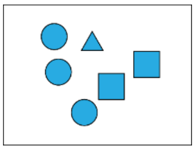
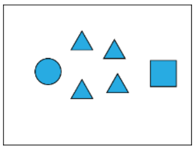
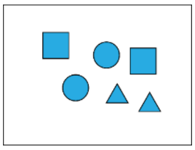
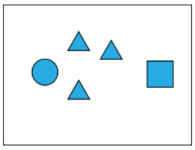
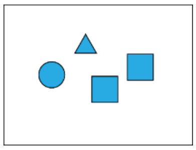
Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

– Lösungsvektor –

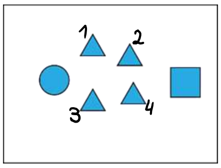
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	B	E	D	B	D	E	B	C	A	C	A	D	D	C

– 3 Punkte Beispiele –

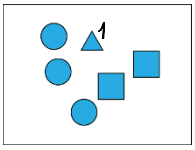
1. In welcher Box sind die meisten Dreiecke?

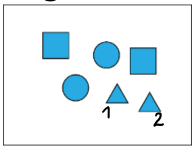
(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

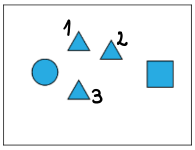
In jeder Box darfst du nur die Dreiecke  zählen. In der Box **B** sind vier Dreiecke.

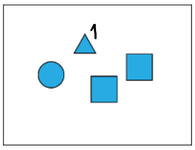


In jeder anderen Box sind es weniger:

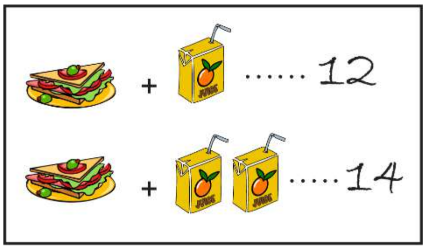
(A) 

(C) 

(D) 

(E) 

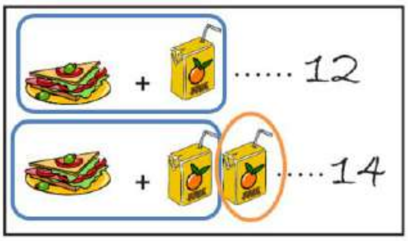
2. Ein Sandwich und ein Saft kosten zusammen 12 Euro.
Ein Sandwich und zwei Säfte kosten zusammen 14 Euro.



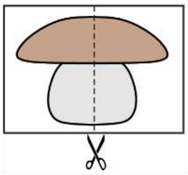
Wie viele Euro kostet ein Saft?

(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Ein Sandwich und ein Saft kosten zusammen 12 Euro.
Wenn ein Saft mehr ist, kostet alles zusammen 14 Euro.
Ein Saft kostet somit $14 - 12 = \mathbf{2}$ Euro.

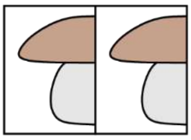
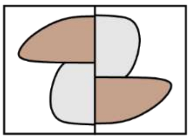
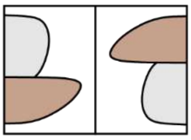
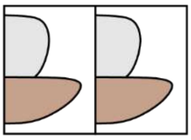
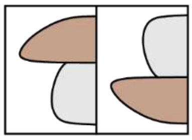


3. Anna zerschneidet das Bild eines Pilzes in zwei Hälften.

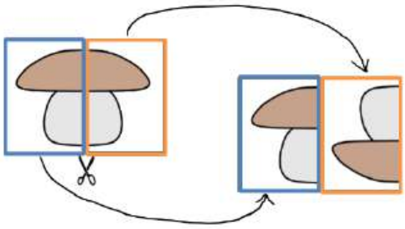


Dann legt sie die beiden Teile zu einem neuen Bild zusammen.

Wie kann das neue Bild aussehen?

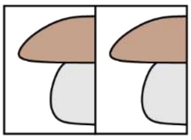
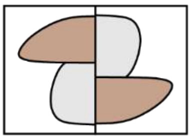
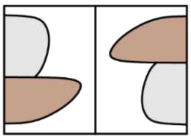
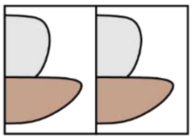
(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Hier musst du die rechte Hälfte des Bildes drehen. Es steht dann auf dem Kopf.

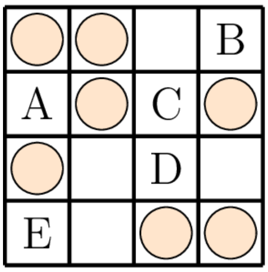


Das neue Bild ist also **Bild E**.

Bei allen anderen Bildern kommt immer zwei Mal die linke Hälfte vor.

(A)  (B)  (C)  (D) 

4. In den vier Feldern einer Zeile müssen immer genau zwei Münzen liegen.
Auch in den vier Feldern untereinander müssen immer genau 2 Münzen liegen.

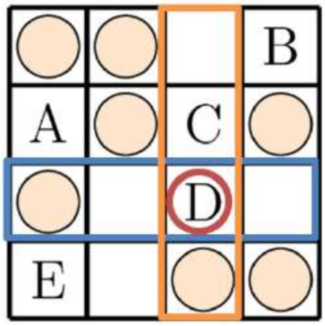


Auf welches Feld muss noch eine Münze gelegt werden?

(A) Feld A (B) Feld B (C) Feld C **(D)** Feld D (E) Feld E

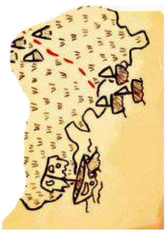
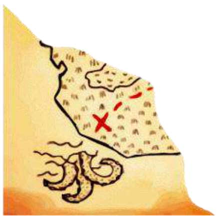
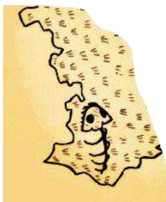
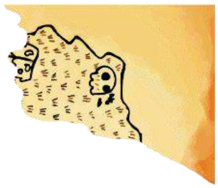
Es gibt eine Zeile, in der nur eine Münze liegt. 

Es gibt auch vier Felder untereinander, in denen nur eine Münze liegt.
Wenn man also auf das **Feld D** eine Münze legt, sind überall 2 Münzen.



5. Ein Affe hat ein Stück von Captain Jacks Karte abgerissen.

Wie sieht das Stück aus, das der Affe abgerissen hat?

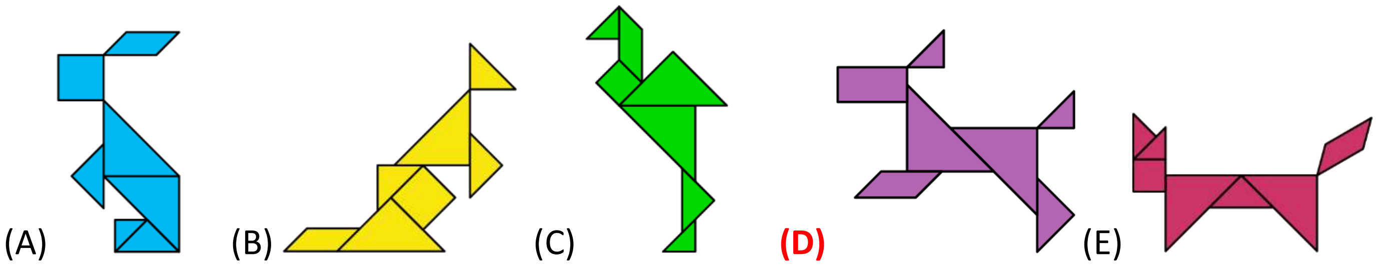
(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Hier siehst du die zusammengeklebte Karte.

Stück B muss ergänzt werden.

6. Diese fünf Tiere sind aus verschiedenen Formen gelegt.
Es gibt eine Form, die nur bei einem Tier verwendet wird.

Bei welchem Tier wird diese Form verwendet?



Der Kopf des Hundes ist ein Rechtreck, welches bei keinem anderen Tier verwendet wird: **Lösung (D)**

7. In jedem der fünf Körbe schläft ein Tier.
Der Koala und der Fuchs schlafen in Körben mit demselben Muster und derselben Form.
Das Känguru und der Hase schlafen in Körben mit demselben Muster.

Korb 1 Korb 2 Korb 3 Korb 4 Korb 5

In welchem Korb schläft die Maus?

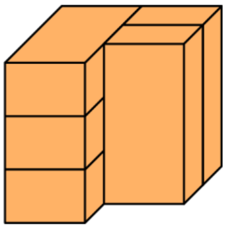
(A) Korb 1 (B) Korb 2 (C) Korb 3 (D) Korb 4 **(E)** Korb 5

Gleiches Muster und gleiche Form haben die Körbe 2 und 4.

Gleiches Muster aber unterschiedliche Form haben die Körbe 1 und 3.

Damit bleibt für die Maus nur noch **(E) Korb 5**.

8. Das Bild zeigt 5 gleiche Bausteine.



Wie viele der Bausteine berühren genau 3 andere?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

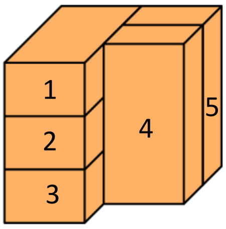
Stein 1 berührt 2, 4 und 5. OK

Stein 2 berührt 4 und 5.

Stein 3 berührt 2, 4 und 5. OK

Stein 4 berührt 1, 2, 3 und 5.

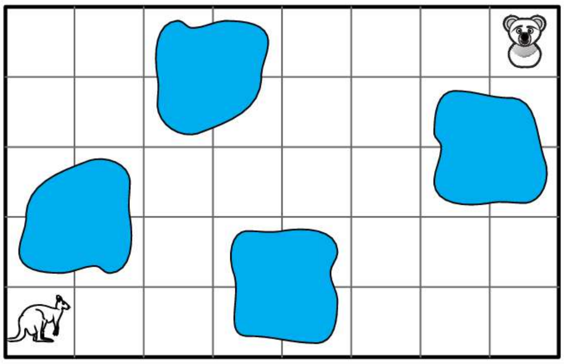
Stein 5 berührt 1, 2, 3 und 4.



Lösung: **(B) 2**

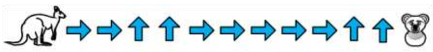
9. Das Känguru möchte den Koala besuchen.
Auf seinem Weg darf es durch kein Quadrat mit Wasser hüpfen.

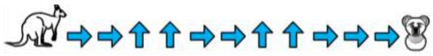
Jeder Pfeil entspricht dem Sprung auf ein Nachbarfeld.

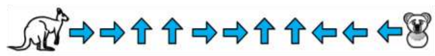


Welchen Weg darf das Känguru nehmen?

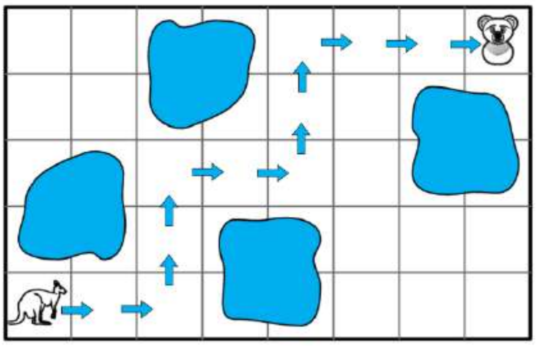
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 



Lösung (C)

10. Carl schreibt eine fünfstellige Zahl auf.
Dann legt er auf jede der fünf Ziffern eine Form (siehe Bild).
Über verschiedene Ziffern legt er verschiedene Formen.
Über gleiche Ziffern legt er gleiche Formen.

Welche Zahl hat Carl versteckt?

(A) 34426 (B) 34526 (C) 34423 (D) 34424 (E) 32446

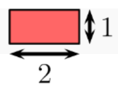
Form 2 und 3 sind gleich. Damit fallen die Lösungen (B) und (E) weg.

Form 5 ist unterschiedlich zu den Formen 2 und 3. Damit fällt Lösung (D) weg.

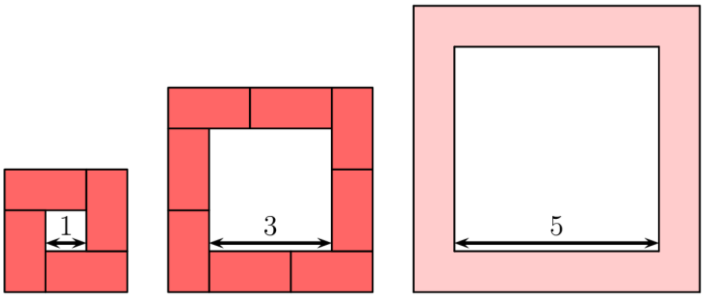
Form 1 und 5 sind unterschiedlich zueinander. Damit fällt Lösung (C) weg.

Bleibt als richtige Antwort Lösung: **(A) 34426**

– 5 Punkte Beispiele –

11. Katrin legt um jedes Quadrat einen Weg. Sie verwendet dabei solche Steine 

.



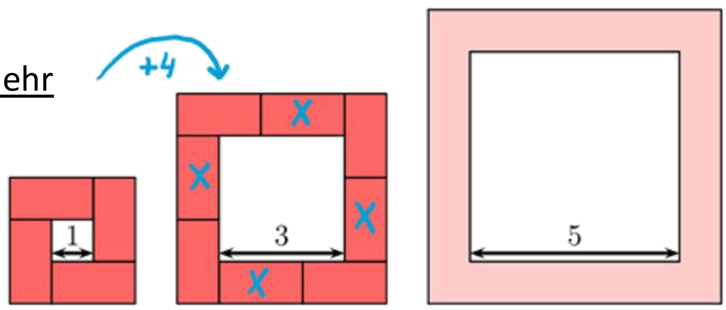
Wie viele solcher Steine braucht sie für den Weg um das Quadrat mit Seitenlänge 5?

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 16

Die Länge des Quadrates erhöht sich um den Wert 2: (1 + 2 = 3)
Deshalb benötigten wir an jeder Kante ein Plättchen mehr.

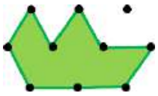
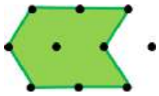
Das sind bei 4 Seiten somit 4 Plättchen mehr als beim vorhergehenden Quadrat.

8 + 4 = **12**.

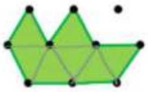
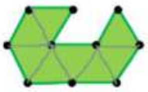
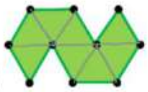
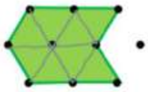
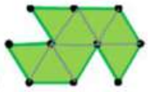


4 Steine 8 Steine 12 Steine

12. Unten siehst du fünf Rasenstücke.
Welches hat die kleinste Rasenfläche?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

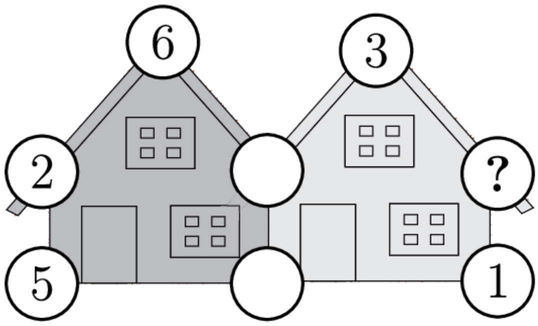
Betrachte die Rasenstücke und zeichne Dreiecke ein.
Diese Dreiecke zählen.

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7	8	8	8	8

Dreieck A hat die kleinste Rasenfläche.

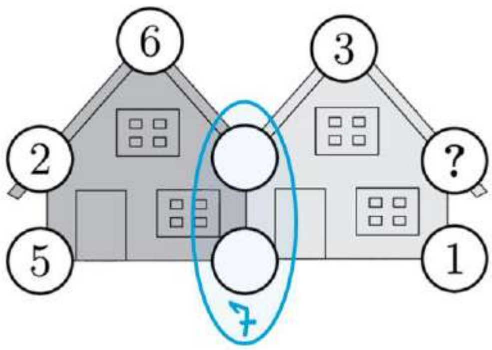
13. In jedem Haus ergeben die Zahlen in den fünf Kreisen zusammen 20.
Manche Zahlen sind gelöscht worden.



Für welche Zahl steht das Fragezeichen?

(A) 3 (B) 4 (C) 7 **(D)** 9 (E) 14

Hier muss für jedes der Häuschen extra gerechnet werden.



Wir müssen immer 20 erhalten.

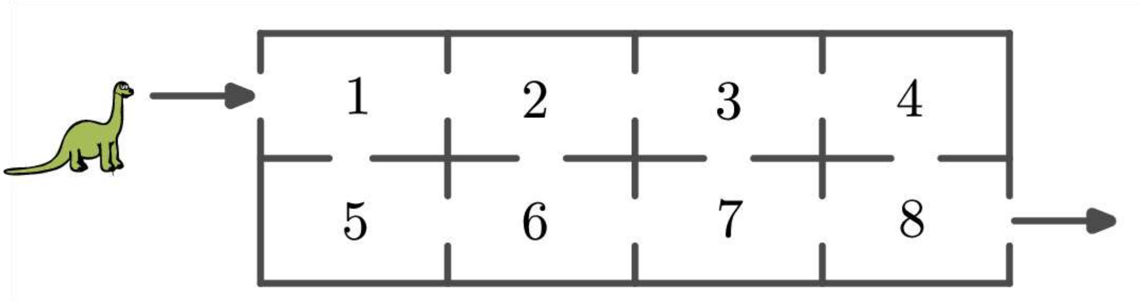
<u>Haus 1:</u> 5 + 2 + 6 = 13. Es fehlen 7 auf 20.

Diese *7* ist das Ergebnis der beiden Zahlen in den beiden mittleren Kreisen zusammen.

Das verwenden wir für Haus 2 und bestimmen so die fehlende Zahl.

<u>Haus 2:</u> 7 + 3 + 1 = 11. 20 – 11 = **9**.

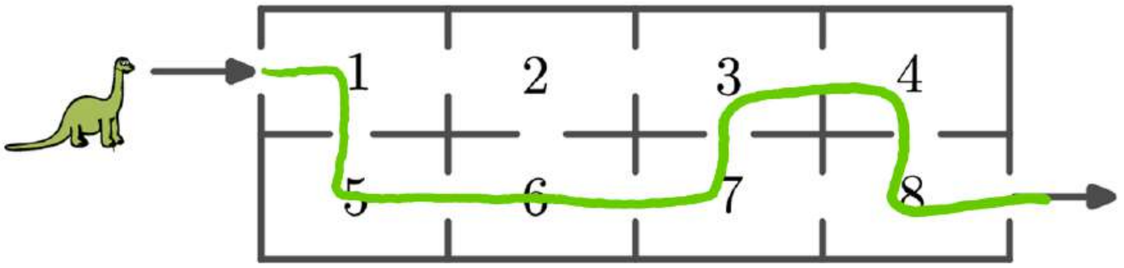
14. Dino geht vom Eingang zum Ausgang.
Er darf nur einmal durch jeden Raum gehen.
Die Räume haben Nummern (siehe Bild).
Dino zählt alle Nummern der Räume zusammen, durch die er geht.



Was ist das größte Ergebnis, das Dino dabei erreichen kann?

(A) 27 (B) 29 (C) 32 **(D)** 34 (E) 36

Dino sammelt so viele große Zahlen wie möglich auf, damit sein Ergebnis möglichst groß werden kann.



Dazu geht er den grün eingezeichneten Weg entlang: 1 + 5 + 6 + 7 + 3 + 4 + 8 = **34**

15. Die drei Zebras Runa, Zara und Biba nehmen an einem Wettbewerb teil.
Siegerin ist das Zebra mit den meisten Streifen.

Runa hat 15 Streifen.
Zara hat 3 Streifen mehr als Runa.
Runa hat 5 Streifen weniger als Biba.

Wie viele Streifen hat die Siegerin?

(A) 16 (B) 18 **(C)** 20 (D) 21 (E) 22

Runa hat 15 Streifen.
Zara hat 15 + 3 Streifen, also 18.
Biba hat 15 + 5 Streifen, also 20.
Biba ist die Siegerin mit **20 Streifen.**

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Kategorie: Écolier, Schulstufe: 3. – 4.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

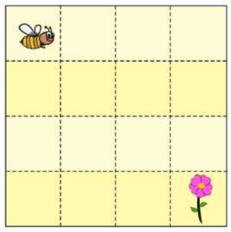
9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

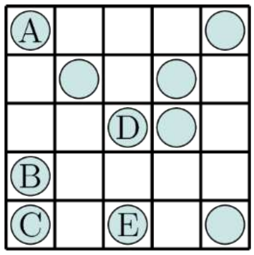
Känguru der Mathematik Österreich – 17. 3. 2022 **Gruppe Écolier (3. und 4. Schulstufe)**	**Name:**

- 3 Punkte Beispiele -



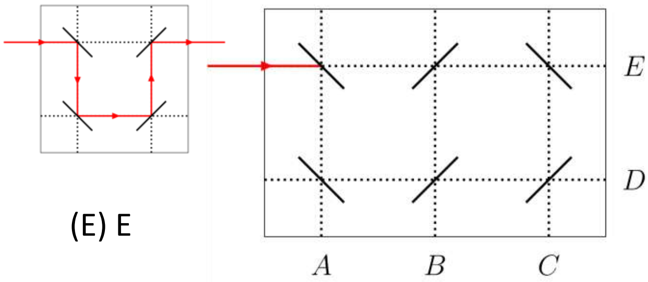
1. Die Biene will die Blume erreichen.
Jeder Pfeil entspricht einem Flug zu einem Nachbarfeld.
Wie kann die Biene fliegen, um die Blume zu erreichen?
(A) ↓ → → ↓ ↓ ↓ (B) ↓ ↓ → ↓ ↓ → (C) → ↓ → ↓ → →
(D) → → ↓ ↓ ↓ ↓ (E) → ↓ → ↓ ↓ →

2. Maria bekommt zu jedem Geburtstag so viele Teddys, wie sie an Jahren alt geworden ist.
Zu ihrem ersten Geburtstag bekommt sie 1 Teddy.
Zu ihrem zweiten Geburtstag bekommt sie 2 Teddys, und so weiter.
Wie viele Teddys hat Maria insgesamt am Tag nach ihrem sechsten Geburtstag?
(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

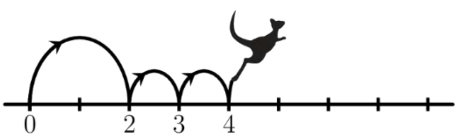


3. Eine der fünf Münzen A, B, C, D oder E soll so auf ein leeres Feld gelegt werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau zwei Münzen liegen.
Welche Münze musst du bewegen?
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

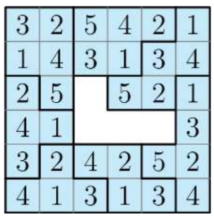
4. Welche zwei Zahlen können für ☐ in die Rechnung 2022 + ☐ = 2020 + ☐ eingesetzt werden, sodass sie richtig ist?
(A) 3 und 5 (B) 4 und 1 (C) 3 und 4 (D) 7 und 2 (E) 9 und 8



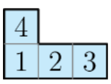
5. Trifft ein Laserstrahl auf eine Spiegelfläche, so ändert er seine Richtung (siehe kleines Bild).
Jeder Spiegel hat auf beiden Seiten eine Spiegelfläche.
Bei welchem Buchstaben endet der Laserstrahl?
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

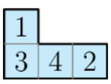


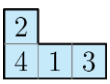
6. Kengu hüpft am Zahlenstrahl nach rechts (siehe Bild).
Er macht zuerst einen großen Sprung und dann zwei kleine Sprünge hintereinander und wiederholt das gleiche immer wieder.
Er startet bei 0 und endet bei 16.
Wie viele Sprünge macht Kengu insgesamt?
(A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

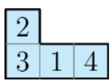


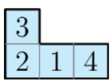
7. In der Figur rechts dürfen zwei benachbarte Quadrate nie dieselbe Zahl enthalten.
Welches Puzzlestück muss in die Lücke gelegt werden, sodass die Regel erfüllt bleibt?

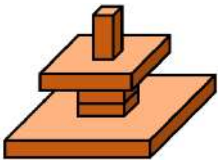
(A) 

(B) 

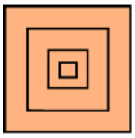
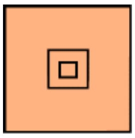
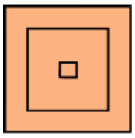
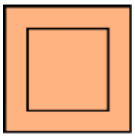
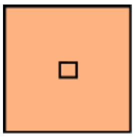
(C) 

(D) 

(E) 

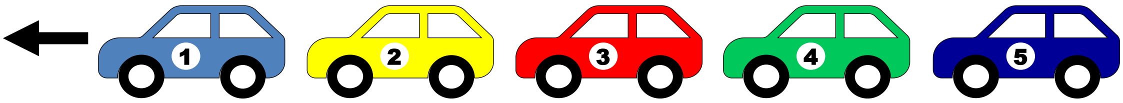


8. John baut aus Bausteinen dieses Kunstwerk.
Was sieht John, wenn er sein Kunstwerk von oben betrachtet?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

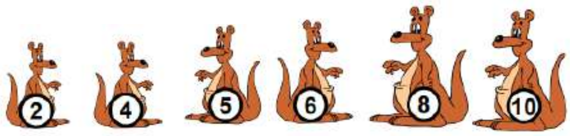
9. Fünf Autos sind mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert. Sie fahren in Pfeilrichtung.



Zuerst überholt das letzte Auto die zwei Autos vor ihm.
Dann überholt das nun vorletzte Auto die zwei Autos davor.
Am Schluss überholt jenes Auto, das nun in der Mitte steht, die zwei vor ihm.
In welcher Reihenfolge fahren die Autos jetzt?

(A) 1, 2, 3, 4, 5 (B) 2, 1, 3, 5, 4 (C) 2, 1, 5, 3, 4 (D) 3, 1, 4, 2, 5 (E) 4, 1, 2, 5, 3

10. Die Mitglieder einer Kängurufamilie sind
2, 4, 5, 6, 8 und 10 Jahre alt.
Vier von ihnen sind zusammengezählt 22 Jahre alt.
Wie alt sind die beiden anderen Kängurus?



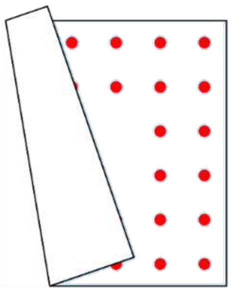
(A) 2 und 8 (B) 4 und 5 (C) 5 und 8 (D) 6 und 8 (E) 6 und 10

11. Mosif hat eine Tabelle mit Zahlen ausgefüllt (siehe Bild).
Wenn er die Zahlen jeder Zeile und jeder Spalte zusammenzählt, soll immer dasselbe Ergebnis herauskommen. Er hat aber einen Fehler gemacht.
Damit er immer dasselbe Ergebnis erhält, muss er eine einzige Zahl ändern.
Welche Zahl muss Mosif ändern?

9	1	5
3	7	6
4	7	4

(A) 1 (B) 3 (C) einen der beiden 4er (D) 5 (E) einen der beiden 7er

12. Aladdins Teppich hat die Form eines Quadrats.
An jedem Rand sind zwei Reihen von Punkten (siehe Bild).
Die Anzahl dieser Punkte ist bei jedem Rand gleich groß.
Wie viele Punkte hat der Teppich insgesamt?

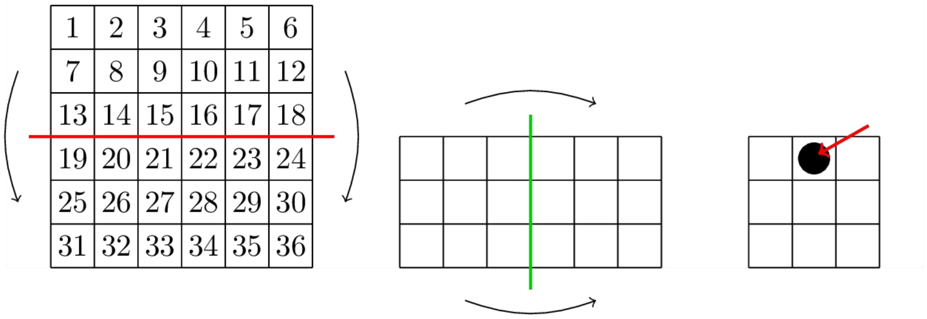


(A) 32 (B) 36 (C) 40 (D) 44 (E) 48

13. In einer Klasse sitzen die Kinder in Reihen.
In jeder Reihe sitzen gleich viele Kinder.
In Roberts Reihe sitzen 2 Kinder links von ihm und 3 Kinder rechts von ihm.
Vor Robert gibt es 2 Reihen, hinter ihm nur eine.
Wie viele Kinder sind insgesamt in der Klasse?

(A) 8 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

14. Johanna faltet ein Blatt Papier mit Zahlen von 1 bis 36 zwei Mal in der Hälfte (siehe Bilder).



Danach sticht sie durch alle vier Schichten gleichzeitig ein Loch (siehe rechtes Bild).
Welche vier Zahlen durchbohrt sie dabei?

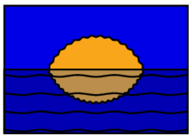
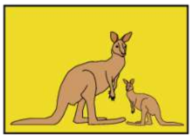
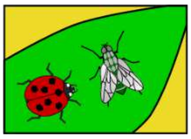
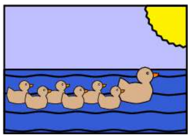
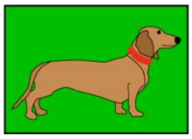
(A) 8, 11, 26, 29 (B) 14, 16, 21, 23 (C) 14, 17, 20, 23
(D) 15, 16, 21, 22 (E) 15, 17, 20, 22

15. Drei Fußballteams nehmen an einem Turnier teil.
Jedes Team spielt gegen jedes andere Team ein Mal.
Bei einem Sieg bekommt ein Team 3 Punkte, das andere 0 Punkte.
Bei einem Unentschieden bekommen beide Teams je 1 Punkt.
Welchen Punktestand kann nach dem Turnier keines der Teams haben?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

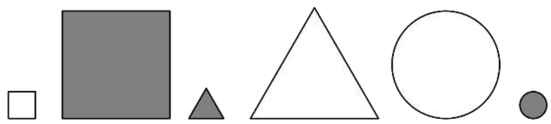
16. Jan schickt während seines Urlaubs fünf verschiedene Postkarten an seine Freunde.
Auf der Karte für Michael sind **keine** Enten.
Auf der Karte für Lexi ist ein Hund.
Auf der Karte für Clara sieht man die Sonne.
Auf der Karte für Heidi sind Kängurus.
Auf der Karte für Paula gibt es genau zwei Lebewesen.

Welche Karte schickt Jan an Michael?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 5 Punkte Beispiele -

17. Wanda wählt aus den folgenden Figuren einige aus.
Sie sagt: „Ich habe genau 2 graue, 2 große und 2 runde Figuren ausgewählt."

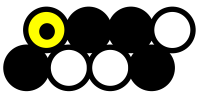
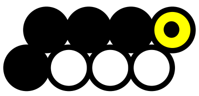
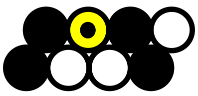
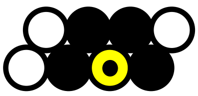
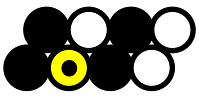


Wie viele Figuren hat Wanda mindestens ausgewählt?

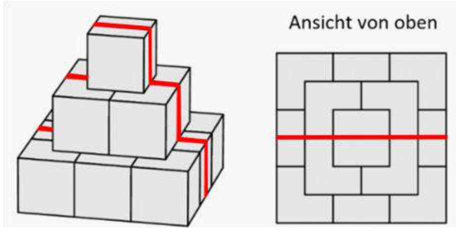
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. Die kleine Raupe  rollt sich zum Schlafen zusammen.

Wie könnte sie dabei aussehen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

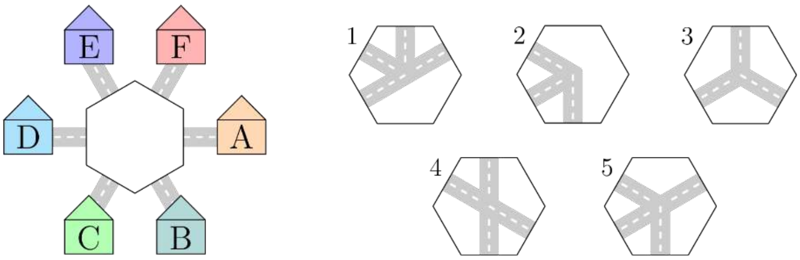
19. Eine Pyramide ist aus Würfeln zusammengebaut (siehe Bild).
Alle Würfel haben eine Seitenlänge von 10 cm.
Eine Ameise krabbelte entlang der eingezeichneten Linie über die Pyramide (siehe Bild).
Wie lang ist der Weg der Ameise?



(A) 30 cm (B) 60 cm (C) 70 cm (D) 80 cm (E) 90 cm

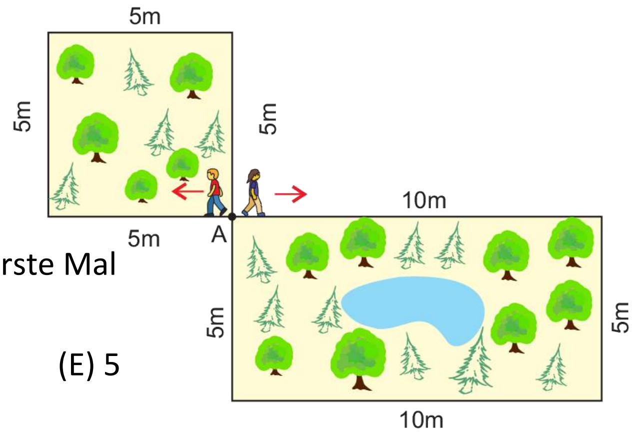
20. Von sechs Häusern geht jeweils eine Straße weg (siehe Bild).
In der Mitte fehlt jedoch ein Sechseck mit Straßenverbindungen.

Welche Sechsecke passen in die Mitte, sodass man von A nach B und nach E, aber **nicht** nach D reisen kann?



(A) 1 und 2 (B) 1 und 4 (C) 1 und 5 (D) 2 und 3 (E) 4 und 5

21. Ahmed und Sara bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit von Punkt A in die gezeigte Richtung.
Ahmed geht um den quadratischen Garten und Sara geht um den rechteckigen Garten.
Wie viele Runden muss Ahmed gehen, bis er Sara das erste Mal wieder im Punkt A trifft?

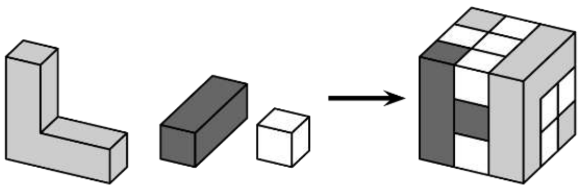


(A) 1 B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

22. Fünf Mädchen essen Pflaumen.
Laura isst um 2 Pflaumen mehr als Sophie.
Bettina isst um 3 Pflaumen weniger als Laura.
Clara isst eine Pflaume mehr als Bettina und 3 weniger als Alice.
Welche zwei Mädchen essen gleich viele Pflaumen?

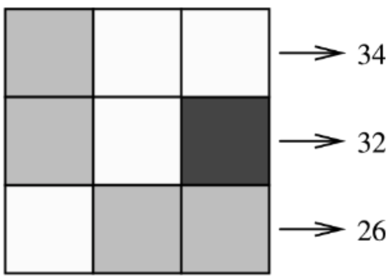
(A) Alice und Bettina (B) Alice und Laura (C) Alice und Sophie
(D) Clara und Laura (E) Clara und Sophie

23. Der große Würfel besteht aus drei verschiedenen Arten von Bausteinen (siehe Bild).
Wie viele der kleinen weißen Würfel werden für diesen großen Würfel benötigt?



(A) 8 (B) 11 (C) 13 (D) 16 (E) 19

24. Unter Karten mit derselben Farbe befindet sich jeweils dieselbe Zahl.
Zählt man die drei verdeckten Zahlen einer Reihe zusammen, erhält man die Zahl rechts neben der Reihe.
Welche Zahl wird durch die schwarze Karte verdeckt?



(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Level: Écolier, Grades 3 - 4

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
each correct answer to questions 1. – 8.: 3 points
each correct answer to questions 9. – 16.: 4 points
each correct answer to questions 17. – 24.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

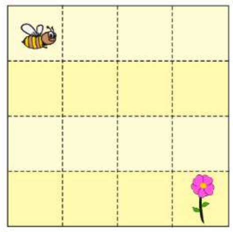
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik Österreich – 17. 3. 2022 **Level Écolier (Schulstufe 3 and 4)**	**Name:**

- 3 Point Examples -

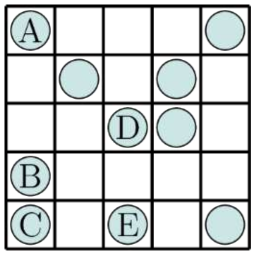
1. The bee wants to get to the flower.
Each arrow indicates a move to one neighbouring square.
Which path can the bee fly to get to the flower?



(A) ↓ → → ↓ ↓ ↓ (B) ↓ ↓ → ↓ ↓ → (C) → ↓ → ↓ → →
(D) → → ↓ ↓ ↓ ↓ (E) → ↓ → ↓ ↓ →

2. For every birthday Maria gets as many teddies as she is years old on that day.
For her first birthday she got 1 teddy.
For her second birthday she got 2 teddies and so on.
How many teddies in total has Maria got on the day after her sixth birthday?
(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

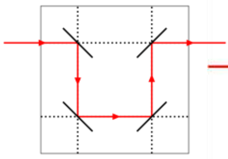
3. One of the five coins A, B, C, D or E shall be placed in an empty square so that there are exactly two coins in each row and in each column.
Which coin should be moved?

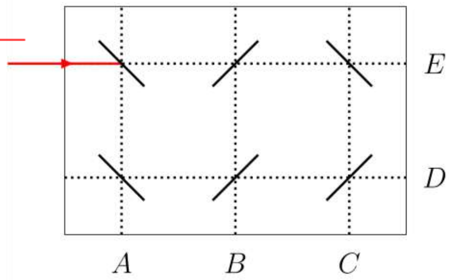


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

4. Which two numbers can be placed instead of the ☐ in the calculation 2022 + ☐ = 2020 + ☐ so that it is correct?
(A) 3 and 5 (B) 4 and 1 (C) 3 and 4 (D) 7 and 2 (E) 9 and 8

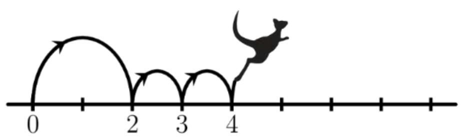
5. If a laser beam hits a mirror it changes its direction (see small diagram).
Each mirror has mirrored sides on both sides.
At which letter does the laser beam end?





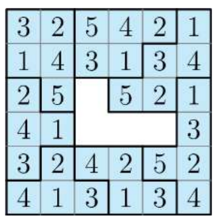
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

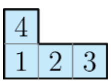
6. Kengu jumps on the number line to the right (see diagram).
He first makes one big jump and then two little jumps in a row and keeps repeating the same thing over and over again.
He starts at 0 and ends at 16.
How many jumps does Kengu make in total?

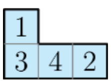


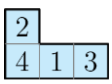
(A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 12

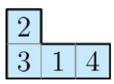
7. In the diagram on the right two neighbouring squares are never allowed to have the same number.
Which puzzle piece has to be placed in the gap so that this rule is followed?

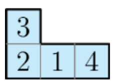


(A) 

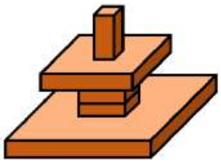
(B) 

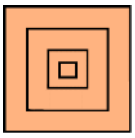
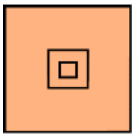
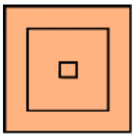
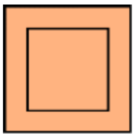
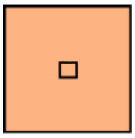
(C) 

(D) 

(E) 

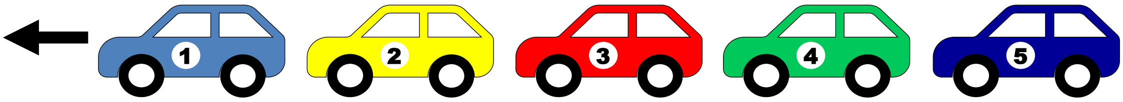
8. John uses some building blocks to form a work of art.
What does John see when he looks at his work of art from above?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Point Examples -

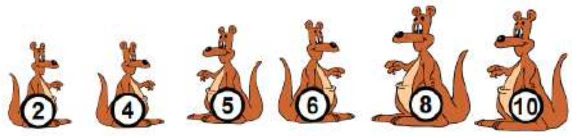
9. Five cars are labelled with the numbers 1 to 5. They drive in the direction of the arrow.



First the last car overtakes the two cars in front of it.
Then the now second to last car overtakes the two in front of it.
In the end the car that is now in the middle overtakes the two in front of it.
In which order do the cars now drive?

(A) 1, 2, 3, 4, 5 (B) 2, 1, 3, 5, 4 (C) 2, 1, 5, 3, 4 (D) 3, 1, 4, 2, 5 (E) 4, 1, 2, 5, 3

10. The members of a family of kangaroos are
2, 4, 5, 6, 8 and 10 years old.
Four of them are 22 years old when added together.
How old are the other two kangaroos?



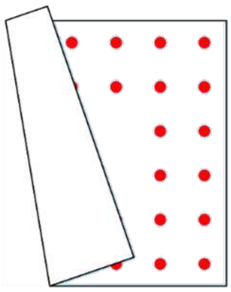
(A) 2 and 8 (B) 4 and 5 (C) 5 and 8 (D) 6 and 8 (E) 6 and 10

11. Mosif has filled a table with numbers (see diagram).
When he adds the numbers in each row and in each column together, the result should always be the same. He has however, made a mistake.
In order to get the same result every time he has to change one single number.
Which number does Mosif have to change?

9	1	5
3	7	6
4	7	4

(A) 1 (B) 3 (C) one of the two 4s (D) 5 (E) one of the two 7s

12. Aladdin's carpet has the shape of a square.
Along each edge there are two rows of dots (see diagram).
The number of points is the same along each edge.
How many dots in total does the carpet have?

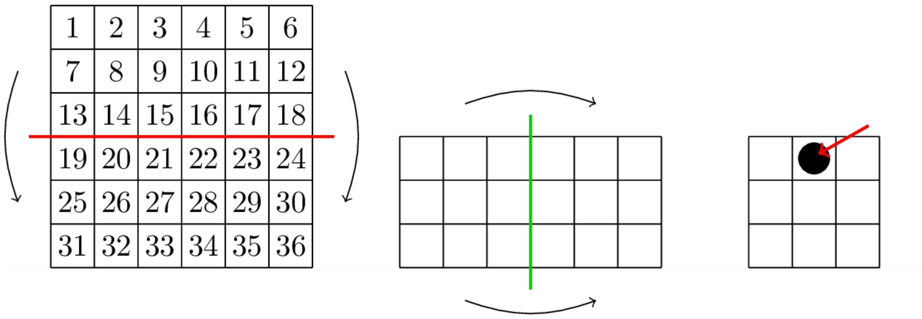


(A) 32 (B) 36 (C) 40 (D) 44 (E) 48

13. In a classroom the children sit in rows.
In each row there are the same amount of children.
In Robert's row there are 2 children to the left of him and 3 children to the right of him.
In front of Robert there are 2 rows, behind him just one.
How many children in total are in this class?

(A) 8 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

14. Johanna folds a piece of paper with the numbers 1 to 36 in half twice (see diagrams).



Then she stabs a hole through all four layers at the same time (see diagram on the right).
Which four numbers does she pierce in doing so?

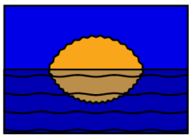
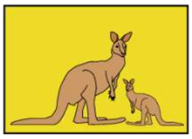
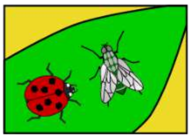
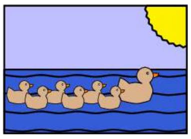
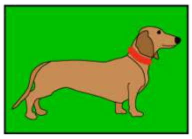
(A) 8, 11, 26, 29 (B) 14, 16, 21, 23 (C) 14, 17, 20, 23
(D) 15, 16, 21, 22 (E) 15, 17, 20, 22

15. Three football teams are taking part in a tournament.
Each team plays each other team once.
For a win the team scores 3 points, the other team 0 points.
For a draw both teams get 1 point each.
Which number of points is impossible, for any team to reach at the end of this tournament?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

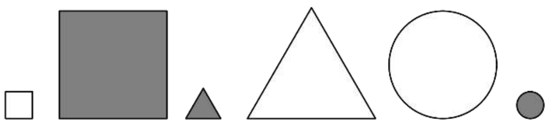
16. Jan sends five postcards to his friends during his holiday.
The card for Michael does **not** have ducks.
The card for Clara shows the sun.
The card for Paula shows exactly two animals.
The card for Lexi shows a dog.
The card for Heidi shows kangaroos.

Which card does Jan send to Michael?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 5 Point Examples -

17. Wanda chooses some of the following shapes.
She says: „I have chosen exactly 2 grey, 2 big and 2 round shapes.“

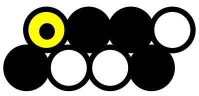
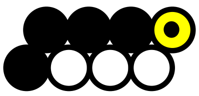
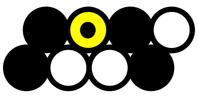
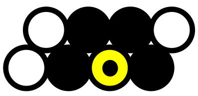
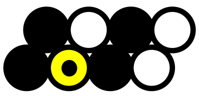


What is the minimum number of shapes Wanda has chosen?

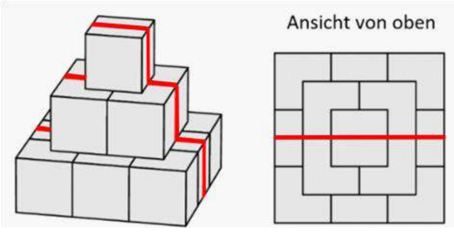
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. The little caterpillar  rolls up to go to sleep.

What could it look like then?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

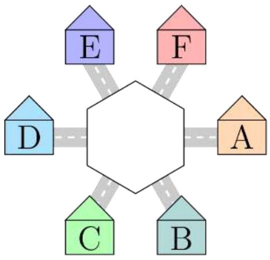
19. A pyramid is built from cubes (see diagram).
All cubes have side length 10 cm.
An ant crawls along the line drawn across the pyramid (see diagram).
How long is the path taken by the ant?

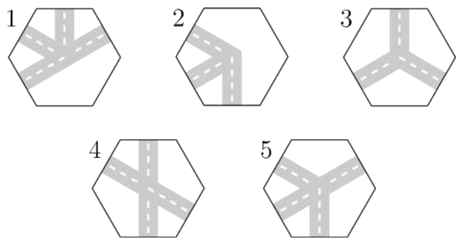


(A) 30 cm (B) 60 cm (C) 70 cm (D) 80 cm (E) 90 cm

20. A road leads away from each of the six houses (see diagram).
A hexagon showing the roads in the middle is however, missing.

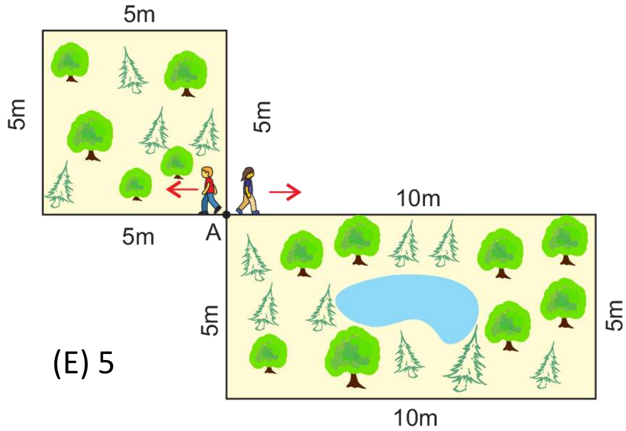
Which hexagons fit in the middle so that one can travel from A to B and to E, but **not** to D?





(A) 1 and 2 (B) 1 and 4 (C) 1 and 5 (D) 2 and 3 (E) 4 and 5

21. Ahmed and Sara move from point A in the direction shown with the same speed.
Ahmed walks around the square garden and Sara walks around the rectangular garden.
How many rounds does Ahmed have to walk to meet Sara in point A again for the first time?

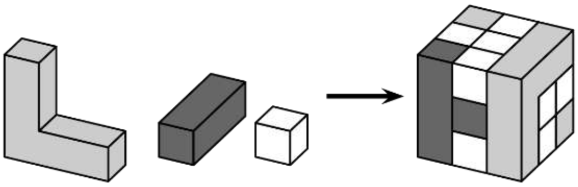


(A) 1 B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

22. Five girls eat plums.
Laura eats 2 plums more than Sophie.
Bettina eats 3 plums less than Laura.
Clara eats one plum more than Bettina and 3 less than Alice.
Which two of the girls eat the same amount of plums?

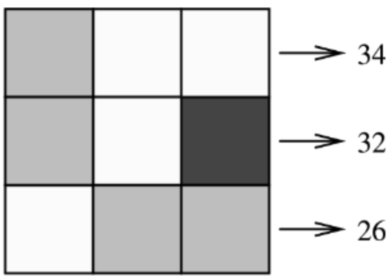
(A) Alice and Bettina (B) Alice and Laura (C) Alice and Sophie
(D) Clara and Laura (E) Clara and Sophie

23. The big cube is made up of three different kinds of building blocks (see diagram).
How many of the little white cubes are needed for this big cube?



(A) 8 (B) 11 (C) 13 (D) 16 (E) 19

24. Under cards with the same colour, the same number is always found. If the three hidden numbers in one row are added, one obtains the number to the right of the row.
Which number is hidden under the black card?



(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

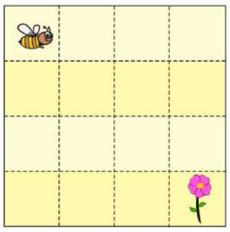
Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Écolier (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E	C	C	A	B	E	D	C	B	C	B	A	E	C	D	A	B	A	E	C	C	E	B	D

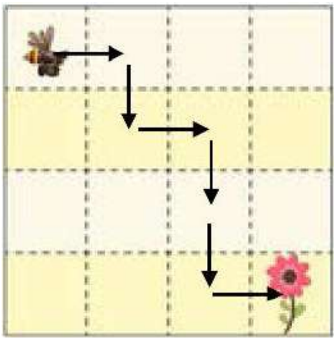
– 3 Punkte Beispiele –

1. Die Biene will die Blume erreichen.
Jeder Pfeil entspricht einem Flug zu einem Nachbarfeld.
Wie kann die Biene fliegen, um die Blume zu erreichen?



(A) ↓ → → ↓ ↓ ↓ (B) ↓ ↓ → ↓ ↓ → (C) → ↓ → ↓ → →
(D) → → ↓ ↓ ↓ ↓ **(E)** → ↓ → ↓ ↓ →

Die Biene fliegt so:

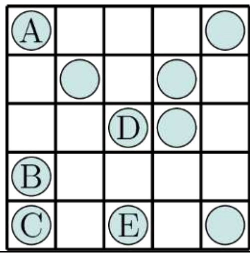


2. Maria bekommt zu jedem Geburtstag so viele Teddys, wie sie an Jahren alt geworden ist.
Zu ihrem ersten Geburtstag bekommt sie 1 Teddy.
Zu ihrem zweiten Geburtstag bekommt sie 2 Teddys, und so weiter.
Wie viele Teddys hat Maria insgesamt am Tag nach ihrem sechsten Geburtstag?
(A) 19 (B) 20 **(C)** 21 (D) 22 (E) 23

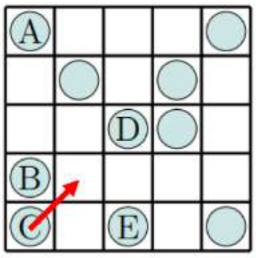
1. Geburtstag:	1	Teddy
2. Geburtstag:	2	Teddys
3. Geburtstag:	3	Teddys
4. Geburtstag:	4	Teddys
5. Geburtstag:	5	Teddys
6. Geburtstag:	6	Teddys
	21	Teddys

3. Eine der fünf Münzen A, B, C, D oder E soll so auf ein leeres Feld gelegt werden, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau zwei Münzen liegen. Welche Münze musst du bewegen?

(A) A (B) B **(C)** C (D) D (E) E



In den meisten Spalten und Zeile befinden sich bereits zwei Münzen. In der ersten Spalte und in der letzten Zeile befinden sich aber 3 Münzen; es muss eine Münze daraus entfernt werden. Nur die Münze C liegen in der ersten Spalte und in der letzten Zeile, weshalb sie umgelegt werden muss. In der zweiten Spalte und in der vierten Zeile befindet sich nur eine Münze, deshalb muss die Münze dort hingelegt werden.



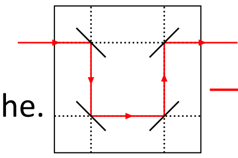
4. Welche zwei Zahlen können für □ in die Rechnung 2022 + □ = 2020 + □ eingesetzt werden, sodass sie richtig ist?

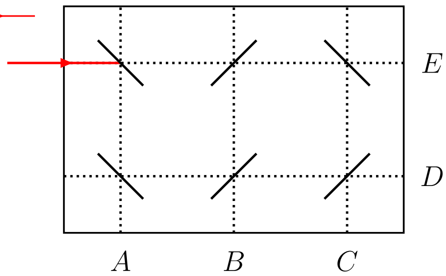
(A) 3 und 5 (B) 4 und 1 (C) 3 und 4 (D) 7 und 2 (E) 9 und 8

Die Zahl 2022 ist um 2 größer als die Zahl 2020. Damit die Ergebnisse links und rechts gleich sind, muss man zu 2020 eine Zahl hinzufügen, die um 2 größer ist als die Zahl, die man zu 2022 hinzufügt. Dies ist nur bei **3** und **5** der Fall. Bei den anderen Lösungsvorschlägen ist der Unterschied der beiden Zahlen nicht 2.

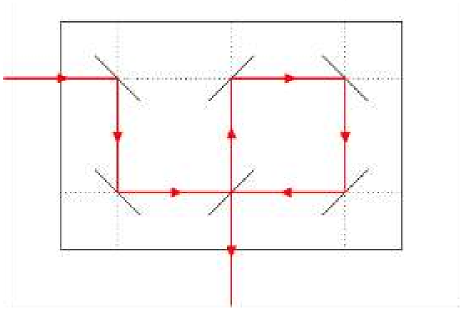
5. Trifft ein Laserstrahl auf eine Spiegelfläche, so ändert er seine Richtung (siehe kleines Bild).
Jeder Spiegel hat auf beiden Seiten eine Spiegelfläche.
Bei welchem Buchstaben endet der Laserstrahl?

(A) A **(B)** B (C) C (D) D (E) E

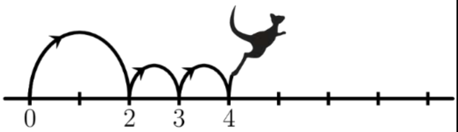




Hier siehst du die Lösung:

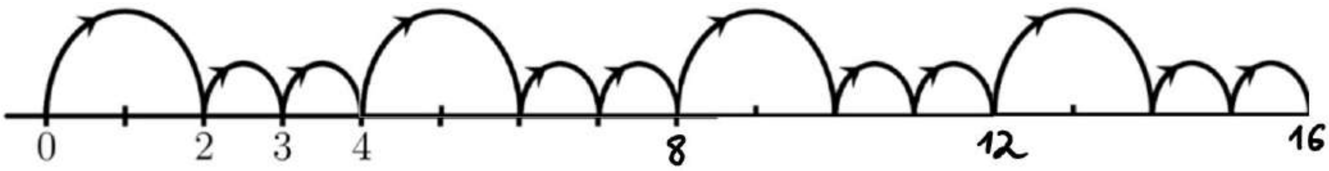


6. Kengu hüpft am Zahlenstrahl nach rechts (siehe Bild).
Er macht zuerst einen großen Sprung und dann zwei kleine Sprünge hintereinander und wiederholt das gleiche immer wieder.
Er startet bei 0 und endet bei 16.
Wie viele Sprünge macht Kengu insgesamt?



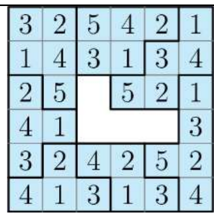
(A) 4 (B) 7 (C) 8 (D) 9 **(E)** 12

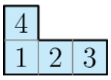
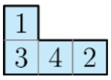
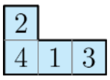
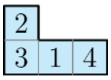
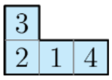
Hier siehst du, wie das Känguru bis 16 springt:



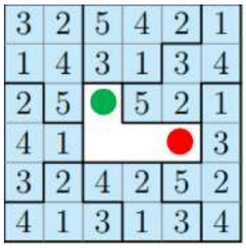
Es hat insgesamt 4 Mal je einen großen und zwei kleine Sprünge hintereinander gemacht, also $4 \cdot 3 =$ **12**.

7. In der Figur rechts dürfen zwei benachbarte Quadrate nie dieselbe Zahl enthalten.
Welches Puzzlestück muss in die Lücke gelegt werden, sodass die Regel erfüllt bleibt?

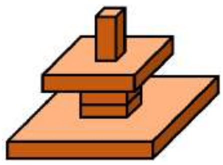


(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

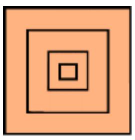
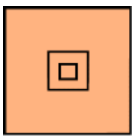
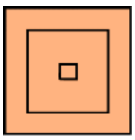
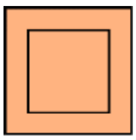
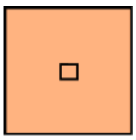
In den Nachbarfeldern des grünen Punkts liegen die Zahlen 3 und 5. Anstelle des grünen Punkts dürfen also nur die Zahlen 1, 2 oder 4 stehen. In den Nachbarfeldern des roten Punkts stehen die Zahlen 2, 3 und 5. Anstelle des roten Punkts dürfen nur die Zahlen 1 oder 4 stehen. Nur bei Lösung **D** werden beide Bedingungen erfüllt.



8. John baut aus Bausteinen dieses Kunstwerk.

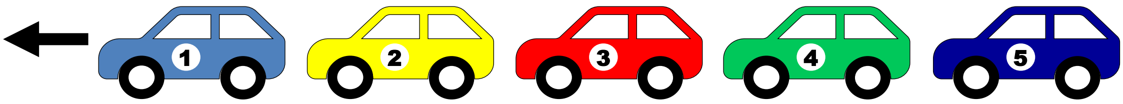


Was sieht John, wenn er sein Kunstwerk von oben betrachtet?

(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

In diesem Bild sieht man Figuren mit unterschiedlichen Größen. Wenn man das Kunstwerk von oben betrachtet, kann man die zweite und die dritte Figur von unten nicht sehen, da sie von der vierten Figur verdeckt werden. Diese ist nämlich länger und breiter.

9. Fünf Autos sind mit den Zahlen 1 bis 5 nummeriert. Sie fahren in Pfeilrichtung.

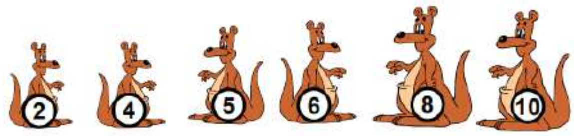


Zuerst überholt das letzte Auto die zwei Autos vor ihm.
Dann überholt das nun vorletzte Auto die zwei Autos davor.
Am Schluss überholt jenes Auto, das nun in der Mitte steht, die zwei vor ihm.
In welcher Reihenfolge fahren die Autos jetzt?

(A) 1, 2, 3, 4, 5 **(B)** 2, 1, 3, 5, 4 (C) 2, 1, 5, 3, 4 (D) 3, 1, 4, 2, 5 (E) 4, 1, 2, 5, 3

Reihenfolge vor dem erstem Tausch:	1	2	3	4	5
Reihenfolge nach dem erstem Tausch:	1	2	5	3	4
Reihenfolge nach dem zweiten Tausch:	1	3	2	5	4
Reihenfolge nach dem dritten Tausch:	**2**	**1**	**3**	**5**	**4**

10. Die Mitglieder einer Kängurufamilie sind 2, 4, 5, 6, 8 und 10 Jahre alt.
Vier von ihnen sind zusammengezählt 22 Jahre alt.
Wie alt sind die beiden anderen Kängurus?



(A) 2 und 8 (B) 4 und 5 **(C)** 5 und 8 (D) 6 und 8 (E) 6 und 10

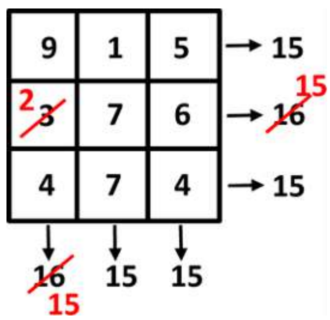
Das Alter aller Kängurus zusammen beträgt 35 Jahre (2 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 = 35).
Wenn 4 Kängurus zusammen 22 Jahre alt sind, dann sind die anderen beiden Kängurus zusammen 13 Jahre alt. Die einzige Möglichkeit der Lösungsvorschläge für dieses Ergebnis ist C mit **5 + 8**.

11. Mosif hat eine Tabelle mit Zahlen ausgefüllt (siehe Bild).
Wenn er die Zahlen jeder Zeile und jeder Spalte zusammenzählt, soll immer dasselbe Ergebnis herauskommen. Er hat aber einen Fehler gemacht.
Damit er immer dasselbe Ergebnis erhält, muss er eine einzige Zahl ändern.
Welche Zahl muss Mosif ändern?

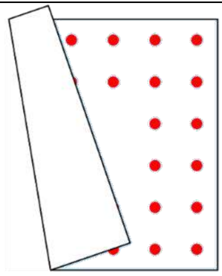
9	1	5
3	7	6
4	7	4

(A) 1 **(B)** 3 (C) einen der beiden 4er (D) 5 (E) einen der beiden 7er

Wenn man alle Zahlen jeder Zeile und in jeder Spalte zusammenzählt, muss das gleiche Ergebnis rauskommen. In den meisten Fällen ist dieses Ergebnis 15, nur nicht bei der ersten Spalte und der zweiten Zeile. Wir müssen also jene Zahl ändern, die in dieser Spalte und Zeile vorkommt. Die Zahl **3** muss somit um 1 verkleinert werden.



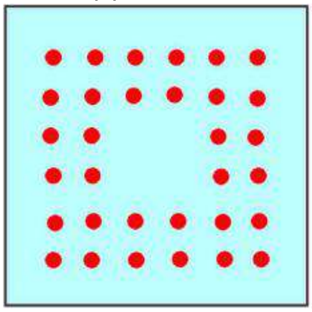
12. Aladdins Teppich hat die Form eines Quadrats.
Bei jedem Rand sind zwei Reihen von Punkten (siehe Bild).
Die Anzahl dieser Punkte ist bei jedem Rand gleich groß.



Wie viele Punkte hat der Teppich insgesamt?

(A) 32 (B) 36 (C) 40 (D) 44 (E) 48

Der äußere Ring hat auf jeder Seite 6 Punkte und der innere Ring hat auf jeder Seite 4 Punkt. So sieht der Teppich aus:



Insgesamt sind es also **32 Punkte**.

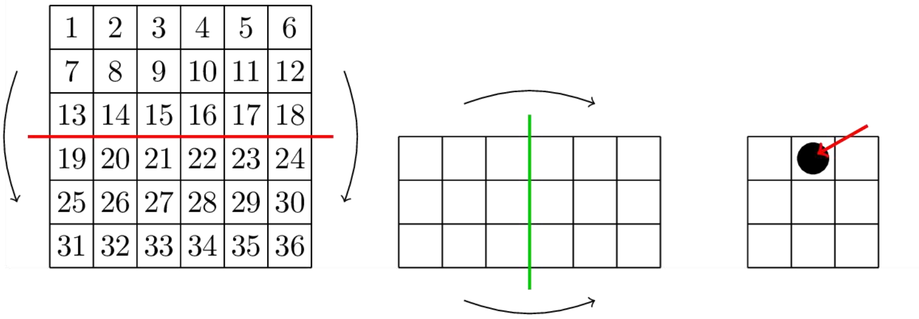
13. In einer Klasse sitzen die Kinder in Reihen.
In jeder Reihe sitzen gleich viele Kinder.
In Roberts Reihe sitzen 2 Kinder links von ihm und 3 Kinder rechts von ihm.
Vor Robert gibt es 2 Reihen, hinter ihm nur eine.
Wie viele Kinder sind insgesamt in der Klasse?

(A) 8 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

Links von Robert sitzen 2 Kinder und rechts von ihm 3, somit gibt es in jeder Reihe 6 Kinder ($2 + 1 + 3 = 6$). In der Klasse gibt es 4 Reihen ($2 + 1 + 1 = 4$). Insgesamt gibt es als $4 \cdot 6 =$ **24** Kinder in der Klasse.

vorne					
●	●	●	●	●	●
●	●	●	●	●	●
●	●	R	●	●	●
●	●	●	●	●	●
hinten					

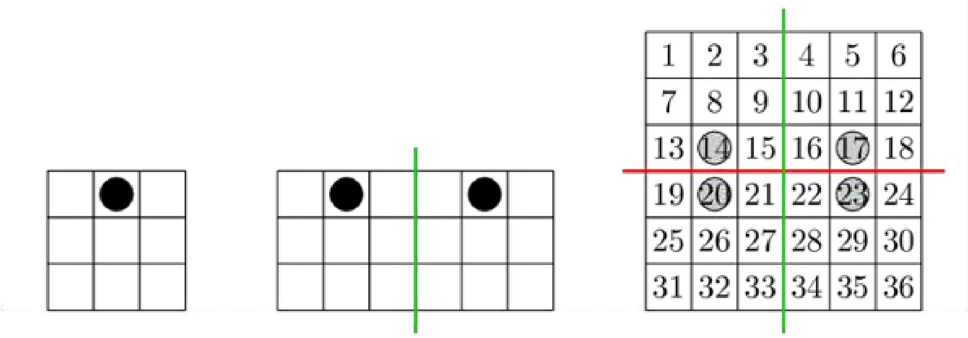
14. Johanna faltet ein Blatt Papier mit Zahlen von 1 bis 36 zwei Mal in der Hälfte (siehe Bilder).



Danach sticht sie durch alle vier Schichten gleichzeitig ein Loch (siehe rechtes Bild).
Welche vier Zahlen durchbohrt sie dabei?

(A) 8, 11, 26, 29 (B) 14, 16, 21, 23 **(C)** 14, 17, 20, 23
(D) 15, 16, 21, 22 (E) 15, 17, 20, 22

Hier siehst du die Lösung:



15. Drei Fußballteams nehmen an einem Turnier teil.
Jedes Team spielt gegen jedes andere Team ein Mal.
Bei einem Sieg bekommt ein Team 3 Punkte, das andere 0 Punkte.
Bei einem Unentschieden bekommen beide Teams je 1 Punkt.
Welchen Punktestand kann nach dem Turnier keines der Teams haben?

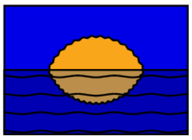
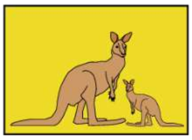
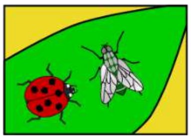
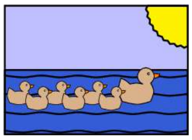
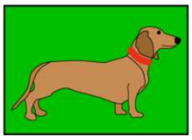
(A) 1 (B) 2 (C) 4 **(D)** 5 (E) 6

Da jedes Team genau 2 Spiele hat und 0, 1 und 3 die möglichen erreichbaren Punkte sind, ergeben sich als mögliche Punktestände 0 + 0 = 0 Punkte, 0 + 1 = 1 Punkt, 1 + 1 = 2 Punkte, 1 + 3 = 4 Punkte und 3 + 3 = 6 Punkte. Also gibt es keine Möglichkeit, genau 5 Punkte zu bekommen (dafür müsste ein Team mindestens 3 Spiele absolvieren).

16. Jan schickt während seines Urlaubs fünf Postkarten an seine Freunde.

Auf der Karte für Michael sind **keine** Enten.
Auf der Karte für Clara sieht man die Sonne.
Auf der Karte für Paula Karte gibt es genau zwei Lebewesen.
Auf der Karte für Lexi ist ein Hund.
Auf der Karte für Heidi sind Kängurus.

Welche Karte schickt Jan an Michael?

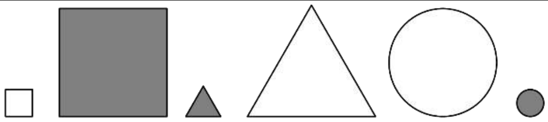
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Michael	hat nicht D
Lexi	hat E
Heidi	hat B
Paula	hat B oder C; da aber Heidi B hat, muss Paula C haben.
Clara	hat A oder D; da aber Michael nicht D hat, muss Clara D haben

Für Michael bleibt nur Lösung **A** über.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Wanda wählt aus den folgenden Figuren einige aus. Sie sagt: „Ich habe genau 2 graue, 2 große und 2 runde Figuren ausgewählt.“



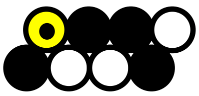
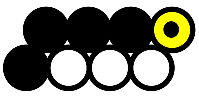
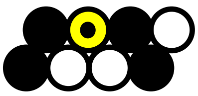
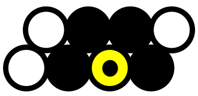
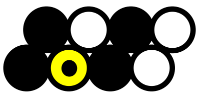
Wie viele Figuren hat Wanda mindestens ausgewählt?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

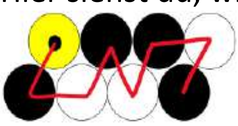
Die zwei runden Figuren (Kreise) müssen auf jeden Fall gewählt werden, damit ist zugleich eine graue und eine große Figur ausgewählt. Wir brauchen noch eine große und eine graue Figur. Das große Quadrat erfüllt beide Voraussetzungen, also reicht es, drei Figuren auszuwählen.

18. Die kleine Raupe  rollt sich zum Schlafen zusammen.

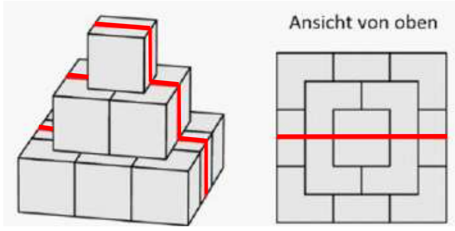
Wie könnte sie dabei aussehen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Hier siehst du, wie die Raupe zusammengerollt aussehen könnte.



19. Eine Pyramide ist aus Würfeln zusammengebaut (siehe Bild).
Alle Würfel haben eine Seitenlänge von 10 cm.
Eine Ameise krabbelte entlang der eingezeichneten Linie über die Pyramide (siehe Bild).
Wie lang ist der Weg der Ameise?

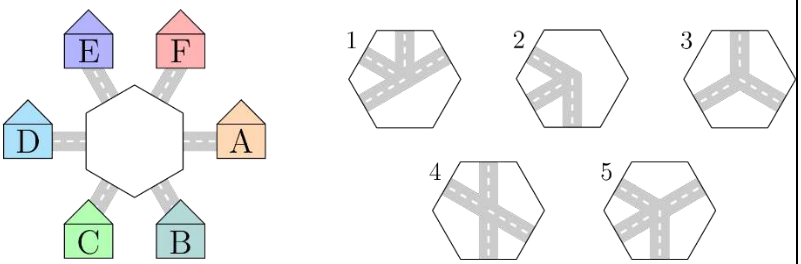


(A) 30 cm (B) 60 cm (C) 70 cm (D) 80 cm **(E)** 90 cm

Bis zur Mitte des obersten Würfels kletterte die Ameise 3 Würfel aufwärts (10 + 10 + 10 = 30 cm) und drei Mal einen halben Würfel horizontal (also 5 + 5 + 5 = 15 cm). Bis zur Pyramidenspitze hat sie also 45 cm zurückgelegt. Der Weg nach unten ist gleich lang. Insgesamt macht das also 45 + 45 = 90 cm.

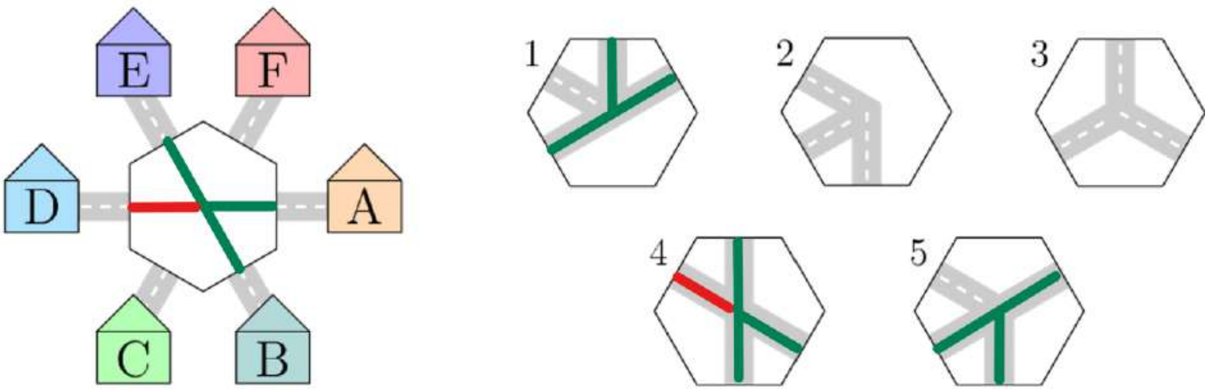
20. Von sechs Häusern geht jeweils eine Straße weg (siehe Bild).
In der Mitte fehlt jedoch ein Sechseck mit Straßenverbindungen.

Welche Sechsecke passen in die Mitte, sodass man von A nach B und nach E, aber **nicht** nach D reisen kann?

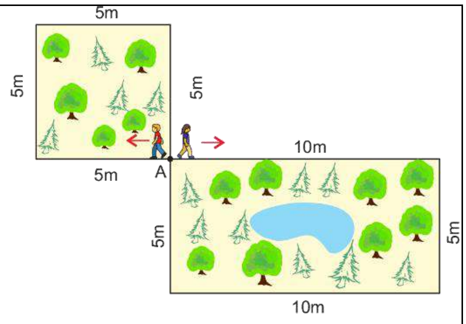


(A) 1 und 2 (B) 1 und 4 **(C)** 1 und 5 (D) 2 und 3 (E) 4 und 5

Sechseck 2 und 3 haben keine gerade Linie quer durch das Sechseck, das für die Verbindung von B nach E nötig ist.
Sechseck 1, 4 und 5 haben die Verbindung von A nach B und E (grün).
Sechseck 4 hat jedoch auch noch eine Verbindung nach D (rot).
Somit sind **1** und **5** die richtigen Antworten.



21. Ahmed und Sara bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit von Punkt A in die gezeigte Richtung. Ahmed geht um den quadratischen Garten und Sara geht um den rechteckigen Garten. Wie viele Runden muss Ahmed gehen, bis er Sara das erste Mal wieder im Punkt A trifft?



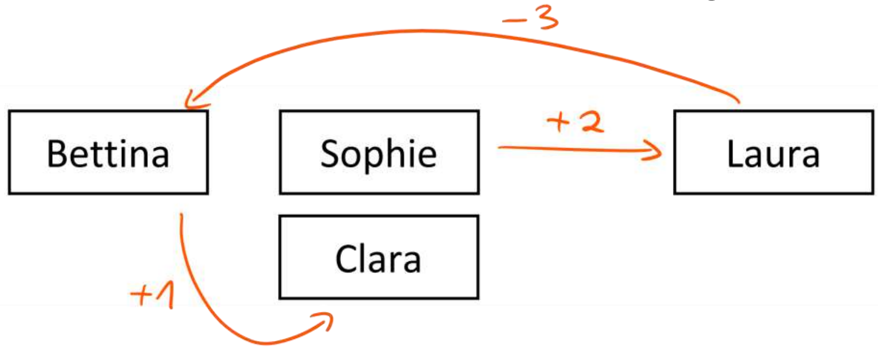
(A) 1 B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Ahmed geht bei einer Runde um den quadratischen Garten 5 + 5 + 5 + 5 = 20 m, während Sara pro Runde um den rechteckigen Garten 10 + 5 + 10 + 5 = 30 m geht. Nachdem Ahmed eine Runde gegangen ist, ist Sara noch 10 m weit vom Punkt A entfernt. Wenn Ahmed nach seiner 2. Runde zum Punkt A zurückkommt, hat auch Sara 40 m zurückgelegt. Sie ist jedoch noch 20 m vom Punkt A entfernt. Nach Ahmeds 3. Runde haben die beiden jeweils 60 m zurückgelegt und damit hat Ahmed genau **3** Runden zurückgelegt und Sara genau 2.

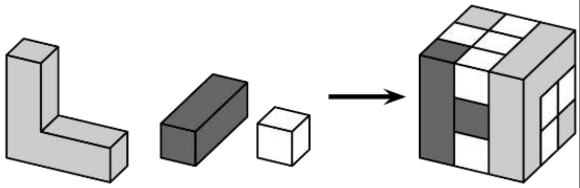
22.Fünf Mädchen essen Pflaumen.
Laura isst um 2 Pflaumen mehr als Sophie.
Bettina isst um 3 Pflaumen weniger als Laura.
Clara isst eine Pflaume mehr als Bettina und 3 weniger als Alice.
Welche zwei Mädchen essen gleich viele Pflaumen?

(A) Alice und Bettina (B) Alice und Laura (C) Alice und Sophie
(D) Clara und Laura **(E)** Clara und Sophie

Laura isst um zwei Pflaumen mehr als Sophie.
Bettina isst drei Pflaumen weniger als Laura und somit um eine Pflaume weniger als Sophie.
Clara isst eine Pflaume mehr als Bettina und somit gleich viele Pflaumen wie Sophie.



23. Der große Würfel besteht aus drei verschiedenen Arten von Bausteinen (siehe Bild).
Wie viele der kleinen weißen Würfel werden für diesen großen Würfel benötigt?

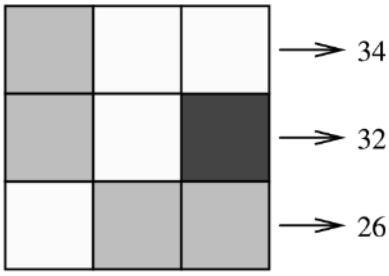


(A) 8 **(B)** 11 (C) 13 (D) 16 (E) 19

In der untersten Reihe gibt es	4 weiße Würfel
In der mittleren Reihe gibt es	3 weiße Würfel
In der obersten Reihe gibt es	4 weiße Würfel

Insgesamt gibt es 4 + 3 + 4 = **11** weiße Würfel.

24. Unter Karten mit derselben Farbe befindet sich jeweils dieselbe Zahl. Zählt man die drei verdeckten Zahlen einer Reihe zusammen, erhält man die Zahl rechts neben der Reihe.
Welche Zahl wird durch die schwarze Karte verdeckt?



(A) 6 (B) 8 (C) 10 **(D)** 12 (E) 14

In der ersten Zeile ergeben zwei weiße Felder und ein graues Feld genau 34. In der dritten Zeile ergeben ein weißes Feld und zwei graue Felder 26. Das heißt, dass drei weiße und drei graue Felder gemeinsam 60 ergeben. Damit ergeben ein weißes und ein graues Feld gemeinsam den Wert 20 (weil 60 : 3 = 20). In der zweiten Zeile fehlen also noch **12** auf das erforderliche Ergebnis von 32.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5. – 6.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 8.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 9. - 16.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 17. - 24.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

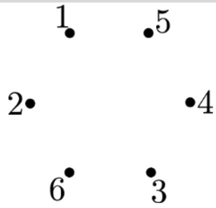
pwc

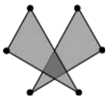
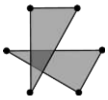
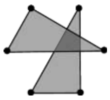
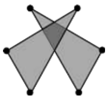
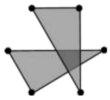
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

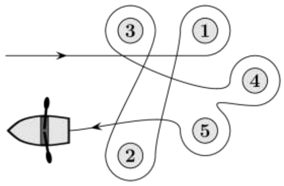
- 3 Punkte Beispiele -

1. Sechs Punkte werden, wie rechts zu sehen, angeordnet und nummeriert.
Man zeichnet zwei Dreiecke: eines, bei dem man die Punkte mit geraden Zahlen verbindet, und eines, bei dem man die Punkte mit ungeraden Zahlen verbindet.
Welche der folgenden Figuren entsteht?



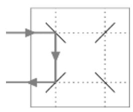
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

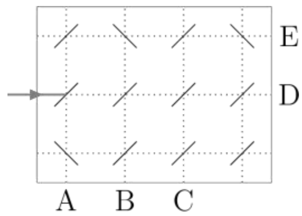
2. Eva paddelt mit ihrem Boot um fünf Bojen (siehe Bild).



Um welche Bojen paddelt sie gegen den Uhrzeigersinn?
(A) 1 und 4 (B) 2, 3 und 5 (C) 2 und 3 (D) 1, 4 und 5 (E) 1 und 3

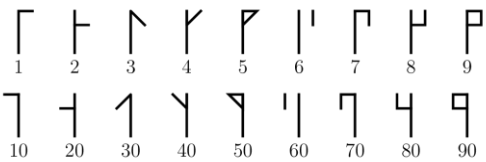
3. Die beidseitigen Spiegel reflektieren die Laserstrahlen wie im linken kleinen Bild gezeigt.
Bei welchem Buchstaben verlässt der Laserstrahl das rechte Bild?





(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

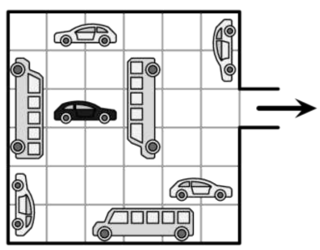
4. Im 13. Jahrhundert hatten Mönche folgende Zahlenschreibweise:
Für die Zahlen von 1 bis 99 verwendeten sie die hier aufgeschriebenen Zahlenzeichen oder eine Kombination von zwei dieser Zeichen.



Z.B. sah die Zahl 24 so  aus, die Zahl 81 so  und die Zahl 93 so .
Wie sah die Zahl 45 aus?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

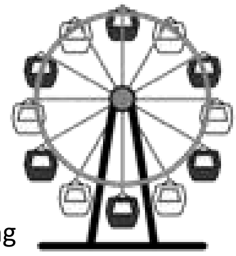
5. Murmeln werden in 5er, 10er oder 25er Packungen verkauft. Tom kauft genau 95 Murmeln.
Wie viele Packungen muss Tom mindestens kaufen?
(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 10

6. Alle Fahrzeuge in der Garage können nur vorwärts oder rückwärts fahren.



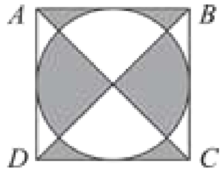
Das schwarze Auto soll die Garage verlassen können (siehe Bild).
Wie viele graue Fahrzeuge müssen mindestens ein Stück fahren, damit dies möglich ist?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Bodil legt diese sieben Karten $\boxed{4}$ $\boxed{69}$ $\boxed{113}$ $\boxed{9}$ $\boxed{51}$ $\boxed{5}$ $\boxed{67}$ so aneinander, dass die kleinste 12-stellige Zahl entsteht, die er mit diesen Karten bilden kann.
Wie lauten die letzten drei Ziffern dieser Zahl?
(A) 699 (B) 113 (C) 551 (D) 967 (E) 459



8. Wie weit muss sich das Riesenrad drehen, damit das erste Mal eine weiße Gondel oben steht?
(A) $\frac{1}{2}$ Drehung (B) $\frac{1}{3}$ Drehung (C) $\frac{1}{6}$ Drehung (D) $\frac{1}{12}$ Drehung (E) $\frac{5}{6}$ Drehung

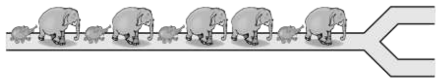
- 4 Punkte Beispiele -

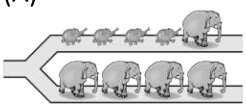
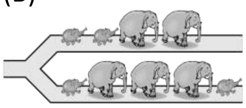
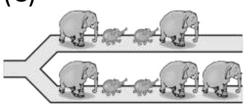
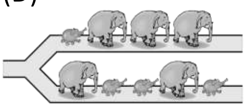
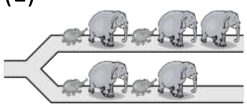


9. Im abgebildeten Quadrat *ABCD* sind die Seiten 10 cm lang.
Welchen Flächeninhalt haben die grauen Flächen insgesamt?

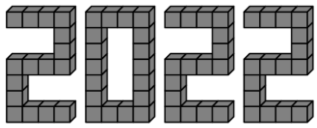
(A) 40 cm²   (B) 45 cm²   (C) 50 cm²   (D) 55 cm²   (E) 60 cm²

10. Fünf große und vier kleine Elefanten marschieren entlang eines Weges.
Da der Weg schmal ist, können die Elefanten ihre Reihenfolge nicht ändern.
Bei der Weggabelung geht jeder Elefant entweder nach rechts oder links.
Welche der folgenden Situationen kann nicht entstehen?



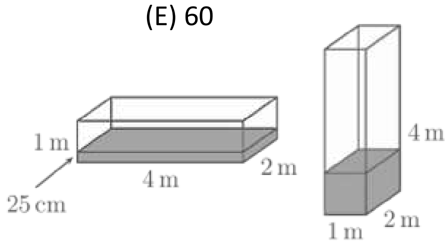
(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

11. Marc baut durch Zusammenkleben von 66 gleich großen Würfeln die Zahl 2022 wie im Bild zu sehen. Danach bemalt er die gesamte Oberfläche seines Werkes.
Bei wie vielen der 66 Würfel hat Marc genau vier Flächen bemalt?



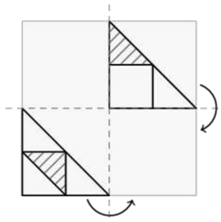
(A) 16   (B) 30   (C) 46   (D) 54   (E) 60

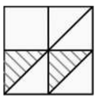
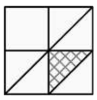
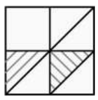
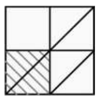
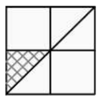
12. In einem quaderförmigen Wassertank mit den Maßen 4 m x 2 m x 1 m steht das Wasser 25 cm hoch.
Der Tank wird nun gekippt (siehe rechtes Bild).
Wie hoch steht das Wasser jetzt im Tank?



(A) 25 cm   (B) 50 cm   (C) 75 cm   (D) 1 m   (E) 1,25 m

13. Auf einer quadratischen durchsichtigen Folie ist eine Grafik zu sehen.
Die Folie wird zweimal, wie im Bild gezeigt, gefaltet.
Wie sieht die Folie aus, nachdem sie zweimal gefaltet wurde?

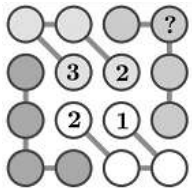


(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

14. Die Jahreszahl 2022 enthält drei gleiche Ziffern.
Schildkröte Eva erlebt nun schon zum dritten Mal ein Jahr mit einer Jahreszahl, in der eine gleiche Ziffer drei Mal vorkommt.
Wie alt wird die Schildkröte Eva heuer mindestens?

(A) 20   (B) 22   (C) 23   (D) 56   (E) 134

15. In der Zeichnung sind je vier Kreise durch Linien zu Viererketten verbunden.
In jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Viererkette stehen genau die Zahlen 1, 2, 3 und 4.



Welche Zahl steht im Kreis mit dem Fragezeichen?

(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 4   (E) Das kann man nicht bestimmen.

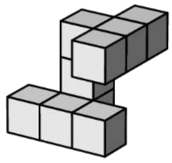
16. Lisa hat vier unterschiedlich schwere Hunde. Jeder Hund wiegt eine ganze Zahl in Kilogramm.
Alle Hunde zusammen wiegen 60 kg. Der zweitschwerste Hund wiegt 28 kg.
Wie viel Kilogramm wiegt der drittschwerste Hund?

(A) 2 kg   (B) 3 kg   (C) 4 kg   (D) 5 kg   (E) 6 kg

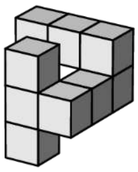
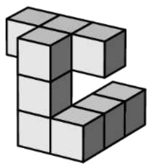
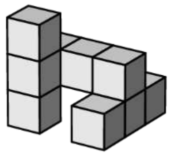
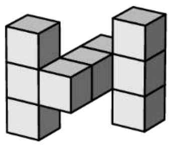
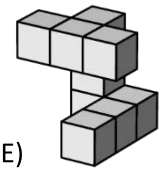
- 5 Punkte Beispiele -

17. Einige gleiche Gläser werden übereinandergestapelt.
Ein Stapel mit acht Gläsern ist 42 cm hoch. Ein Stapel mit zwei Gläsern ist 18 cm hoch.
Wie hoch ist ein Stapel mit sechs Gläsern?
(A) 22 cm (B) 24 cm (C) 28 cm (D) 34 cm (E) 40 cm

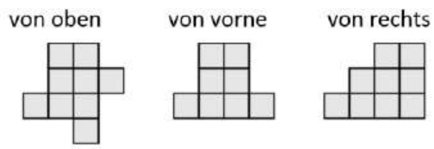
18. Die Bushaltestellen der Dörfer A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge entlang einer Straße.
Die Entfernung zwischen zwei Haltestellen benachbarter Dörfer beträgt 10 km.
Im Dorf A wohnen 10 Kinder, im Dorf B 20, im Dorf C 30 und im Dorf D 40. Alle Kinder fahren mit dem Bus in die Schule.
Eine neue Schule soll gebaut werden. Um einen geeigneten Ort zu finden, addiert man die Kilometer, die jedes Kind im Bus zurücklegt. Man baut die Schule an jener Stelle, an der diese Summe am kleinsten ist.
Wo wird die neue Schule gebaut?
(A) in A (B) in B (C) in der Mitte von B und C (D) in C (E) in D



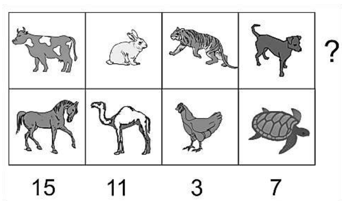
19. Anna hat mehrere gleich große Würfel zu einem Objekt zusammengeklebt (siehe rechtes Bild).
Welches der folgenden Bilder zeigt eine andere Ansicht dieses Objekts?


(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

20. Werner fügt in die leeren Quadrate □ + □ − □ = □ auf verschiedene Arten Zahlen so ein, dass die Rechnung richtig ist. Er verwendet jeweils vier der Zahlen 2, 3, 4, 5 oder 6, wobei bei jeder Rechnung jede Zahl nur einmal vorkommt.
Wie viele der fünf Zahlen darf Werner dabei in das graue Quadrat schreiben?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

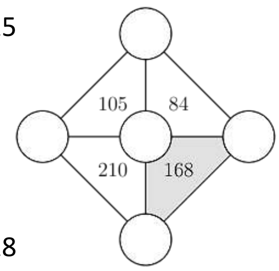


21. Ein Bauwerk besteht aus gleich großen Würfeln.
Die drei Bilder zeigen dieses von oben, von vorne und von rechts.
Wie viele Würfel sind für dieses Bauwerk maximal verwendet worden?
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22



22. Jedes Tier im Bild rechts steht für eine natürliche Zahl größer als Null.
Verschiedene Tiere stellen verschiedene Zahlen dar.
Die Summe der beiden Zahlen einer Spalte steht jeweils unter dieser Spalte.
Welchen Wert kann die Summe der vier Zahlen in der oberen Reihe maximal haben?
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

23. 30 Personen sitzen um einen runden Tisch. Einige von ihnen tragen einen Hut.
Diejenigen, die keinen Hut tragen, müssen die Wahrheit sagen.
Jene, die einen Hut tragen, können entweder die Wahrheit sagen oder lügen.
Alle behaupten: „Zumindest eine meiner beiden benachbarten Personen trägt einen Hut."
Wie groß ist die größtmögliche Anzahl jener Personen, die keinen Hut tragen?
(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25



24. Kai muss die Zahlen 3, 4, 5, 6 und 7 in die fünf Kreise der Abbildung rechts folgendermaßen eintragen: Die in einem Dreieck angegebene Zahl muss das Produkt der drei Zahlen sein, die in den Eckpunkten dieses Dreiecks stehen.
Wie groß ist die Summe der Zahlen in den Eckpunkten des Dreiecks mit der Zahl 168?
(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 17 (E) 18

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Level: Benjamin, Grades 5 - 6

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
each correct answer to questions 1. – 8.: 3 points
each correct answer to questions 9. – 16.: 4 points
each correct answer to questions 17. – 24.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

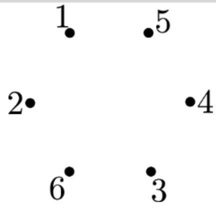
17	18	19	20	21	22	23	24

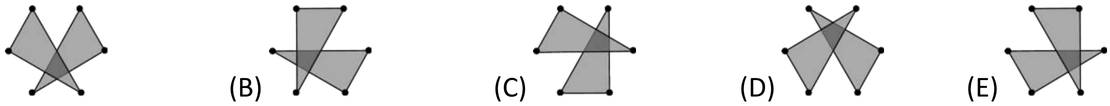
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade;
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2022
Level Benjamin (Schulstufe 5 and 6)
Austria – 17. 3. 2022

- 3 Point Examples -

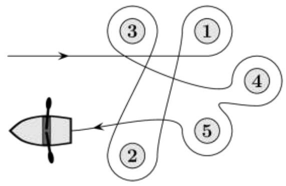
1. Six points are placed and numbered as shown on the right.
Two triangles are drawn: one by connecting the even numbered points, and one by connecting the odd numbered points.
Which of the following shapes is the result?





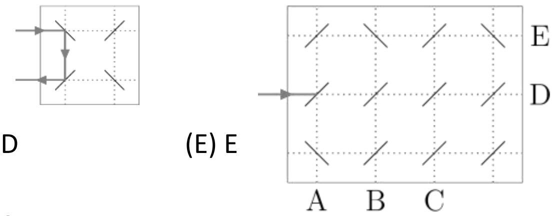
(A) (B) (C) (D) (E)

2. Eva paddles around five buoys with her boat (see diagram).
Which of the buoys does she paddle around in an anti-clockwise direction?



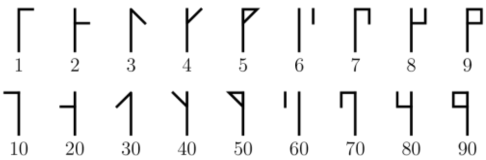
(A) 1 and 4 (B) 2, 3 and 5 (C) 2 and 3 (D) 1, 4 and 5 (E) 1 and 3

3. The two-sided mirrors reflect the laser beams as shown in the small picture on the left.
At which letter does the laser beam leave the picture on the right?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

4. In the 13th century, monks used to write numbers in the following way:
For the numbers 1 to 99 they used the signs shown here or a combination of two of these signs.



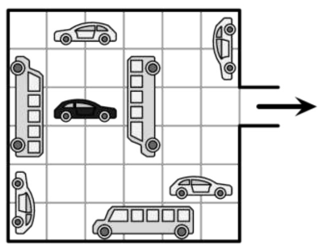
E.g. the number 24 was written like , the number 81 like  and the number 93 like . What did the number 45 look like?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

5. Marbles are sold in packages of 5, 10 or 25. Tom buys exactly 95 marbles.
What is the minimum number of packages Tom has to buy?

(A) 4 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 10

6. All vehicles in the garage can only drive forwards or backwards.
The black car wants to leave the garage (see diagram). What is the minimum number of grey vehicles that need to move at least a little bit so that this is possible?

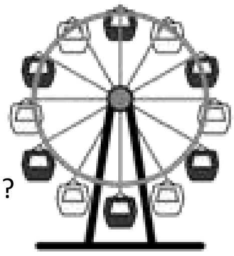


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

7. Bodil lays these seven cards $\boxed{4}$ $\boxed{69}$ $\boxed{113}$ $\boxed{9}$ $\boxed{51}$ $\boxed{5}$ $\boxed{67}$ next to each other, so that the smallest possible 12-digit number which can be made from these cards is formed.
What are the last three digits of this number?

(A) 699 (B) 113 (C) 551 (D) 967 (E) 459

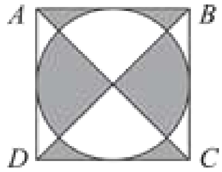
8. How much does this Ferris wheel need to turn so that a white gondola is on top for the first time?



(A) $\frac{1}{2}$ turn (B) $\frac{1}{3}$ turn (C) $\frac{1}{6}$ turn (D) $\frac{1}{12}$ turn (E) $\frac{5}{6}$ turn

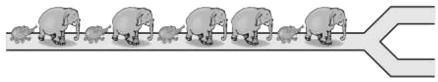
- 4 Point Examples -

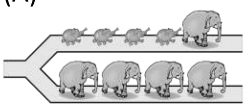
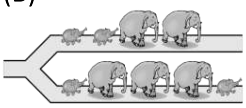
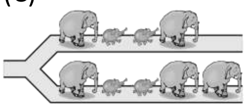
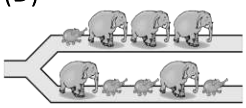
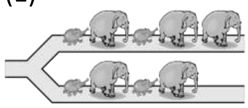
9. The sides of the square *ABCD* are 10 cm long.
What is the total area of the shaded part?



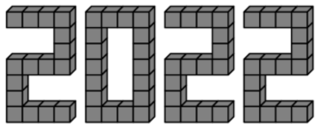
(A) 40 cm² (B) 45 cm² (C) 50 cm² (D) 55 cm² (E) 60 cm²

10. Five big and four small elephants are marching along a path.
Since the path is narrow the elephants cannot change their order.
At the fork in the path each elephant either goes to the right or to the left.
Which of the following situations cannot happen?



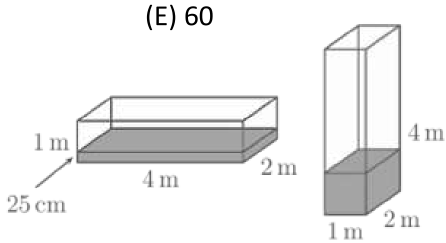
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Marc builds the number 2022 as seen in the picture by glueing together 66 cubes of the same size. Afterwards he paints the entire surface of his work.
On how many of the 66 cubes has Marc painted exactly four faces?



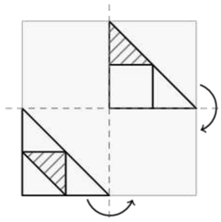
(A) 16 (B) 30 (C) 46 (D) 54 (E) 60

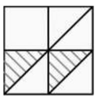
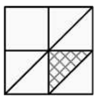
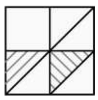
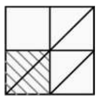
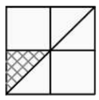
12. In a box-shaped water tank with dimensions 4 m x 2 m x 1 m, the height of the water is 25 cm.
The tank is then turned on its side (see picture on the right).
How high is the water in the tank now?



(A) 25 cm (B) 50 cm (C) 75 cm (D) 1 m (E) 1.25 m

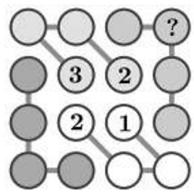
13. Some art work can be seen on a square-shaped transparent piece of foil.
The foil is folded over twice as shown in the diagram.
What does the foil look like after it has been folded over twice?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

14. The year 2022 has three equal digits.
This is the third time that Tortoise Eva has experienced a year where the same digit appears three times.
What is the minimum age that tortoise Eva can be this year?
(A) 20 (B) 22 (C) 23 (D) 56 (E) 134

15. Four circles are always connected by a line to form chains of four in a drawing.
The numbers 1, 2, 3 and 4 appear in each row, each column and each chain of four.



Which number is in the circle with the question mark?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) This cannot be determined.

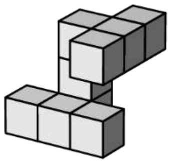
16. Lisa has four differently heavy dogs. Each dog weighs a whole number of kilograms.
All dogs together weigh 60 kg. The second heaviest dog weighs 28 kg.
How heavy is the third heaviest dog?
(A) 2 kg (B) 3 kg (C) 4 kg (D) 5 kg (E) 6 kg

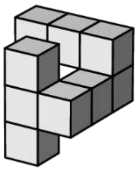
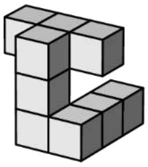
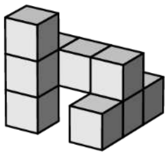
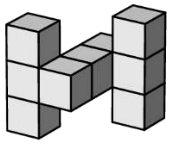
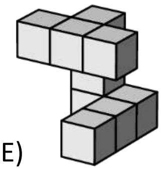
- 5 Point Examples -

17. Some identical glasses are stacked on top of each other.
A stack with eight glasses is 42 cm high. A stack with two glasses is 18 cm high.
How high is a stack with six glasses?
(A) 22 cm (B) 24 cm (C) 28 cm (D) 34 cm (E) 40 cm

18. The bus stops in the villages A, B, C and D are situated along a road in this order.
The distance between two bus stops in neighbouring villages is 10 km.
10 children live in village A, 20 in village B, 30 in village C and 40 in village D. All children take the bus to go to school. A new school is going to be built. In order to find a suitable place, the kilometers that each child would travel by bus are added together. The school is then built at the place where this sum is smallest.
Where will the new school be built?
(A) in A (B) in B (C) in the middle between B and C (D) in C (E) in D

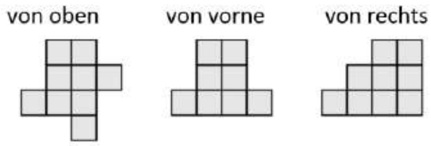
19. Anna has glued together several cubes of the same size to form a solid (see picture).
Which of the following pictures shows a different view of this solid?



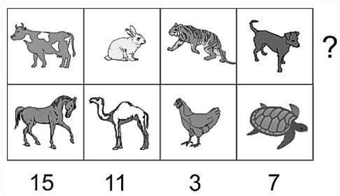
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

20. Werner inserts numbers in various ways into the empty squares $\square + \square - \square = \square$ in such a way that the calculation is correct. He always uses four of the numbers 2, 3, 4, 5 or 6 where in each calculation each number is only allowed to appear once.
How many of the five numbers can Werner insert into the grey square?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

21. A building is made up of cubes of the same size.
The three pictures show it from above (von oben), from the front (von vorne) and from the right (von rechts).
What is the maximum number of cubes used to make this building?
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

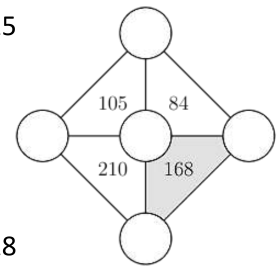


22. Each animal in the picture on the right represents a natural number greater than zero.
Different animals represent a different numbers.
The sum of the two numbers of each column is written underneath each column.
What is the maximum value the sum of the four numbers in the upper row can have?
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22



23. 30 people are sitting around a round table. Some of them are wearing a hat.
Those who do not wear a hat, have to speak the truth.
Those who wear a hat can either speak the truth or lie.
They all claim: „At least one of my two neighbouring people wears a hat."
What is the biggest number of people that do not wear a hat?
(A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25

24. Kai has to insert the numbers 3, 4, 5, 6 and 7 into the five circles of the diagram on the right in the following way: The product of the three numbers in the vertices of each triangle has to be equal to the number stated within the triangle.
How big is the sum of the numbers in the vertices of the triangle with the number 168?
(A) 12 (B) 14 (C) 15 (D) 17 (E) 18



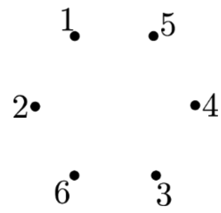
Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Lösungen

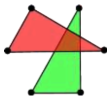
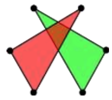
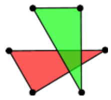
– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
E	E	B	D	B	C	A	D	C	C	E	D	A	C	B	A	D	D	C	E	B	C	D	D

- 3 Punkte Beispiele -

1. Sechs Punkte werden, wie rechts zu sehen, angeordnet und nummeriert.
Man zeichnet zwei Dreiecke: eines, bei dem man die Punkte mit geraden Zahlen verbindet, und eines, bei dem man die Punkte mit ungeraden Zahlen verbindet.
Welche der folgenden Figuren entsteht?

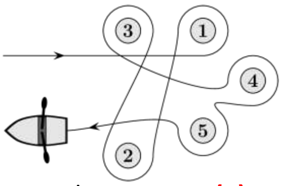


(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Lösung: 1, 3 und 5 sind ungerade Zahlen; 2, 4 und 6 sind gerade Zahlen. Verbindet man die ungeraden miteinander und die geraden miteinander, dann erhält man die Lösung **E**.

2. Eva paddelt mit ihrem Boot um fünf Bojen (siehe Bild).

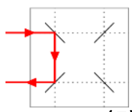
Um welche Bojen paddelt sie gegen den Uhrzeigersinn?

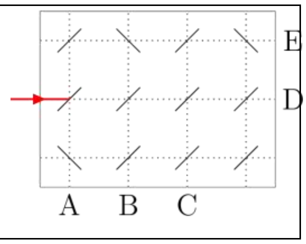


(A) 1 und 4 (B) 2,3 und 5 (C) 2 und 3 (D) 1,4 und 5 **(E) 1 und 3**

Lösung: Wenn Eva um eine Boje gegen den Uhrzeigersinn paddelt, dann befindet sich die Boje auf ihrer linken Seite. Sie hat nur die Boje **1 und 3** auf ihrer linken Seite.

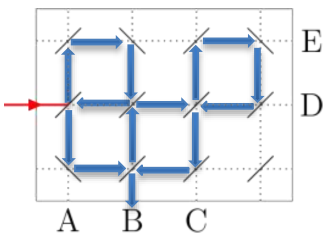
3. Die beidseitigen Spiegel reflektieren die Laserstrahlen wie im linken kleinen Bild gezeigt.
Bei welchem Buchstaben verlässt der Laserstrahl das rechte Bild?





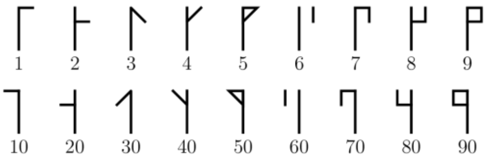
(A) A **(B) B** (C) C (D) D (E) E

Lösung:



Der Laserstrahl verlässt bei **B** das rechte Bild.

4. Im 13. Jahrhundert hatten Mönche folgende Zahlenschreibweise:
Für die Zahlen von 1 bis 99 verwendeten sie die hier aufgeschriebenen Zahlenzeichen oder eine Kombination von zwei dieser Zeichen.



Z.B. sah die Zahl 24 so  aus, die Zahl 81 so  und die Zahl 93 so .
Wie sah die Zahl 45 aus?

(A)    (B)    (C)    **(D)**    (E) 

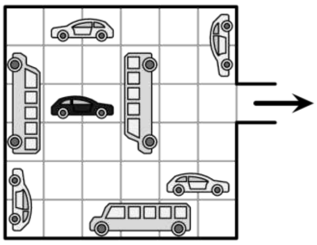
Lösung: 45 = 40 + 5. Verbindet man das Zahlenzeichen für 40:  und 5: , so entsteht **45**: .

5. Murmeln werden in 5er, 10er oder 25er Packungen verkauft. Tom kauft genau 95 Murmeln.
Wie viele Packungen muss Tom mindestens kaufen?

(A) 4   **(B) 5**   (C) 7   (D) 8   (E) 10

Lösung: Um die kleinste Anzahl an Packungen zu erhalten, muss Tom mit den Packungen mit der größten Anzahl beginnen, also mit den 25iger Packungen. 95 = 25 + 25 + 25 + 10 + 10. Er benötigt daher mindestens **5** Packungen.

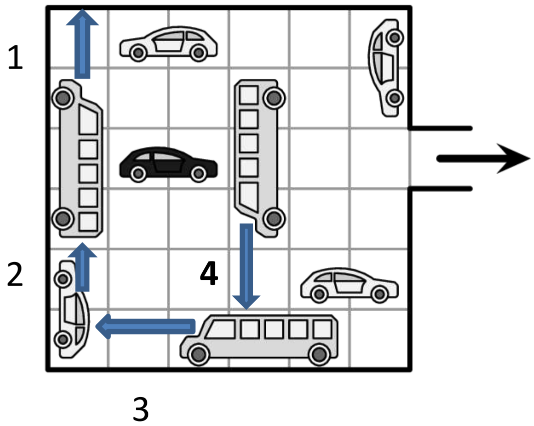
6. Alle Fahrzeuge in der Garage können nur vorwärts oder rückwärts fahren.



Das schwarze Auto soll die Garage verlassen können (siehe Bild).
Wie viele graue Fahrzeuge müssen mindestens ein Stück fahren, damit dies möglich ist?

(A) 2   (B) 3   **(C) 4**   (D) 5   (E) 6

Lösung:



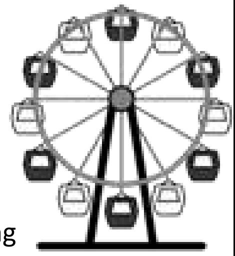
Die Autos müssen, wie an den Pfeilen zu sehen ist, in dieser Reihenfolge bewegt werden.

7. Bodil legt diese sieben Karten $\boxed{4}$ $\boxed{69}$ $\boxed{113}$ $\boxed{9}$ $\boxed{51}$ $\boxed{5}$ $\boxed{67}$ so aneinander,
dass die kleinste 12-stellige Zahl entsteht, die er mit diesen Karten bilden kann.
Wie lauten die letzten drei Ziffern dieser Zahl?

(A) 699   (B) 113   (C) 551   (D) 967   (E) 459

Lösung: Um die kleinste Zahl zu erhalten, müssen die größten Ziffern möglichst weit rechts und die kleinsten möglichst weit links stehen. Rechts kommen daher nur die Karten 69, 9, 67 in Frage. Die letzten drei Ziffern der Zahl lauten somit **699**.

8. Wie weit muss sich das Riesenrad drehen, damit das erste Mal eine weiße Gondel oben steht?

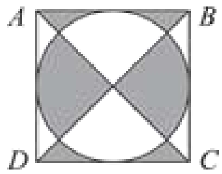


(A) $\frac{1}{2}$ Drehung (B) $\frac{1}{3}$ Drehung (C) $\frac{1}{6}$ Drehung **(D) $\frac{1}{12}$ Drehung** (E) $\frac{5}{6}$ Drehung

Lösung: Das Riesenrad besteht aus 12 Gondeln, wobei diese abwechselnd schwarz und weiß sind. Daher kommt nach einer $\frac{1}{12}$ **- Drehung** des Riesenrads eine weiße Gondel nach oben.

- 4 Punkte Beispiele -

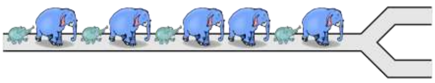
9. Im abgebildeten Quadrat *ABCD* sind die Seiten 10 cm lang.
Welchen Flächeninhalt haben die grauen Flächen insgesamt?



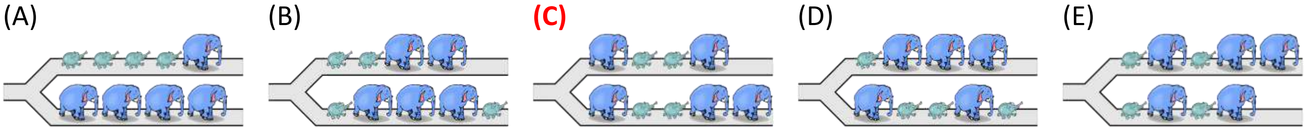
(A) 40 cm² (B) 45 cm² **(C) 50 cm²** (D) 55 cm² (E) 60 cm²

Lösung: Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt 100 cm². Es gibt von jeder Art der Flächenstücke gleich viele weiße wie graue. Damit ist genau die Hälfte des Quadrats grau gefärbt, das sind **50 cm²**.

10. Fünf große und vier kleine Elefanten marschieren entlang eines Weges.
Da der Weg schmal ist, können die Elefanten ihre Reihenfolge nicht ändern.
Bei der Weggabelung geht jeder Elefant entweder nach rechts oder links.
Welche der folgenden Situationen kann nicht entstehen?

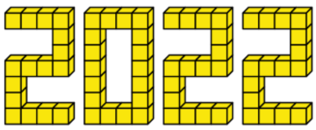


(A) (B) **(C)** (D) (E)



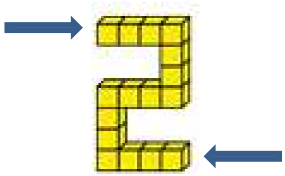
Lösung: Vor der Weggabelung marschierte ein kleiner Elefant als letzter. Das bedeutet, dass nach der Weggabelung auf mindestens einem der Wege ebenso ein kleiner Elefant als letzter marschieren muss. Lösung **C** ist somit nicht möglich.

11. Marc baut durch Zusammenkleben von 66 gleich großen Würfeln die Zahl 2022 wie im Bild zu sehen. Danach bemalt er die gesamte Oberfläche seines Werkes.
Bei wie vielen der 66 Würfel hat Marc genau vier Flächen bemalt?

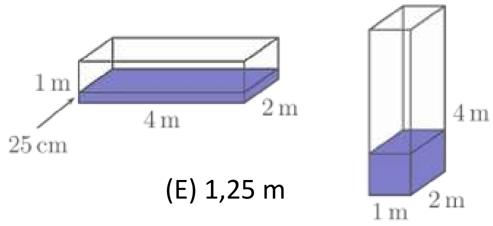


(A) 16 (B) 30 (C) 46 (D) 54 **(E) 60**

Lösung: Jeder gebaute „Zweier“ hat an beiden Enden einen Würfel, bei dem mehr als vier Flächen bemalt sind. Die Ziffer 0 hat keine Würfel, bei denen mehr als vier Flächen bemalt sind, daher werden genau $66 - 3 \cdot 2 = \mathbf{60}$ Würfel bemalt.



12. In einem quaderförmigen Wassertank mit den Maßen 4 m x 2 m x 1 m steht das Wasser 25 cm hoch.
Der Tank wird nun gekippt (siehe rechtes Bild).
Wie hoch steht das Wasser jetzt im Tank?

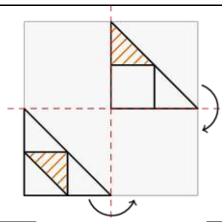


(A) 25 cm (B) 50 cm (C) 75 cm **(D) 1 m** (E) 1,25 m

Lösung: Im linken Tank sind $4 \cdot 2 \cdot 0{,}25 = 2\ \mathrm{m}^3$ Wasser. Durch das Kippen des Tanks ändert sich das Volumen des Wassers nicht und beträgt daher ebenso $2\ \mathrm{m}^3$. Die Höhe kann durch: $2 \div (1 \cdot 2) = \mathbf{1\ m}$ berechnet werden.

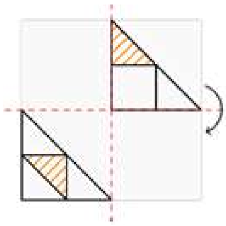
Oder:
Der linke Tank ist bis zum Viertel der Höhe mit Wasser gefüllt. Durch das Kippen ändert sich weder am Volumen des Tanks noch am Volumen des Wassers etwas. Daher muss auch der rechte Tank zu einem Viertel mit Wasser gefüllt sein. Daher steht das Wasser **1 m** hoch ($4\ \mathrm{m} : 4 = 1\ \mathrm{m}$)

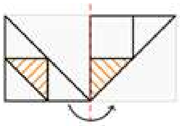
13. Auf einer quadratischen durchsichtigen Folie ist eine Grafik zu sehen.
Die Folie wird zweimal, wie im Bild gezeigt, gefaltet.
Wie sieht die Folie aus, nachdem sie zweimal gefaltet wurde?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: Die Folie soll zweimal gefaltet werden (siehe rechts).



Nach der ersten Faltung sieht die Folie nun so aus: 

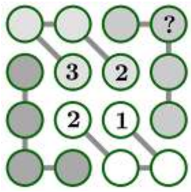
Nach der zweiten Faltung erhält man: 

Lösung **A** ist richtig.

14. Die Jahreszahl 2022 enthält drei gleiche Ziffern.
Schildkröte Eva erlebt nun schon zum dritten Mal ein Jahr mit einer Jahreszahl, in der eine gleiche Ziffer drei Mal vorkommt.
Wie alt wird die Schildkröte Eva heuer mindestens?
(A) 20 (B) 22 **(C) 23** (D) 56 (E) 134

Lösung: Folgende Jahre haben drei Mal dieselben Ziffern: 2022, 2000 und 1999. $2022 - 1999 = 23$. Die Schildkröte Eva wird heuer mindestens **23** Jahre alt.

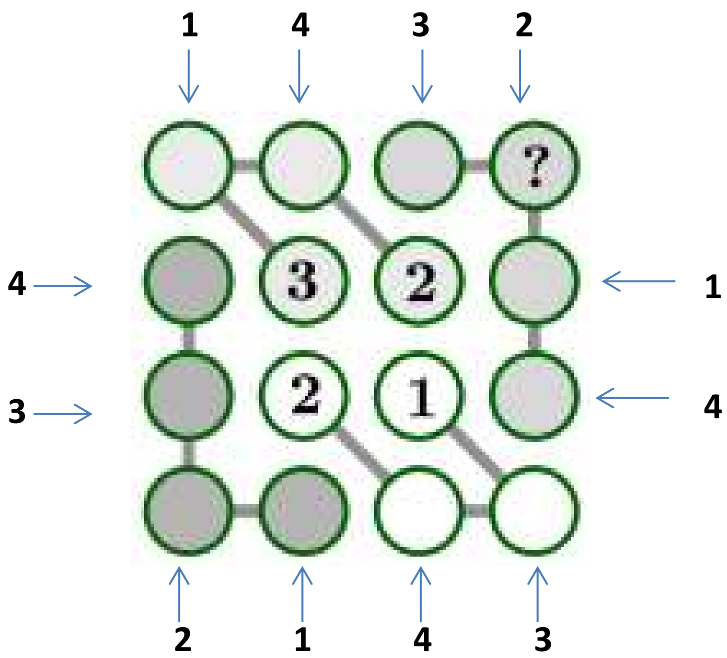
15. In der Zeichnung sind je vier Kreise durch Linien zu Viererketten verbunden.
In jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Viererkette stehen genau die Zahlen 1, 2, 3 und 4.



Welche Zahl steht im Kreis mit dem Fragezeichen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) Das kann man nicht bestimmen.

Lösung: In der ersten Reihe fehlen für die beiden ersten Kreise entweder die Zahlen 1 – 4 oder 4 – 1. In der letzten Reihe fehlen für die beiden fehlenden Kreise 3 – 4 oder 4 – 3. Deshalb darf die Zahl 3 nicht für das Fragezeichen verwendet werden. Im Kreis mit dem Fragezeichen steht deshalb die Zahl **2**.



16. Lisa hat vier unterschiedlich schwere Hunde. Jeder Hund wiegt eine ganze Zahl in Kilogramm.
Alle Hunde zusammen wiegen 60 kg. Der zweitschwerste Hund wiegt 28 kg.
Wie viel Kilogramm wiegt der drittschwerste Hund?

(A) 2 kg (B) 3 kg (C) 4 kg (D) 5 kg (E) 6 kg

Lösung: Der zweitschwerste Hund wiegt 28 kg, der schwerste Hund könnte 29 kg wiegen. $28 + 29 = 57$. Die beiden schwersten Hunde wiegen bereits 57 kg. Alle Hunde zusammen wiegen 60 kg, somit bleiben für die beiden leichten Hunde nur mehr 3 kg übrig. Der drittschwerste Hund kann aber nicht 3 kg wiegen, da sonst der leichteste Hund 0 kg wiegen müsste, was nicht möglich ist. Damit muss der drittschwerste Hund **2 kg** wiegen, und der leichteste Hund wiegt 1 kg. $29 + 28 + 2 + 1 = 60$ kg.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Einige gleiche Gläser werden übereinandergestapelt.
Ein Stapel mit acht Gläsern ist 42 cm hoch. Ein Stapel mit zwei Gläsern ist 18 cm hoch.
Wie hoch ist ein Stapel mit sechs Gläsern?
(A) 22 cm (B) 24 cm (C) 28 cm **(D) 34 cm** (E) 40 cm

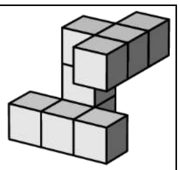
Lösung: Die Differenz der Höhe des Stapels mit 8 Gläsern und des Stapels mit 2 Gläsern beträgt $42 - 18 = 24$ cm. Ein Glas, das einem Stapel hinzugefügt wird, erhöht den Stapel daher um $24 \text{ cm} : 6 = 4$ cm. Wir müssen 4 Gläser zum kleinen Stapel hinzufügen, um einen Stapel mit 6 Gläsern zu erhalten.
Daher wird der Stapel $18 \text{ cm} + 4 \cdot 4 \text{ cm} = \mathbf{34\ cm}$.

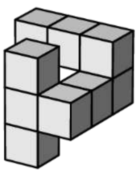
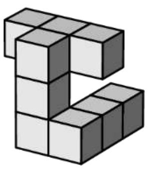
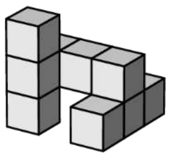
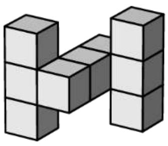
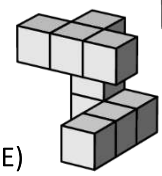
18. Die Bushaltestellen der Dörfer A, B, C und D liegen in dieser Reihenfolge entlang einer Straße.
Die Entfernung zwischen zwei Haltestellen benachbarter Dörfer beträgt 10 km.
Im Dorf A wohnen 10 Kinder, im Dorf B 20, im Dorf C 30 und im Dorf D 40. Alle Kinder fahren mit dem Bus in die Schule.
Eine neue Schule soll gebaut werden. Um einen geeigneten Ort zu finden, addiert man die Kilometer, die jedes Kind im Bus zurücklegt. Man baut die Schule an jener Stelle, an der diese Summe am kleinsten ist.
Wo wird die neue Schule gebaut?
(A) in A (B) in B **(C) in der Mitte von B und C** (D) in C (E) in D

Lösung:

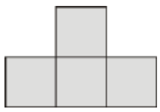
Folgende Strecken ergeben sich durch die Lage der Schule für den Hin- und Retourweg:
Dorf D: $10 \cdot 30 \cdot 2 + 20 \cdot 20 \cdot 2 + 30 \cdot 10 \cdot 2 = 2000$ km
Dorf C: $10 \cdot 20 \cdot 2 + 20 \cdot 10 \cdot 2 + 40 \cdot 10 \cdot 2 = 1600$ km
in der Mitte von B und C: $10 \cdot 15 \cdot 2 + 20 \cdot 5 \cdot 2 + 30 \cdot 5 \cdot 2 + 40 \cdot 15 \cdot 2 = 2000$ km
Dorf B: $10 \cdot 10 \cdot 2 + 30 \cdot 10 \cdot 2 + 40 \cdot 20 \cdot 2 = 2400$ km
Dorf A: $20 \cdot 10 \cdot 2 + 30 \cdot 20 \cdot 2 + 40 \cdot 30 \cdot 2 = 4000$ km
Die geringsten Fahrwege ergeben sich, wenn die Schule im Ort **C** gebaut wird.

19. Anna hat mehrere gleich große Würfel zu einem Objekt zusammengeklebt (siehe rechtes Bild).
Welches der folgenden Bilder zeigt eine andere Ansicht dieses Objekts?




(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

Lösung: Das ursprüngliche Objekt besteht aus zwei „T-Stücken“ (siehe rechts).
Nur im Objekt C und D kommen ebenfalls zwei „T-Stücke“ vor. Wenn man das ursprüngliche Objekt um 90° rechtsherum dreht, erhält man **C**.

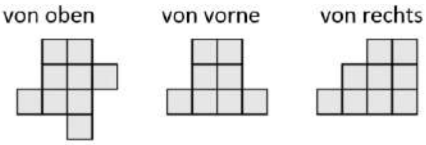


20. Werner fügt in die leeren Quadrate $\square + \square - \square = \blacksquare$ auf verschiedene Arten Zahlen so ein, dass die Rechnung richtig ist. Er verwendet jeweils vier der Zahlen 2, 3, 4, 5 oder 6, wobei bei jeder Rechnung jede Zahl nur einmal vorkommt.
Wie viele der fünf Zahlen darf Werner dabei in das graue Quadrat schreiben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 **(E) 5**

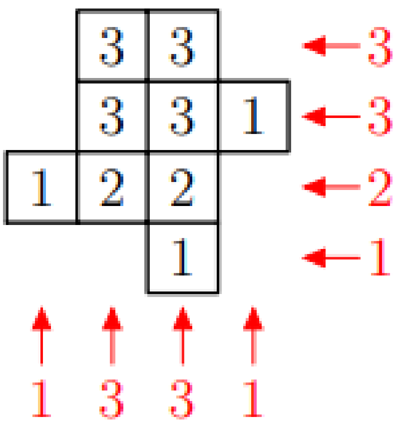
Lösung: Man kann alle fünf Zahlen für das graue Quadrat auf der rechten Seite verwenden. Folgende Rechnungen sind möglich: $3 + 5 - 6 = 2$, $2 + 6 - 5 = 3$, $2 + 5 - 3 = 4$, $2 + 6 - 3 = 5$, $3 + 5 - 2 = 6$. Lösung **E**.

21. Ein Bauwerk besteht aus gleich großen Würfeln.
Die drei Bilder zeigen dieses von oben, von vorne und von rechts.
Wie viele Würfel sind für dieses Bauwerk maximal verwendet worden?



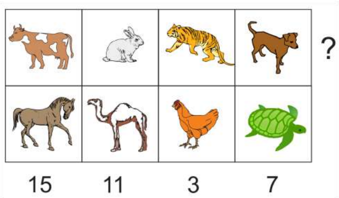
(A) 18 **(B) 19** (C) 20 (D) 21 (E) 22

Lösung:



Die Anzahl der roten Zahlen gibt die größtmögliche Anzahl der Würfel an, die sich in einem Quadrat befinden können, wenn alle Ansichten berücksichtigt wurden. Addiert man die Anzahl der Würfel, die sich dadurch ergeben, erhält an: $3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 = \mathbf{19}$.

22. Jedes Tier im Bild rechts steht für eine natürliche Zahl größer als Null.
Verschiedene Tiere stellen verschiedene Zahlen dar.
Die Summe der beiden Zahlen einer Spalte steht jeweils unter dieser Spalte.
Welchen Wert kann die Summe der vier Zahlen in der oberen Reihe maximal haben?



(A) 18 (B) 19 **(C) 20** (D) 21 (E) 22

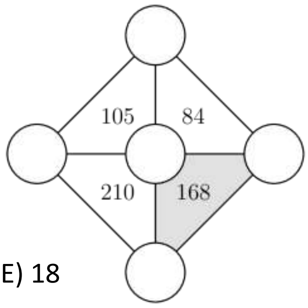
Lösung: In der dritten Spalte ergibt die Summe der beiden Zahlen die Zahl 3, deshalb kann sich die Summe 3 nur aus: $3 = 1 + 2$ ergeben. Die vierte Spalte liefert die Summe 7, und da 1 und 2 schon vergeben sind, ergibt sich: $7 = 3 + 4$. Betrachtet man die zweite Spalte, muss die Summe 11 durch die Summe 5 und 6 gebildet werden: $11 = 5 + 6$. Die erste Summe wird durch $15 = 7 + 8$ berechnet. Die Summe in der ersten Zeile kann sich daher nur aus jeweils der größeren Zahl der Summen bilden, was Folgendes bedeutet: $2 + 4 + 6 + 8 = \mathbf{20}$.

23. 30 Personen sitzen um einen runden Tisch. Einige von ihnen tragen einen Hut.
Diejenigen, die keinen Hut tragen, müssen die Wahrheit sagen.
Jene, die einen Hut tragen, können entweder die Wahrheit sagen oder lügen.
Alle behaupten: „Zumindest eine meiner beiden benachbarten Personen trägt einen Hut."
Ermittle die größtmögliche Anzahl jener Personen, die keinen Hut tragen.

(A) 5 (B) 10 (C) 15 **(D) 20** (E) 25

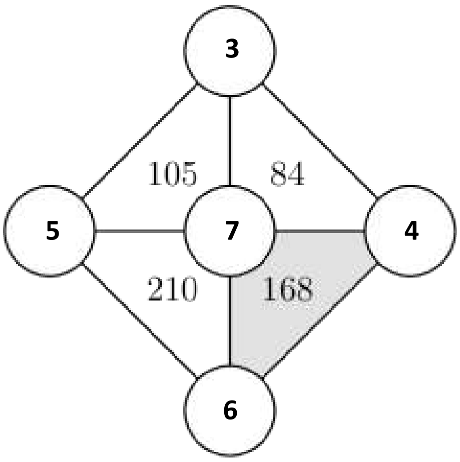
Lösung: Zumindest einer von drei Nachbarn könnte keinen Hut tragen, was bedeutet, dass es zumindest 10 Personen gibt, die keinen Hut tragen. Folgende Reihenfolge wäre möglich: kHHkHHkHHkHH… (H steht für Hut, k steht für keinen Hut). Daher gibt es maximal **20** Personen, die einen Hut tragen.

24. Kai muss die Zahlen 3, 4, 5, 6 und 7 in die fünf Kreise der Abbildung rechts folgendermaßen eintragen: Die in einem Dreieck angegebene Zahl muss das Produkt der drei Zahlen sein, die in den Eckpunkten dieses Dreiecks stehen.
Wie groß ist die Summe der Zahlen in den Eckpunkten des Dreiecks mit der Zahl 168?



(A) 12 (B) 14 (C) 15 **(D) 17** (E) 18

Lösung: Jede Zahl in der Abbildung ist durch 7 teilbar, deshalb steht die Zahl 7 im Kreis in der Mitte. Im Kreis auf der linken Seite muss die Zahl 5 stehen, da nur 105 und 210 durch 5 teilbar sind. Als nächstes kann man die Zahl im obersten Kreis einfügen, indem man $105 \div (7 \cdot 5) = 3$ berechnet. Ebenso ergibt: $210 \div (7 \cdot 5) = 6$. Die Zahl 6 steht im Kreis unten, somit steht im Kreis rechts die Zahl 4. Die Summe der drei Zahlen lautet: $7 + 6 + 4 = \mathbf{17}$.



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7. – 8.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. - 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. - 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. - 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

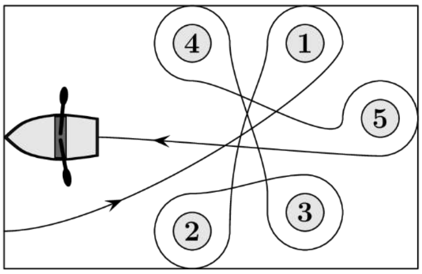
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

pwc

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

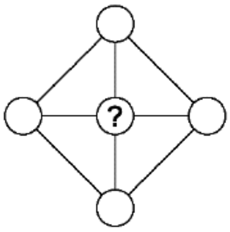
- 3 Punkte Beispiele -



1. Wie viel ist (20+22) : (20−22) = ?
(A) -42 (B) -21 (C) -2 (D) 22 (E) 42

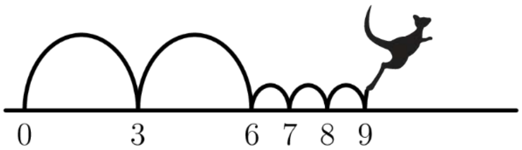
2. Meike paddelt mit ihrem Boot um fünf Bojen (siehe Abbildung).
Um welche Bojen paddelt sie im Uhrzeigersinn?
(A) 2, 3 und 4 (B) 1, 2 und 3 (C) 1, 3 und 5 (D) 2, 4 und 5 (E) 2, 3 und 5

3. Beate ordnet die fünf gegebenen Karten so an, dass die kleinstmögliche neunstellige Zahl gebildet wird. Welche Karte liegt dann ganz rechts?
(A) $\boxed{4}$ (B) $\boxed{8}$ (C) $\boxed{31}$ (D) $\boxed{59}$ (E) $\boxed{107}$



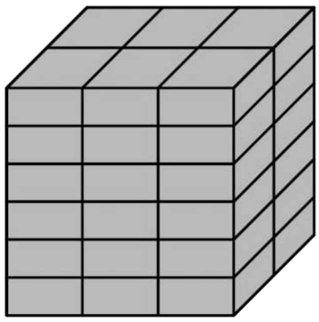
4. Die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7 werden in die fünf Kreise der Figur eingetragen. Das Produkt der Zahlen in den vier äußeren Kreisen beträgt 360. Welche Zahl befindet sich im inneren Kreis?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

5. Anna, Beatrice und Clara sind zusammen 15 Jahre alt. Anna und Beatrice sind zusammen 11 Jahre alt. Beatrice und Clara sind zusammen 12 Jahre alt. Wie alt ist die Älteste von ihnen?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8



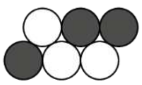
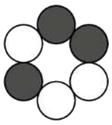
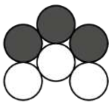
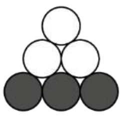
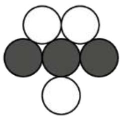
6. Kengu hüpft gerne auf der Zahlengeraden. Er startet bei 0, macht immer zuerst zwei große Sprünge und dann drei kleine Sprünge (siehe Abbildung). Das wiederholt er immer wieder auf die gleiche Art.
Auf welcher der folgenden Zahlen wird er im Laufe seiner Sprünge landen?
(A) 82 (B) 83 (C) 84 (D) 85 (E) 86

7. Otto montiert die Nummerntafel seines Autos verkehrt, d.h. auf den Kopf gestellt. Zum Glück spielt das keine Rolle, denn die Tafel sieht auch so exakt gleich aus.
Welche der folgenden Nummerntafeln könnte die von Otto sein?
(A) 04 NSN 40 (B) 60 SOS 09 (C) 80 BNB 08 (D) 06 HNH 60 (E) 08 NBN 80



8. Sonja baut aus lauter gleichen Ziegeln den abgebildeten Würfel. Die kürzeste Seite eines Ziegels ist 4 cm lang. Welche Abmessungen in cm besitzt ein Ziegel?
(A) $4 \times 6 \times 12$ (B) $4 \times 6 \times 16$ (C) $4 \times 8 \times 12$ (D) $4 \times 8 \times 16$ (E) $4 \times 12 \times 16$

9. Die abgebildete schwarz-weiße Raupe rollt sich zum Schlafen zusammen.
Welche Abbildung kann die zusammengerollte Raupe darstellen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Gerhard schreibt die Summe der Quadrate zweier Zahlen. Leider ist etwas Tinte ausgelaufen (siehe Abbildung), und so können wir nicht alle Ziffern lesen. Wie lautet die letzte Ziffer der ersten Zahl?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

- 4 Punkte Beispiele -

11. In folgender Rechnung gibt es fünf Lücken. Adriana möchte in vier dieser Lücken ein „+“ setzen und in eine ein „−“, sodass die Gleichung richtig ist. Wo muss sie das „−“ setzen?

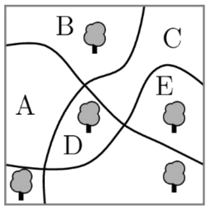
$6 \square 9 \square 12 \square 15 \square 18 \square 21 = 45$

(A) zwischen 6 und 9 (B) zwischen 9 und 12 (C) zwischen 12 und 15

(D) zwischen 15 und 18 (E) zwischen 18 und 21

12. In einem Park befinden sich 5 Bäume und 3 Wege, wie auf der Karte abgebildet. Ein weiterer Baum wird so gepflanzt, dass sich auf beiden Seiten eines jeden Weges gleich viele Bäume befinden.
In welchem Abschnitt des Parks wird der neue Baum gepflanzt?

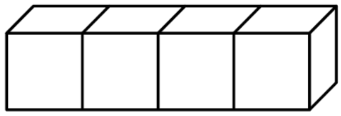
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E



13. Der Abstand zwischen zwei Regalbrettern in Monikas Küche beträgt 36 cm. Sie weiß, dass ein Stapel mit 8 gleichen Gläsern 42 cm hoch ist und ein Stapel mit 2 solchen Gläsern 18 cm hoch ist.
Wie viele Gläser hat der höchste Stapel, der zwischen zwei Regalbretter passt?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

14. Auf einem gewöhnlichen Spielwürfel ist die Summe der Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seiten immer 7. Vier derartige Spielwürfel werden wie abgebildet zusammengeklebt. Wie viele Augen sieht man mindestens auf der gesamten Oberfläche des entstandenen Körpers?



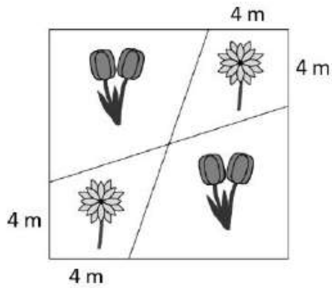
(A) 52 (B) 54 (C) 56 (D) 58 (E) 60

15. Wie viele ganze Zahlen zwischen 100 und 300 haben nur ungerade Ziffern?

(A) 25 (B) 50 (C) 75 (D) 100 (E) 150

16. Der Gärtner Toni setzt Tulpen  und Sonnenblumen  in einem quadratischen Beet mit der Seitenlänge 12 m, wie im Bild zu sehen ist. Wie groß ist der Flächeninhalt des Bereichs, der mit Sonnenblumen bepflanzt wird?

(A) 36 m² (B) 40 m² (C) 44 m² (D) 46 m² (E) 48 m²



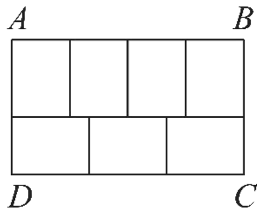
17. In meinem Büro gibt es zwei Uhren. Eine davon geht in jeder Stunde um eine Minute vor und die andere geht in jeder Stunde um zwei Minuten nach. Gestern habe ich beide auf die richtige Zeit gestellt, aber als ich sie heute angesehen habe, hat eine Uhr 11:00 angezeigt und die andere 12:00.
Zu welcher Uhrzeit habe ich die Uhren gestern gestellt?

(A) 23:00 (B) 19:40 (C) 15:40 (D) 14:00 (E) 11:20

18. Werner hat einige Zahlen, deren Summe 22 ist, auf einem Blatt aufgeschrieben. Ria hat dann jede von Werners Zahlen von der Zahl 7 subtrahiert und diese Ergebnisse ebenfalls aufgeschrieben.
Die Summe von Rias Zahlen beträgt 34. Wie viele Zahlen hat Werner notiert?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

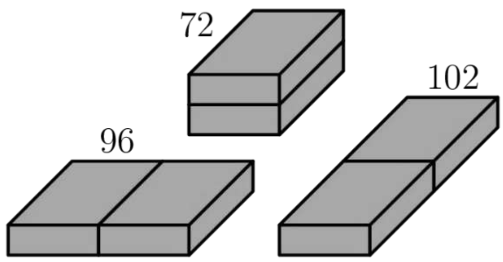
19. Das große Rechteck *ABCD* besteht aus 7 zueinander kongruenten Rechtecken (siehe Abbildung). Wie lautet das Verhältnis $\frac{AB}{BC}$?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{12}{7}$ (E) $\frac{7}{3}$

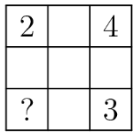
20. Zwei gleiche Ziegel können wie abgebildet auf drei verschiedene Arten Seite an Seite gelegt werden. Die Oberflächeninhalte der drei resultierenden Quader betragen 72, 96 und 102 cm².
Wie groß ist der Oberflächeninhalt (in cm²) von einem Ziegel?

(A) 36 (B) 48 (C) 52 (D) 54 (E) 60



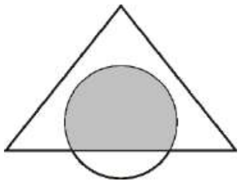
- 5 Punkte Beispiele -

21. Jenny schreibt Zahlen so in die Felder einer 3×3 - Tabelle, dass die Summen der vier Zahlen in jedem der vier 2×2 - Bereiche der Tabelle gleich sind. Die Zahlen in drei Eckfeldern sind in der Figur bereits zu sehen. Welche Zahl schreibt sie in das vierte Eckfeld?



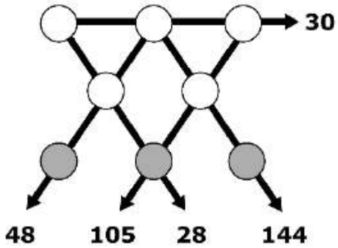
(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) 6

22. Eine Figur besteht aus einem Dreieck und einem Kreis, die sich teilweise überlappen.
Die graue Fläche beträgt 45 % der Gesamtfläche der Figur.
Der weiße Teil der Dreiecksfläche beträgt 40 % der Gesamtfläche der Figur.
Wieviel Prozent der Kreisfläche hat der außerhalb des Dreiecks liegende weiße Teil?



(A) 20 % (B) 25 % (C) 30 % (D) 35 % (E) 50 %

23. Von den Zahlen 1 bis 8 wird in jeden der abgebildeten Kreise genau eine hineingeschrieben. Bei jedem der fünf geraden Pfeile werden die drei Zahlen in den Kreisen, die auf diesem Pfeil liegen, multipliziert. Ihr Produkt steht dann bei der Pfeilspitze. Wie groß ist die Summe der Zahlen, die in den drei Kreisen der untersten Reihe der Figur liegen?



(A) 11 (B) 12 (C) 15 (D) 17 (E) 19

24. Mit dem Fahrrad benötigt Marc für die Strecke von zuhause in die Schule und wieder zurück 20 Minuten. Er fährt dabei auf der ganzen Strecke mit derselben Geschwindigkeit. Zu Fuß benötigt er für dieselbe Strecke 60 Minuten. Auch zu Fuß geht er immer gleich schnell.
Gestern fuhr Marc mit dem Fahrrad nur bis zu Evas Haus, welches auf dem Weg zur Schule liegt. Er ließ dort das Rad stehen und legte den Rest des Weges zu Fuß zurück. Am Heimweg ging er zuerst zu Fuß bis zu Evas Haus und fuhr dann von dort mit dem Fahrrad nach Hause. Er benötigte daher für den gesamten Weg (zuhause – Schule – zuhause) 52 Minuten. Welchen Anteil seines Weges hat er auf dem Fahrrad zurückgelegt?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

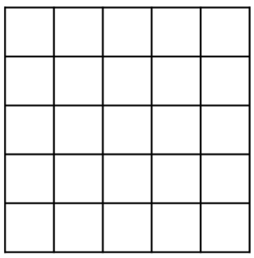
25. Die vier Orte *A, B, C* und *D* liegen (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge) entlang einer geraden Straße. Die Orte *A* und *C* sind 75 km voneinander entfernt, *B* und *D* 45 km voneinander und *B* und *C* 20 km voneinander. Welche der folgenden Entfernungen kann **nicht** der Abstand von *A* zu *D* sein?

(A) 10 km (B) 50 km (C) 80 km (D) 100 km (E) 140 km

26. Ein Maler will 2 Liter blauer Farbe mit 3 Litern gelber Farbe mischen, um 5 Liter grüner Farbe zu erhalten. Er verwendet irrtümlich 3 Liter blauer Farbe und 2 Liter gelber Farbe, womit er den falschen Grünton erzeugt. Wie viel dieser grünen Farbe muss er mindestens wegschütten, damit er aus dem Rest durch Hinzufügung von blauer oder gelber Farbe genau 5 Liter Farbe mit dem erwünschten Grünton erhalten kann?

(A) $\frac{5}{3}$ Liter (B) $\frac{3}{2}$ Liter (C) $\frac{2}{3}$ Liter (D) $\frac{3}{5}$ Liter (E) $\frac{5}{9}$ Liter

27. Wie viele Felder eines 5×5 - Rasters müssen mindestens gefärbt werden, sodass jedes mögliche 1×4 - Rechteck bzw. jedes 4×1 - Rechteck im Raster mindestens ein gefärbtes Feld enthält?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

28. Mowgli fragt einen Bären und einen Panther nach dem Wochentag. Der Bär lügt immer am Montag, Dienstag und Mittwoch. Der Panther lügt immer am Donnerstag, Freitag und Samstag. An den übrigen Tagen sagen die beiden immer die Wahrheit. Der Bär sagt: „Gestern war einer meiner Lügentage.“ Der Panther sagt: „Gestern war auch einer meiner Lügentage.“ An welchem Wochentag hat diese Unterhaltung stattgefunden?

(A) Donnerstag (B) Freitag (C) Samstag (D) Sonntag (E) Montag

29. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert. Renate markiert zwischen jedem Paar benachbarter Punkte einen weiteren Punkt. Diesen Vorgang wiederholt sie drei weitere Male.
Nun gibt es 225 markierte Punkte auf der Geraden. Wie viele Punkte waren zu Beginn markiert?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 25

30. In sieben Parks leben insgesamt 2022 Kängurus und einige Koalas. In jedem Park leben so viele Kängurus wie es Koalas in allen anderen Parks zusammen gibt. Wie viele Koalas leben insgesamt in den sieben Parks?

(A) 288 (B) 337 (C) 576 (D) 674 (E) 2022

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Level: Kadett, Grades 7 - 8

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
each correct answer to questions 1. – 10.: 3 points
each correct answer to questions 11. – 20.: 4 points
each correct answer to questions 21. – 30.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

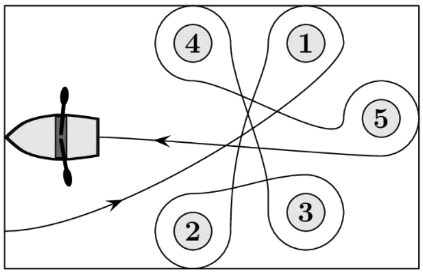
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2022
Level Kadett (Schulstufe 7 and 8)
Austria – 17. 3. 2022

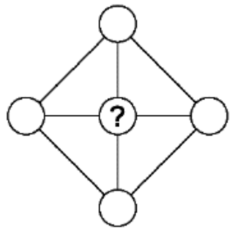
- 3 Point Examples -



1. What is (20+22) ÷ (20−22) = ?
(A) -42 (B) -21 (C) -2 (D) 22 (E) 42

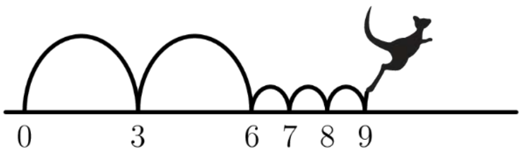
2. Meike paddles around five buoys with her boat (see diagram).
Which of the buoys does she paddle around in a clockwise direction?
(A) 2, 3 and 4 (B) 1, 2 and 3 (C) 1, 3 and 5 (D) 2, 4 and 5 (E) 2, 3 and 5

3. Beate arranges the five cards so that the smallest nine-digit number is created. Which card is furthest on the right?
(A) $\boxed{4}$ (B) $\boxed{8}$ (C) $\boxed{31}$ (D) $\boxed{59}$ (E) $\boxed{107}$



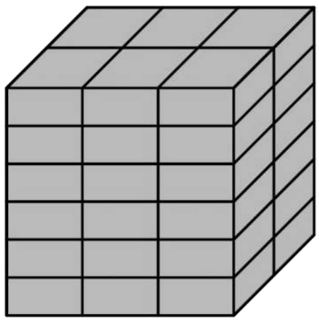
4. The numbers 3, 4, 5, 6, 7 are written inside the five circles of the shape. The product of the numbers in the four outer circles is 360. Which number is in the inner circle?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

5. Anna, Beatrice and Clara altogether are 15 years old. Anna and Beatrice together are 11 years old. Beatrice and Clara together are 12 years old. How old is the oldest of the three?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8



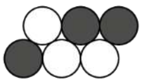
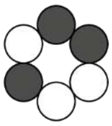
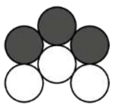
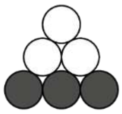
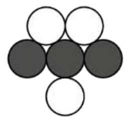
6. Kengu likes to jump on the number line. He starts at 0, then always starts with two big jumps and then three small jumps (see diagram). He keeps repeating this in the same way, over and over again.
On which of the following numbers will he land in the course of his jumps?
(A) 82 (B) 83 (C) 84 (D) 85 (E) 86

7. Otto attaches the number plate to his car the wrong way round, i.e. upside down. Luckily it doesn't matter because the number plate looks exactly the same this way.
Which of the following number plates could be the one from Otto?
(A) 04 NSN 40 (B) 60 SOS 09 (C) 80 BNB 08 (D) 06 HNH 60 (E) 08 NBN 80



8. Sonja builds the cube shown, out of equally sized bricks. The shortest side of one brick is 4 cm long. What dimensions in cm does one brick have?
(A) 4 × 6 × 12 (B) 4 × 6 × 16 (C) 4 × 8 × 12 (D) 4 × 8 × 16 (E) 4 × 12 × 16

9. The black-white caterpillar shown, rolls up to go to sleep.
Which diagram could show the rolled-up caterpillar?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Gerhard writes down the sum of the squares of two numbers. Unfortunately, some ink has run out (see diagram) and therefore we cannot read all the digits.
What is the last digit of the first number?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

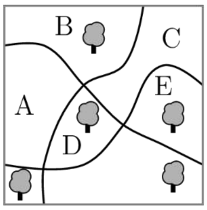
- 4 Point Examples -

11. There are five gaps in the following calculation. Adriana wants to write a „+“ into four of the gaps and a „–“ into one of the gaps so that the equation is correct. Where does she have to insert the „–“?

6 □ 9 □ 12 □ 15 □ 18 □ 21 = 45

(A) between 6 and 9 (B) between 9 and 12 (C) between 12 and 15
(D) between 15 and 18 (E) between 18 and 21

12. There are 5 trees and 3 paths in a park as shown on the map.
Another tree is planted so that there is an equal number of trees on both sides of each path.
In which section of the park will the new tree be planted?

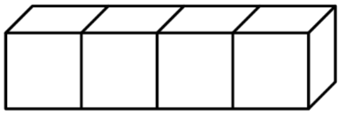


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

13. The distance between two shelves in Monika’s kitchen is 36 cm. She knows that a stack of 8 identical glasses is 42 cm high and a stack of 2 such glasses is 18 cm high.
How many glasses has the biggest stack that will fit between two shelves?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

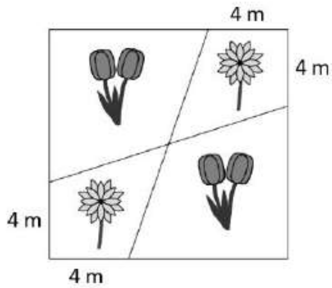
14. On an ordinary die the numbers on opposite sides always add up to 7. Four such dice are glued together as shown. All numbers that can still be seen on the outside of the solid are added together. What is the minimum of that total?



(A) 52 (B) 54 (C) 56 (D) 58 (E) 60

15. How many integers between 100 and 300 have only odd digits?
(A) 25 (B) 50 (C) 75 (D) 100 (E) 150

16. Gardener Toni plants tulips  and sunflowers  in a square flowerbed with side length 12 m, as shown in the diagram. How big is the entire area where sunflowers are planted?

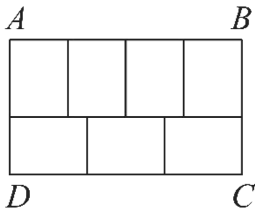


(A) 36 m² (B) 40 m² (C) 44 m² (D) 46 m² (E) 48 m²

17. There are two clocks in my office. One of which is one minute fast every hour and the other one is two minutes behind every hour. Yesterday I have set them both on the correct time but when I checked today, one clock said 11:00 and the other 12:00.
At what time did I set the time yesterday?
(A) 23:00 (B) 19:40 (C) 15:40 (D) 14:00 (E) 11:20

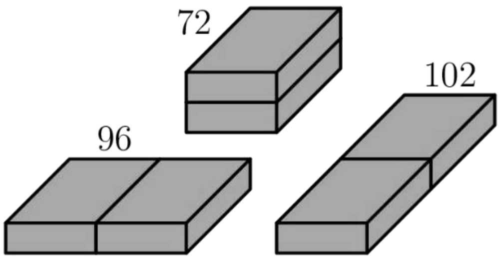
18. Werner has written some numbers on a piece of paper whose sum is 22. Ria has then subtracted each number from 7 and has also written down the results.
The sum of Ria’s numbers is 34. How many numbers has Werner written down?
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

19. The big rectangle *ABCD* is made up of 7 congruent smaller rectangles (see diagram).
What is the ratio $\frac{AB}{BC}$?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{12}{7}$ (E) $\frac{7}{3}$

20. Two identical bricks can be placed side by side in three different ways as shown in the diagrams. The surface areas of the resulting cuboids are 72, 96 and 102 cm².
What is the surface area (in cm²) of one brick?



(A) 36 (B) 48 (C) 52 (D) 54 (E) 60

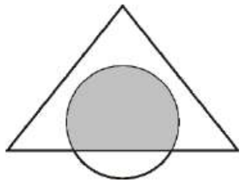
- 5 Point Examples -

21. Jenny writes numbers into a 3×3 table so that the sums of the four numbers in each 2×2 area of the table are the same. The numbers in three of the cells in the corner can already be seen in the diagram. Which number does she write into the cell in the fourth corner?

2		4
?		3

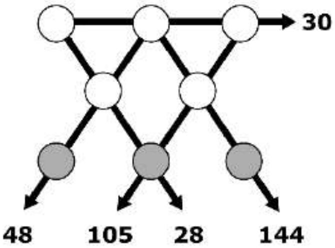
(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) 6

22. A shape is made up of a triangle and a circle that partially overlap.
The grey area is 45 % of the entire area of the shape.
The white part of the triangle is 40 % of the total area of the shape.
What percent of the area of the circle is the white part, outside the triangle?



(A) 20 % (B) 25 % (C) 30 % (D) 35 % (E) 50 %

23. The numbers 1 to 8 are written into the circles shown so that there is one number in each circle. Along each of the five straight arrows the three numbers in the circles are multiplied. Their product is written next to the tip of the arrow. How big is the sum of the numbers in the three circles on the lowest row of the diagram?



(A) 11 (B) 12 (C) 15 (D) 17 (E) 19

24. By bike it takes Marc 20 minutes to go from home to school and back. He rides the entire distance with a constant speed. By foot it takes him 60 minutes for the same distance. He also walks with a constant speed.
Yesterday Marc took his bike to go to Eva's house which is on the way to school. He left the bike there and continued on foot to school. On the way home he first walked to Eva's house and then cycled the rest of the way back home. He needed 52 minutes for the entire journey (from home to school and back home). Which part of his journey did he cover by bike?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

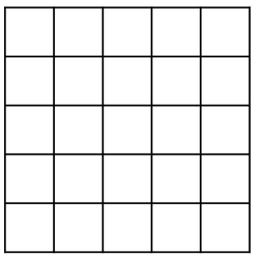
25. The four villages *A, B, C* and *D* are situated (not necessarily in this order) along a straight road. The villages *A* and *C* are 75 km away from each other, *B* and *D* 45 km away from each other and *B* and *C* 20 km away from each other. Which of the following distances **cannot** be the distance from *A* to *D*?

(A) 10 km (B) 50 km (C) 80 km (D) 100 km (E) 140 km

26. A painter wants to mix 2 litres of blue paint with 3 litres of yellow paint to obtain 5 litres of green paint. He accidentally uses 3 litres of blue paint and 2 litres of yellow paint and thus produces the wrong shade of green. What is the minimum amount of this green paint he has to throw away so that he can use the rest to add blue or yellow paint in order to get exactly 5 litres of the correct shade of green?

(A) $\frac{5}{3}$ litre (B) $\frac{3}{2}$ litre (C) $\frac{2}{3}$ litre (D) $\frac{3}{5}$ litre (E) $\frac{5}{9}$ litre

27. What is the minimum number of cells of a 5×5 grid that have to be coloured in so that every possible 1×4 rectangle and every 4×1 rectangle respectively in the grid has at least one cell coloured in?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

28. Mowgli asks a bear and a panther which day of the week it is. The bear always lies on Monday, Tuesday and Wednesday. The panther always lies on Thursday, Friday and Saturday. On all other days they both always speak the truth. The bear says: „Yesterday was one of my lying days." The panther says: „Yesterday was also one of my lying days." On which day of the week did this conversation take place?

(A) Thursday (B) Friday (C) Saturday (D) Sunday (E) Monday

29. Some points are marked on a straight line. Renate marks another point between every pair of adjacent points. She repeats this process three more times.
Now 225 points are marked on the straight line. How many points were there to begin with?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 25

30. In total there are 2022 kangaroos and some koalas living within seven parks. As many kangaroos live in each park as there are koalas in all other parks together. How many koalas in total live in the seven parks?

(A) 288 (B) 337 (C) 576 (D) 674 (E) 2022

Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

– Lösungsvektor –

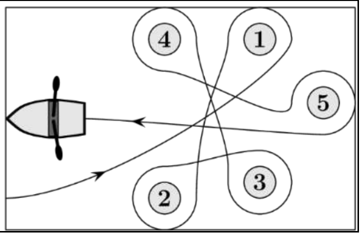
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	E	B	E	E	C	B	C	A	C	D	B	D	D	A	E	C	B	D	D	B	B	D	B	C	A	B	A	C	B

– 3 Punkte Beispiele –

1. Wie viel ist (20+22) : (20−22) = ?
(A) -42 **(B)** -21 (C) -2 (D) 22 (E) 42

Lösung: $(20+22):(20-22) = 42:(-2) = \mathbf{-21}$

2. Meike paddelt mit ihrem Boot um fünf Bojen (siehe Abbildung).
Um welche Bojen paddelt sie im Uhrzeigersinn?
(A) 2, 3 und 4 (B) 1, 2 und 3 (C) 1, 3 und 5 (D) 2, 4 und 5 **(E)** 2, 3 und 5

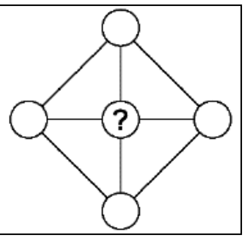


Lösung: Wenn man die Linie entlangfährt, kann man bei jeder Boje beobachten, ob man im oder gegen den Uhrzeigersinn herumfährt. Nur um die **Bojen 2, 3 und 5** wird **im** Uhrzeigersinn gepaddelt.

3. Beate ordnet die fünf gegebenen Karten so an, dass die kleinstmögliche neunstellige Zahl gebildet wird. Welche Karte liegt dann ganz rechts?
(A) $\boxed{4}$ **(B)** $\boxed{8}$ (C) $\boxed{31}$ (D) $\boxed{59}$ (E) $\boxed{107}$

Lösung: Um die kleinste neunstellige Zahl zu bilden, ist es wichtig, dass möglichst weit links die niedrigsten Ziffern liegen. Deshalb nimmt sie 107 als Karte ganz links, dann 31, dann 4, dann 59 und zuletzt **8 ganz rechts**. Würde sie die 8 weiter links zwischen zwei andere Karten geben, würde die Zahl größer werden.

4. Die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7 werden in die fünf Kreise der Figur eingetragen. Das Produkt der Zahlen in den vier äußeren Kreisen beträgt 360. Welche Zahl befindet sich im inneren Kreis?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

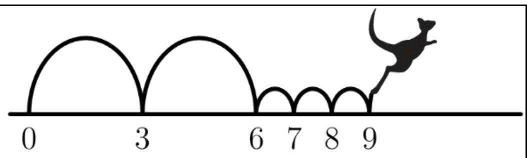
Lösung: Die Zahl 7 ist die einzige der gegebenen, durch die 360 nicht teilbar ist. Deshalb kann sie gar nicht in den vier äußeren Kreisen stehen. Das Produkt der Zahlen 3, 4, 5 und 6 ergibt 360, also befindet sich die Zahl **7** im inneren Kreis.

5. Anna, Beatrice und Clara sind zusammen 15 Jahre alt. Anna und Beatrice sind zusammen 11 Jahre alt. Beatrice und Clara sind zusammen 12 Jahre alt. Wie alt ist die Älteste von ihnen?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: Wenn Anna und Beatrice zusammen 11 Jahre alt sind, muss Clara also 4 Jahre alt sein (weil alle drei bekanntlich 15 Jahre alt sind). Aus der Aussage „Beatrice und Clara sind zusammen 12 Jahre alt“ wissen wir dann, dass Beatrice 8 Jahre alt ist. Anna muss folglich 3 Jahre alt sein. Beatrice ist mit ihren **8 Jahren** also die Älteste. Annas Alter hätte nicht einmal mehr berechnet werden müssen, wenn man sich folgendes überlegt: Wenn eine 8 Jahre alt ist, kann niemand mehr älter sein, weil sonst die Alterssumme größer als 15 wäre.

6. Kengu hüpft gerne auf der Zahlengeraden. Er startet bei 0, macht immer zuerst zwei große Sprünge und dann drei kleine Sprünge (siehe Abbildung). Das wiederholt er immer wieder auf die gleiche Art.
Auf welcher der folgenden Zahlen wird er im Laufe seiner Sprünge landen?



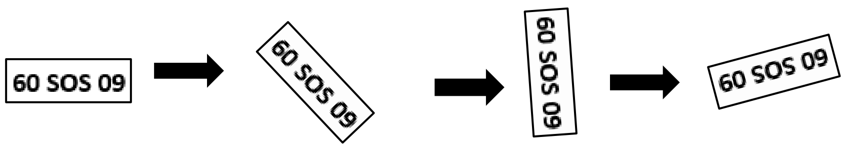
(A) 82 (B) 83 (C) 84 (D) 85 (E) 86

Lösung: Auf den durch 3 teilbaren Zahlen landet Kengu mit Sicherheit (und zudem auch noch auf ein paar anderen). Da die **84** die einzige Antwortmöglichkeit ist, die durch 3 teilbar ist, müssen wir die paar anderen gar nicht mehr betrachten.

7. Otto montiert die Nummerntafel seines Autos verkehrt, d.h. auf den Kopf gestellt. Zum Glück spielt das keine Rolle, denn die Tafel sieht auch so exakt gleich aus.
Welche der folgenden Nummerntafeln könnte die von Otto sein?

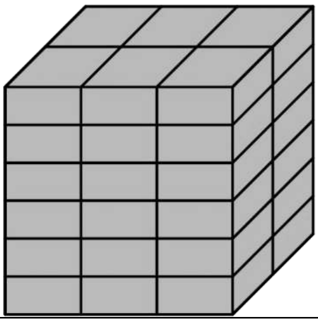
(A) 04 NSN 40 (B) 60 SOS 09 (C) 80 BNB 08 (D) 06 HNH 60 (E) 08 NBN 80

Lösung: Die Zahl 4 sowie der Buchstabe B sehen nicht gleich aus, wenn man sie auf den Kopf stellt. Damit können die Antwortmöglichkeiten A, C und E schon ausgeschlossen werden. Die Zahl 6 wird auf den Kopf gestellt zur Zahl 9, die wiederum in Antwortoption D nicht vorkommt. Folglich bleibt nur **60 SOS 09** übrig.



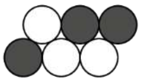
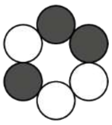
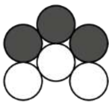
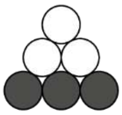
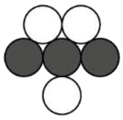
8. Sonja baut aus lauter gleichen Ziegeln den abgebildeten Würfel. Die kürzeste Seite eines Ziegels ist 4 cm lang. Welche Abmessungen in cm besitzt ein Ziegel?

(A) $4 \times 6 \times 12$ (B) $4 \times 6 \times 16$ **(C)** $4 \times 8 \times 12$ (D) $4 \times 8 \times 16$ (E) $4 \times 12 \times 16$



Lösung: Im Würfel liegen jeweils 6 Ziegel übereinander. Da die kürzeste Seite der Ziegel **4 cm** ist, muss die Seitenlänge des Würfels 24 cm (weil 6·4) sein. Wie in der Grafik sichtbar ist, entsprechen 2 der längsten sowie 3 der mittleren Ziegelseiten genau der Würfellänge. Daraus lassen sich die Ziegellängen **8 cm** (mit 24:3) und **12 cm** (mit 24:2) errechnen.

9. Die abgebildete schwarz-weiße Raupe rollt sich zum Schlafen zusammen. Welche Abbildung kann die zusammengerollte Raupe darstellen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Lösung: Nur bei (A) kann die Raupe „in einer Linie“ mit einem Stift nachgefahren werden. Bei den Antwortmöglichkeiten B bis E ist das abwechselnde Auftreten von schwarzen und weißen Kreisen nicht möglich.

10. Gerhard schreibt die Summe der Quadrate zweier Zahlen. Leider ist etwas Tinte ausgelaufen (siehe Abbildung), und so können wir nicht alle Ziffern lesen. Wie lautet die letzte Ziffer der ersten Zahl?

(A) 3 (B) 4 **(C)** 5 (D) 6 (E) 7

Lösung: Es genügt, die letzten Ziffern zu betrachten. In der zweiten Klammer wird am Schluss die Ziffer 2 quadriert, was bedeutet, dass das Quadrat dieser Zahl die Ziffer 4 an der Einerstelle haben muss. Die Summe der jeweils letzten Ziffer der quadrierten Zahlen muss 9 ergeben, folglich ist die 5 die letzte Ziffer der quadrierten ersten sowie damit auch der ersten Zahl (weil unter den Antwortmöglichkeiten **5** die einzige Zahl ist, deren Quadratzahl auch eine 5 an der Einerstelle aufweist).

– 4 Punkte Beispiele –

11. In folgender Rechnung gibt es fünf Lücken. Adriana möchte in vier dieser Lücken ein „+“ setzen und in eine ein „−“, sodass die Gleichung richtig ist. Wo muss sie das „−“ setzen?

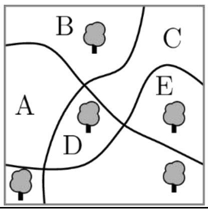
6□9□12□15□18□21=45

(A) zwischen 6 und 9 (B) zwischen 9 und 12 (C) zwischen 12 und 15

(D) zwischen 15 und 18 (E) zwischen 18 und 21

Lösung: Setzt man das **Minus zwischen 15 und 18**, ist die Gleichung korrekt:
$6 + 9 + 12 + \mathbf{15} - \mathbf{18} + 21 = 45$

12. In einem Park befinden sich 5 Bäume und 3 Wege, wie auf der Karte abgebildet. Ein weiterer Baum wird so gepflanzt, dass sich auf beiden Seiten eines jeden Weges gleich viele Bäume befinden. In welchem Abschnitt des Parks wird der neue Baum gepflanzt?

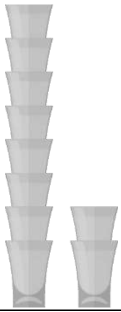


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Lösung: Der Weg, der von unten nach oben führt, hat drei Bäume auf seiner rechten und zwei auf seiner linken Seite. Folglich muss ein Baum in A oder B gepflanzt werden. Unterhalb des Weges, der von oben links nach unten rechts führt, gibt es schon drei Bäume, während oberhalb nur zwei Bäume stehen. Wenn also in **B** ein neuer Baum gepflanzt wird, sind auf jeder Seite eines jeden Weges genau drei Bäume.

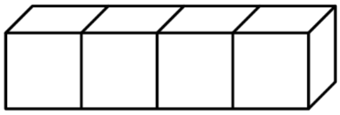
13. Der Abstand zwischen zwei Regalbrettern in Monikas Küche beträgt 36 cm. Sie weiß, dass ein Stapel mit 8 gleichen Gläsern 42 cm hoch ist und ein Stapel mit 2 solchen Gläsern 18 cm hoch ist. Wie viele Gläser hat der höchste Stapel, der zwischen zwei Regalbretter passt?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7



Lösung: Ein Stapel mit 8 Gläsern ist 42 cm hoch und ein Stapel mit 2 Gläsern ist 18 cm hoch, also sind die 6 herausschauenden Teile der Gläser, die der erste Stapel mehr enthält, in Summe 24 cm hoch. Also erhöht sich ein Stapel um 4 cm, wenn ein weiteres Glas hinzugefügt wird. Wenn man auf den zweiten Stapel 4 weitere Gläser stapelt (sodass der Stapel aus **6** Gläsern besteht), ergibt sich eine Gesamthöhe von 34 cm (wegen $18 + 4 \cdot 4 = 34$). Ein weiteres Glas würde bei einer Regalhöhe von 36 cm also nicht hineinpassen.

14. Auf einem gewöhnlichen Spielwürfel ist die Summe der Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seiten immer 7. Vier derartige Spielwürfel werden wie abgebildet zusammengeklebt. Wie viele Augen sieht man mindestens auf der gesamten Oberfläche des entstandenen Körpers?



(A) 52 (B) 54 (C) 56 **(D)** 58 (E) 60

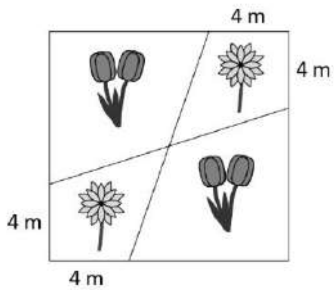
Lösung: Die Vorder- und Rückseiten bzw. Ober- und Unterseite der abgebildeten Würfel ergeben in Summe jeweils 7 (also pro Würfel 14). Deshalb sind nur die Flächen rechts und links ausschlaggebend dafür, wie groß die Summe auf der gesamten Oberfläche wird. Wenn bei den äußeren Würfeln die 6 nach innen geklebt wird, sind die Einsen jeweils sichtbar. Somit ergibt sich als kleinste Augensumme auf der Gesamtoberfläche **58** (wegen $4 \cdot 14 + 2 = 58$).

15. Wie viele ganze Zahlen zwischen 100 und 300 haben nur ungerade Ziffern?

(A) 25 (B) 50 (C) 75 (D) 100 (E) 150

Lösung: Die ungeraden Ziffern sind 1, 3, 5, 7, 9. Als erste Ziffer können wir also nur die 1 benutzen, als zweite und dritte Ziffer sind jeweils alle 5 ungeraden Ziffern möglich. Also beträgt die Anzahl der möglichen ganzen Zahlen zwischen 100 und 300 genau $1 \cdot 5 \cdot 5 = \mathbf{25}$.

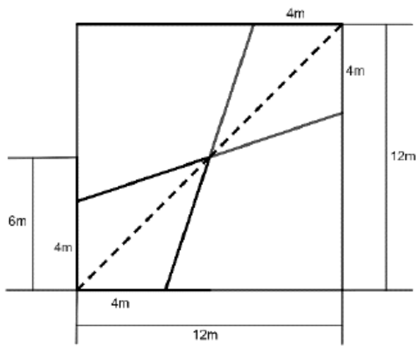
16. Der Gärtner Toni setzt Tulpen  und Sonnenblumen  in einem quadratischen Beet mit der Seitenlänge 12 m, wie im Bild zu sehen ist. Wie groß ist der Flächeninhalt des Bereichs, der mit Sonnenblumen bepflanzt wird?



(A) 36 m² (B) 40 m² (C) 44 m² (D) 46 m² **(E)** 48 m²

Lösung: Zerlegt man die Deltoide, die mit Sonnenblumen bepflanzt werden, wie in der Abbildung, so erhält man vier Dreiecke mit den jeweiligen Flächeninhalten $A = \frac{4 \cdot 6}{2}$.

Somit hat der gesamte Bereich den Flächeninhalt $4 \cdot \frac{4 \cdot 6}{2} = \boldsymbol{48\ m^2}$.



17. In meinem Büro gibt es zwei Uhren. Eine davon geht in jeder Stunde um eine Minute vor und die andere geht in jeder Stunde um zwei Minuten nach. Gestern habe ich beide auf die richtige Zeit gestellt, aber als ich sie heute angesehen habe, hat eine Uhr 11:00 angezeigt und die andere 12:00.
Zu welcher Uhrzeit habe ich die Uhren gestern gestellt?

(A) 23:00 (B) 19:40 **(C)** 15:40 (D) 14:00 (E) 11:20

Lösung: Eine Uhr zeigt nach 59 Minuten, die andere nach 62 Minuten eine volle Stunde an. Nach x Stunden unterscheiden sie sich um 60 Minuten, daher: $62 \cdot x - 59 \cdot x = 60 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot x = 60 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20$ Stunden

Rechnet man von 11 Uhr bzw. 12 Uhr 20 Stunden zurück, so muss der Zeitpunkt des Uhrenstellens zwischen 15 Uhr und 16 Uhr gewesen sein. Da die eine Uhr 40 (wegen $20 \cdot 2$) Minuten vor geht und die andere 20 Minuten nach geht, muss der Zeitpunkt um **15:40 Uhr** gewesen sein.

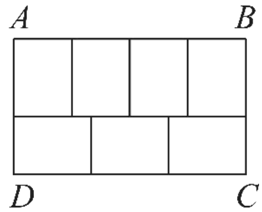
18. Werner hat einige Zahlen, deren Summe 22 ist, auf einem Blatt aufgeschrieben. Ria hat dann jede von Werners Zahlen von der Zahl 7 subtrahiert und diese Ergebnisse ebenfalls aufgeschrieben.
Die Summe von Rias Zahlen beträgt 34. Wie viele Zahlen hat Werner notiert?

(A) 7 **(B)** 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Lösung: Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Zahlen und seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Zahlen, die Werner aufgeschrieben hat. Es gilt $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 22$. Nun subtrahiert Ria jede dieser Zahlen von der 7 und erhält die Summe 34:
$7 - x_1 + 7 - x_2 + \dots + 7 - x_n = 34 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot 7 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 34$

Und weil die Summe von Werners Zahlen bekannt ist, gilt weiter: $n \cdot 7 - 22 = 34 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot 7 = 56 \quad \Leftrightarrow \quad n = \mathbf{8}$

19. Das große Rechteck *ABCD* besteht aus 7 zueinander kongruenten Rechtecken (siehe Abbildung). Wie lautet das Verhältnis $\frac{AB}{BC}$?



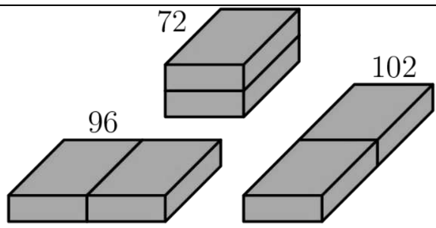
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{8}{5}$ **(D)** $\frac{12}{7}$ (E) $\frac{7}{3}$

Lösung: Die Länge der kürzeren Seite der kleinen Rechtecke wird mit x, die der längeren Seite wird mit y bezeichnet. Da AB=DC ist, gilt auch $4 \cdot x = 3 \cdot y$ und somit $y = \frac{4x}{3}$.

Nun wird das Verhältnis $\frac{AB}{BC}$ betrachtet:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{4x}{x+y} = \frac{4x}{x + \frac{4x}{3}} = \frac{4x}{\frac{3x+4x}{3}} = \frac{4x}{\frac{7x}{3}} = \frac{12x}{7x} = \mathbf{\frac{12}{7}}$$

20. Zwei gleiche Ziegel können wie abgebildet auf drei verschiedene Arten Seite an Seite gelegt werden. Die Oberflächeninhalte der drei resultierenden Quader betragen 72, 96 und 102 cm².
Wie groß ist der Oberflächeninhalt (in cm²) von einem Ziegel?



(A) 36 (B) 48 (C) 52 **(D)** 54 (E) 60

Lösung: Die Kantenlängen eines Ziegels werden mit x, y und z bezeichnet. Für die Oberfläche eines Ziegels gilt die Formel $O = 2xy + 2xz + 2yz$.

Für die entstehenden Quader gelten daher die Formeln:

$2xy + 4xz + 4yz = 102$

$4xy + 2xz + 4yz = 96$

$4xy + 4xz + 2yz = 72$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man:

$10xy + 10xz + 10yz = 270$ und dividiert man diese Gleichung durch 5, so erhält man für den Oberflächeninhalt:

$2xy + 2xz + 2yz = \mathbf{54}$.

– 5 Punkte Beispiele –

21. Jenny schreibt Zahlen so in die Felder einer 3×3 - Tabelle, dass die Summen der vier Zahlen in jedem der vier 2×2 - Bereiche der Tabelle gleich sind. Die Zahlen in drei Eckfeldern sind in der Figur bereits zu sehen. Welche Zahl schreibt sie in das vierte Eckfeld?

2		4
?		3

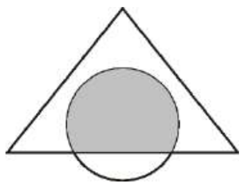
(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Lösung: Legt man im 2×2 - Bereich links oben drei beliebige Zahlen fest und ergänzt entsprechend die Summen in den 2×2 - Bereichen rechts oben und links unten, so erhält man im vierten Eckfeld immer die **1**, wie in den Beispielen zu sehen. Im linken Beispiel lautet die Summe der 2×2– Bereiche $x + y + z + 2$, im rechten Beispiel lautet die Summe 10.

2	y	4
z	x	z-2
1	y+1	3

2	3	4
4	1	2
1	4	3

22. Eine Figur besteht aus einem Dreieck und einem Kreis, die sich teilweise überlappen.
Die graue Fläche beträgt 45 % der Gesamtfläche der Figur.
Der weiße Teil der Dreiecksfläche beträgt 40 % der Gesamtfläche der Figur.
Wieviel Prozent der Kreisfläche hat der außerhalb des Dreiecks liegende weiße Teil?



(A) 20 % (B) 25 % (C) 30 % (D) 35 % (E) 50 %

Lösung: Die Gesamte Fläche hat 100%, die graue Fläche hat 45% und die weiße Dreiecksfläche hat 40%. Folglich muss die weiße Kreisfläche 15% entsprechen, da 100% - 45% - 40% = 15%.

Das bedeutet, dass die Kreisfläche insgesamt 60% der Gesamtfläche entspricht. Den Anteil des weißen Teils der Kreisfläche an der gesamten Kreisfläche berechnet man mit: $\frac{15}{15+45} = \frac{15}{60} = 0{,}25 \longrightarrow \mathbf{25}\%$.

23. Von den Zahlen 1 bis 8 wird in jeden der abgebildeten Kreise genau eine hineingeschrieben. Bei jedem der fünf geraden Pfeile werden die drei Zahlen in den Kreisen, die auf diesem Pfeil liegen, multipliziert. Ihr Produkt steht dann bei der Pfeilspitze. Wie groß ist die Summe der Zahlen, die in den drei Kreisen der untersten Reihe der Figur liegen?

(A) 11 (B) 12 (C) 15 (D) 17 (E) 19

Lösung: Da $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ und $28 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$ muss im ersten Feld (erste Zeile ganz links) die Zahl 1 stehen, da jede Ziffer lediglich einmal vorkommen darf und die Zahl 1 der einzige gemeinsame Teiler ist, der einmal vorkommt. Folglich bleiben für die zwei übrigen Werte in der ersten Zeile lediglich die Zahlen 5 und 6 übrig. Da 5 kein Teiler von 48 ist, kommt an die zweite Stelle die Zahl 6 und somit an dritter Stelle die Zahl 5. In der zweiten Zeile kommt an die zweite Stelle die Zahl 3, da die Zahl 3 sowohl von 144 als auch von 105 ein Teiler ist. So bleibt für die Zahl in der dritten Zeile, in der Mitte, die Zahl 7 übrig. Folglich muss in der zweiten Zeile an erster Stelle die Zahl 4 sein. Somit ergibt sich, dass in der dritten Zeile an erster Stelle die Zahl 2 und an dritter Stelle die Zahl 8 ist, da nur so das Produkt der Pfeile dem vorgegeben Produkt entspricht.
Die Summe der Zahlen in den drei grauen Kreisen ist also $7 + 2 + 8 = \mathbf{17}$.

24. Mit dem Fahrrad benötigt Marc für die Strecke von zuhause in die Schule und wieder zurück 20 Minuten. Er fährt dabei auf der ganzen Strecke mit derselben Geschwindigkeit. Zu Fuß benötigt er für dieselbe Strecke 60 Minuten. Auch zu Fuß geht er immer gleich schnell.
Gestern fuhr Marc mit dem Fahrrad nur bis zu Evas Haus, welches auf dem Weg zur Schule liegt. Er ließ dort das Rad stehen und legte den Rest des Weges zu Fuß zurück. Am Heimweg ging er zuerst zu Fuß bis zu Evas Haus und fuhr dann von dort mit dem Fahrrad nach Hause. Er benötigte daher für den gesamten Weg (zuhause – Schule – zuhause) 52 Minuten. Welchen Anteil seines Weges hat er auf dem Fahrrad zurückgelegt?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

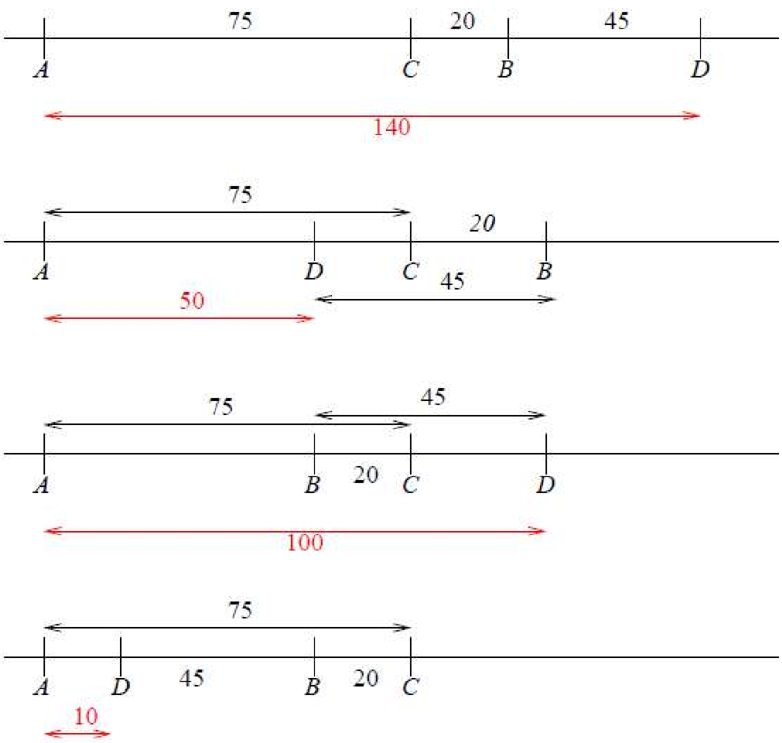
Lösung: Der Anteil des Weges, den Marc mit dem Rad zurücklegt, wird mit r bezeichnet. Somit fährt er mit dem Rad $20 \cdot r$ Minuten lang und zu Fuß geht er $60 \cdot (1-r)$ Minuten lang. Daraus ergibt sich die Gleichung:

$$20 \cdot r + 60 \cdot (1-r) = 52 \quad \Leftrightarrow \quad -40r = -8 \quad \Leftrightarrow \quad r = \mathbf{\frac{1}{5}}.$$

25. Die vier Orte *A, B, C* und *D* liegen (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge) entlang einer geraden Straße. Die Orte *A* und *C* sind 75 km voneinander entfernt, *B* und *D* 45 km voneinander und *B* und *C* 20 km voneinander. Welche der folgenden Entfernungen kann **nicht** der Abstand von *A* zu *D* sein?

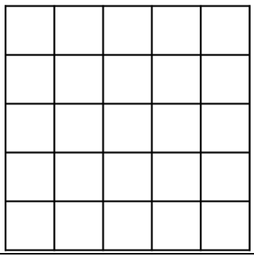
(A) 10 km (B) 50 km (C) 80 km (D) 100 km (E) 140 km

Lösung: Je nach Anordnung der Orte können vier Situationen entstehen:



Somit kann die Entfernung von A zu D nicht **80 km** sein.

26. Ein Maler will 2 Liter blauer Farbe mit 3 Litern gelber Farbe mischen, um 5 Liter grüner Farbe zu erhalten. Er verwendet irrtümlich 3 Liter blauer Farbe und 2 Liter gelber Farbe, womit er den falschen Grünton erzeugt. Wie viel dieser grünen Farbe muss er mindestens wegschütten, damit er aus dem Rest durch Hinzufügung von blauer oder gelber Farbe genau 5 Liter Farbe mit dem erwünschten Grünton erhalten kann?



(A) $\frac{5}{3}$ Liter (B) $\frac{3}{2}$ Liter (C) $\frac{2}{3}$ Liter (D) $\frac{3}{5}$ Liter (E) $\frac{5}{9}$ Liter

Lösung: Der Anteil an gelber Farbe soll $\frac{3}{5}$ betragen. Der Maler verwendet zum Schluss x Liter der falsch gemischten Farbe und mischt $(5-x)$ Liter gelber Farbe dazu, um das richtige Mischverhältnis zu erhalten. Dementsprechend schüttet er auch $(5-x)$ Liter der falsch gemischten Farbe weg.

Für die Liter an falsch gemischter Farbe erhält man die Gleichung:

$$x \cdot \frac{2}{5} + (5-x) = 5 \cdot \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{5}x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{10}{3}$$

Er benötigt also $\frac{10}{3}$ Liter der falsch gemischten Farbe und muss $5 - \frac{10}{3} = \mathbf{\frac{5}{3}}$ **Liter** dieser Farbe wegschütten.

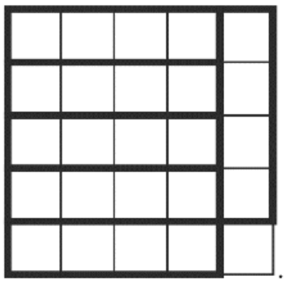
Alternativlösung:

Noch eine Alternativlösung zur Farbe, die ganz ohne Formeln auskommt: Die Mischung enthält derzeit 3 Liter blaue Farbe, soll am Ende aber nur 2 Liter enthalten. Um die blaue Farbe auf die gewünschte Menge zu reduzieren, muss man daher $\frac{1}{3}$ der Mischung wegschütten, also $\frac{5}{3}$ Liter.

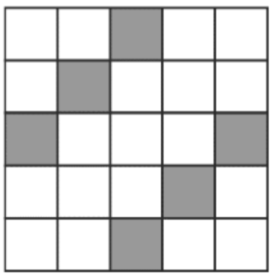
27. Wie viele Felder eines 5×5 - Rasters müssen mindestens gefärbt werden, sodass jedes mögliche 1×4 - Rechteck bzw. jedes 4×1 - Rechteck im Raster mindestens ein gefärbtes Feld enthält?

(A) 5 **(B)** 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Lösung: Wie in der Abbildung rechts zu sehen ist, können beispielsweise diese sechs 1×4 bzw. 4×1–Rechtecke eingezeichnet werden.



Folglich müssen mindestens **6** Flächen eingefärbt werden, zum Beispiel die folgenden:



Dies ist als ein Beispiel gegeben. Durch Ausprobieren oder geschicktes Überlegen findet man schnell heraus, dass mit nur 5 gefärbten Feldern stets eine Möglichkeit gefunden werden könnte, sodass ein 1×4– oder 4×1–Rechteck kein gefärbtes Feld enthält. Damit müssen es mindestens 6 gefärbte Felder sein.

28. Mowgli fragt einen Bären und einen Panther nach dem Wochentag. Der Bär lügt immer am Montag, Dienstag und Mittwoch. Der Panther lügt immer am Donnerstag, Freitag und Samstag. An den übrigen Tagen sagen die beiden immer die Wahrheit. Der Bär sagt: „Gestern war einer meiner Lügentage." Der Panther sagt: „Gestern war auch einer meiner Lügentage." An welchem Wochentag hat diese Unterhaltung stattgefunden?

(A) Donnerstag (B) Freitag (C) Samstag (D) Sonntag (E) Montag

Lösung: Sagt der Bär die Wahrheit, so muss die Unterhaltung am **Donnerstag** gewesen sein, da dies der einzige Tag ist, dessen Vortag ein Lügentag war. Der Donnerstag ist ein Lügentag des Panthers und tatsächlich hatte er am Vortag einen Wahrheitstag, also hat er gelogen.

29. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert. Renate markiert zwischen jedem Paar benachbarter Punkte einen weiteren Punkt. Diesen Vorgang wiederholt sie drei weitere Male.
Nun gibt es 225 markierte Punkte auf der Geraden. Wie viele Punkte waren zu Beginn markiert?

(A) 10 (B) 12 **(C)** 15 (D) 16 (E) 25

Lösung: Zwischen zwei Punkten werden jeweils 15 Punkte eingezeichnet. Sei $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu Beginn markierten Punkte, so werden $(n-1)$-mal jeweils 15 Punkte eingezeichnet. So entsteht die Gleichung:

$$15 \cdot (n-1) + n = 225 \quad \Leftrightarrow \quad 16 \cdot n - 15 = 225 \quad \Leftrightarrow \quad n = \mathbf{15}$$

30. In sieben Parks leben insgesamt 2022 Kängurus und einige Koalas. In jedem Park leben so viele Kängurus wie es Koalas in allen anderen Parks zusammen gibt. Wie viele Koalas leben insgesamt in den sieben Parks?

(A) 288 **(B)** 337 (C) 576 (D) 674 (E) 2022

Lösung: Seien A, B, C, D, E, F und G die Anzahlen der Kängurus in jedem Park und a, b, c, d, e, f und g die Anzahlen der Koalas. So gilt $A+B+C+D+E+F+G = 2022$ und außerdem:

$$A = b+c+d+e+f+g$$
$$B = a+c+d+e+f+g$$
$$C = a+b+d+e+f+g$$
$$D = a+b+c+e+f+g$$
$$E = a+b+c+d+f+g$$
$$F = a+b+c+d+e+g$$
$$G = a+b+c+d+e+f$$

Und somit, wenn man alle Gleichungen addiert:

$A+B+C+D+E+F+G = 6a+6b+6c+6d+6e+6f+6g$ bzw.

$2022 = 6a+6b+6c+6d+6e+6f+6g$ und somit für die Anzahl an Koalas:

$\mathbf{337} = a+b+c+d+e+f+g$

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9. – 10.

Vor- und Zuname:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

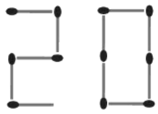
Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

- 3 Punkte Beispiele -

1. Wie viel ist $\frac{20\cdot 22}{(2+0)\cdot(2+2)}$?

(A) 34 (B) 40 (C) 44 (D) 55 (E) 85

2. Karo hat eine Streichholzschachtel mit 30 Streichhölzern. Aus einigen der Streichhölzer legt sie die Zahl 2022. Karo hat die ersten beiden Ziffern bereits geformt (siehe Abbildung).
Wie viele Streichhölzer verbleiben in der Schachtel, wenn sie die Zahl fertiggestellt hat?

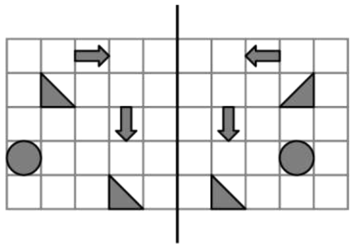


(A) 5 (B) 9 (C) 10 (D) 19 (E) 20

3. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 12 hat denselben Umfang wie ein Quadrat mit Seitenlänge x.
Was ist der Wert von x?

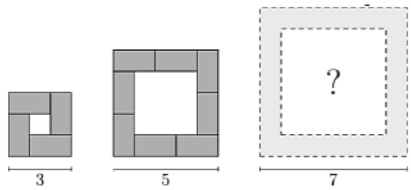
(A) 9 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 36

4. Auf einem Blatt Papier sind einige Symbole gezeichnet (siehe Abbildung).
Die Lehrkraft faltet die linke Seite entlang der senkrechten Linie nach rechts.
Wie viele Symbole der linken Seite liegen nun deckungsgleich auf einem Symbol auf der rechten Seite?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

5. Karin platziert Tische der Größe 2×1 entsprechend der Anzahl der Teilnehmer an einem Meeting. Die Abbildung zeigt die Tische für ein kleines, ein mittleres und ein großes Meeting von oben.
Wie viele Tische werden bei einem großen Meeting benötigt?

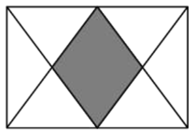


(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 16

6. Ich bin kleiner als mein Halbes und größer als mein Doppeltes. Die Summe von mir und meinem Quadrat ist 0.
Welche Zahl bin ich?

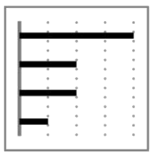
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

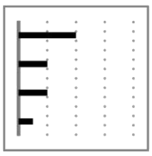
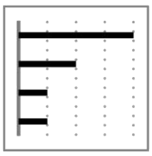
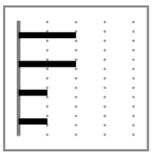
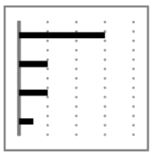
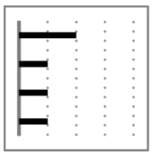
7. Die Mittelpunkte der beiden längeren Seiten des Rechtecks sind mit den Eckpunkten verbunden (siehe Abbildung). Welcher Anteil des Rechtecks ist gefärbt?



(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{2}{5}$

8. Sonjas Smartphone zeigt das Diagramm rechts an. In diesem ist dargestellt, wie lange sie vorige Woche mit vier verschiedenen Apps gearbeitet hat. In dieser Woche hat sie sich mit zwei ihrer Apps nur halb so lang beschäftigt, und mit den anderen beiden genau gleich lang wie letzte Woche.
Welches der folgenden könnte das Diagramm von dieser Woche sein?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

9. In der abgebildeten Multiplikationstabelle soll in jedem weißen Feld das Produkt der Zahlen in den grauen Feldern in derselben Zeile beziehungsweise Spalte stehen. Eine Zahl ist bereits eingetragen. Die ganze Zahl x ist größer als die positive ganze Zahl y. Was ist der Wert von y?

·	x	x+1
y		
y+1		77

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 11

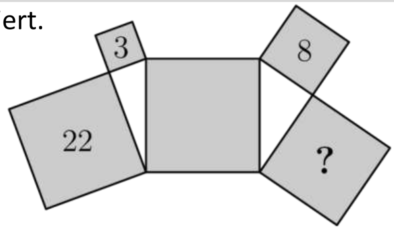
10. Auf einem Stimmzettel stehen 5 Personen zur Wahl. Nachdem 90 % der Stimmen ausgezählt sind, gibt es folgenden Zwischenstand (siehe Tabelle).
Wie viele der 5 Personen können die Wahl nicht mehr gewinnen?

Alex	Bella	Clint	Diana	Eddy
14	11	10	8	2

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Punkte Beispiele -

11. Fünf Quadrate und zwei rechtwinkelige Dreiecke sind wie in der Abbildung platziert. Die Zahlen 3, 8 und 22 in den Quadraten geben die Größe der Fläche in m² an. Wie groß ist die Fläche jenes Quadrats (in m²), in dem ein Fragezeichen steht?

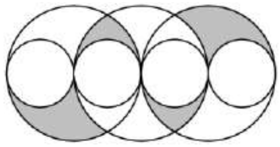


(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

12. 2022 Fliesen liegen in einer langen Reihe. Adam entfernt jede sechste Fliese. Beate entfernt anschließend von den verbleibenden Fliesen jede fünfte. Cora entfernt danach von den verbleibenden Fliesen jede vierte. Wie viele Fließen bleiben liegen?

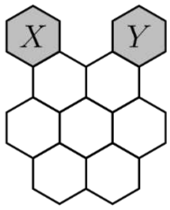
(A) 0 (B) 337 (C) 674 (D) 1011 (E) 1348

13. Die Abbildung zeigt drei große Kreise derselben Größe und vier kleine Kreise. Jeder kleine Kreis berührt zwei große Kreise und hat den Radius 1. Wie groß ist der Inhalt der markierten Fläche?



(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π (E) 6π

14. Biene Maja möchte von Bienenwabe X zur Wabe Y wandern. Sie kann sich nur von einer Wabe zu einer Nachbarwabe bewegen, wenn diese eine gemeinsame Seite haben. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Maja, um von X nach Y zu gelangen, wenn sie jede der sieben weißen Waben genau einmal betreten muss?

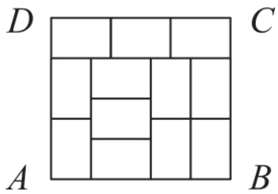


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

15. Die Summe zweier positiver ganzer Zahlen ist dreimal so groß wie deren Differenz. Das Produkt der beiden Zahlen ist vier Mal so groß wie deren Summe. Wie groß ist die Summe der beiden Zahlen?

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 18

16. Das Rechteck $ABCD$ besteht aus 12 kongruenten Rechtecken (siehe Abbildung). Wie lautet das Verhältnis $\frac{AD}{DC}$?



(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{9}{8}$

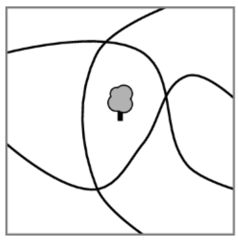
17. Ein Hase und ein Igel treten in einem Wettrennen gegeneinander an. Die kreisförmige Strecke ist 550 m lang. Die Startlinie und die Ziellinie stimmen überein. Die Geschwindigkeit des Hasen beträgt konstant 10 m/s, die des Igels konstant 1 m/s. Sie starten gleichzeitig, doch der Igel versucht zu schummeln und startet in die andere Richtung. Als die beiden einander treffen, dreht sich der Igel augenblicklich um und folgt dem Hasen. Wie viele Sekunden nach dem Hasen erreicht der Igel das Ziel?

(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 100 (E) 505

18. Die Enkel fragen ihre Großmutter, wie alt sie ist. Die Großmutter fordert diese auf, das Alter zu raten. Das erste Kind sagt 75, das zweite sagt 78 und das dritte sagt 81. Es stellt sich heraus, dass eines der Kinder sich um 1 Jahr irrte, eines sich um 2 Jahre und eines sich sogar um 4 Jahre. Wie viele Möglichkeiten für das Alter der Großmutter gibt es?

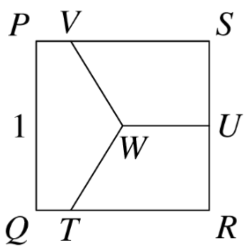
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

19. Durch unseren Stadtpark verlaufen drei Wege, wie auf der Karte abgebildet. Ein Baum steht in der Mitte des Parks. Wie viele Bäume müssen mindestens zusätzlich gepflanzt werden, damit sich auf beiden Seiten eines jeden Weges gleich viele Bäume befinden?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

20. Die Abbildung zeigt ein Quadrat $PQRS$ mit Seitenlänge 1. Der Punkt U ist der Mittelpunkt der Seite RS und der Punkt W ist der Mittelpunkt des Quadrats. Die Strecken TW, UW und VW unterteilen das Quadrat in drei gleich große Teilflächen. Wie lang ist die Strecke SV?



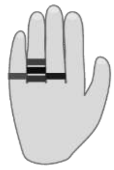
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{6}$

- 5 Punkte Beispiele -

21. Einst traf ich sechs Schwestern, deren Alter sechs aufeinanderfolgende ganze Zahlen waren.
Ich fragte jede von ihnen: Wie alt ist die älteste deiner Schwestern?
Welche der folgenden Zahlen kann **nicht** die Summe der sechs Antworten gewesen sein?

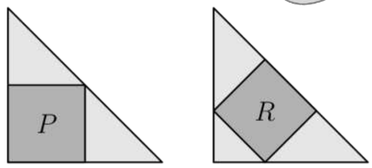
(A) 95 (B) 125 (C) 167 (D) 205 (E) 233

22. Veronika trägt fünf Ringe, wie abgebildet.
Auf wie viele unterschiedliche Arten kann sie diese Ringe, einen nach dem anderen, abnehmen?



(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 45

23. In zwei kongruente gleichschenkelig rechtwinkelige Dreiecke ist jeweils ein Quadrat eingeschrieben. Der Flächeninhalt des Quadrats P ist 45 Einheiten.
Wie viele Einheiten hat der Flächeninhalt des Quadrats R?

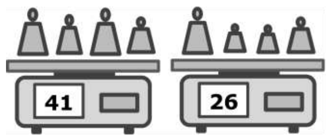


(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 60

24. In einer Stadt verständigen sich alle Einwohner ausschließlich durch Fragen. Es gibt zwei Typen von Einwohnern: die „positiven", die ausschließlich Fragen stellen, deren Antwort ja ist und die „negativen", die nur Fragen stellen, deren Antwort nein ist. Wir treffen die Einwohner Albert und Berta und Berta fragt uns: „Sind Albert und ich beide negativ?"
Welchem Typ gehören sie an?

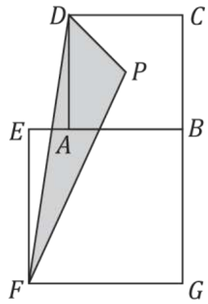
(A) Beide sind positiv
(B) Beide sind negativ
(C) Albert ist positiv und Berta ist negativ
(D) Albert ist negativ und Berta ist positiv
(E) Die Informationen reichen nicht aus um das zu entscheiden

25. Zwölf Gewichte haben ganzzahlige Massen von 1 g, 2 g, 3 g, …, 11 g bzw. 12 g.
Ein Händler verteilt diese Gewichte auf 3 Gruppen zu je 4 Gewichten.
Die Masse der ersten Gruppe beträgt 41 g, die Masse der zweiten Gruppe 26 g (siehe Abbildung).
Welches der folgenden Gewichte ist in derselben Gruppe wie das Gewicht mit 9 g?



(A) 3 g (B) 5 g (C) 7 g (D) 8 g (E) 10 g

26. Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $EFGB$ sind 7 cm bzw. 10 cm lang (siehe Abbildung).
Der Punkt P ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats $ABCD$.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks FPD (in cm²)?

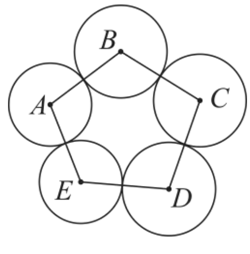


(A) 14,5 (B) 15 (C) 15,75 (D) 16,5 (E) 17,5

27. Das Produkt der Ziffern einer Zahl N ist 20.
Welche der folgenden Zahlen kann **nicht** das Produkt der Ziffern von $N + 1$ sein?

(A) 24 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

28. Gegeben sind fünf Kreise mit den Mittelpunkten *A*, *B*, *C*, *D* bzw. *E*, welche sich, wie in der Abbildung dargestellt, berühren. Die eingezeichneten Strecken verbinden die Mittelpunkte benachbarter Kreise.
Die Abstände der Mittelpunkte sind $AB = 16, BC = 14, CD = 17, DE = 13$ und $AE = 14$.
Welcher der Punkte ist der Mittelpunkt des Kreises mit dem größten Radius?

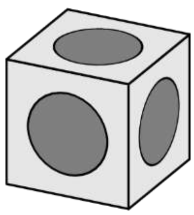


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

29. Acht Teams nehmen an einem Fußballturnier teil, bei dem jedes Team gegen jedes andere Team genau einmal spielt. In jedem Spiel bekommt der Sieger 3 Punkte und der Verlierer keinen Punkt. Bei einem Unentschieden bekommen beide Teams jeweils 1 Punkt. Am Ende haben alle Teams zusammen 61 Punkte erreicht.
Was ist die maximale Zahl an Punkten, die das Team mit den meisten Punkten erreicht haben kann?

(A) 21 (B) 19 (C) 18 (D) 17 (E) 16

30. In jede Seitenfläche eines Holzwürfels mit Seitenlänge 2 werden halbkugelförmige Löcher geschnitzt. Alle diese Löcher sind gleich groß, und ihre Mittelpunkte liegen in den Mittelpunkten der Würfelflächen. Die Löcher sind so groß wie möglich, sodass jede Halbkugel jede benachbarte Halbkugel in je genau einem Punkt berührt.
Wie groß ist der Durchmesser der Löcher?



(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Level: Junior, Grades 9 - 10

Full name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
each correct answer to questions 1. – 10.: 3 points
each correct answer to questions 11. – 20.: 4 points
each correct answer to questions 21. – 30.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

pwc

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

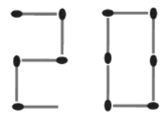
Känguru der Mathematik 2022
Level Junior (Schulstufe 9 and 10)
Austria – 17. 3. 2022

- 3 Point Examples -

1. What is $\frac{20 \cdot 22}{(2+0) \cdot (2+2)}$?

(A) 34 (B) 40 (C) 44 (D) 55 (E) 85

2. Karo has a box of matches with 30 matches. Using some of the matches she forms the number 2022. She has already formed the first two digits (see picture).
How many matches will be left in the box when she has finished the number?

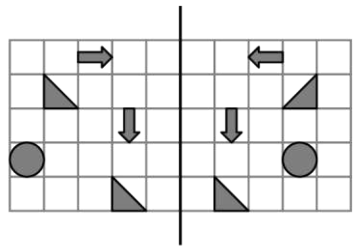


(A) 5 (B) 9 (C) 10 (D) 19 (E) 5

3. An equilateral triangle with side length 12 has the same perimeter as a square with side length x.
What is the value of x?

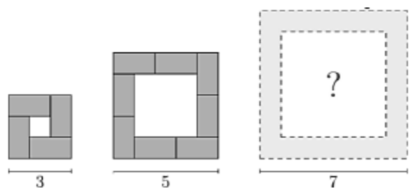
(A) 9 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 36

4. Various symbols are drawn on a piece of paper (see picture).
The teacher folds the left side along the vertical line to the right.
How many symbols of the left side are now congruent on top of a symbol on the right side?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

5. Karin places tables of size 2×1 according to the number of participants in a meeting. The diagram shows the table arrangements from above for a small, a medium and a large meeting.
How many tables are used in a large meeting?

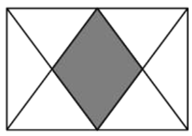


(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 14 (E) 16

6. I am smaller than my half and bigger than my double. The sum of me and my square is 0.
Which number am I?

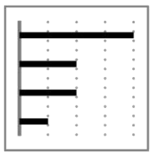
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

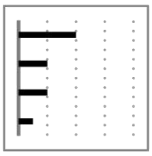
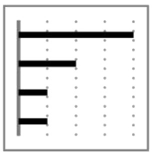
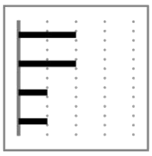
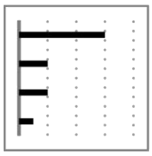
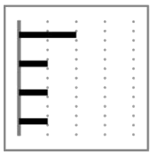
7. The midpoints of both longer sides of a rectangle are connected with the vertices (see diagram).
Which fraction of the rectangle is shaded?



(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{2}{5}$

8. Sonja's smartphone displays the diagram on the right. It shows how long she has worked with four different apps in the previous week. This week he has spent only half the amount of time using two of the apps and the same amount of time as last week using the other two apps.
Which of the following pictures could be the diagram for the current week?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

9. In the multiplication grid displayed, each white cell should show the product of the numbers in the grey cells that are in the same row and column respectively. One number is already entered. The integer x is bigger than the positive integer y. What is the value of y?

·	x	x+1
y		
y+1		77

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 11

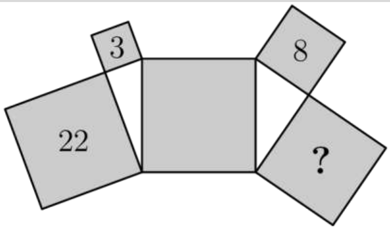
10. There are 5 people to choose from on a ballot paper. After counting 90 % of the votes the intermediate result looks as shown in the table.
How many of the 5 people cannot win the election anymore?

Alex	Bella	Clint	Diana	Eddy
14	11	10	8	2

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Point Examples -

11. Five squares and two right-angled triangles are placed as shown in the diagram.
The numbers 3, 8 and 22 in the squares state the size of the area in m².
How big is the area (in m²) of the square with the question mark?

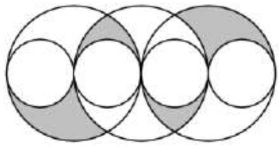


(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

12. 2022 tiles are placed in one long row. Adam removes every sixth tile.
Then Beate removes every fifth of the remaining tiles.
Subsequently Cora removes every fourth of the remaining tiles.
How many tiles are left?

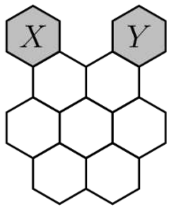
(A) 0 (B) 337 (C) 674 (D) 1011 (E) 1348

13. The diagram shows three big circles of equal size and four small circles.
Each small circle touches two big circles and has radius 1.
How big is the shaded area?



(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π (E) 6π

14. A bee called Maja wants to hike from honeycomb X to honeycomb Y. She can only move from one honeycomb to the neighbouring honeycomb if they share an edge.
How many, different ways are there for Maja to go from X to Y if she has to step onto every one of the seven honeycombs exactly once?

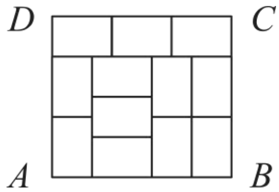


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

15. The sum of two positive integers is three times as big as their difference.
The product of the two numbers is four times as big as their sum.
How big is the sum of the two numbers?

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 18

16. The rectangle $ABCD$ is made up of 12 congruent rectangles (see diagram).
How big is the ratio $\frac{AD}{DC}$?



(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{9}{8}$

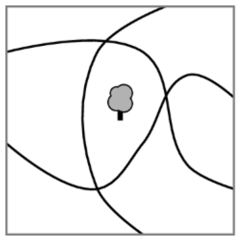
17. A rabbit and a hedgehog enter a race against each other. The circular racecourse is 550 m long. The starting line and the finish line are the same. The speed of the rabbit is a constant 10 m/s, the speed of the hedgehog is a constant 1 m/s. They start at the same time, but the hedgehog tries to cheat by going in the opposite direction. When the two meet, the hedgehog turns around immediately and follows the rabbit.
How many seconds after the rabbit does the hedgehog reach the finish line?

(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 100 (E) 505

18. The grandchildren ask their grandma how old she is. The grandma invites them to guess the age.
The first child says 75, the second says 78 and the third says 81. It turns out that one child is wrong by 1 year, one by 2 years and one by 4 years.
How many possibilities are there for the age of the grandma?

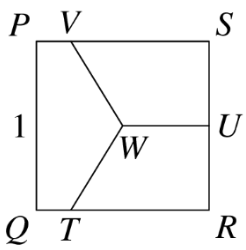
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

19. There are three paths running through our park in the city (see diagram).
A tree is situated in the centre of the park.
What is the minimum number of trees that have to be planted additionally so that there are the same number of trees on either side of each path?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

20. The diagram shows a square $PQRS$ with side length 1. The point U is the midpoint of the side RS and the point W is the midpoint of the square.
The three line segments, TW, UW and VW split the square into three equally big areas.
How long is the line segment SV?



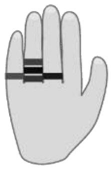
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ (E) $\frac{5}{6}$

- 5 Point Examples -

21. Once I met six sisters whose ages were six consecutive integers. I asked each one of them: How old is the oldest of your sisters?
Which of the following numbers **cannot** be the sum of the six answers?

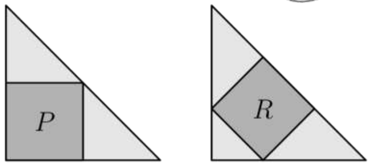
(A) 95 (B) 125 (C) 167 (D) 205 (E) 233

22. Veronika wears five rings as shown.
How many, different ways are there for her to take off the rings one by one?



(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 45

23. One square is drawn inside each of the two congruent isosceles right-angled triangles. The area of square P is 45 units.
How many units is the area of square R?

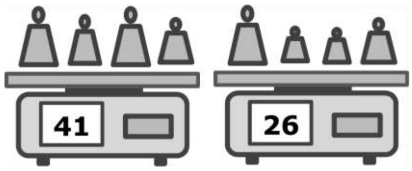


(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 60

24. In a certain city the inhabitants only communicate by asking questions. There are two kinds of inhabitants: the ‚positive' that only ask questions that are answered with ‚yes' and the ‚negative' that only ask questions that are answered with ‚no'. We meet the inhabitants Albert and Berta and Berta asks us: „Are Albert and I both negative?"
What kind of inhabitants are they?

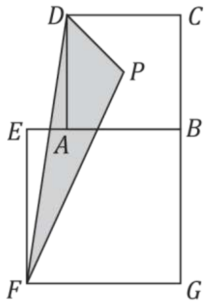
(A) Both are positive
(B) Both are negative
(C) Albert is positive and Berta is negative
(D) Albert is negative and Berta is positive
(E) There is not enough information to decide

25. Twelve weights have integer masses of 1 g, 2 g, 3 g, …, 11 g and 12 g respectively. A vendor divides those weights up into 3 groups of 4 weights each. The total mass of the first group is 41 g, the mass of the second group is 26 g (see diagram).
Which of the following weights is in the same group as the weight with 9 g?



(A) 3 g (B) 5 g (C) 7 g (D) 8 g (E) 10 g

26. The diagonals of the squares $ABCD$ and $EFGB$ are 7 cm and 10 cm long respectively (see diagram). The point P is the point of intersection of the two diagonals of the square $ABCD$.
How big is the area of the triangle FPD (in cm²)?

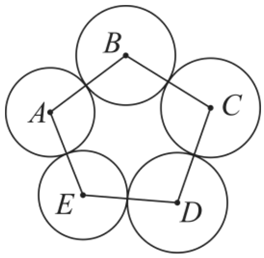


(A) 14.5 (B) 15 (C) 15.75 (D) 16.5 (E) 17.5

27. The product of the digits of a number N is 20.
Which of the following numbers **cannot** be the product of the digits of the number $N+1$?

(A) 24 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

28. Consider the five circles with midpoints *A*, *B*, *C*, *D* and *E* respectively, which touch each other as displayed in the diagram. The line segments, drawn in, connect the midpoints of adjacent circles.
The distances between the midpoints are $AB = 16, BC = 14, CD = 17, DE = 13$ and $AE = 14$.
Which of the points is the midpoint of the circle with the biggest radius?

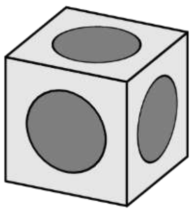


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

29. Eight teams take part in a football tournament where each team plays each other team exactly once. In each game the winner gets 3 points and the loser no points. In case of a draw both teams get 1 point. In the end all teams together have 61 points.
What is the maximum number of points that the team with the most points could have gained?

(A) 21 (B) 19 (C) 18 (D) 17 (E) 16

30. A hemispheric hole is carved into each face of a wooden cube with sides of length 2. All holes are equally sized, and their midpoints are in the centre of the faces of the cube. The holes are as big as possible so that each hemisphere touches each adjacent hemisphere in exactly one point. How big is the diameter of the holes?



(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Student (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
D	B	A	C	C	B	B	C	A	B	D	D	B	D	E	A	A	C	C	E	D	B	B	C	C	E	D	A	D	C

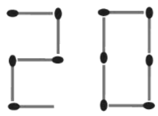
– 3 Punkte Beispiele –

1. Wie viel ist $\frac{20 \cdot 22}{(2+0) \cdot (2+2)}$?

(A) 34 (B) 40 (C) 44 **(D)** 55 (E) 85

Lösung: $\frac{20 \cdot 22}{(2+0) \cdot (2+2)} = \frac{20 \cdot 22}{8} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 11}{8} = 5 \cdot 11 = \mathbf{55}$.

2. Karo hat eine Streichholzschachtel mit 30 Streichhölzern. Aus einigen der Streichhölzer legt sie die Zahl 2022. Karo hat die ersten beiden Ziffern bereits geformt (siehe Abbildung). Wie viele Streichhölzer verbleiben in der Schachtel, wenn sie die Zahl fertiggestellt hat?



(A) 5 **(B)** 9 (C) 10 (D) 19 (E) 20

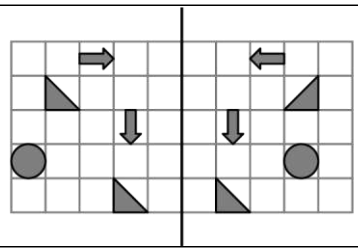
Lösung: Für die Ziffer 0 benötigt Karo sechs Streichhölzer, für die Ziffer 2 jeweils fünf Streichhölzer. Insgesamt bleiben also $30 - 3 \cdot 5 - 6 = \mathbf{9}$ Streichhölzer in der Schachtel.

3. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 12 hat denselben Umfang wie ein Quadrat mit Seitenlänge *x*. Was ist der Wert von *x*?

(A) 9 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 36

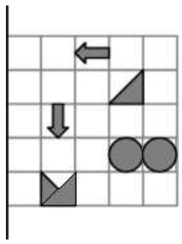
Lösung: Der Umfang des Dreiecks beträgt $3 \cdot 12 = 36$. Der Wert der Seitenlänge des Quadrats mit demselben Umfang ist demnach $\frac{36}{4} = \mathbf{9}$.

4. Auf einem Blatt Papier sind einige Symbole gezeichnet (siehe Abbildung). Die Lehrkraft faltet die linke Seite entlang der senkrechten Linie nach rechts. Wie viele Symbole der linken Seite liegen nun deckungsgleich auf einem Symbol auf der rechten Seite?



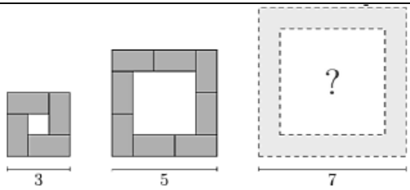
(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

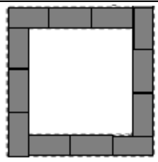
Lösung: Beim Umklappen kommen die beiden Pfeile sowie das obere der beiden Dreiecke (in der zweiten Zeile) deckungsgleich aufeinander zu liegen, insgesamt demnach **3** der Symbole.



5. Karin platziert Tische der Größe 2×1 entsprechend der Anzahl der Teilnehmer an einem Meeting. Die Abbildung zeigt die Tische für ein kleines, ein mittleres und ein großes Meeting von oben.
Wie viele Tische werden bei einem großen Meeting benötigt?

(A) 10 (B) 11 **(C)** 12 (D) 14 (E) 16





Lösung: Wie man der Skizze rechts entnehmen kann, werden **12** Tische für ein großes Meeting.
Alternativlösung: Da jede der Seitenlängen des Quadrats um 2 vergrößert wird, muss beim großen Meeting im Vergleich zum mittleren Meeting auf jeder Seite ein Tisch hinzugefügt werden, die Anzahl der Tische ist somit um 4 größer als beim mittleren Meeting (und mit derselben Überlegung um 8 größer als beim kleinen Meeting).

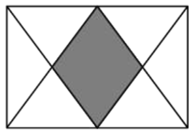
6. Ich bin kleiner als mein Halbes und größer als mein Doppeltes. Die Summe von mir und meinem Quadrat ist 0.
Welche Zahl bin ich?

(A) -2 **(B)** -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

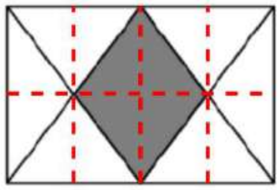
Lösung: Die Summe der gesuchten Zahl x und ihres Quadrats x^2 ist 0, also $x + x^2 = x \cdot (x+1) = 0$.
Entweder gilt $x = 0$ oder $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Da die Zahl größer als ihr Halbes ist, muss sie negativ sein, also ist $x = -\mathbf{1}$ die gesuchte Zahl.

7. Die Mittelpunkte der beiden längeren Seiten des Rechtecks sind mit den Eckpunkten verbunden (siehe Abbildung). Welcher Anteil des Rechtecks ist gefärbt?

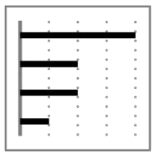
(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{2}{5}$

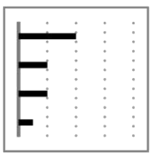
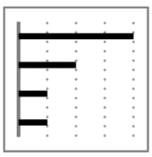
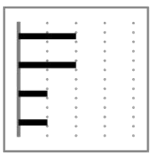
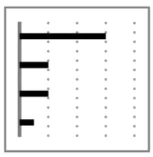
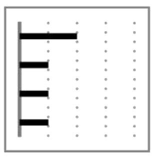


Lösung: Die senkrechten Symmetrieachsen und die horizontale Symmetrieachse zerlegen die Figur in sechzehn deckungsgleiche rechtwinkelige Dreiecke. Vier dieser Dreiecke sind gefärbt, damit ist $\mathbf{\frac{1}{4}}$ des gesamten Rechtecks gefärbt.



8. Sonjas Smartphone zeigt das Diagramm rechts an. In diesem ist dargestellt, wie lange sie vorige Woche mit vier verschiedenen Apps gearbeitet hat. In dieser Woche hat sie sich mit zwei ihrer Apps nur halb so lang beschäftigt, und mit den anderen beiden genau gleich lang wie letzte Woche.
Welches der folgenden könnte das Diagramm von dieser Woche sein?



(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Lösung: Verglichen mit voriger Woche sind
in Diagramm A alle 4 Balken halb so lang,
in Diagramm B nur ein Balken (der dritte) halb so lang und
in Diagramm D und E drei Balken halb so lang. In Diagramm D kommt zusätzlich noch ein Balken der Länge 3 vor.
Lediglich Diagramm **(C)** zeigt die gegebenen Nutzungszeiten: Der erste Balken und der dritte Balken sind halbiert, der zweite und vierte sind unverändert.

9. In der abgebildeten Multiplikationstabelle soll in jedem weißen Feld das Produkt der Zahlen in den grauen Feldern in derselben Zeile beziehungsweise Spalte stehen. Eine Zahl ist bereits eingetragen. Die ganze Zahl x ist größer als die positive ganze Zahl y.
Was ist der Wert von y?

·	x	x+1
y		
y+1		77

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 11

Lösung: Weil y und damit auch x positive ganze Zahlen sein müssen, ist 77 das Produkt zweier ganzzahliger Faktoren, die größer als 1 sein müssen, also kann 77 nur das Produkt von 7 und 11 sein. Wegen x > y gilt x+1=11, y+1=7, also y = **6**.

10. Auf einem Stimmzettel stehen 5 Personen zur Wahl.
Nachdem 90 % der Stimmen ausgezählt sind, gibt es folgenden Zwischenstand (siehe Tabelle).
Wie viele der 5 Personen können die Wahl nicht mehr gewinnen?

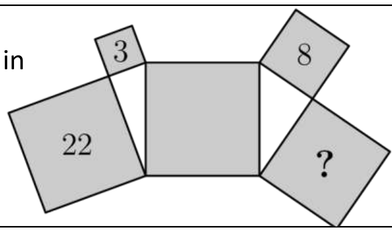
Alex	Bella	Clint	Diana	Eddy
14	11	10	8	2

(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Als 90% der Stimmen ausgezählt sind, sind das 45 Stimmen, also sind noch 5 Stimmen nicht erfasst. Im Gegensatz zu Alex, Bella und Clint, die gegebenenfalls auf Platz 1 landen können, haben **2** Personen, nämlich Diana und Eddy, zu diesem Zeitpunkt mehr als 5 Stimmen Rückstand auf Alex, können also die Wahl nicht mehr gewinnen.

– 4 Punkte Beispiele –

11. Fünf Quadrate und zwei rechtwinkelige Dreiecke sind wie in der Abbildung platziert. Die Zahlen 3, 8 und 22 in den Quadraten geben die Größe der Fläche in m² an. Wie groß ist die Fläche jenes Quadrats (in m²), in dem ein Fragezeichen steht?



(A) 14 (B) 15 (C) 16 **(D)** 17 (E) 18

Lösung: Das zentrale Quadrat (Seitenlänge s) ist für jedes der beiden rechtwinkligen Dreiecke das Quadrat über der Hypotenuse. Nach Satz von Pythagoras, angewandt auf das linke Dreieck, ergibt sich $s^2 = 22 + 3 = 25$. Bezeichnen wir den gesuchten Flächeninhalt (des Quadrats mit dem Fragezeichen) mit x^2, so ergibt sich nach Satz von Pythagoras für das rechte Dreieck $x^2 = s^2 - 8 = 25 - 8 = \mathbf{17}$.

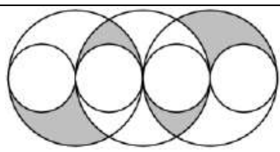
12. 2022 Fliesen liegen in einer langen Reihe. Adam entfernt jede sechste Fliese. Beate entfernt anschließend von den verbleibenden Fliesen jede fünfte.
Cora entfernt danach von den verbleibenden Fliesen jede vierte.
Wie viele Fließen bleiben liegen?

(A) 0 (B) 337 (C) 674 **(D)** 1011 (E) 1348

Lösung: Wegen $2022 : 6 = 337$ entfernt Adam 337 Fliesen und lässt für Beate $2022 - 337 = 1685$ Fliesen über. Wegen $1685 : 5 = 337$ entfernt auch Beate 337 Fliesen und lässt $1685 - 337 = 1348$ für Cora über. Die entfernt $1348 : 4 = 337$ Fliesen, und es bleiben **1011** Fliesen liegen.

Alternativlösung: Nach Adam verbleiben $\frac{5}{6}$ der Fliesen, nach Beate $\frac{4}{5}$ der restlichen Fliesen und nach Cora $\frac{3}{4}$ der verbleibenden Fiesen. Insgesamt verbleiben $2022 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = 2022 \cdot \frac{3}{6} = 2022 \cdot \frac{1}{2} = 1011$ Fliesen.

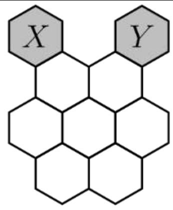
13. Die Abbildung zeigt drei große Kreise derselben Größe und vier kleine Kreise.
Jeder kleine Kreis berührt zwei große Kreise und hat den Radius 1.
Wie groß ist der Inhalt der markierten Fläche?



(A) π **(B)** 2π (C) 3π (D) 4π (E) 6π

Lösung: Spiegelt man die markierten Flächenteile, die rechts von der senkrechten Symmetrieachse der (ungefärbten) Figur liegen, an dieser Symmetrieachse nach links, so sieht man, dass die gesamte markierte Fläche mit der Fläche eines großen Kreises ohne zwei kleine übereinstimmt. Der Radius eines großen Kreises ist 2, der Flächeninhalt eines großen Kreises also 4π. Weil der Radius jedes der kleinen Kreise 1 ist, der Flächeninhalt also 2π ist, ist die Größe der markierten Fläche gleich $4\pi - 2\pi = \mathbf{2\pi}$.

14. Biene Maja möchte von Bienenwabe X zur Wabe Y wandern. Sie kann sich nur von einer Wabe zu einer Nachbarwabe bewegen, wenn diese eine gemeinsame Seite haben.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Maja, um von X nach Y zu gelangen, wenn sie jede der sieben weißen Waben genau einmal betreten muss?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D)** 5 (E) 6

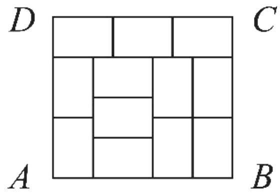
Lösung: Maja muss auf ihrem Weg von X nach Y jede der sieben weißen Waben genau einmal betreten. Die mittlere Wabe kann Maja weder als erste noch als letzte Wabe betreten, weil sie zuerst die an X grenzende und zuletzt die an Y grenzende Wabe betreten muss und diese Waben darüber hinaus nie betreten darf. Daher kann sie die mittlerer Wabe als zweite, dritte, … , sechste betreten. Weil sich der restliche Weg dadurch zwangsläufig ergibt, ergeben sich somit **5** Möglichkeiten.

15. Die Summe zweier positiver ganzer Zahlen ist dreimal so groß wie deren Differenz.
Das Produkt der beiden Zahlen ist vier Mal so groß wie deren Summe.
Wie groß ist die Summe der beiden Zahlen?

(A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 15 **(E)** 18

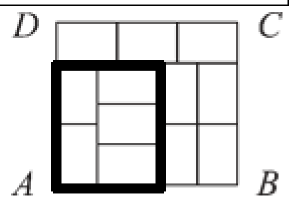
Lösung: Bezeichnen wir die größere Zahl mit a, die kleiner mit b, so ergeben sich die Gleichungen $a + b = 3(a - b)$ und $a \cdot b = 4(a + b)$. Aus der ersten ergibt sich $a = 2b$; Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $2b^2 = 12b$ und (wegen b>0) $b = 6$, $a = 12$, also $a + b = \mathbf{18}$.

16. Das Rechteck $ABCD$ besteht aus 12 kongruenten Rechtecken (siehe Abbildung).
Wie lautet das Verhältnis $\frac{AD}{DC}$?



(A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{9}{8}$

Lösung: Bezeichnen wir die Länge der längeren Seite der kleinen Rechtecke mit l, die der kürzeren mit b, so ergibt sich aus der Figur (schwarz markiert) $2l = 3b$, also $l : b = 3 : 2$ oder $l = 3t, b = 2t$.
Daraus folgt AD = 8t, DC = 9t und somit AD : DC = 8 : 9.



17. Ein Hase und ein Igel treten in einem Wettrennen gegeneinander an. Die kreisförmige Strecke ist 550 m lang. Die Startlinie und die Ziellinie stimmen überein. Die Geschwindigkeit des Hasen beträgt konstant 10 m/s, die des Igels konstant 1 m/s. Sie starten gleichzeitig, doch der Igel versucht zu schummeln und startet in die andere Richtung. Als die beiden einander treffen, dreht sich der Igel augenblicklich um und folgt dem Hasen.
Wie viele Sekunden nach dem Hasen erreicht der Igel das Ziel?

(A) 45 (B) 50 (C) 55 (D) 100 (E) 505

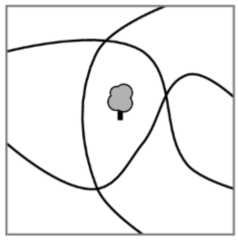
Lösung: Aufgrund ihrer Geschwindigkeiten von 10m/s bzw. 1m/s bewegen sich Hase und Igel zuerst mit 11m/s auf einander zu und treffen einander wegen $550 : 11 = 50$ nach 50 Sekunden. Der Igel hat bei ihrem Aufeinandertreffen 50m zurückgelegt, der Hase 500m. Bis ins Ziel müssen beide dann noch 50m zurücklegen. Dafür benötigt der Hase 5s, der Igel 50s.
Der Igel erreicht das Ziel also **45** Sekunden nach dem Hasen.

18. Die Enkel fragen ihre Großmutter, wie alt sie ist. Die Großmutter fordert diese auf, das Alter zu raten.
Das erste Kind sagt 75, das zweite sagt 78 und das dritte sagt 81. Es stellt sich heraus, dass eines der Kinder sich um 1 Jahr irrte, eines sich um 2 Jahre und eines sich sogar um 4 Jahre.
Wie viele Möglichkeiten für das Alter der Großmutter gibt es?

(A) 0 (B) 1 **(C)** 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: Die größte Abweichung in den Schätzungen beträgt 4 Jahre, daher kann die Großmutter wegen $75 + 4 = 79$ nicht älter als 79 Jahre, wegen $81 - 4 = 77$ nicht jünger als 77 Jahre sein. Weil keine Schätzung genau passt, kann die Großmutter nicht 78 Jahre alt sein, was zwei Möglichkeiten für ihr Alter überlässt: 77 Jahre oder 79 Jahre. Für beide Möglichkeiten weichen die drei Schätzungen für das Alter der Großmutter um 1, 2 und 4 Jahre vom tatsächlichen Alter ab, also gibt es tatsächlich diese **zwei Möglichkeiten** für das Alter der Großmutter.

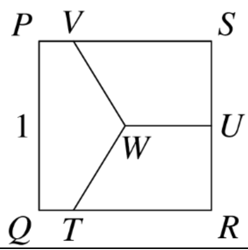
19. Durch unseren Stadtpark verlaufen drei Wege, wie auf der Karte abgebildet.
Ein Baum steht in der Mitte des Parks.
Wie viele Bäume müssen mindestens zusätzlich gepflanzt werden, damit sich auf beiden Seiten eines jeden Weges gleich viele Bäume befinden?



(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

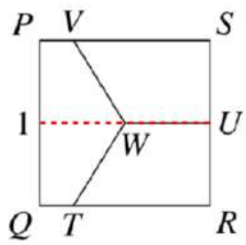
Lösung: Weil beiderseits jedes Wegs gleich viele Bäume stehen sollen, muss die Gesamtzahl aller Bäume gerade sein, die Zahl der neu zu pflanzenden Bäume also ungerade.
Dass das gewünschte Ziel durch Pflanzen nur eines Baumes nicht erreichbar ist, ist leicht überprüfbar. Die Abbildung zeigt, dass das Pflanzen von 3 zusätzlichen Bäumen reicht.
(Hinweis: auch mit 5 Bäumen ist es möglich, es ist allerdings nach der kleinsten Anzahl an zusätzlichen Bäumen gefragt)

20. Die Abbildung zeigt ein Quadrat $PQRS$ mit Seitenlänge 1. Der Punkt U ist der Mittelpunkt der Seite RS und der Punkt W ist der Mittelpunkt des Quadrats.
Die Strecken TW, UW und VW unterteilen das Quadrat in drei gleich große Teilflächen.
Wie lang ist die Strecke SV?



(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$ **(E)** $\frac{5}{6}$

Lösung: Die Strecke UW liegt auf einer Symmetrieachse des Quadrats. Weil die Trapeze $TRUW$ und $VSUW$ flächengleich sind, liegen auch V und T symmetrisch bezüglich dieser Symmetrieachse, also ist auch das Fünfeck $PQTWV$ symmetrisch und wird durch die Symmetrieachse UW in zwei kongrunente Trapeze zerlegt, deren Flächeninhalte halb so groß sind wie die der Trapeze $TRUW$ und $VSUW$. Unter Berücksichtigung der gleichen Höhe ½ aller vier Trapeze ergibt sich mit $WU = ½$:



$$(½ + SV):(½ + PV) = (½ + SV):(½ + 1 - SV) =$$
$$= (0{,}5 + SV) : (1{,}5 - SV) = 2 : 1$$

und weiters

$$3 - 2SV = 0{,}5 + SV$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5 = 3SV \Leftrightarrow SV = \mathbf{\frac{5}{6}}.$$

Alternativlösung: Da die drei Flächen gleich groß sind, hat das Trapez $SVWU$ exakt ein Drittel der Quadratfläche, also 1/3. Der Flächeninhalt dieses Trapezes kann aber berechnet werden als:

$$\frac{SU \cdot (SV + UW)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(SV + ½)}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow SV + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow SV = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6}.$$

5 Punkte Beispiele

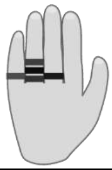
21. Einst traf ich sechs Schwestern, deren Alter sechs aufeinanderfolgende ganze Zahlen waren. Ich fragte jede von ihnen: Wie alt ist die älteste deiner Schwestern? Welche der folgenden Zahlen kann **nicht** die Summe der sechs Antworten gewesen sein?

(A) 95 (B) 125 (C) 167 **(D)** 205 (E) 233

Lösung: Die fünf jüngeren Mädchen werden auf die gestellte Frage mit dem Alter der ältesten Schwester antworten. Das älteste Mädchen nennt das Alter ihrer Schwester, die um 1 Jahr jünger ist als sie. Wenn das älteste Mädchen x Jahre alt ist, ist die Summe der sechs Antworten somit $5 \cdot x + x - 1 = 6x - 1$. Die Summe ist also um 1 kleiner als ein Vielfaches von 6. Antwort **(D) 205** kann nicht die gesuchte Summe sein, da 205+1=206 nicht durch 6 teilbar ist. (Die Antworten (95+1=96), (125+1=126), (167+1=168) und (233+1=234) sind möglich.)

22. Veronika trägt fünf Ringe, wie abgebildet. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann sie diese Ringe, einen nach dem anderen, abnehmen?

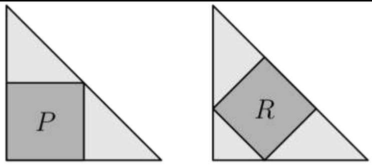
(A) 16 **(B)** 20 (C) 24 (D) 30 (E) 45

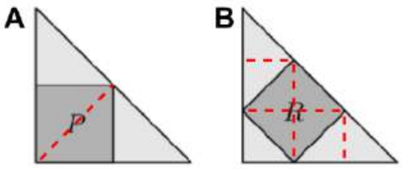


Lösung: Während Veronika die drei Ringe ihres Ringfingers abnimmt, kann sie 4 verschiedene Zeitpunkte wählen, um den Ring am Mittelfinger abzunehmen (zu Beginn, nach dem ersten Ring, nach dem zweiten Ring oder ganz am Schluss). Für jede dieser 4 Arten hat sie wiederum 5 verschiedene Möglichkeiten, den Ring am kleinen Finger abzunehmen (zu Beginn, nach dem ersten Ring, nach dem zweiten Ring, nach dem dritten Ring oder am Schluss). Es gibt also insgesamt $4 \cdot 5 = \mathbf{20}$ Möglichkeiten.

23. In zwei kongruente gleichschenkelig rechtwinkelige Dreiecke ist jeweils ein Quadrat eingeschrieben. Der Flächeninhalt des Quadrats P ist 45 Einheiten. Wie viele Einheiten hat der Flächeninhalt des Quadrats R?

(A) 35 **(B)** 40 (C) 45 (D) 50 (E) 60





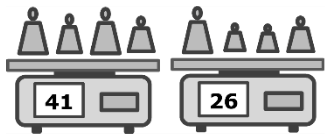
Lösung: Unterteilt man das Quadrat P entlang einer Diagonale, setzt sich das große Dreieck **A** aus vier gleichen, kleineren Dreiecken zusammen. Die Fläche eines großen Dreiecks beträgt also $4 \cdot \frac{45}{2} = 90$ Flächeneinheiten. Teilt man nun das Quadrat R entlang seiner Diagonalen, sowie zwei der anliegenden Dreiecke entlang ihrer Höhen, besteht Dreieck **B** aus 9 gleichen, kleinen Dreiecken. Die Fläche eines kleinen Dreiecks beträgt also $\frac{90}{9} = 10$ Flächeneinheiten. Das Quadrat R setzt sich aus 4 solcher Dreiecke zusammen und ist $4 \cdot 10 = \mathbf{40}$ Flächeneinheiten groß.

24. In einer Stadt verständigen sich alle Einwohner ausschließlich durch Fragen. Es gibt zwei Typen von Einwohnern: die „positiven", die ausschließlich Fragen stellen, deren Antwort ja ist und die „negativen", die nur Fragen stellen, deren Antwort nein ist. Wir treffen die Einwohner Albert und Berta und Berta fragt uns: „Sind Albert und ich beide negativ?"
Welchem Typ gehören sie an?

(A) Beide sind positiv
(B) Beide sind negativ
(C) Albert ist positiv und Berta ist negativ
(D) Albert ist negativ und Berta ist positiv
(E) Die Informationen reichen nicht aus um das zu entscheiden

Lösung: Berta kann nicht positiv sein, da sonst ihre Frage „ob *beide negativ* sind", mit „ja" zu beantworten wäre, was widersprüchlich ist. Berta muss also negativ sein. Wenn Berta negativ ist, ist die Antwort auf ihre Frage „nein". Das heißt, Berta und Albert sind *nicht* beide negativ. Da Berta bereits negativ ist, ist Albert positiv, die Antwort ist also **(C)**.

25. Zwölf Gewichte haben ganzzahlige Massen von 1 g, 2 g, 3 g, …, 11 g bzw. 12 g.
Ein Händler verteilt diese Gewichte auf 3 Gruppen zu je 4 Gewichten.
Die Masse der ersten Gruppe beträgt 41 g, die Masse der zweiten Gruppe 26 g (siehe Abbildung).
Welches der folgenden Gewichte ist in derselben Gruppe wie das Gewicht mit 9 g?

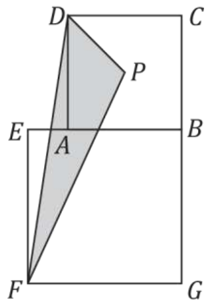


(A) 3 g (B) 5 g **(C)** 7 g (D) 8 g (E) 10 g

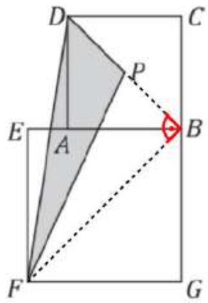
Lösung: Die Gesamtmasse aller Gewichte ist $1+2+\cdots+12=78$ g. Die Masse der dritten Gruppe beträgt also $78-41-26=11$ g. Die einzige Möglichkeit, die dritte Gruppe aus vier unterschiedlichen Gewichten zu bilden, ist die Gruppe {1,2,3,5} bzw. $1+2+3+5=11$ g. Um die erste Gruppe mit dem Gesamtgewicht 41 g zu bilden, benötigt man jedenfalls die drei schwersten Einzelgewichte sowie das 8 g-Gewicht, $8+10+11+12=41$ g. Die dritte Gruppe setzt sich also aus {4,6,7,9} zusammen und das 9 g-Gewicht ist mit dem **7 g**-Gewicht in einer Gruppe.

26. Die Diagonalen der Quadrate $ABCD$ und $EFGB$ sind 7 cm bzw. 10 cm lang (siehe Abbildung). Der Punkt P ist der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats $ABCD$).
Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks FPD (in cm²)?

(A) 14,5 (B) 15 (C) 15,75 (D) 16,5 **(E)** 17,5



Lösung: Im Quadrat $EFGB$ ist der Winkel zwischen der Diagonalen $\overline{FB}$ und der Seite $\overline{BE}$ gleich 45°. Gleiches gilt im Quadrat $ABCD$ für den Winkel zwischen der Seite $\overline{AB}$ und der Diagonale $\overline{BD}$. Da der Punkt A auf der Seite $\overline{BE}$ liegt, ist der Winkel $\angle FBD$ gleich 45°+45°=90°. Das Dreieck FBD ist somit rechtwinklig mit einem Flächeninhalt von $\frac{(\overline{FB}\cdot\overline{BD})}{2}=\frac{(10\cdot 7)}{2}=35cm^2$.
Der Punkt P teilt die Dreiecksseite $\overline{BD}$ in zwei gleich lange Strecken $\overline{BP}=\overline{PD}$ und das Dreieck FBD wird durch die Verbindung $\overline{FP}$ in die zwei Dreiecke FBP und FPD unterteilt. Im Dreieck FBP ist die Strecke $\overline{FB}$ die Höhe auf die Seite $\overline{BP}$ und sein Flächeninhalt ist $\frac{(\overline{FB}\cdot\overline{BP})}{2}$.
Im Dreieck FPD ist die Höhe auf die Seite $\overline{PD}$ ebenfalls die Strecke $\overline{FB}$ und sein Flächeninhalt ist $\frac{(\overline{FB}\cdot\overline{PD})}{2}$. Da $\overline{BP}=\overline{PD}$, haben die Dreiecke FBP und FPD denselben Flächeninhalt. Die Verbindung $\overline{FP}$ teilt das Dreieck FBD also in zwei Dreiecke gleicher Fläche und der Flächeninhalt von FPD ist $\frac{35}{2}=\mathbf{17,5}cm^2$. ($\overline{FP}$ wird hierbei Schwerlinie eines Dreiecks genannt).



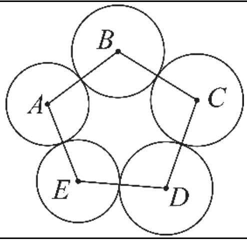
Alternativlösung: Im Quadrat $EFGB$ ist der Winkel zwischen der Diagonalen $\overline{FB}$ und der Seite BE gleich 45°. Gleiches gilt im Quadrat $ABCD$ für den Winkel zwischen der Seite $\overline{AB}$ und der Diagonale $\overline{BD}$. Da der Punkt A auf der Seite $\overline{BE}$ liegt, ist der Winkel $\angle FBD$ gleich $45°+45°=90°$. Für das Dreieck FPD ist daher $\overline{BF}$ die Höhe zur Seite $\overline{DP}$.
Der Flächeninhalt von FPD ist daher: (*Höhe · entsprechender Seite)/2* = $\frac{\frac{7}{2}\cdot 10}{2}=\frac{70}{4}=17{,}5$ cm².

27. Das Produkt der Ziffern einer Zahl N ist 20.
Welche der folgenden Zahlen kann **nicht** das Produkt der Ziffern von $N+1$ sein?

(A) 24 (B) 25 (C) 30 **(D)** 35 (E) 40

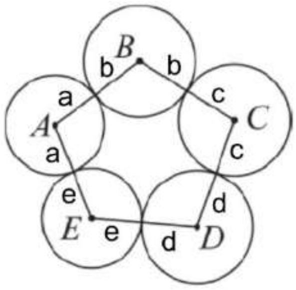
Lösung: Die Zahl 20 kann nur als Produkt der Ziffern $4\cdot 5\cdot 1$ *bzw.* $2\cdot 2\cdot 5\cdot 1$ geschrieben werden. N kann also nur aus den Ziffern 1,2,4,5 bestehen. Für die Ziffern von $N+1$ ergeben sich somit zusätzlich die möglichen Ziffern (1+1)=2, (2+1)=3, (4+1)=5 und (5+1)=6. $N+1$ kann aus den Ziffern 1,2,3,4,5,6 bestehen. Die Antwortmöglichkeit 35 kann jedoch nur als Produkt der Ziffern $5\cdot 7$ geschrieben werden. Da 7 keine mögliche Ziffer von N+1 ist, kann **35** nicht das Produkt der Ziffern von $N+1$ sein.
(Beispiel-Möglichkeiten für die restlichen vier Antworten: (N=45, N+1=46 und $4\cdot 6=24$); (N=54, N+1=55 und $5\cdot 5=25$); (N=252; N+1=253 und $2\cdot 5\cdot 3=30$); (N=2251, N+1=2252 und $2\cdot 2\cdot 5\cdot 2=40$))

28. Gegeben sind fünf Kreise mit den Mittelpunkten *A*, *B*, *C*, *D* bzw. *E*, welche sich, wie in der Abbildung dargestellt, berühren. Die eingezeichneten Strecken verbinden die Mittelpunkte benachbarter Kreise. Die Abstände der Mittelpunkte sind $AB = 16$, $BC = 14$, $CD = 17$, $DE = 13$ und $AE = 14$.
Welcher der Punkte ist der Mittelpunkt des Kreises mit dem größten Radius?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

Lösung: Der Radius des Kreises A sei a, von B sei b, von C sei c, von D sei d und von E sei e (siehe Abbildung). Dann gilt, dass $a + b = 16$, $b + c = 14$, $c + d = 17$, $d + e = 13$ und $e + a = 14$ ist. Der Umfang des gezeichneten Fünfecks beträgt somit
$a + b + b + c + c + d + d + e + e + a = 16 + 14 + 17 + 13 + 14 =$
$= 74 = 2 \cdot (a + b + c + d + e)$.
Der halbe Umfang entspricht also der Summe $a + b + c + d + e = \frac{74}{2} = 37$.
Da $b + c$ und $d + e$ die kürzesten Strecken sind,
muss $a = 37 - (b + c) - (d + e) = 10$ der längste Radius sein, die Antwort ist also **(A)**.

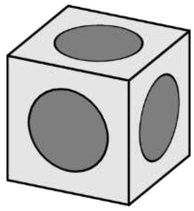


29. Acht Teams nehmen an einem Fußballturnier teil, bei dem jedes Team gegen jedes andere Team genau einmal spielt. In jedem Spiel bekommt der Sieger 3 Punkte und der Verlierer keinen Punkt. Bei einem Unentschieden bekommen beide Teams jeweils 1 Punkt. Am Ende haben alle Teams zusammen 61 Punkte erreicht.
Was ist die maximale Zahl an Punkten, die das Team mit den meisten Punkten erreicht haben kann?

(A) 21 (B) 19 (C) 18 **(D)** 17 (E) 16

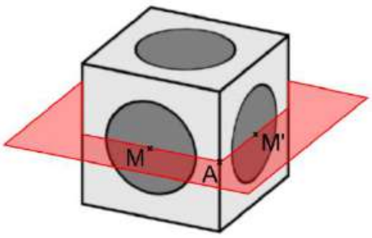
Lösung: Die acht Teams bestreiten gemeinsam 28 Spiele, jedes Team spielt 7 Spiele. Pro Spiel werden bei einem Unentschieden insgesamt 2 Punkte auf die beiden Teams verteilt (jede Mannschaft bekommt 1 Punkt). Bei einem Sieg werden gesamt 3 Punkte auf die beiden Teams verteilt (3 Punkte für den Sieger, der Verlierer bekommt keine Punkte). Wenn alle 28 Spiele Unentschieden enden, kann die minimale Gesamtpunkteanzahl von $28 \cdot 2 = 56$ Punkten erreicht werden. Da 61 Gesamtpunkte erreicht wurden, gab es in 61-56=5 Spielen einen Gewinner. Wenn in diesen 5 Spielen jeweils das gleiche Team gewonnen hat, kann dieses Team maximal $5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = \mathbf{17}$ Punkte erreicht haben.

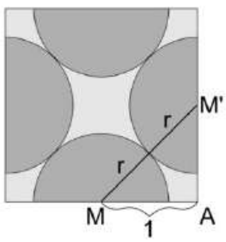
30. In jede Seitenfläche eines Holzwürfels mit Seitenlänge 2 werden halbkugelförmige Löcher geschnitzt. Alle diese Löcher sind gleich groß, und ihre Mittelpunkte liegen in den Mittelpunkten der Würfelflächen. Die Löcher sind so groß wie möglich, sodass jede Halbkugel jede benachbarte Halbkugel in je genau einem Punkt berührt.
Wie groß ist der Durchmesser der Löcher?



(A) 1 (B) 2 **(C)** $\sqrt{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ (E) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Lösung: Man schneide den Würfel mit einer Ebene, die parallel zu einer Seitenfläche ist und durch den Mittelpunkt des Würfels geht. In diesem Schnitt werden vier der Halbkugeln dann zu Halbkreisen mit dem Radius r, die sich jeweils in einem Punkt tangential berühren. Für je zwei berührende Halbkreise folgt, dass die Strecke zwischen ihren beiden Mittelpunkten (M bzw. M‘) gleich 2r ist. Der Durchmesser eines Loches, $2r$, ist somit die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $MM‘A$ mit den Katheten $\overline{MA} = \overline{M'A} = 1$ (=halbe Seitenlänge des Würfels).
Nach dem Satz des Pythagoras: $2r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{\mathbf{2}}$





KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Kategorie: Student, Schulstufe: 11. – 13.

Vor- und Zuname:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

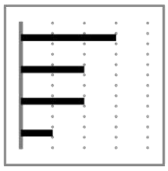
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

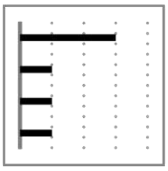
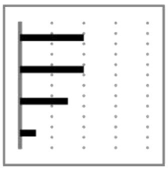
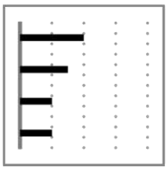
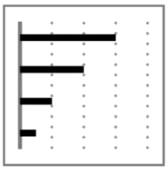
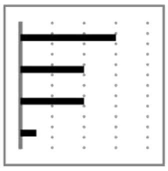
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Student (11., 12. und 13. Schulstufe)
Österreich – 17. 3. 2022

- 3 Punkte Beispiele -

1. Martins Smartphone zeigt das Diagramm rechts an. In diesem ist dargestellt, wie lange er vorige Woche mit vier verschiedenen Apps gearbeitet hat. Die Apps sind von oben nach unten nach Verwendungsdauer sortiert angeordnet. In dieser Woche hat er sich mit zwei seiner Apps nur halb so lang beschäftigt, und mit den anderen beiden genau gleich lang wie letzte Woche.
Welches der folgenden Bilder kann **nicht** das Diagramm für die aktuelle Woche darstellen?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Wie viele positive dreiziffrige Zahlen sind durch 13 teilbar?
(A) 68 (B) 69 (C) 70 (D) 76 (E) 77

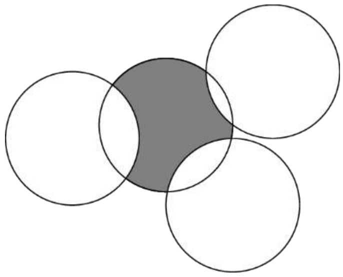
3. Bella ist älter als Charly und jünger als Lily. Welche zwei können gleich alt sein, wenn Teddy älter als Bella ist?
(A) Charly und Teddy (B) Teddy und Lily (C) Lily und Charly
(D) Bella und Lily (E) Teddy und Bella

4. Welche der folgenden Zahlen ist **nicht** durch die eigene Ziffernsumme teilbar?
(A) 2022 (B) 2023 (C) 2024 (D) 2025 (E) 2027

5. 5^8 Bleistifte werden gleichmäßig auf 25 leere Schachteln verteilt. Wie viele Bleistifte sind in jeder Schachtel?
(A) 25^3 (B) 25^2 (C) 5^3 (D) 5^2 (E) 5

6. Das Produkt der Ziffern einer 10-ziffrigen Zahl ist 15. Wie groß ist die Ziffernsumme dieser Zahl?
(A) 8 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 20

7. Vier Kreise mit dem Radius 1 schneiden einander wie in der Abbildung zu sehen ist. Welchen Umfang hat der graue Bereich?



(A) π (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) eine Zahl zwischen $\frac{3\pi}{2}$ und 2π (D) 2π (E) π^2

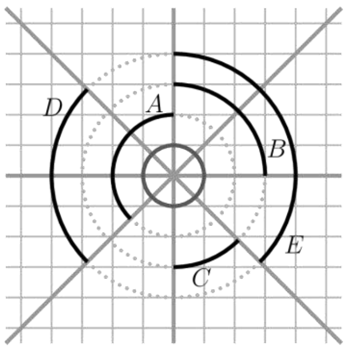
8. Alle ganzen Zahlen von 2 bis 2022, die man nur mit den Ziffern 0 und 2 schreiben kann, werden in aufsteigender Reihenfolge in einer Liste angeschrieben.
Welche ist die mittlere Zahl der Liste?
(A) 200 (B) 220 (C) 222 (D) 2000 (E) 2002

9. Wie viele reelle Lösungen hat die Gleichung $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

10. Auf einer Geraden sind die Punkte *A, B, C* und *D* wie abgebildet in dieser Reihenfolge markiert.
Wir wissen, dass *A* von *C* 12 cm entfernt liegt, und dass *B* von *D* 18 cm entfernt liegt.
Wie weit sind die Mittelpunkte der Strecken *AB* und *CD* voneinander entfernt?
(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 12 cm (D) 13 cm (E) 15 cm

4 Punkte Beispiele -

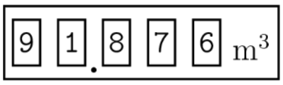
11. Vier sich in einem Punkt schneidende Geraden bilden acht gleiche Winkel (siehe Abbildung). Welcher schwarze Kreisbogen hat dieselbe Länge wie der Umfang des kleinen (grauen) Kreises?



(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

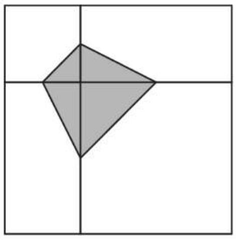
12. Es seien a, b und c reelle Zahlen ungleich Null. Es ist bekannt, dass die Zahlen $-2a^4b^3c^2$ und $3a^3b^5c^{-4}$ dasselbe Vorzeichen haben. Welche der folgenden Aussagen ist sicher richtig?

(A) $ab > 0$ (B) $b < 0$ (C) $c > 0$ (D) $bc > 0$ (E) $a < 0$



13. Wir betrachten den Wasserzähler, und sehen, dass die Ziffern in der Anzeige alle verschieden sind. Wie viel Wasser wird verbraucht, bis dieser Fall zum nächsten Mal eintritt?

(A) 0,006 m³ (B) 0,034 m³ (C) 0,086 m³ (D) 0,137 m³ (E) 1,048 m³

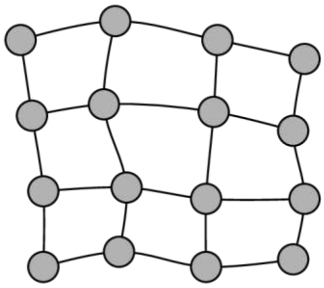


14. Das abgebildete Quadrat ist in zwei Quadrate und zwei Rechtecke geteilt. Die Eckpunkte des gefärbten Vierecks mit dem Flächeninhalt 3 sind jeweils die Mittelpunkte der Seiten der kleinen Quadrate. Welchen Flächeninhalt hat der nicht gefärbte Teil des großen Quadrats?

(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21 (E) 24

15. Was ist der größte gemeinsame Teiler von $2^{2021} + 2^{2022}$ und $3^{2021} + 3^{2022}$?

(A) 2^{2021} (B) 1 (C) 2 (D) 6 (E) 12

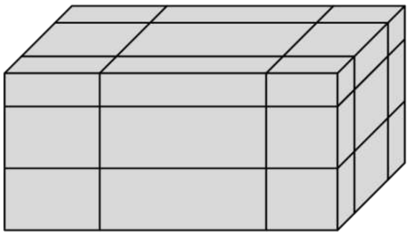


16. In der Figur sehen wir eine Karte mit 16 Städten, die durch Straßen verbunden sind. Die Regierung plant in einigen Städten Kraftwerke zu bauen. Jedes Kraftwerk kann ausreichend Strom für die Stadt, in der es steht, erzeugen, sowie für ihre unmittelbaren Nachbarstädte (also Städte, die über eine direkte Verbindungsstraße zu erreichen sind). Wie viele Kraftwerke müssen mindestens gebaut werden?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

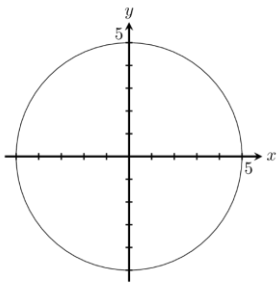
17. In einem Turnier mit 8 Teilnehmerinnen werden die Spielerinnen in der ersten Runde zufällig in vier Paare gelost, und die Gewinnerin jeder Begegnung steigt in die zweite Runde auf. In der zweiten Runde gibt es zwei Spiele, und die beiden Siegerinnen bestreiten das Finale. Anita und Martina sind die beiden besten Spielerinnen und werden gegen alle anderen gewinnen; falls sie gegeneinander spielen müssen, gewinnt Anita. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Martina im Finale spielt?

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$ (E) $\frac{4}{7}$



18. Ein Quader mit dem Oberflächeninhalt *X* wird wie abgebildet mit sechs Ebenen, die parallel zu den Seitenflächen liegen, geschnitten. Was ist der gesamte Oberflächeninhalt aller 27 entstehenden Teile?

(A) *X* (B) 2*X* (C) 3*X* (D) 4*X* (E) Es kommt auf die Position der Ebenen an.



19. Das arithmetische Mittel von fünf Zahlen ist 24. Das Mittel der kleinsten drei Zahlen ist 19, und das der größten drei ist 28. Was ist der Median der fünf Zahlen?

(A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24

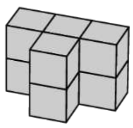
20. Ein Kreis mit dem Mittelpunkt (0/0) hat den Radius 5. Bei wie vielen Punkten auf der Kreislinie sind beide Koordinaten ganzzahlig?

(A) 5 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

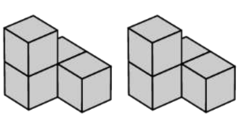
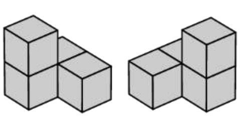
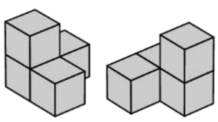
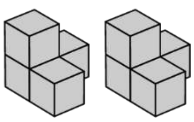
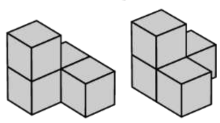
- 5 Punkte Beispiele -

21. Die Eckpunkte eines 20-Ecks sind so mit den Zahlen von 1 bis 20 nummeriert, dass die Zahlen in benachbarten Eckpunkten sich immer um entweder 1 oder 2 unterscheiden. Die Seiten des 20-Ecks, deren Endpunkte mit Zahlen beschriftet sind, die sich nur um 1 unterscheiden, sind rot gefärbt. Wie viele rote Seiten hat das 20-Eck?

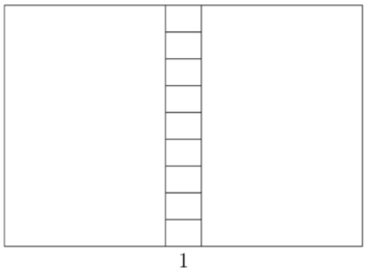
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 10



22. Welche zwei Bausteine kann man so zusammenfügen, dass das abgebildete Objekt entsteht?

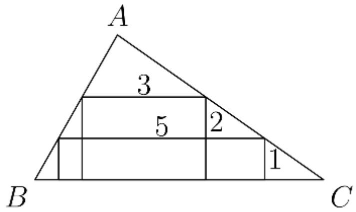
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

23. Ein Rechteck ist wie abgebildet in 11 kleinere Rechtecke unterteilt.
Alle 11 Teilrechtecke sind zum Ausgangsrechteck ähnlich.
Die kleinsten Rechtecke sind gleich wie das Ausgangsrechteck orientiert (siehe Abbildung). Die untere Seite des kleinsten Rechtecks hat die Länge 1.
Wie groß ist der Umfang des großen Rechtecks?



(A) 20 (B) 24 (C) 27 (D) 30 (E) 36

24. Zwei Rechtecke werden wie abgebildet in einem Dreieck eingeschrieben.
Die Rechtecke haben die Maße 1×5 bzw. 2×3.
Wie lang ist die Höhe des Dreiecks in A?

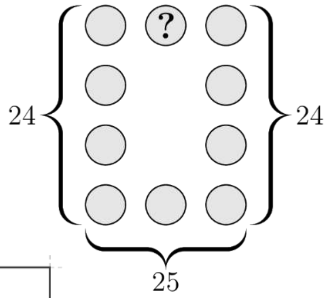


(A) 3 (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{6}{5}$ (E) eine andere Zahl

25. Wie viele dreiziffrige Zahlen gibt es, die gleich dem Fünffachen des Produkts ihrer Ziffern sind?

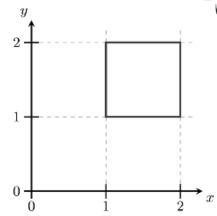
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

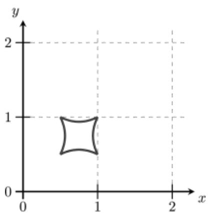
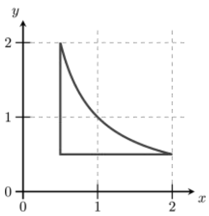
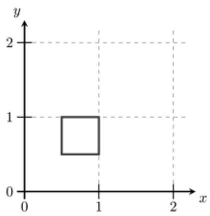
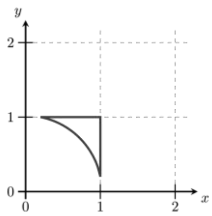
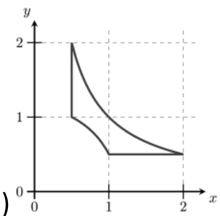
26. Die Zahlen 1 bis 10 wurden auf die zehn Kreise im gegebenen Muster verteilt. Die Summe der vier Zahlen in der linken und rechten Spalte ist nun jeweils 24 und die Summe der drei Zahlen in der unteren Reihe ist nun 25. Welche Zahl steht im Kreis mit dem Fragezeichen?



(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) eine andere Zahl

27. Ein Quadrat liegt wie abgebildet in einem Koordinatensystem. Jeder Punkt $(x|y)$ des Quadrats wird gelöscht und durch den Punkt $\left(\frac{1}{x}|\frac{1}{y}\right)$ ersetzt.
Welche Figur entsteht dadurch?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

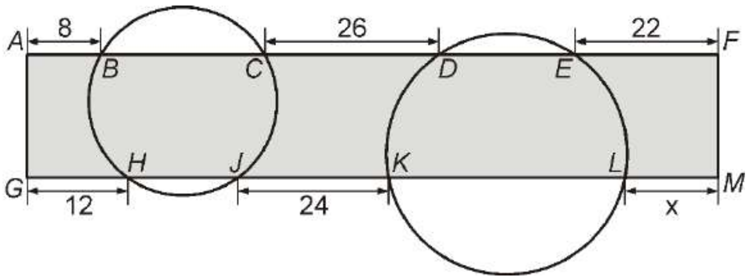
28. Es sei N eine positive ganze Zahl. Wie viele ganze Zahlen liegen zwischen $\sqrt{N^2+N+1}$ und $\sqrt{9N^2+N+1}$?

(A) $N+1$ (B) $2N-1$ (C) $2N$ (D) $2N+1$ (E) $3N$

29. In einer Folge $\langle a_n \rangle$ gilt $0 < a_1 < 1$. Für alle $n \geq 1$ gilt $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$ und $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$.
Wir wissen, dass $a_7 = 2$ gilt. Welchen Wert hat a_2?

(A) a_1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

30. Zwei Kreise schneiden wie in der Abbildung zu sehen ein Rechteck *AFMG*. Die außerhalb der Kreise liegenden Streckenteile auf den langen Rechteckseiten haben die Längen *AB* = 8, *CD* = 26, *EF* = 22, *GH* = 12 und *JK* = 24.
Wie groß ist die Länge *x* der Strecke *LM*?



(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2022
17. 3. 2022

Level: Student, Grades 11–13

Full name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points
each correct answer to questions 1. – 10.: 3 points
each correct answer to questions 11. – 20.: 4 points
each correct answer to questions 21. – 30.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

Mit meiner Unterschrift gebe ich das Einverständnis, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

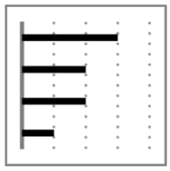
______________________ ______________________
Ort, Datum Unterschrift

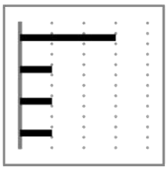
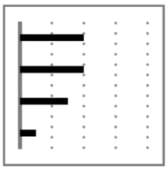
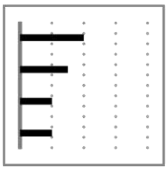
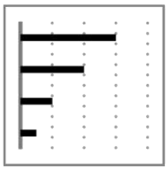
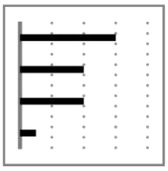
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2022
Level Student (Schulstufe 11, 12 and 13)
Austria – 18. 3. 2021

- 3 Point Examples -

1. Martin‘s smartphone displays the diagram on the right. It shows how long he has worked with four different apps in the previous week. The apps are sorted from top to bottom according to the amount of time they have been used. This week he has spent only half the amount of time using two of the apps and the same amount of time as last week using the other two apps.
Which of the following pictures **cannot** be the diagram for the current week?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. How many positive three-digit numbers are divisible by 13?
(A) 68 (B) 69 (C) 70 (D) 76 (E) 77

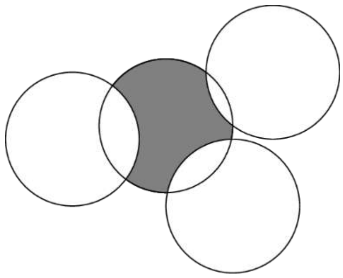
3. Bella is older than Charly and younger than Lily. Which two can be the same age if Teddy is older than Bella?
(A) Charly and Teddy (B) Teddy and Lily (C) Lily and Charly
(D) Bella and Lily (E) Teddy and Bella

4. Which one of the following numbers is **not** divisible by its own digit sum?
(A) 2022 (B) 2023 (C) 2024 (D) 2025 (E) 2027

5. 5^8 pencils are distributed evenly among 25 empty boxes. How many pencils are in each box?
(A) 25^3 (B) 25^2 (C) 5^3 (D) 5^2 (E) 5

6. The product of the digits of a ten-digit number is 15. How big is the sum of the digits of this number?
(A) 8 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 20

7. Four circles with radius 1 intersect each other as seen in the diagram. What is the perimeter of the grey area?
(A) π (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) a number between $\frac{3\pi}{2}$ and 2π (D) 2π (E) π^2



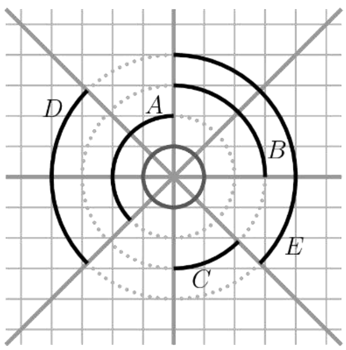
8. All integers from 2 to 2022 which can be written using only the digits 0 and 2 are written in ascending order in a list.
Which number is the middle number on that list?
(A) 200 (B) 220 (C) 222 (D) 2000 (E) 2002

9. How many real solutions does the equation $(x-2)^2+(x+2)^2=0$ have?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

10. The points *A, B, C* and *D* are marked on a straight line in this order as shown in the diagram.
We know that *A* is 12 cm from *C* and that *B* is 18 cm from *D*.
How far apart from each other are the midpoints of the line segments *AB* and *CD* ?
(A) 6 cm (B) 9 cm (C) 12 cm (D) 13 cm (E) 15 cm

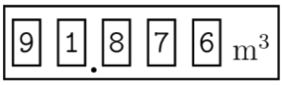
4 Point Examples -

11. Four straight lines that intersect in one single point form eight equal angles (see diagram). Which one of the black arcs has the same length as the circumference of the little (grey) circle?
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E



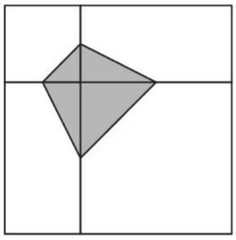
12. a, b and c are real numbers not equal to zero. It is known that the numbers $-2a^4b^3c^2$ and $3a^3b^5c^{-4}$ have the same sign. Which of the following statements is definitely correct?

(A) $ab > 0$ (B) $b < 0$ (C) $c > 0$ (D) $bc > 0$ (E) $a < 0$



13. We check the water meter and see that all digits on the display are different. What is the minimum amount of water that has to be used before this happens again?

(A) 0.006 m³ (B) 0.034 m³ (C) 0.086 m³ (D) 0.137 m³ (E) 1.048 m³

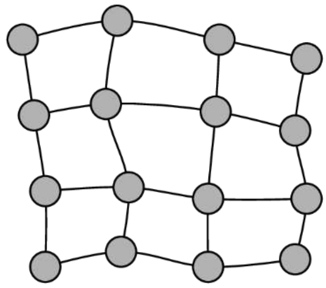


14. The square pictured, is split into two squares and two rectangles. The vertices of the shaded quadrilateral with area 3 are the midpoints of the sides of the smaller squares. What is the area of the non-shaded part of the big square?

(A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21 (E) 24

15. What is the largest common divisor of $2^{2021} + 2^{2022}$ and $3^{2021} + 3^{2022}$?

(A) 2^{2021} (B) 1 (C) 2 (D) 6 (E) 12

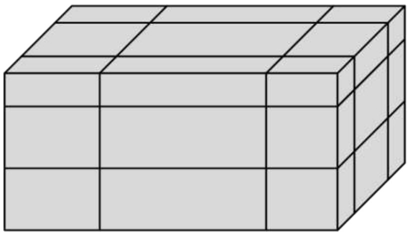


16. The diagram shows a map with 16 towns which are connected via roads.
The government is planning to build power plants in some towns. Each power plant can generate enough electricity for the town in which it stands as well as for its immediate neighbouring towns (i.e. towns that can be reached via a direct connecting road).
What is the minimum number of power plants that have to be built?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

17. In a tournament with 8 participants the players are randomly paired up in four teams for the first round and the winner of each encounter then proceeds to the second round. There are two games in the second round and the two winners then play the final. Anita and Martina are the two best players and will win against all others; in case they have to play against each other, Anita will win. How big is the chance that Martina will get to the final?

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$ (E) $\frac{4}{7}$

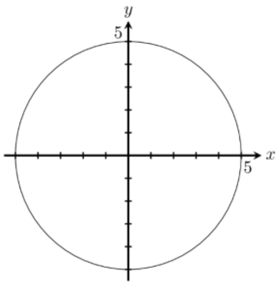


18. A cuboid with surface area *X* is cut up along six planes parallel to the sides (see diagram). What is the total surface area of all 27 thus created solids?

(A) *X* (B) 2*X* (C) 3*X* (D) 4*X* (E) It depends on the position of the planes.

19. The arithmetic mean of five numbers is 24. The mean of the three smallest numbers is 19 and that of the three biggest is 28. What is the median of the five numbers?

(A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24



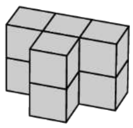
20. A circle with midpoint (0|0) has a radius of 5.
How many points are there on the circumference where both co-ordinates are integers?

(A) 5 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 20

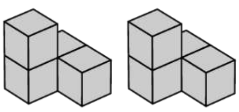
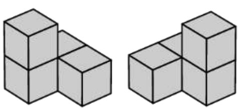
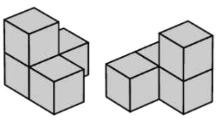
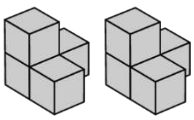
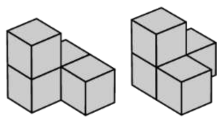
- 5 Point Examples -

21. The vertices of a 20-gon are labelled using the numbers 1 to 20 so that adjacent vertices always differ by 1 or 2. The sides of the 20-gon whose vertices are labelled with numbers that only differ by 1 are drawn in red. How many red sides does the 20-gon have?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 10

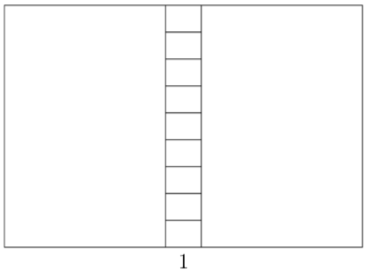


22. Which two building blocks can be joined together so that the object shown is created?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

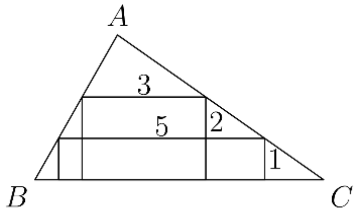
23. A rectangle is split into 11 smaller rectangles as shown.
All 11 small rectangles are similar to the initial rectangle.
The smallest rectangles are aligned like the original rectangle (see diagram).
The lower sides of the smallest rectangles have length 1.
How big is the perimeter of the big rectangle?

(A) 20 (B) 24 (C) 27 (D) 30 (E) 36



24. Two rectangles are inscribed into a triangle as shown in the diagram.
The dimensions of the rectangles are 1×5 and 2×3 respectively.
How big is the height of the triangle in *A*?

(A) 3 (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{6}{5}$ (E) another number

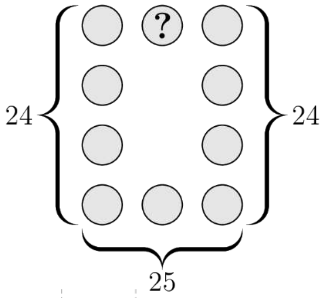


25. How many three-digit numbers are there that are equal to five times the product of their digits?

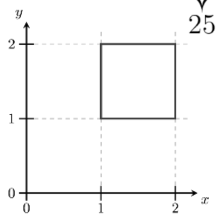
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

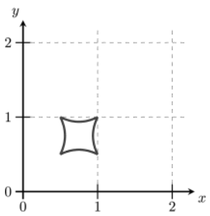
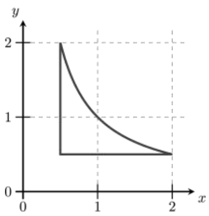
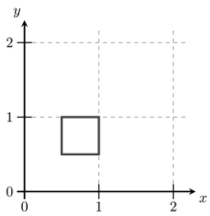
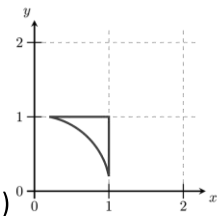
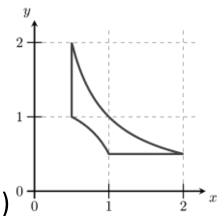
26. The numbers 1 to 10 were written into the ten circles in the pattern shown in the picture. The sum of the four numbers in the left and the right column is 24 each and the sum of the three numbers in the bottom row is 25. Which number is in the circle with the question mark?

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) another number



27. A square is placed in a co-ordinate system as shown. Each point $(x|y)$ of the square is deleted and replaced by the point $\left(\frac{1}{x}|\frac{1}{y}\right)$.
Which diagram shows the resulting shape?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

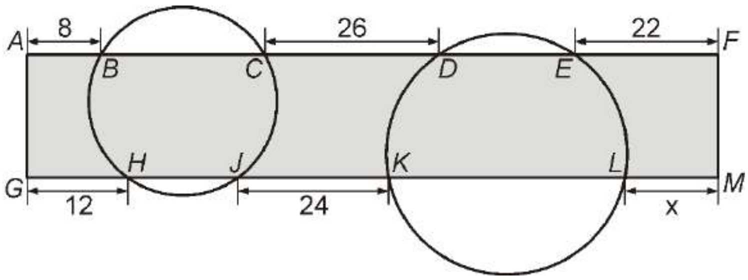
28. Let N be a positive integer. How many integers are between $\sqrt{N^2+N+1}$ and $\sqrt{9N^2+N+1}$?

(A) $N+1$ (B) $2N-1$ (C) $2N$ (D) $2N+1$ (E) $3N$

29. A sequence $\langle a_n \rangle$ has $0 < a_1 < 1$. For all $n \geq 1$ we know that $a_{2n} = a_2 \cdot a_n + 1$ and $a_{2n+1} = a_2 \cdot a_n - 2$.
We know that $a_7 = 2$. What is the value of a_2?

(A) a_1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

30. Two circles intersect a rectangle *AFMG* as shown in the diagram. The line segments along the long side of the rectangle that are outside the circles have length *AB* = 8, *CD* = 26, *EF* = 22, *GH* = 12 and *JK* = 24.
How long is the length *x* of the line segment *LM*?



(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

Känguru 2022 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Es gibt hier mehrere Möglichkeiten, welches die beiden Apps sind, die er nur halb so lang verwendet hat. Wir bezeichnen die Apps von oben nach unten als „erste“ bis „vierte“ und nehmen an, jede der strichlierten Linien steht für eine Stunde, d. h. in der Vorwoche wurden die Apps 3, 2, 2 bzw. 1 Stunde verwendet.

halb so lang verwendete Apps	**neue Verwendungdauern**	**das entspricht Diagramm**
erste und zweite	1,5 1 2 1	(C)
erste und dritte	1,5 2 1 1	(C)
erste und vierte	1,5 2 2 0,5	(B)
zweite und dritte	3 1 1 1	(A)
zweite und vierte	3 1 2 0,5	(D)
dritte und vierte	3 2 1 0,5	(D)

Somit kann **Diagramm (E)** nicht auftreten.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

In diesem Fall kann man **Diagramm (E)** auch ganz schnell direkt ausschließen: Die erste, zweite und dritte App sind hier gleich lang verwendet wie in der ersten Woche, nur die vierte halb so lang.

Würde man mathematisch einen ganz präzisen Beweis führen wollen, dass das nicht möglich ist (der vielleicht auch bei 400 Apps funktioniert, von denen die ersten 399 Zeilen identisch sind), müsste man jetzt noch argumentieren, dass Zeilen beim Halbieren immer nur nach unten rutschen, und deswegen wenn die ersten k Zeilen identisch sind, es sich auch um dieselben k Apps wie in der Vorwoche handeln muss (wobei wir Apps mit derselben Dauer als nicht unterscheidbar betrachten, es uns also egal ist, ob die erste oder zweite 2-Stunden-App halbiert wurde).

Mit dieser Beobachtung im Gepäck kann man nun aber umgekehrt von einem Diagramm leicht auf die beiden halbierten Apps zurückschließen, ohne alle Zweierkombinationen halbierter Apps auszuprobieren. Wenn wir zum Beispiel Diagramm (A) betrachten, ist die erste Zeile identisch zur Vorwoche, also wurde die 3-Stunden-App nicht halbiert. Die zweite Zeile ist verschieden, also wurden alle 2-Stunden-Apps halbiert, und wir sind fertig. Mit dieser Methode könnte man auch aus zwei Listen mit je 400 Apps ganz schnell herausfinden, welche zwei nur halb so lang verwendet wurden.

All das ist für diese Aufgabe nicht nötig, soll aber eine kleine Anregung und Einladung sein, dass man selbst aus einer banal erscheinenden Aufgabe schnell einmal ein paar interessante Herangehensweisen ableiten kann. Die Aufgabe ist damit ein guter erster Einstieg in mathematische Beweisführung.

2. Es gilt $1000 : 13 \approx 76.9$ und $100 : 13 \approx 7.69$, also sind $76 - 7 = \mathbf{69}$ dreiziffrige Zahlen durch 13 teilbar. (Die kleinste ist $8 \cdot 13 = 104$, die größte $76 \cdot 13 = 988$.)

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Falls man ein paar schöne Zahlen auswendig weiß, braucht man die aufwändige Division $1000 : 13 \approx 76.9$ nicht per Hand durchführen, sondern erinnert sich vielleicht an $77 \cdot 13 = 1001$. Daraus folgt ebenfalls sofort, dass es 76 Zahlen kleiner als 1000 gibt, die durch 13 teilbar sind.

3. Wir wissen aus den Angaben von allen Personen, ob sie älter oder jünger als Bella sind: Teddy und Lily sind älter als sie, Charly ist jünger. Also können nur **Teddy und Lily** gleich alt sein.

4. Es gilt $2022 : 6 = 337$, $2023 : 7 = 289$, $2024 : 8 = 253$, $2025 : 9 = 225$, $\mathbf{2027 : 11 \approx 184{,}3}$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Statt direkt zu dividieren, kann man sich die eine oder andere Teilbarkeitsregel zu Nutze machen:

Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist. 2022 ist gerade und somit durch 2 teilbar. Außerdem ist jede Zahl genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist, und die Ziffernsumme von 2022 ist 6, also durch 3 teilbar. (Dadurch, dass der Teiler laut Angabe bereits genau die Ziffernsumme ist, ergibt sich die Teilbarkeit bei dieser Regel von selbst.)

Dasselbe gilt für die Teilbarkeitsregel durch 9: Jede Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar ist, also ist $2025 : 9$ sicher ganzzahlig.

Für die Teilbarkeit durch 8 können wir nutzen, dass, wenn a und b beide durch c teilbar sind, dann auch $a + b$ durch c teilbar ist. Für 2000 und 24 ist jeweils ganz leicht nachzurechnen, dass sie durch 8 teilbar sind, also ist auch $2000 + 24 = 2024$ durch 8 teilbar.

Für die Teilbarkeit durch 11 betrachten wir die „alternierende Quersumme“, also eine Ziffernsumme, wo wir vor jede zweite Ziffer ein Minus schreiben. Für 2027 erhalten wir so $2 - 0 + 2 - 7 = -3$, was nicht durch 11 teilbar ist, und somit auch 2027 nicht.

Einzig die Teilbarkeitsregeln für 7 sind alle etwas komplizierter zu merken. Die „alternierende 3er-Quersumme“ erählt man, indem man 2023 aufspaltet in 2 und $023 = 23$ und mit $2-23 = -21$ eine durch 7 teilbare Zahl erhält. Alternativ ergibt die Regel „(alles bis auf letzte zwei Ziffern) $\cdot 2 +$ (letzte zwei Ziffern)“ $20 \cdot 2 + 23 = 63$, was wiederum durch 7 teilbar ist.

5. $5^8 : 25 = 5^8 : 5^2 = 5^{8-2} = 5^6 = 5^{2\cdot 3} = (5^2)^3 = \mathbf{25^3}$

6. Wir wissen, dass $15 = 3 \cdot 5$. Unter den 10 Ziffern müssen also die Primfaktoren 3 und 5 jeweils genau ein Mal vorkommen, und keine anderen Primfaktoren dürfen auftreten. Keine Ziffer kann gleichzeitig durch 3 und 5 teilbar sein, da die kleinste solche Zahl 15 keine Ziffer im Zehnersystem ist. Also muss es eine Ziffer 3 und eine Ziffer 5 in der Zahl geben. Alle acht anderen Ziffern dürfen keine Primfaktoren enthalten, müssen also gleich 1 sein. Das ergibt eine Ziffernsumme von $3 + 5 + 8 \cdot 1 = \mathbf{16}$.

7. Wenn zwei gleich große Kreise einander schneiden, entsteht ein symmetrisches Bild (mit der Verbindungsgeraden der beiden Schnittpunkte als Symmetrieachse), also sind die beiden Kreisbögen, die den Überlappungsbereich einschließen, genau gleich lang. Der Umfang des grauen Bereichs ist daher genau gleich lang wie der Umfang des mittleren Kreises, also $2r\pi = \mathbf{2\pi}$ wegen $r = 1$.

8. 2, 20, 22, 200, 202, **220**, 222, 2000, 2002, 2020, 2022

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Ein bisschen strategischer, als alles aufzuschreiben (vor allem bei großen Zahlen) ist folgende Herangehensweise, die gleichzeitig einen kleinen Ausflug in das Fachgebiet der Informatik darstellt:

   Wir bestimmen zunächst die Anzahl der Zahlen mit k Ziffern, die man nur mit den Ziffern 0 und 2 schreiben kann. An der ersten Stelle muss 2 stehen, bei allen weiteren hat man die freie Wahl zwischen zwei Optionen. Folglich gibt es 2^{k-1} solche Zahlen.

   Es gibt also $2^{1-1} = 1$ einstellige solche Zahlen (nämlich nur die Zahl 2), $2^{2-1} = 2$ zweistellige, $2^{3-1} = 4$ dreistellige und $2^{4-1} = 8$ vierstellige.

   Von den vierstelligen interessieren uns nur jene bis 2022; das sind 4 Stück, da die erste Stelle 2 sein muss, die zweite 0, und die restlichen beiden jeweils frei zwischen zwei Optionen gewählt werden können.

   Insgesamt hat unsere Liste daher $1+2+4+4 = 11$ Elemente, das mittlere ist also das sechste. Da $1+2 < 6$ ist und $1 + 2 + 4 > 6$, suchen wir eine dreistellige Zahl, und zwar wegen $6 - (1 + 2) = 3$ die dritte solche Zahl.

   Nun können wir recht leicht die ersten drei dreistelligen Zahlen aufschreiben. Man könnte aber auch so überlegen: Die erste solche Zahl endet mit 00, die nächste mit 02, die dritte mit 20, die vierte mit 22. Das ist ähnlich zu den Zahlen 0 bis 3 in Binärdarstellung: $0 = (00)_2$, $1 = (01)_2$, $2 = (10)_2$, $3 = (11)_2$. Der Grund ist, dass die Rechenregeln um von einer Zahl auf die nächste zu kommen, gleichlautend sind: Falls die letzte Stelle 0 ist, ersetze sie durch 2 bzw. 1. Andernfalls, also falls die letzte Stelle bereits 2 bzw. 1 ist, „addiere mit Übertrag“, also setze von hinten beginnend alle Stellen, die 2 bzw. 1 sind, auf 0 und setze die erste Stelle von rechts, die 0 war, auf 2 bzw. 1. (Das ist dasselbe, was im Zehnersystem passiert, wenn man eine Zahl, die bereits auf einige Neuner endet, um 1 erhöht: Die Neuner werden alle zu Nullen und die nächste Stelle wird um 1 erhöht, zB $731999 + 1 = 732000$.) So ist die nächste Zahl nach 2020222 gleich 2022000, und $87 + 1 = (1010111)_2 + 1 = (1011000)_2 = 88$.

   Auf diese Art können wir nun zum Beispiel auch berechnen, was die mittlere Zahl in der Liste aller solchen Zahlen von 2 bis 20002222 ist: Von den achtstelligen Zahlen sind die ersten $2^4 = 16$ in der Liste, also haben wir insgesamt $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 16 = 143$ Zahlen in der Liste. Die mittlere ist die 72-te Zahl. Wegen $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 < 72$ und $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 > 72$ suchen wir eine sechsstellige Zahl, und zwar wegen $72 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 9$ die neunte solche Zahl. Wir erinnern uns, dass wir in der Binärdarstellung mit 0 zu zählen beginnen mussten (weil 200000 die erste solche Zahl ist), also brauchen wir das Äquivalent zu $8 = (1000)_2$. Die gesuchte Zahl für diese ähnliche Aufgabenstellung mit größeren Zahlen wäre also 202000.

   Die Eleganz dieser Lösung ist, dass der Aufwand auch für viel größere Zahlen fast konstant bleibt: Wir berechnen die Anzahl der Zahlen in der Liste als einfache Summe von Zweierpotenzen, halbieren die erhaltene Anzahl, schauen in der Summe nach, wieviele Stellen die gesuchte Zahl haben muss, und finden sie dann über die Umwandlung in Binärdarstellung. Im Gegensatz dazu wird das Aufschreiben der gesamten Liste für große Zahlen sehr schnell sehr aufwändig. In der Informatik spielen sowohl Binärzahlen als auch diese „Skalierbarkeit“, also um wieviel der Rechenaufwand einer Methode bei großen Zahlen größer wird als bei kleinen, eine sehr große Rolle.

9. Wir wissen, dass ein Quadrat einer reellen Zahl nie negativ sein kann, und für alle Zahlen außer 0 sogar größer als 0 sein muss. Also ist $(x-2)^2$ nur dann 0, wenn $x = 2$ gilt, und sonst immer positiv. Ebenso ist $(x+2)^2$ nur dann 0, wenn $x = -2$ gilt, und sonst immer positiv. Damit die Summe 0 ist, müssten beide Terme gleichzeitig 0 sein, was aber nicht möglich ist, da x nicht gleichzeitig 2 und -2 sein kann. Also gibt es **keine reellen Lösungen**.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Wir können die Gleichung auch vereinfachen zu $(x-2)^2+(x+2)^2 = x^2-4x+4+x^2+4x+4 = 2x^2+8 = 0$, also nach Division durch 2 zu $x^2+4 = 0$ bzw. $x^2 = -4$ und somit $x_{1,2} = \sqrt{-4} = \pm i$, womit wir lediglich zwei Lösungen im Raum der komplexen Zahlen erhalten.

10. Wenn eine solche Aufgabe bei einem Känguru-Wettbewerb gestellt wird, und keine Antwortoption „Es hängt von der Lage der Punkte ab“ vorkommt, können wir immer eine für uns bequeme Lage der Punkte wählen. So können wir zum Beispiel A und B zusammenfallen lassen, oder B genau als Mittelpunkt der Strecke AC annehmen. In beiden Fällen rechnen wir ganz leicht aus, dass die Mittelpunkte **15 cm** voneinander entfernt liegen.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Will man nun als mathematisch exakter Mensch zeigen, dass das auch bei allgemeinen Lagen der Fall ist, gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine davon besteht in einem Stetigkeitsargument. Wir betrachten wieder zunächsten den Fall, dass A und B zusammenfallen und rechnen die Distanz von 15 cm aus. Wenn wir nun B langsam in Richtung C schieben (womit D sich um dieselbe Entfernung nach rechts verschiebt), sehen wir, dass der Mittelpunkt von A und B gleich schnell wandert wie der Mittelpunkt von C und D und die Distanz daher konstant bleibt.

    Dass die Mittelpunkte gleich schnell wandern, ist leicht gezeigt, wenn wir die vier Punkte als Zahlen auf dem Zahlenstrahl betrachten. Dann ist der Mittelpunkt $M_{AB} = (A+B)/2$ und $M_{CD} = (C+D)/2$. Wandern B und D um x nach rechts, wodurch wir Punkte B' bzw. D' erhalten, gilt $M_{AB'} = (A+B+x)/2$ und $M_{CD'} = (C+D+x)/2$, also haben sich beide Punkte um $x/2$ verschoben. Neben direkter Berechnung lässt sich dieser Zusammenhang („der Mittelpunkt wandert halb so schnell wie der verschobene Endpunkt, wenn der andere Endpunkt fix ist“) auch auf viele andere Arten zeigen, zum Beispiel mittels Strahlensatz.

    Wenn einem das Stetigkeitsargument und das willkürliche Annehmen irgendwelcher bequemen Lagen ein wenig unheimlich ist – prinzipiell eine weise Entscheidung, weil man bei solchen Argumenten auch schnell einmal etwas übersehen kann –, kann man auch alles einfach direkt ausrechnen.

    Es gilt $M_{CD} - M_{AB} = (C+D)/2-(A+B)/2 = (C+D-A-B)/2 = (C-A+D-B)/2 = (12+18)/2 = 30/2 =$ **15**.

11. Wir rufen uns in Erinnerung, dass der Umfang linear mit dem Durchmesser wächst, d. h. doppelter Umfang bei doppeltem Durchmesser, dreifacher Umfang bei dreifachem Durchmesser, et cetera.

    Ein Kreisbogen mit gleicher Länge wie der Umfang des kleinen grauen Kreises müsste bei doppeltem Durchmesser also die Form eines Halbkreises haben, bei dreifachem Durchmesser ein Drittel eines Kreises sein, und bei vierfachem Durchmesser ein Viertelkreis sein. Diese Bedingung erfüllt nur **Kreisbogen D**.

12. Die Hochzahlen von c sind in beiden Termen gerade, somit sind c^2 und $c^{-4} = 1/c^4 = \left(\frac{1}{c^2}\right)^2$ als Quadrate reeller Zahlen ungleich 0 beide positiv. (Generell ist jeder Term mit einer geraden Hochzahl das Quadrat einer reellen Zahl und damit größer oder gleich 0.)

    Die Hochzahlen von b sind in beiden Termen ungerade, somit haben b^3 und b^5 jedenfalls dasselbe Vorzeichen – falls b positiv ist, sind beide positiv, falls b negativ ist, sind beide negativ. (Auch für c hätte man direkt argumentieren können, dass beide Hochzahlen die gleiche „Parität“ (gerade oder ungerade) haben, und somit c^2 und c^{-4} jedenfalls dasselbe Vorzeichen haben müssen. Die zusätzliche Information, dass sie positiv sind, ist für diese Aufgabe gar nicht nötig.)

    Die Hochzahlen von a haben verschiedene Parität. So ist a^4 jedenfalls positiv, aber a^3 hat dasselbe Vorzeichen wie a.

Zuletzt haben -2 und 3 verschiedene Vorzeichen. Damit $-2a^4b^3c^2$ und $3a^3b^5c^{-4}$ wie angegeben dasselbe Vorzeichen haben, muss also $\mathbf{a < 0}$ sein.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Mit etwas Übung kann man diese Information auch ganz schnell zusammenfassen: Wenn eine Zahl in den beiden Termen zwei Hochzahlen mit derselben Parität hat, trägt sie da und dort sicher dasselbe Vorzeichen zum Produkt bei, ist für den Vergleich der Vorzeichen der beiden Terme also irrelevant. Haben die Hochzahlen dagegen verschiedene Parität, dann hat der Ausdruck genau dann in den beiden Termen verschiedene Vorzeichen, wenn die Zahl negativ ist.

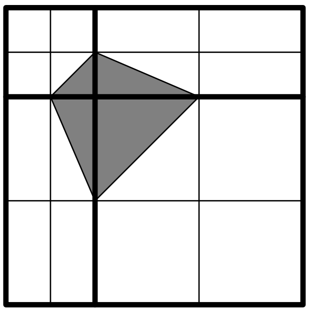
Somit sind die Vorzeichen von b und c jedenfalls irrelevant, während die passende Wahl des Vorzeichens von a genutzt werden kann, um die verschiedenen Vorzeichen von -2 und 3 auszugleichen.

13. Wir schreiben alle Zahlen der Reihe nach auf. Dabei werden mit „...“ Bereiche übersprungen, die jeweils wegen demselben Problem ausscheiden, weswegen auch vor und nach jedem solchen Bereich jeweils nur das durchgehend auftretende Problem gekennzeichnet ist:

- 91,876
- 91,877
- 91,878
- 91,879
- 91,880
- ...
- 91,889
- 91,890
- ...
- 91,899
- 91,900
- ...
- 91,999
- 92,000
- ...
- 92,009
- 92,010
- 92,011
- 92,012
- 92,013

Wir erhalten also $92{,}013 - 91{,}876 = \mathbf{0{,}137}$.

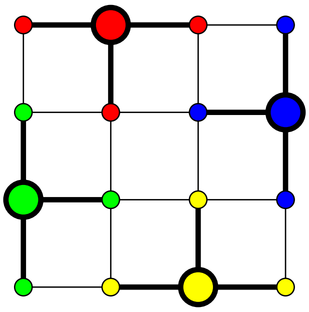
14. Hier gäbe es viele schöne Lösungsansätze, beispielsweise durch eine Streckung des Trapezes um seinen Diagonalenschnittpunkt um Faktor 2. Am elegantesten ist es jedoch, wenn man einige achsenparallele Linien dazueinzeichnet:



Nun sieht man ganz schnell, dass in jedem der vier Teile die graue Fläche genau ein Achtel ausmacht (da sie von einem von vier identischen Rechtecken genau die Hälfte ist). Auch insgesamt macht die graue Fläche daher ein Achtel aus, und der nichtgefärbte Teil entsprechend sieben Achtel, also das Siebenfache, also $7 \cdot 3 = \mathbf{21}$.

15. Durch Herausheben erhalten wir $2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2021} \cdot (1+2) = 2^{2021} \cdot 3^1$ und $3^{2021} + 3^{2022} = 3^{2021} \cdot (1+3) = 3^{2021} \cdot 4 = 2^2 \cdot 3^{2021}$. Der größte gemeinsame Teiler enthält daher zwei Mal den Primfaktor 2 (limitiert dadurch, dass die zweite Zahl nicht mehr Zweier enthält) und ein Mal den Primfaktor 3 (limitiert durch die erste Zahl), ist also $2^2 \cdot 3 = \mathbf{12}$.

16. Eine mögliche Anordnung mit **4 Kraftwerken** ist wie folgt:

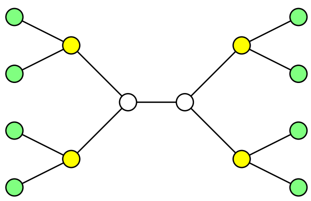


Da jedes Kraftwerk maximal 5 Städte versorgen kann, könnte man mit 3 Kraftwerken höchstens 15 der 16 Städte versorgen, also gibt es keine bessere Lösung.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wie kommt man auf diese Lösung? Beispielsweise durch eine Fallunterscheidung danach, wie die Stadt links oben versorgt wird. Abzüglich Rotationen und Spiegelungen gibt es dafür eigentlich nur zwei Optionen: Entweder durch ein Kraftwerk in der Stadt selbst, oder durch ein Kraftwerk in der Stadt rechts daneben. Letztes führt beim Weiterbasteln ganz schnell auf diese Konfiguration, beispielsweise indem man sich als nächstes (nach Platzierung des roten Kraftwerks) überlegt, wer nun die Stadt ganz links in der zweiten Reihe versorgen soll. Von den vier Optionen (darüber, darunter, rechts daneben oder in der Stadt selbst) führt nur die vorgeschlagene Platzierung des grünen Kraftwerks zu keinen doppelt versorgten Städten.

17. Hier sehen wir einen Spielbaum mit 8 Startplätzen (grün), 4 Plätzen in der zweiten Runde (gelb) und 2 Plätzen im Finale (weiß):



Ob Anita und Martina vor dem Finale aufeinander treffen, hängt davon ab, ob sie auf derselben oder verschiedenen Seiten vom Spielbaum starten. Wir können „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ annehmen, dass Anita einen der vier linken Startplätze zugelost bekommt. (Andernfalls spiegeln wir einfach alles.)

Nun stehen für Martina noch 3 Plätze links und 4 Plätze rechts zur Auswahl, die Wahrscheinlichkeit, dass sie nach rechts gelost wird und somit im Finale spielt, beträgt also $\mathbf{\frac{4}{7}}$.

18. Jeder der beiden Schnitte, die parallel zur vorderen Seite sind, trägt zwei Schnittflächen bei, die jeweils gleich groß wie die vordere Seite sind. Ebenso trägt jeder der Schnitte parallel zur rechten Seite zwei Flächen bei, die gleich groß wie die rechte Seite sind, und jeder Schnitt parallel zur oberen Seite zwei Flächen, die gleich groß wie die obere Seite sind.

Insgesamt setzen die Oberflächen der 27 neuen Teile sich daher zusammen aus jeweils sechs Mal der vorderen, rechten und oberen Seite des ursprünglichen Quaders. Die Oberfläche X des ursprünglichen Quaders setzte sich aus jeweils zwei dieser Seiten zusammen, somit ist die neue Oberfläche drei Mal so groß, also **3X**.

19. Seien a, b, c, d, e die fünf Zahlen in aufsteigender Reihenfolge. Wir wenden nun zwei häufig nützliche Tricks an: Zum einen ist die Summe von n Zahlen gleich dem n-fachen ihres arithmetischen Mittels, also $a+b+c+d+e = 5 \cdot 24 = 120$, sowie $a+b+c = 3 \cdot 19 = 57$ und $c+d+e = 3 \cdot 28 = 84$.

    Zum anderen ist $c = (a+b+c)+(c+d+e)-(a+b+c+d+e)$, weil dabei jede Zahl außer c genau ein Mal addiert und ein Mal subtrahiert wird; nur c selbst wird zwei Mal addiert und ein Mal subtrahiert, bleibt daher also übrig.

    Also erhalten wir $c = (a+b+c)+(c+d+e)-(a+b+c+d+e) = 57+84-120 = \mathbf{21}$.

20. Wir erinnern uns an das pythagoreische Tripel $3^2 + 4^2 = 5^2$, womit wir im ersten Quadranten die Punkte $(3, 4)$ und $(4, 3)$ finden. Da die Quadranten alle zueinander symmetrisch sind, finden wir die entsprechenden zwei Punkte auch in den drei anderen Quadranten. Zusammen mit den vier Punkten $(0, \pm 5)$ und $(\pm 5, 0)$ ergibt das **12** solche Punkte.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Der Vollständigkeit halber überprüfen wir noch, ob die beiden anderen in Frage kommenden Punkte im ersten Quadranten mit ganzzahliger x-Koordinate eventuell eine ganzzahlige y-Koordinate haben könnten, erhalten mittels der Kreisformel $x^2 + y^2 = 5^2$ aber $y = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$ bzw. $y = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.

    Im Grunde könnte man das auch viel einfacher erkennen, wenn man den Kreis auf kariertes Papier aufmalt: Der Punkt $(3, 4)$ hat bereits 4 als y-Koordinate, die links davon liegenden Punkte mit x-Koordinaten 1 und 2 müssten also eine ganzzahlige y-Koordinate haben, die größer als 4, aber kleiner als 5 ist.

21. Wir beobachten, dass irgendwo am 20-Eck die Zahl 1 und irgendwo die Zahl 20 stehen muss. Sowohl im als auch gegen den Uhrzeigersinn müssen wir also legal von 1 zu 20 kommen können. Wenn nun auf einer der beiden Seiten zwei aufeinanderfolgende Zahlen verwendet würden (beispielsweise 7 und 8), so stünden diese auf der anderen Seite beide nicht mehr zur Verfügung, und man müsste einen illegalen Sprung der Länge 3 (zum Beispiel von 6 auf 9) machen.

    Folglich muss auf beiden Seiten jeweils jede zweite Zahl verwendet werden. Nun müssen wir nur noch den Bereich rund um den Einser und den Zwanziger betrachten.

    Der Einser muss links und rechts von den beiden Zahlen 2 und 3 umgeben sein, da er nicht zu 4 oder einer noch größeren Zahl benachbart sein darf. Gemäß obiger Überlegung darf auf 3 nicht 4 folgen, also haben wir auf der einen Seite 1, 3, 5, ..., 19, 20 und auf der anderen 1, 2, 4, 6, ..., 18, 20.

    Es gibt also genau **zwei** Seiten, deren Endpunkte mit Zahlen beschriftet sind, die sich nur um 1 unterscheiden, nämlich zwischen 1 und 2 und zwischen 19 und 20.

22. Wenn man in **(A)** den rechten Baustein um 90° nach vorne dreht, kann man ihn auf den linken legen, und das gewünschte Objekt erhalten.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

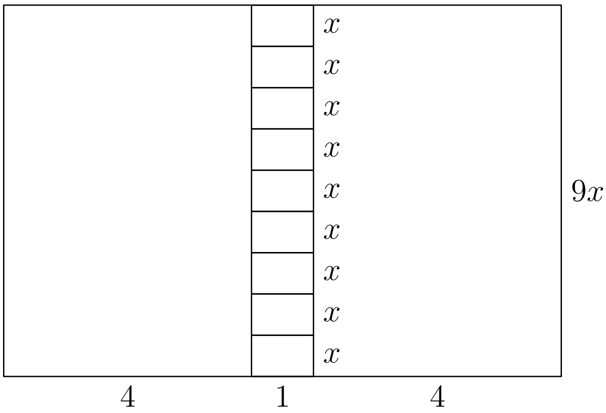
    Um für die anderen zu zeigen, dass das nicht geht, braucht man etwas räumliches Vorstellungsvermögen. Wir bezeichnen jeweils zwei aufeinanderliegende Würfel im gewünschten Objekt als linke, mittlere, rechte und vordere Säule.

    Die Würfel in der linken, rechten und vorderen Säule haben jeweils nur zwei Nachbarn. Der Bauteil, der in (D) gleich doppelt vorkommt, kann daher nur so gelegt werden, dass der Würfel mit drei Nachbarn in der mittleren Säule liegen kommt. Wenn man das tut, sind aber bereits beide Würfel in der mittleren Säule belegt, während in der linken, rechten und vorderen überall noch Würfel fehlen; diese lassen sich nicht mehr direkt verbinden. Damit kann ein solcher Bauteil wie in (D) überhaupt nicht verwendet werden, was (C), (D) und (E) ausschließt.

    In (B) sind die Bauteile bis auf Spiegelung zueinander identisch, das gewünschte Objekt ist spiegelsymmetrisch, und sogar jeder Bauteil zu sich selbst kann so rotiert werden, dass er wieder gleich aussieht. Somit gibt es nur zwei wesentlich verschiedene Arten, die linke Säule mit einem Bauteil komplett zu füllen (nämlich entweder mit den äußeren beiden Würfeln eines Bauteils oder mit den mittleren beiden). Im ersten Fall sieht man schnell, dass man stattdessen den zweiten Teil aus (A) zur Ergänzung benötigen würde, beim zweiten ragt überhaupt ein Würfel aus dem gewünschten Objekt hinaus.

    Der dritte Fall, dass ein Bauteil nur einen der beiden Würfel der linken Säule füllt, kann ebenso schnell ausgeschlossen werden. (Davon abgesehen sind die Bausteine nur zwei Würfel breit, somit kann kein Bauteil die linke und rechte Säule gleichzeitig füllen, also muss jede davon komplett mit Würfeln eines einzelnen Bauteils gefüllt werden.)

23. Sei x die Breite des kleinsten Rechtecks. Dann hat das große Rechteck, dessen Breite sich aus 9 solchen Rechtecken zusammensetzt, eine Breite von $9x$.



Die Breiten des kleinsten und des großen Rechtecks verhalten sich also wie $x : 9x = 1 : 9$, also muss wegen der Ähnlichkeit dasselbe auch für ihre Längen gelten. Somit beträgt die Länge des großen Rechtecks 9 (das Neunfache der Länge 1 des kleinsten Rechtecks).

Da diese Länge sich zusammensetzt aus der Länge 1 des kleinsten Rechtecks und zwei Mal der Breite des mittleren, hat das mittlere eine Breite von 4, und wie zuvor beobachtet eine Länge von $9x$.

Wegen der Ähnlichkeit zwischen kleinstem und mittlerem Rechteck gilt $1 : x = 9x : 4$, also $4 = 9x^2$, also $x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Die Breite des großen Rechtecks beträgt also $9x = 9 \cdot \frac{2}{3} = 6$, und sein Umfang somit $2 \cdot 9 + 2 \cdot 6 = \mathbf{30}$.

24. Wegen des Strahlensatzes verringert die Breite sich mit zunehmender Höhe linear: Jedes Mal, wenn man das Rechteck um 1 höher macht, wird es um 2 schmäler. Ein Rechteck mit Höhe 3 hätte also noch eine Breite von 1, und ein Rechteck mit Höhe $\mathbf{3.5 = \frac{7}{2}}$ hat eine Breite von 0, entspricht also genau der Spitze.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Etwas weniger intuitiv, dafür aber mathematisch präziser, kann man es natürlich auch ausrechnen. Sei h die Höhe des Dreiecks. Das obere kleine Dreieck mit Basis 3 und Höhe $h - 2$ ist ähnlich zum größeren Dreieck mit Basis 5 und Höhe $h - 1$, also gilt $(h - 2) : 3 = (h - 1) : 5$, also $5(h - 2) = 3(h - 1)$ und somit $5h - 10 = 3h - 3$, was schließlich zu $2h = 7$ und somit $h = \frac{7}{2}$ führt.

25. Wir suchen also Zahlen (abc), für die $100a + 10b + c = 5abc$ gilt. Zunächst sehen wir, dass $100a$, $10b$ und $5abc$ alle durch 5 teilbar sind, also muss auch c durch 5 teilbar sein. Die einzigen zwei Ziffern, die das erfüllen, sind 0 und 5; davon können wir 0 aber sofort ausschließen, weil das Produkt der Ziffern sonst Null wäre. Somit ist $c = 5$.

Damit ist die Zahl gleich $5 \cdot a \cdot b \cdot 5 = 25ab$, also ein Vielfaches von 25. Solche Vielfachen enden alle auf 25, 50, 75 oder 00. Davon können wir 50 und 00 sofort ausschließen, weil wir schon festgehalten haben, dass keine Ziffer 0 auftreten darf.

Würde die Zahl auf 25 enden, wäre sie gleich $5 \cdot a \cdot 2 \cdot 5 = 50a$, also ein Vielfaches von 50, und würde damit auf 0 enden, was wir bereits ausgeschlossen haben.

Also sind die letzten beiden Ziffern gleich 75. Somit bleibt $100a + 10 \cdot 7 + 5 = 5 \cdot a \cdot 7 \cdot 5$ zu lösen, vereinfacht $100a + 75 = 175a$ und nach Subtraktion von $100a$ auf beiden Seiten $75 = 75a$. Somit ist eindeutig $a = 1$ und daher 175 die **einzige** Zahl mit der gewünschten Eigenschaft.

26. Die vier linken Zahlen plus die vier rechten Zahlen ergeben in Summe $24 + 24 = 48$, während alle 10 Zahlen zusammen eine Summe von $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$ haben, also ist die Summe der Zahlen oben in der Mitte und unten in der Mitte gleich $55 - 48 = 7$. Es gibt dafür nur die Möglichkeiten $1 + 6$, $2 + 5$ oder $3 + 4$ (jeweils in zwei möglichen Anordnungen).

Nun betrachten wir die drei unteren Zahlen und stellen fest, dass 25 nur um 2 kleiner ist als die Summe der größten drei Zahlen $10 + 9 + 8 = 27$. Selbst, wenn links und rechts die zwei größten Zahlen 9 und 10 stehen, muss die Zahl in der Mitte daher mindestens $25 - 10 - 9 = 6$ sein.

Wenn wir diese beiden Informationen zusammenfassen, bleibt nur die Möglichkeit übrig, dass unten in der Mitte 6 und entsprechend beim Fragezeichen **1** steht, also **eine andere Zahl**.

27. Wir stellen fest, dass Punkte mit gleicher x-Koordinate wieder auf Punkte mit gleicher x-Koordinate abgebildet werden. Wenn man eine gesamte senkrechte Strecke abbildet, entsteht also wieder eine senkrechte Strecke. Analog werden waagrechte Strecken auf waagrechte Strecken abgebildet.

    Wir überlegen daher, wohin die vier Seiten des Quadrats abgebildet werden. Die Strecke von $(1,1)$ zu $(1,2)$ wird abgebildet auf eine Strecke, wo alle Punkte x-Koordinate $\frac{1}{1}=1$ haben. Die kleinste y-Koordinate 1 wird abgebildet auf $\frac{1}{1}=1$, die größte auf $\frac{1}{2}$. Wir erhalten also die Strecke von $(1,1)$ zu $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

    Die gegenüberliegende Seite von $(2,1)$ zu $(2,2)$ wird abgebildet auf eine Strecke, wo alle Punkte x-Koordinate $\frac{1}{2}$ haben. Die kleinste y-Koordinate 1 wird abgebildet auf $\frac{1}{1}=1$, die größte auf $\frac{1}{2}$. Wir erhalten also die Strecke von $\left(\frac{1}{2},1\right)$ zu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

    Analog werden die beiden waagrechten Seiten von $(1,1)$ zu $(2,1)$ und von $(1,2)$ zu $(2,2)$ abgebildet auf Strecken von $(1,1)$ zu $\left(\frac{1}{2},1\right)$ bzw. von $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ zu $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

    Diese vier Strecken zusammen ergeben das kleinere Quadrat in **(C)**.

28. Wir suchen für jeden der beiden Ausdrücke unter der Wurzel den nächstgrößeren und nächstkleineren Ausdruck, der ein vollständiges Quadrat ist, und erhalten

    $$N^2 < N^2+N+1 < N^2+2N+1 = (N+1)^2$$

    und

    $$(3N)^2 = 9N^2 < 9N^2+N+1 < 9N^2+6N+1 = (3N+1)^2.$$

    Also ist $N+1$ die kleinste ganze Zahl größer als $\sqrt{N^2+N+1}$ und $3N$ die größte ganze Zahl kleiner als $\sqrt{9N^2+N+1}$. Zwischen $N+1$ und $3N$ (jeweils inklusive) liegen $3N-(N+1)+1=\mathbf{2N}$ ganze Zahlen.

29. Um die Angabe besser zu verstehen, schreiben wir einmal die ersten solchen Rekursionsgleichungen auf:

    $$\begin{array}{ll} n=1 & a_2 = a_2\cdot a_1+1 \\ & a_3 = a_2\cdot a_1-2 \\ n=2 & a_4 = a_2\cdot a_2+1 \\ & a_5 = a_2\cdot a_2-2 \\ n=3 & a_6 = a_2\cdot a_3+1 \\ & a_7 = a_2\cdot a_3-2 \end{array}$$

    Unser erster Gedanke ist, für die höheren Folgenelemente immer wieder einzusetzen, bis in der Gleichung nur noch a_1 und a_2 vorkommt. Das erfordert nur zwei Schritte:

    $$2 = a_7 = a_2\cdot a_3-2 = a_2\cdot(a_2\cdot a_1-2)-2.$$

    Nun fällt uns noch auf, dass das Produkt $a_2\cdot a_1$ auch in der Formel für a_2 vorkommt, und wir diese (umgeformt zu $a_2\cdot a_1 = a_2-1$) nutzen können, um a_1 loszuwerden. Es gilt also

    $$2 = a_2\cdot(a_2\cdot a_1-2)-2 = a_2\cdot(a_2-1-2)-2,$$

    was wir zu

    $$4 = a_2\cdot(a_2-3)$$

    vereinfachen können. Nun haben wir eine quadratische Gleichung in a_2, von der wir die zwei Lösungen 4 und -1 entweder einfach erraten $(4 = 4\cdot 1 = -1\cdot -4)$ oder mittels der quadratischen Lösungsformel ausrechnen können.

    Dies ist eine notwendige Bedingung, das heißt, es kann keine anderen Lösungen geben. Es bleibt aber zu überprüfen, ob diese beiden überhaupt Lösungen sein können, also ob alle weiteren Bedingungen erfüllt sind.

    Zunächst rechnen wir a_1 aus, indem wir die Formel für a_2 nochmals umformen zu

    $$a_1 = \frac{a_2-1}{a_2} = 1-\frac{1}{a_2}.$$

Für $a_2 = 4$ folgt $a_1 = \frac{3}{4}$, und dann weiter $a_3 = 1, \quad a_4 = 17, \quad a_5 = 14, \quad a_6 = 5, \quad a_7 = 2.$

Für $a_2 = -1$ dagegen folgt $a_1 = 2$, was der Bedingung $0 < a_1 < 1$ verletzt.

Daher ist nur $\mathbf{a_2 = 4}$ eine Lösung.

30. Die wesentliche Erkenntnis für diese Aufgabe besteht darin, dass die vier Schnittpunkte eines Kreises mit zwei parallelen Linien jeweils ein gleichschenkeliges Trapez bilden.

    Wenn AB um 4 kürzer als GH ist, ist wegen der Symmetrie daher AC um 4 länger als GJ. Addieren wir nun 26 bzw. 24, also oben um 2 mehr als unten, ist AD um 6 länger als GK.

    Wegen der Symmetrie des zweiten Kreises ist dann AE um 6 kürzer als GL, und somit der oben verbliebene Teil EF um 6 länger als der unten verbliebene Teil x. Daher erhalten wir $x = 22 - 6 = \mathbf{16}$.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023
Kategorie: Felix, 1. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 45 min.

jede richtige Antwort Aufgabe	1. – 4.	3 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe	5. – 8.	4 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe	9. – 12.	5 Punkte
jede Aufgabe ohne Antwort		0 Punkte
jede falsche Antwort:		Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 12 Basispunkte		

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 12) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4

5	6	7	8

9	10	11	12

pwc

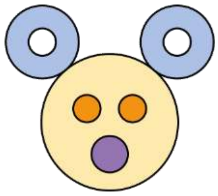
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik Österreich – 16. 3. 2023 Gruppe Felix (1. Schulstufe)	Name:

- 3 Punkte Beispiele -

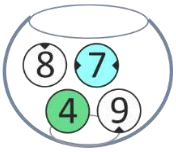
1. Aus wie vielen Kreisen besteht dieser Biber?

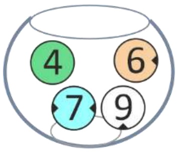
   (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

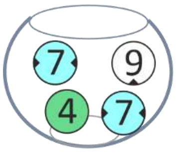


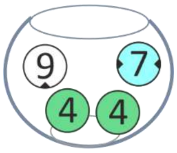
2. Jede Schüssel enthält 4 Bälle. Rechne die Zahlen auf den Bällen zusammen.

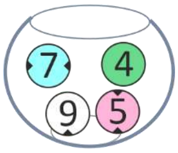
   In welcher Schüssel ist das Ergebnis am größten?

(A) 

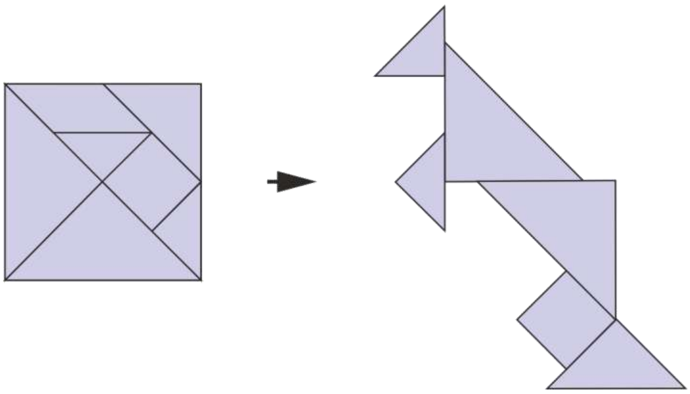
(B) 

(C) 

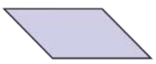
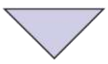
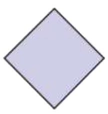
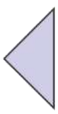
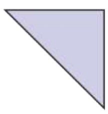
(D) 

(E) 

3. Herr Biber legt die Teile um und baut ein Känguru.



   Welches Stück fehlt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

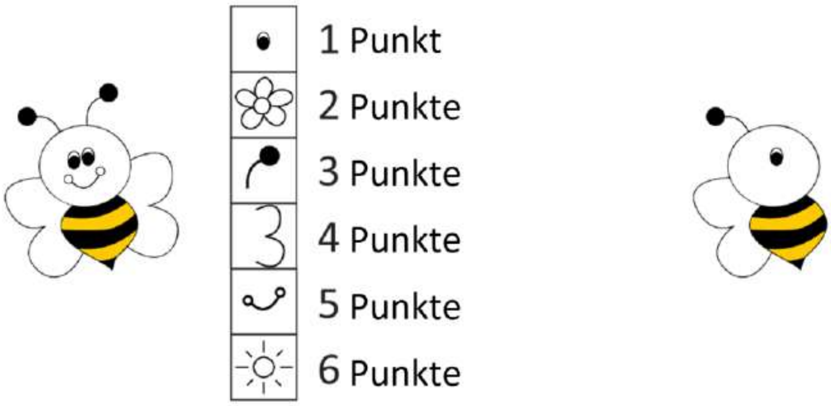
4. Sara sagt: „Mein Boot hat mehr als einen Kreis. Es hat auch um 2 Dreiecke mehr als Quadrate.“

Welches Boot gehört Sara?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

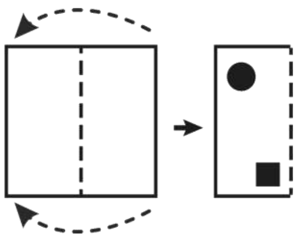
5. Bei der Biene rechts fehlen einige Teile. Jeder Teil kostet Punkte.



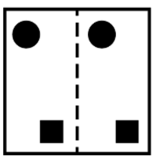
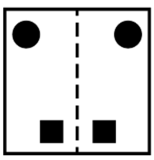
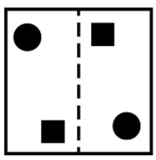
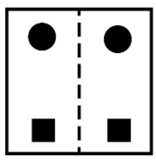
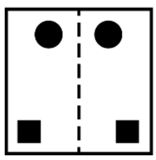
Wie viele Punkte braucht Maya, damit sie die Biene fertigstellen kann?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

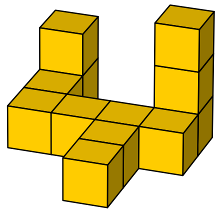
6. Susi faltet ein Blatt Papier in der Mitte. Sie stanzt 2 Löcher heraus.



Wie sieht das Blatt aus, wenn sie es wieder auseinander faltet?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Hansi klebt diese Figur aus 12 Würfeln zusammen.

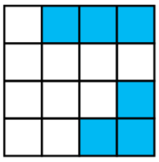


Zwischen zwei Würfel gibt er immer einen Tropfen Klebstoff.

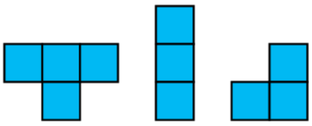
Wie viele Tropfen Klebstoff braucht er?

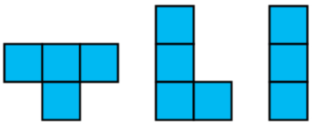
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

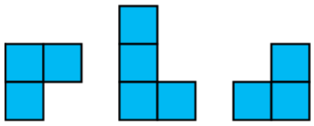
8. Max möchte das abgebildete Puzzle vervollständigen. Er hat verschiedene Teile.

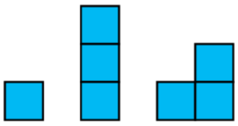


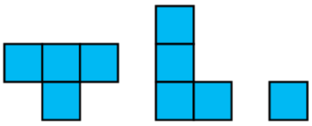
Welche Teile muss er verwenden?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

- 5 Punkte Beispiele -

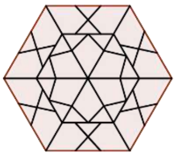
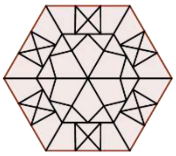
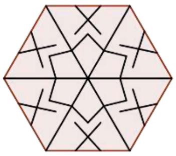
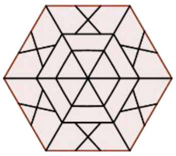
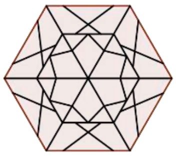
9. Emma wurde Dritte in einem Tanz-Wettbewerb für Mädchen. Zwischen ihr und der Letztplatzierten waren 3 Tänzerinnen.

Wie viele Tänzerinnen waren beim Wettbewerb dabei?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

10. Elvis hat 6 Dreiecke mit diesem Muster  .

Welches Bild kann er damit machen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Jedes der Kinder Ali, Lea, Josef, Vittorio und Sophie bekommt eine Geburtstagstorte.

Die Zahl auf der Torte zeigt, wie alt das Kind ist.

Lea ist zwei Jahre älter als Josef, aber ein Jahr jünger als Ali.

Vittorio ist der Jüngste.

Welche Torte gehört Sophie?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

12. Drei Frösche leben in einem Teich. Jede Nacht singt nur ein Frosch ein Lied.

Nach 9 Nächten hat der erste Frosch 2 mal gesungen. Der zweite Frosch hat sich 5 Lieder angehört.

Wie viele Lieder hat sich der dritte Frosch angehört?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023
Level: Felix, Grade: Schulstufe 1

Name:	
School:	
Class:	

Time: 45 min.
12 starting points
each correct answer to questions 1. – 4.: 3 points
each correct answer to questions 5. – 8.: 4 points
each correct answer to questions 9. – 12.: 5 points
each question left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 12). Write clearly and carefully!

1	2	3	4

5	6	7	8

9	10	11	12

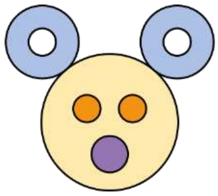
pwc

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik Österreich – 16. 3. 2023 Level Felix (Schulstufe 1)	Name:

- 3 Point Examples -

1. Out of how many circles is the beaver made of?



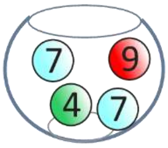
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

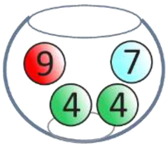
2. Each bowl has 4 balls. Add up the numbers on the balls.

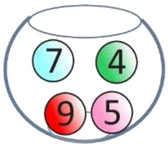
In which bowl is the result biggest?

(A) 

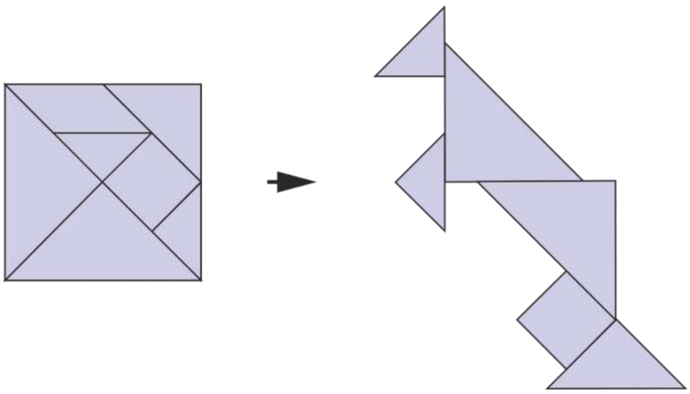
(B) 

(C) 

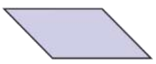
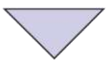
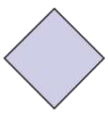
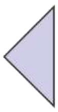
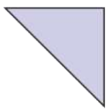
(D) 

(E) 

3. Mr Beaver re-arranges the parts to build a kangaroo.



Which part is missing?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

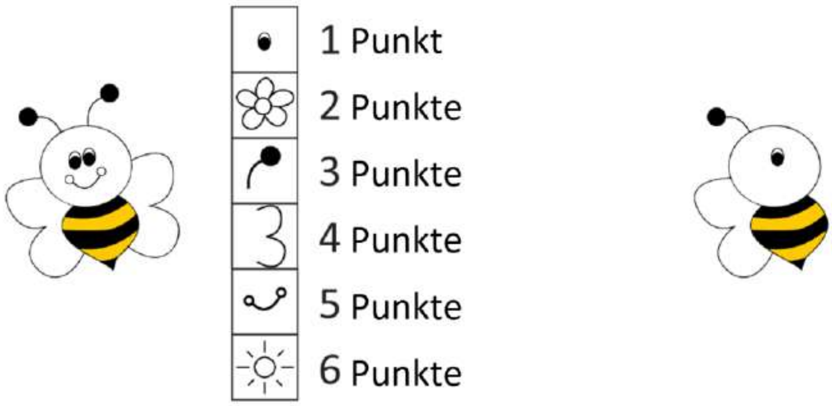
4. Sara says: „My boat has more than one circle. It also has 2 triangles more than squares.“

Which boat belongs to Sara?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Point Examples -

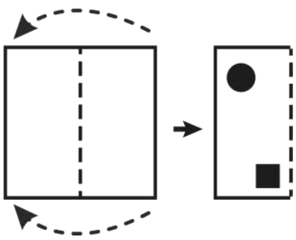
5. The bee on the right has a few pieces missing. Each piece costs points (Punkte).



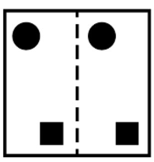
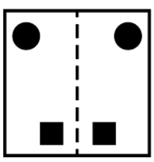
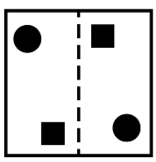
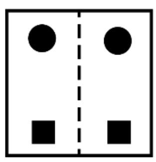
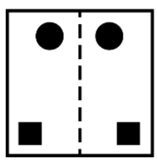
How many points does Maya need to complete the bee?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

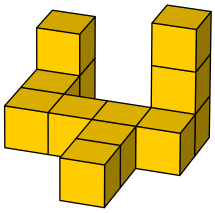
6. Susi folds a piece of paper in the middle. She stamps 2 holes.



What does the piece of paper look like when she unfolds it again?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Hansi sticks 12 cubes together to make this figure.

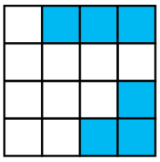


He always puts one drop of glue between two cubes.

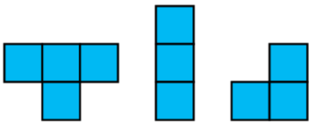
How many drops of glue does he need?

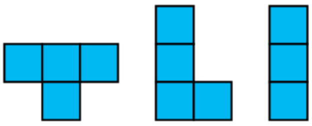
(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

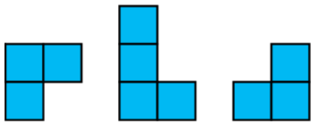
8. Max wants to complete the jigsaw shown. He has different pieces.

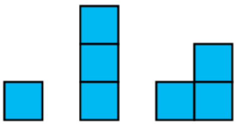


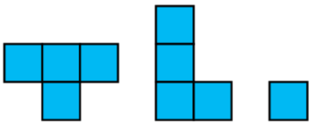
Which pieces does he have to use?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

- 5 Point Examples -

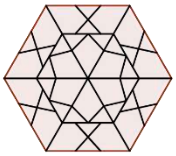
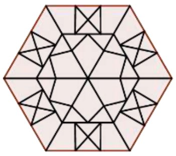
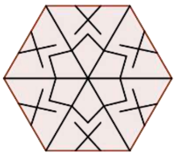
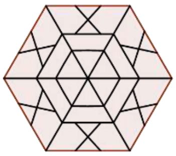
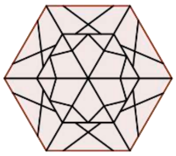
9. Emma came third in a dance competition for girls. 3 dancers came between her and the last girl.

How many dancers took part in the competition?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

10. Elvis has 6 triangles with this pattern  .

Which picture can he make with them?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

11. Each of the children Ali, Lea, Josef, Vittorio and Sophie get a birthday cake.

The number on top of the cake shows how old the child is.

Lea is two years older than Josef, but one year younger than Ali.

Vittorio is the youngest.

Which cake belongs to Sophie?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

12. Three frogs live in a pond. Each night only one of the frogs sings a song.

After 9 nights the first frog has sung 2 times. The second frog has listened to 5 songs.

How many songs did the third frog listen to?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

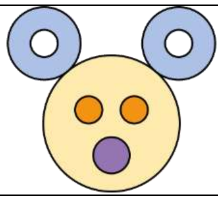
Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	B	A	A	E	E	B	D	C	A	D	A	C	B	B

– 3 Punkte Beispiele –

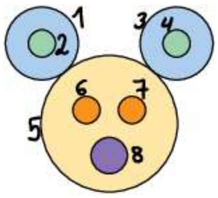
1. Aus wie vielen Kreisen besteht dieser Biber?



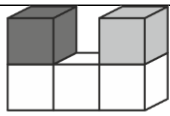
(A) 5 (B) 6 (C) 7 **(D) 8** (E) 9

Du musst jeden Kreis abzählen.

Es sind **8** Kreise.



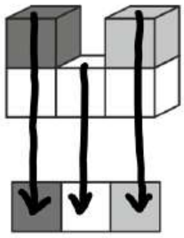
2. Hier siehst du 5 Würfel von vorne.



Wie sehen sie von oben aus?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Wenn du die Würfel von oben betrachtest, siehst du links den dunkelgrauen Würfel. Du siehst in der Mitte den weißen Würfel und rechts den hellgrauen Würfel.

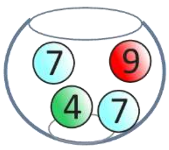


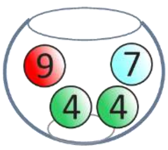
3. Jede Schüssel enthält 4 Bälle. Rechne die Zahlen auf den Bällen zusammen.

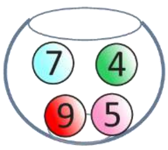
In welcher Schüssel ist das Ergebnis am größten?

(A) 

(B) 

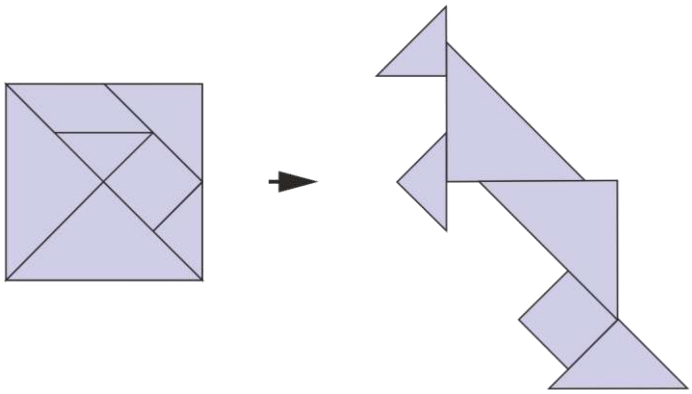
(C) 

(D) 

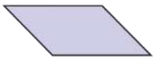
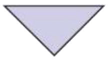
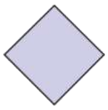
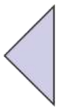
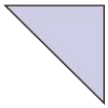
(E) 

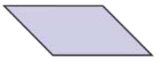
A: 8 + 7 + 4 + 9 = **28**
B: 4 + 7 + 6 + 9 = 26
C: 7 + 4 + 7 + 9 = 27
D: 9 + 4 + 4 + 7 = 24
E: 7 + 4 + 9 + 5 = 25

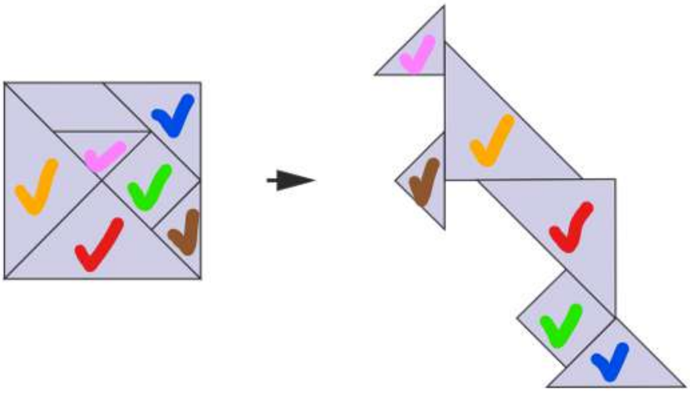
4. Herr Biber legt die Teile um und baut ein Känguru.



Welches Stück fehlt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Die Figur  bleibt über.



5. Sara sagt: „Mein Boot hat mehr als einen Kreis. Es hat auch um 2 Dreiecke mehr als Quadrate.“

Welches Boot gehört Sara?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Mein Boot hat mehr als einen Kreis → C ist nicht mein Boot.
Es hat auch um 2 Dreiecke mehr als Quadrate → A, B und D sind nicht meine Boote.

E ist mein Boot.

– 4 Punkte Beispiele –

6. Bei der Biene rechts fehlen einige Teile. Jeder Teil kostet Punkte.

1 Punkt
2 Punkte
3 Punkte
4 Punkte
5 Punkte
6 Punkte

Wie viele Punkte braucht Maya, damit sie die Biene fertigstellen kann?

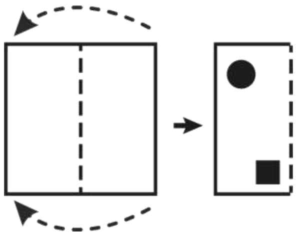
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 **(E) 13**

Der Biene fehlen die rot eingekreisten Teile:

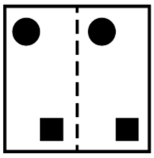
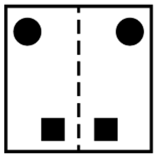
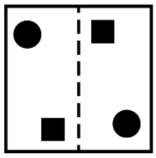
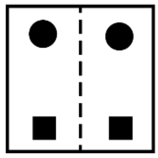
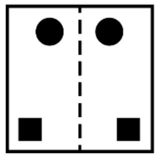
Das sind 1 + 3 + 4 +5 = **13** Punkte.

1 Punkt
2 Punkte
3 Punkte
4 Punkte
5 Punkte
6 Punkte

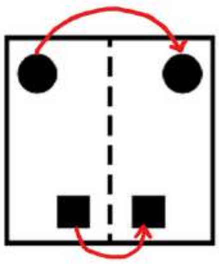
7. Susi faltet ein Blatt Papier in der Mitte. Sie stanzt 2 Löcher heraus.



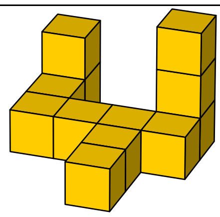
Wie sieht das Blatt aus, wenn sie es wieder auseinander faltet?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Wenn Susi das Blatt auseinanderfaltet, sieht das Blatt so aus:



8. Hansi klebt diese Figur aus 12 Würfeln zusammen.

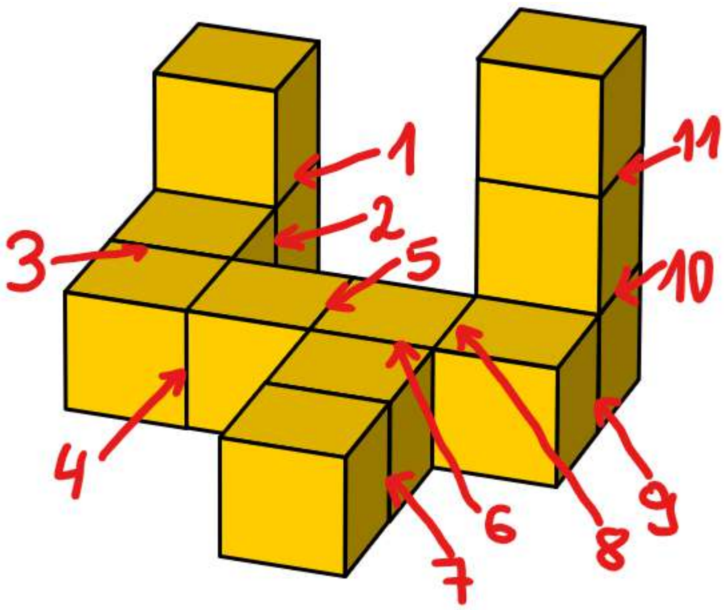


Zwischen zwei Würfeln gibt er immer einen Tropfen Klebstoff.

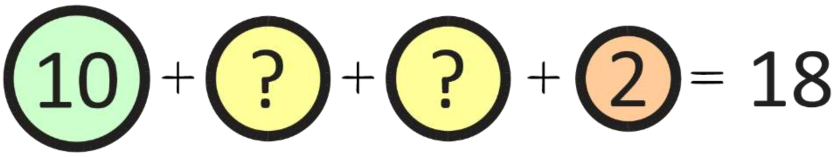
Wie viele Tropfen Klebstoff braucht er?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 **(D)** 11 (E) 12

Er braucht **11** Tropfen Klebstoff.



9. Die beiden Spielsteine mit dem Fragezeichen haben die gleiche Zahl.



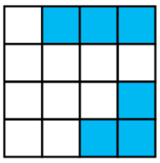
Welche Zahl musst du für das Fragezeichen einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

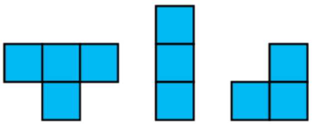
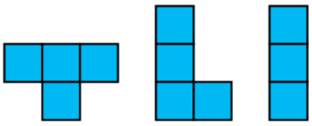
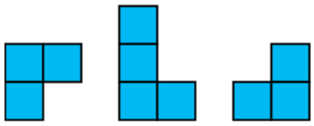
Von den 18 nimmt die grüne Münze 10 weg → es bleibt 8
Von den 8 nimmt die orange Münze 2 weg → es bleibt 6

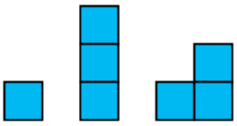
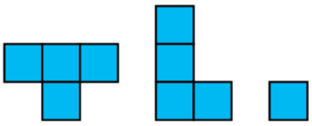
Für die zwei gelben Münzen bleib je **3**.

10. Max möchte das abgebildete Puzzle vervollständigen. Er hat verschiedene Teile.

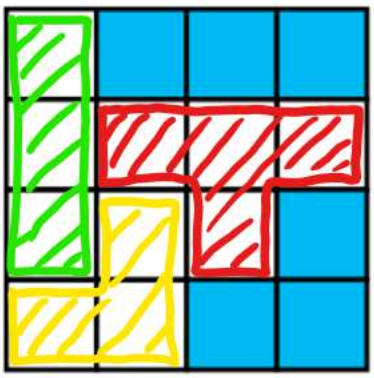


Welche Teile muss er verwenden?

(A)  (B)  (C) 

(D)  (E) 

Max braucht die drei Teile von **A**.



11. Emma wurde Dritte in einem Tanz-Wettbewerb für Mädchen. Zwischen ihr und der Letztplatzierten waren 3 Tänzerinnen.

Wie viele Tänzerinnen waren beim Wettbewerb dabei?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D)** 7 (E) 8

Es waren insgesamt **7** Tänzerinnen beim Wettbewerb.

12. Elvis hat 6 Dreiecke mit diesem Muster  .

Welches Bild kann er damit machen?

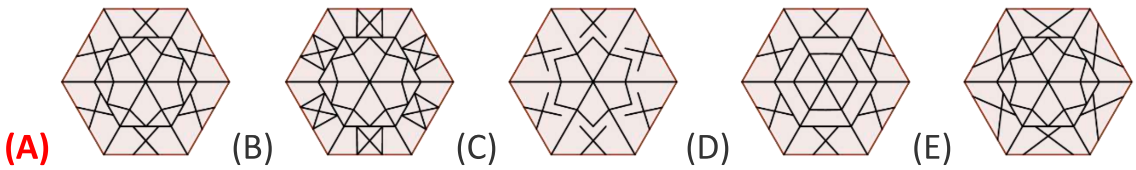
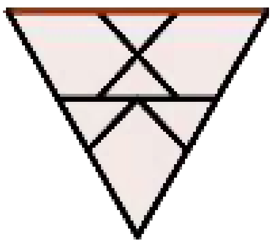
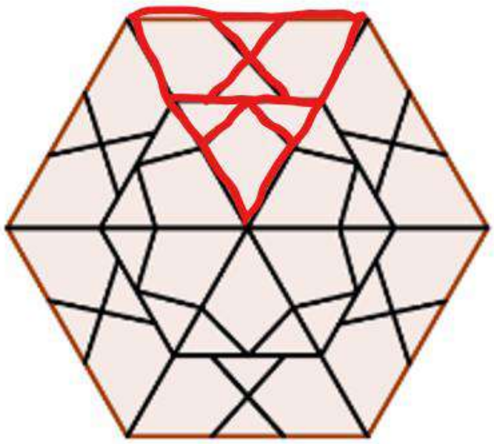


Bild **A** kann er damit machen.





13. Jedes der Kinder Ali, Lea, Josef, Vittorio und Sophie bekommt eine Geburtstagstorte.

Die Zahl auf der Torte zeigt, wie alt das Kind ist.

Lea ist zwei Jahre älter als Josef, aber ein Jahr jünger als Ali.

Vittorio ist der Jüngste.

Welche Torte gehört Sophie?

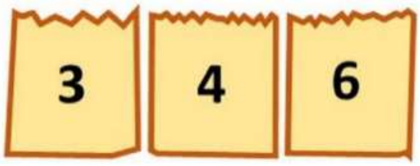
(A) (B) **(C)** (D) (E)

Vittorio ist 4 Jahre alt.
Ali ist der älteste mit 8 Jahren.
Lea ist ein Jahr jünger, also 7 Jahre, und Josef ist zwei Jahre jünger, also 5 Jahre.
Dazwischen ist also Sophie – sie ist **6** Jahre alt.

14. Maria hat insgesamt 19 Äpfel in 3 Säcken. Aus jedem Sack nimmt sie die gleiche Anzahl Äpfel heraus.

Dann sind 3, 4 und 6 Äpfel in den Säcken.

Wie viele Äpfel hat Maria aus jedem Sack genommen?



(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Es sind jetzt insgesamt 3 + 4 + 6 = 13 Äpfel in den Säcken.
Insgesamt hat Maria also 19 – 13 = 6 Äpfel aus den Säcken genommen,
also 6 : 3 = **2** Äpfel pro Sack.

15. Drei Frösche leben in einem Teich. Jede Nacht singt nur ein Frosch ein Lied.

Nach 9 Nächten hat der erste Frosch 2 mal gesungen. Der zweite Frosch hat sich 5 Lieder angehört.

Wie viele Lieder hat sich der dritte Frosch angehört?

(A) 7 **(B)** 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

Der zweite Frosch hat sich 5 Lieder angehört.
Insgesamt wurden 9 Lieder gesungen, also muss der zweite Frosch 9 – 5 = 4 Lieder gesungen haben.
Daher hat sich der dritte Frosch 2 + 4 = **6** Lieder angehört.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023
Kategorie: Felix, 2. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.	
jede richtige Antwort Aufgabe 1. – 5.	3 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 6. – 10.	4 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 11. – 15.	5 Punkte
jede Aufgabe ohne Antwort	0 Punkte
jede falsche Antwort:	Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 15 Basispunkte	

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 15) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

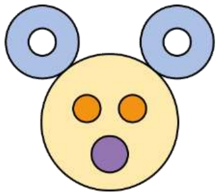
11	12	13	14	15

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik Österreich – 16. 3. 2023 Gruppe Felix (2. Schulstufe)	Name:

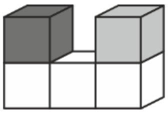
- 3 Punkte Beispiele -

1. Aus wie vielen Kreisen besteht dieser Biber?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

2. Hier siehst du 5 Würfel von vorne.

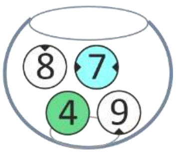


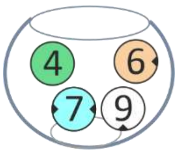
Wie sehen sie von oben aus?

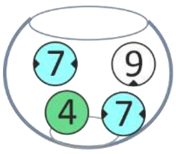
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

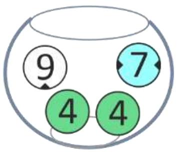
3. Jede Schüssel enthält 4 Bälle. Rechne die Zahlen auf den Bällen zusammen.

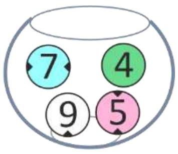
In welcher Schüssel ist das Ergebnis am größten?

(A) 

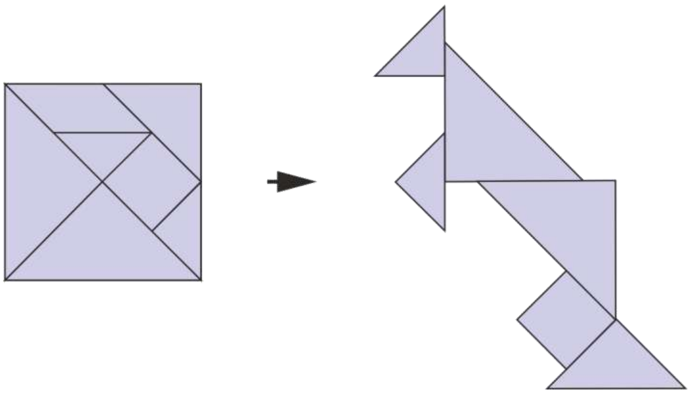
(B) 

(C) 

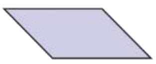
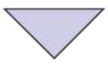
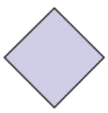
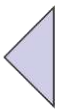
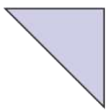
(D) 

(E) 

4. Herr Biber legt die Teile um und baut ein Känguru.



Welches Stück fehlt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

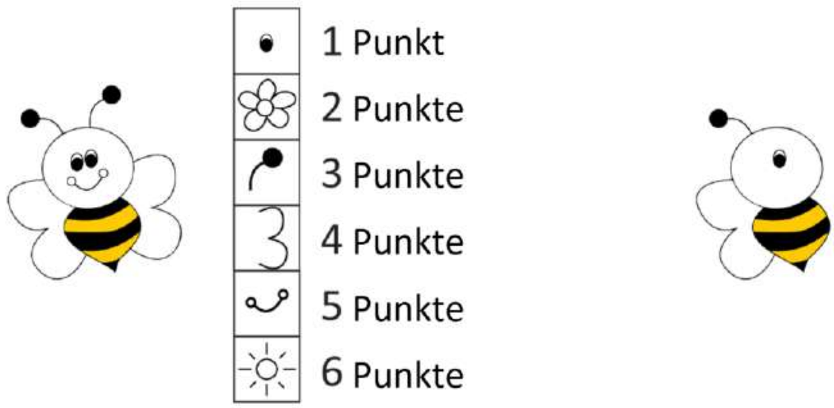
5. Sara sagt: „Mein Boot hat mehr als einen Kreis. Es hat auch um 2 Dreiecke mehr als Quadrate."

Welches Boot gehört Sara?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

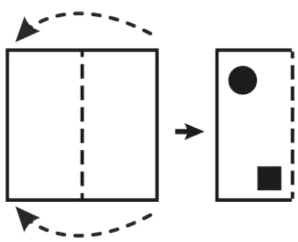
6. Bei der Biene rechts fehlen einige Teile. Jeder Teil kostet Punkte.



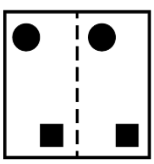
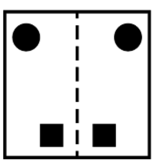
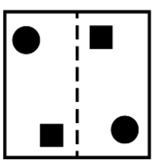
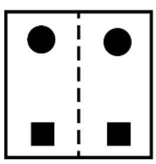
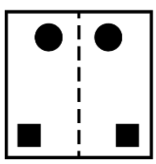
Wie viele Punkte braucht Maya, damit sie die Biene fertigstellen kann?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

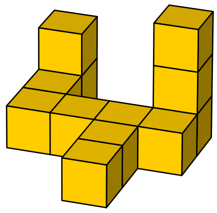
7. Susi faltet ein Blatt Papier in der Mitte. Sie stanzt 2 Löcher heraus.



Wie sieht das Blatt aus, wenn sie es wieder auseinander faltet?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8. Hansi klebt diese Figur aus 12 Würfeln zusammen.



Zwischen zwei Würfel gibt er immer einen Tropfen Klebstoff.

Wie viele Tropfen Klebstoff braucht er?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

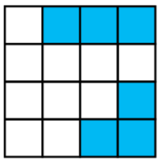
9. Die beiden Spielsteine mit dem Fragezeichen haben die gleiche Zahl.

10 + ? + ? + 2 = 18

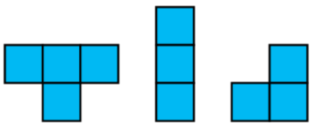
Welche Zahl musst du für das Fragezeichen einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

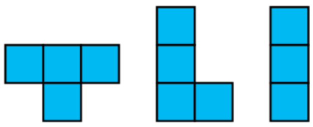
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

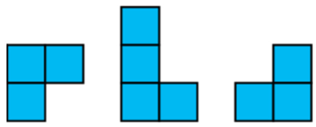
10. Max möchte das abgebildete Puzzle vervollständigen. Er hat verschiedene Teile.

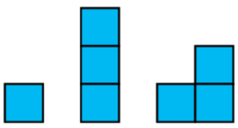


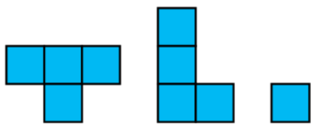
Welche Teile muss er verwenden?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

- 5 Punkte Beispiele -

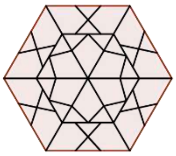
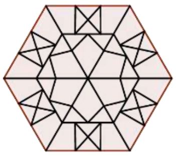
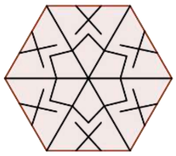
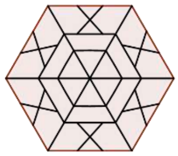
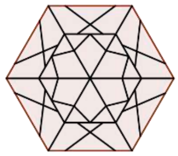
11. Emma wurde Dritte in einem Tanz-Wettbewerb für Mädchen. Zwischen ihr und der Letztplatzierten waren 3 Tänzerinnen.

Wie viele Tänzerinnen waren beim Wettbewerb dabei?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

12. Elvis hat 6 Dreiecke mit diesem Muster  .

Welches Bild kann er damit machen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Jedes der Kinder Ali, Lea, Josef, Vittorio und Sophie bekommt eine Geburtstagstorte.

Die Zahl auf der Torte zeigt, wie alt das Kind ist.

Lea ist zwei Jahre älter als Josef, aber ein Jahr jünger als Ali.

Vittorio ist der Jüngste.

Welche Torte gehört Sophie?

(A) 

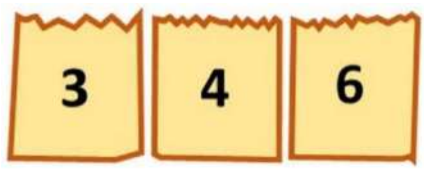
(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

14. Maria hat insgesamt 19 Äpfel in 3 Säcken. Aus jedem Sack nimmt sie die gleiche Anzahl Äpfel heraus.



Dann sind 3, 4 und 6 Äpfel in den Säcken.

Wie viele Äpfel hat Maria aus jedem Sack genommen?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Drei Frösche leben in einem Teich. Jede Nacht singt nur ein Frosch ein Lied.

Nach 9 Nächten hat der erste Frosch 2 mal gesungen. Der zweite Frosch hat sich 5 Lieder angehört.

Wie viele Lieder hat sich der dritte Frosch angehört?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023
Level: Felix, Grade: Schulstufe 2

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
15 starting points

each correct answer to questions 1. – 5.:	3 points
each correct answer to questions 6. – 10.:	4 points
each correct answer to questions 11. – 15.:	5 points
each question left unanswered:	0 points
each incorrect answer:	minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 to 15). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5

6	7	8	9	10

11	12	13	14	15

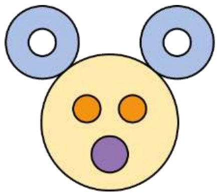
pwc

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik Österreich – 16. 3. 2023 Level Felix (Schulstufe 2)	Name:

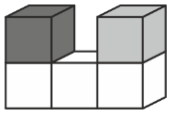
- 3 Point Examples -

1. Out of how many circles is the beaver made of?



(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

2. The picture shows 5 cubes from the front.



What do they look like from above?

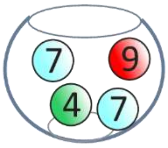
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

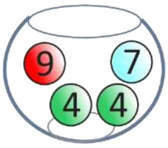
3. Each bowl has 4 balls. Add up the numbers on the balls.

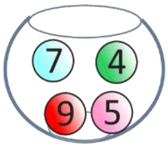
In which bowl is the result biggest?

(A) 

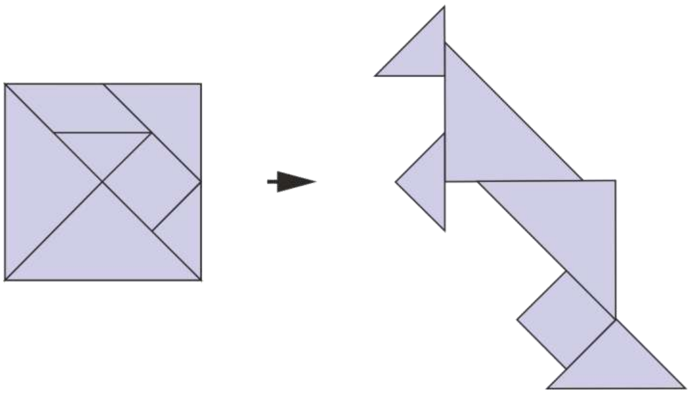
(B) 

(C) 

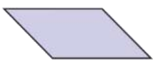
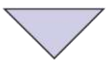
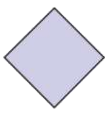
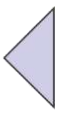
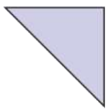
(D) 

(E) 

4. Mr Beaver re-arranges the parts to build a kangaroo.



Which part is missing?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

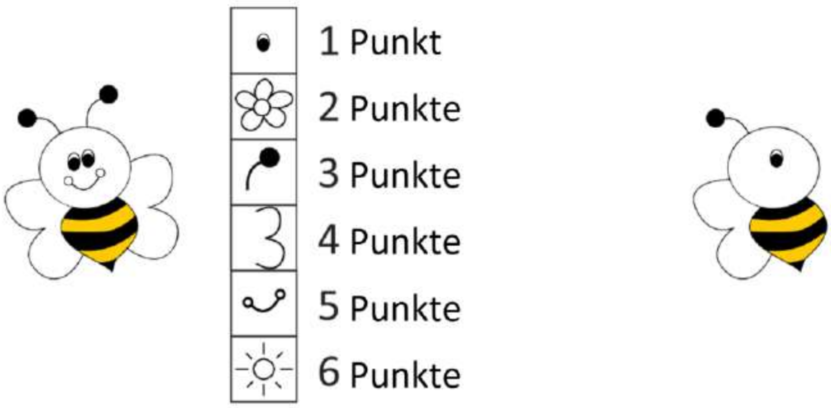
5. Sara says: „My boat has more than one circle. It also has 2 triangles more than squares.“

   Which boat belongs to Sara?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Point Examples -

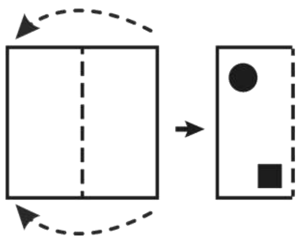
6. The bee on the right has a few pieces missing. Each piece costs points (Punkte).



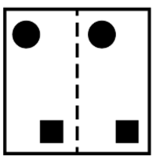
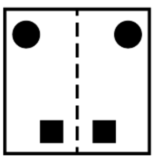
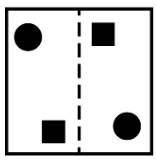
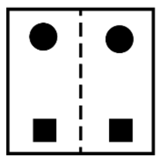
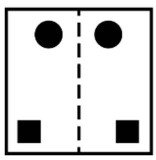
   How many points does Maya need to complete the bee?

   (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

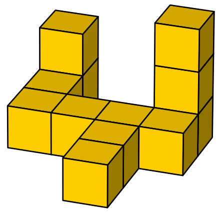
7. Susi folds a piece of paper in the middle. She stamps 2 holes.



   What does the piece of paper look like when she unfolds it again?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

8. Hansi sticks 12 cubes together to make this figure.



He always puts one drop of glue between two cubes.

How many drops of glue does he need?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

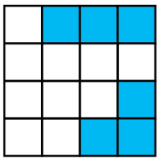
9. The two markers with a question mark have the same number.

$$10 + ? + ? + 2 = 18$$

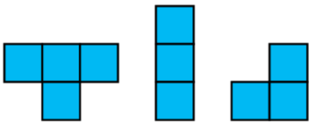
Which number do you have to put instead of the question mark so that the calculation is correct?

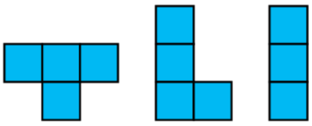
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

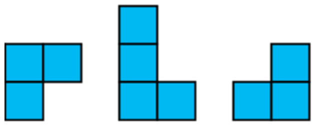
10. Max wants to complete the jigsaw shown. He has different pieces.

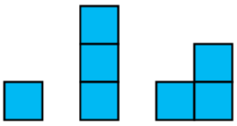


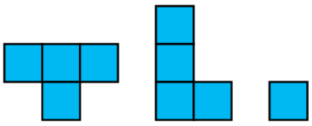
Which pieces does he have to use?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

- 5 Point Examples -

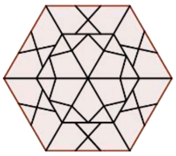
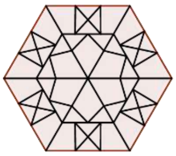
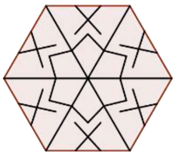
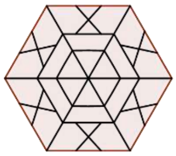
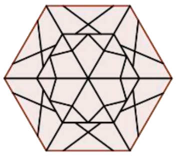
11. Emma came third in a dance competition for girls. 3 dancers came between her and the last girl.

How many dancers took part in the competition?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

12. Elvis has 6 triangles with this pattern  .

Which picture can he make with them?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Each of the children Ali, Lea, Josef, Vittorio and Sophie get a birthday cake.

The number on top of the cake shows how old the child is.

Lea is two years older than Josef, but one year younger than Ali.

Vittorio is the youngest.

Which cake belongs to Sophie?

(A) 

(B) 

(C) 

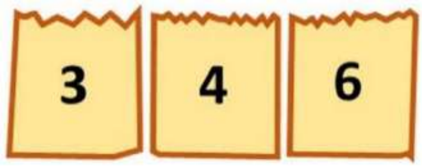
(D) 

(E) 

14. Maria has a total of 19 apples in 3 bags. She takes the same amount of apples from each bag.

Then there are 3, 4 and 6 apples in the bags.

How many apples did Maria take from each bag?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Three frogs live in a pond. Each night only one of the frogs sings a song.

After 9 nights the first frog has sung 2 times. The second frog has listened to 5 songs.

How many songs did the third frog listen to?

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

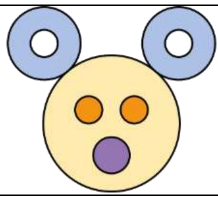
Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Felix (1. und 2. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	B	A	A	E	E	B	D	C	A	D	A	C	B	B

– 3 Punkte Beispiele –

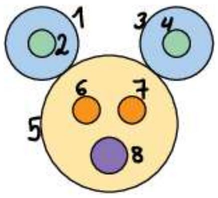
1. Aus wie vielen Kreisen besteht dieser Biber?



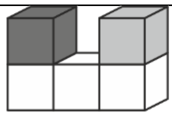
(A) 5 (B) 6 (C) 7 **(D) 8** (E) 9

Du musst jeden Kreis abzählen.

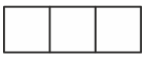
Es sind **8** Kreise.



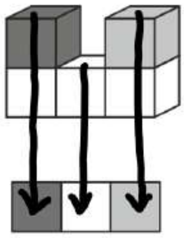
2. Hier siehst du 5 Würfel von vorne.



Wie sehen sie von oben aus?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Wenn du die Würfel von oben betrachtest, siehst du links den dunkelgrauen Würfel. Du siehst in der Mitte den weißen Würfel und rechts den hellgrauen Würfel.

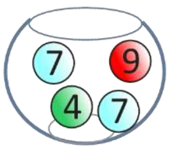


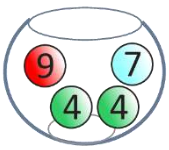
3. Jede Schüssel enthält 4 Bälle. Rechne die Zahlen auf den Bällen zusammen.

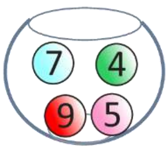
In welcher Schüssel ist das Ergebnis am größten?

(A) 

(B) 

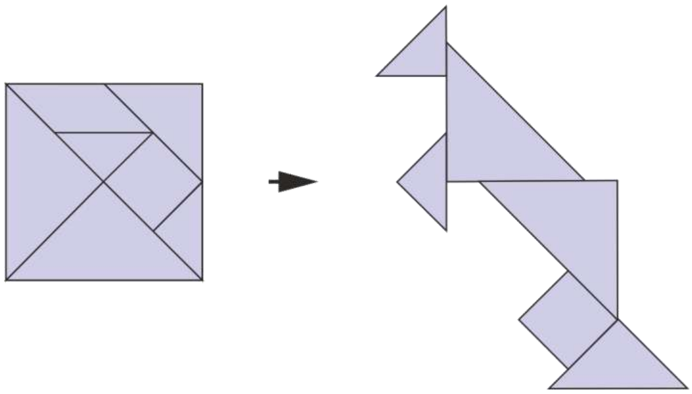
(C) 

(D) 

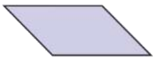
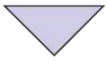
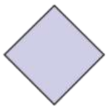
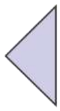
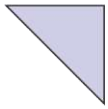
(E) 

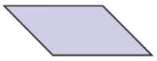
A: 8 + 7 + 4 + 9 = **28**
B: 4 + 7 + 6 + 9 = 26
C: 7 + 4 + 7 + 9 = 27
D: 9 + 4 + 4 + 7 = 24
E: 7 + 4 + 9 + 5 = 25

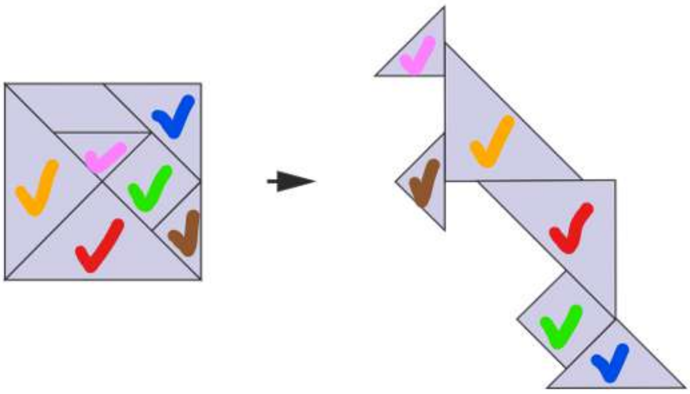
4. Herr Biber legt die Teile um und baut ein Känguru.



Welches Stück fehlt?

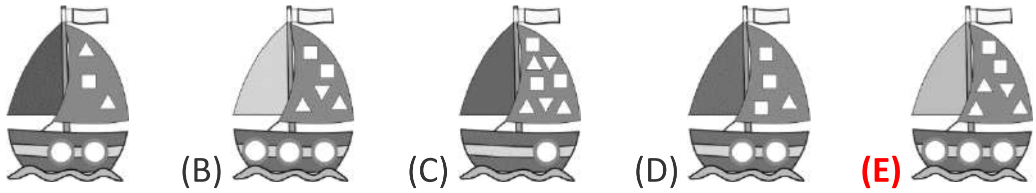
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Die Figur  bleibt über.



5. Sara sagt: „Mein Boot hat mehr als einen Kreis. Es hat auch um 2 Dreiecke mehr als Quadrate.“

Welches Boot gehört Sara?



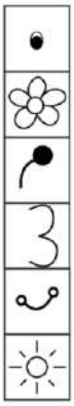
(A) (B) (C) (D) **(E)**

Mein Boot hat mehr als einen Kreis → C ist nicht mein Boot.
Es hat auch um 2 Dreiecke mehr als Quadrate → A, B und D sind nicht meine Boote.

E ist mein Boot.

– 4 Punkte Beispiele –

6. Bei der Biene rechts fehlen einige Teile. Jeder Teil kostet Punkte.



1 Punkt
2 Punkte
3 Punkte
4 Punkte
5 Punkte
6 Punkte

Wie viele Punkte braucht Maya, damit sie die Biene fertigstellen kann?

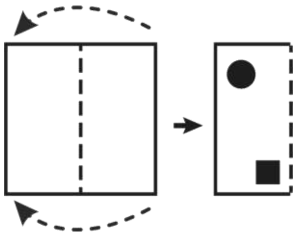
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 **(E) 13**

Der Biene fehlen die rot eingekreisten Teile:

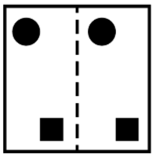
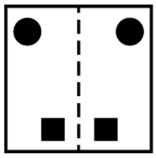
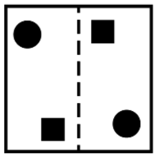
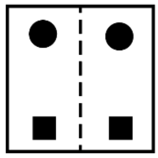
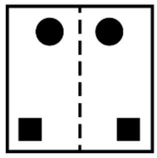
Das sind 1 + 3 + 4 +5 = **13** Punkte.

1 Punkt
2 Punkte
3 Punkte
4 Punkte
5 Punkte
6 Punkte

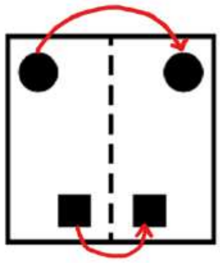
7. Susi faltet ein Blatt Papier in der Mitte. Sie stanzt 2 Löcher heraus.



Wie sieht das Blatt aus, wenn sie es wieder auseinander faltet?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

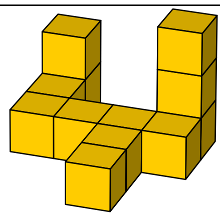
Wenn Susi das Blatt auseinanderfaltet, sieht das Blatt so aus:



8. Hansi klebt diese Figur aus 12 Würfeln zusammen.

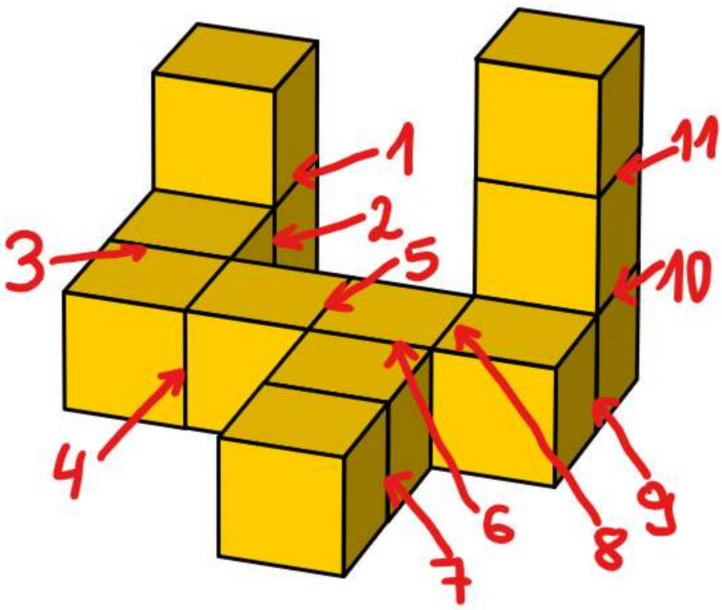
Zwischen zwei Würfeln gibt er immer einen Tropfen Klebstoff.

Wie viele Tropfen Klebstoff braucht er?



(A) 8 (B) 9 (C) 10 **(D)** 11 (E) 12

Er braucht **11** Tropfen Klebstoff.



9. Die beiden Spielsteine mit dem Fragezeichen haben die gleiche Zahl.

$$10 + ? + ? + 2 = 18$$

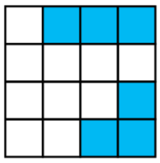
Welche Zahl musst du für das Fragezeichen einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

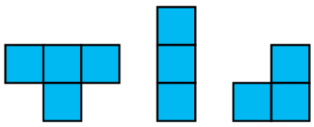
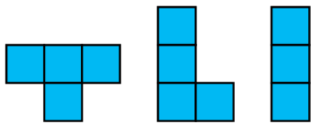
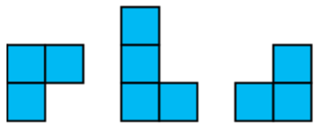
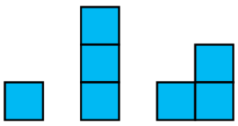
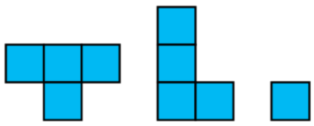
Von den 18 nimmt die grüne Münze 10 weg → es bleibt 8
Von den 8 nimmt die orange Münze 2 weg → es bleibt 6

Für die zwei gelben Münzen bleib je **3**.

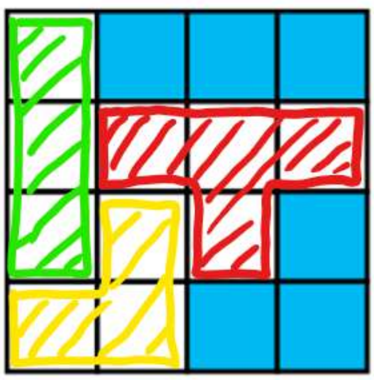
10. Max möchte das abgebildete Puzzle vervollständigen. Er hat verschiedene Teile.



Welche Teile muss er verwenden?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

Max braucht die drei Teile von **A**.



11. Emma wurde Dritte in einem Tanz-Wettbewerb für Mädchen. Zwischen ihr und der Letztplatzierten waren 3 Tänzerinnen.

Wie viele Tänzerinnen waren beim Wettbewerb dabei?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 **(D)** 7 (E) 8

Es waren insgesamt **7** Tänzerinnen beim Wettbewerb.

12. Elvis hat 6 Dreiecke mit diesem Muster  .

Welches Bild kann er damit machen?

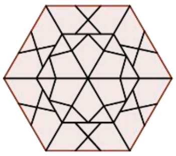
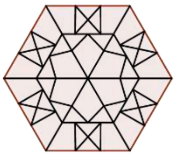
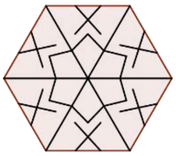
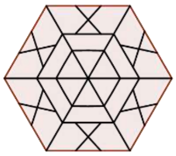
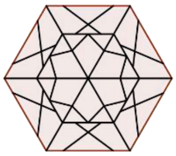
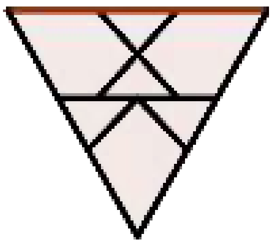
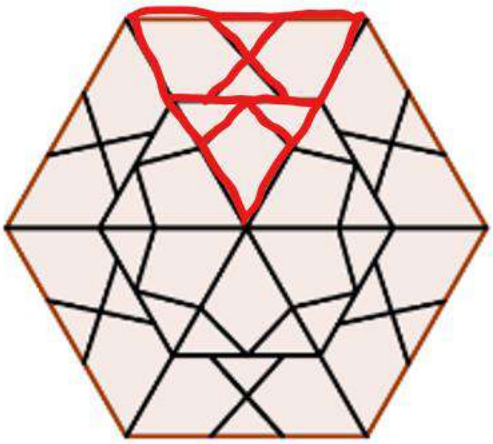
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Bild **A** kann er damit machen.





13. Jedes der Kinder Ali, Lea, Josef, Vittorio und Sophie bekommt eine Geburtstagstorte.

Die Zahl auf der Torte zeigt, wie alt das Kind ist.

Lea ist zwei Jahre älter als Josef, aber ein Jahr jünger als Ali.

Vittorio ist der Jüngste.

Welche Torte gehört Sophie?

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

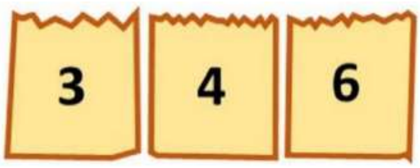
(E) 

Vittorio ist 4 Jahre alt.
Ali ist der älteste mit 8 Jahren.
Lea ist ein Jahr jünger, also 7 Jahre, und Josef ist zwei Jahre jünger, also 5 Jahre.
Dazwischen ist also Sophie – sie ist **6** Jahre alt.

14. Maria hat insgesamt 19 Äpfel in 3 Säcken. Aus jedem Sack nimmt sie die gleiche Anzahl Äpfel heraus.

Dann sind 3, 4 und 6 Äpfel in den Säcken.

Wie viele Äpfel hat Maria aus jedem Sack genommen?



(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Es sind jetzt insgesamt 3 + 4 + 6 = 13 Äpfel in den Säcken.
Insgesamt hat Maria also 19 – 13 = 6 Äpfel aus den Säcken genommen,
also 6 : 3 = **2** Äpfel pro Sack.

15. Drei Frösche leben in einem Teich. Jede Nacht singt nur ein Frosch ein Lied.

Nach 9 Nächten hat der erste Frosch 2 mal gesungen. Der zweite Frosch hat sich 5 Lieder angehört.

Wie viele Lieder hat sich der dritte Frosch angehört?

(A) 7 **(B)** 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

Der zweite Frosch hat sich 5 Lieder angehört.
Insgesamt wurden 9 Lieder gesungen, also muss der zweite Frosch 9 – 5 = 4 Lieder gesungen haben.
Daher hat sich der dritte Frosch 2 + 4 = **6** Lieder angehört.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023
Kategorie: Écolier, 3. und 4. Schulstufe

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.

jede richtige Antwort Aufgabe 1. – 8.	3 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 9. – 16.	4 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 17. – 24.	5 Punkte
jede Aufgabe ohne Antwort	0 Punkte
jede falsche Antwort:	Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte	

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

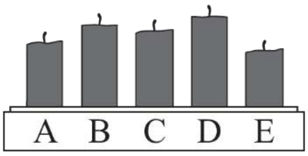
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik Österreich – 16. 3. 2023 Gruppe Écolier (3. und 4. Schulstufe)	Name:

- 3 Punkte Beispiele -

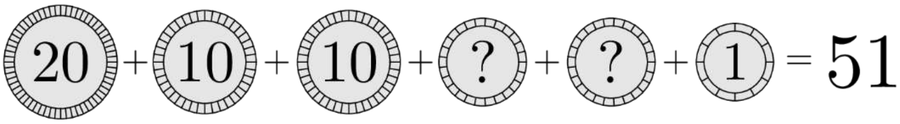
1. Fünf Kinder zünden gleichzeitig je eine Kerze an. Lisa bläst die Kerzen zu verschiedenen Zeitpunkten aus. Sie sehen nun so aus wie im Bild.



Welche Kerze hat Lisa zuerst ausgeblasen?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

2. Die beiden Spielsteine mit dem Fragezeichen haben den gleichen Wert.



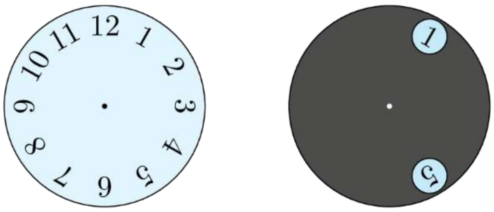
Welchen Wert musst du für das Fragezeichen einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10 (E) 20

3. Auf das Ziffernblatt einer Uhr wird eine schwarze Scheibe mit zwei Löchern gelegt.

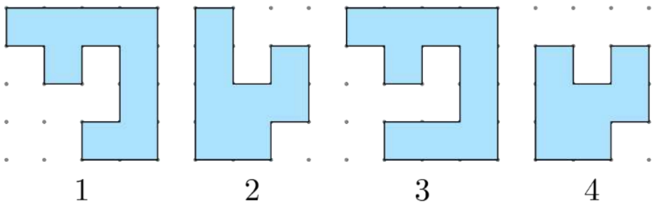
Die schwarze Scheibe wird gedreht.

Welche beiden Zahlen könnte man gleichzeitig sehen?

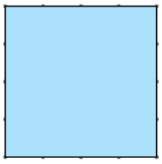


(A) 4 und 9 (B) 5 und 10 (C) 5 und 9 (D) 6 und 9 (E) 7 und 12

4. Alice hat diese vier Puzzleteile:

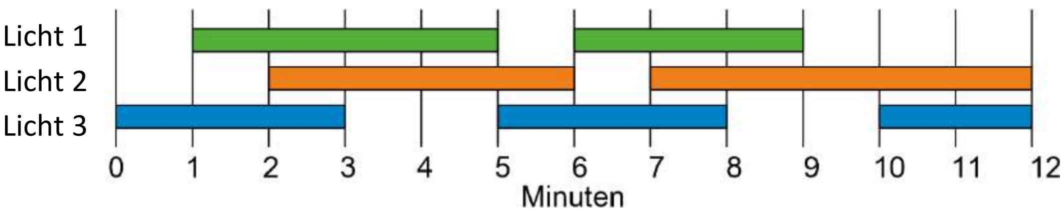


Welche zwei kann sie zu diesem Quadrat zusammensetzen?



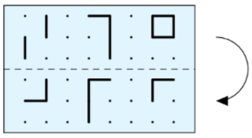
(A) 1 und 2 (B) 1 und 3 (C) 2 und 3 (D) 2 und 4 (E) 1 und 4

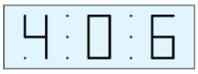
5. Maria schaltet nach dem vorgegebenen Plan zu bestimmten Zeiten die Lichter ein oder aus.

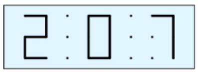


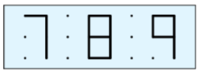
Wie viele Minuten sind insgesamt genau zwei Lichter gleichzeitig an?

(A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

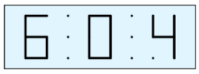
6. Christoph faltet die durchsichtige Folie entlang der strichlierten Linie. 
Was kann er dann sehen?

(A) 

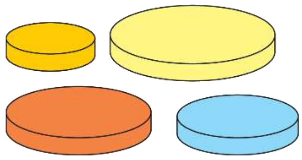
(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

7. Anna hat vier verschieden große Scheiben. Sie möchte einen Turm aus 3 Scheiben bauen. Dabei muss immer eine kleinere auf einer größeren liegen.

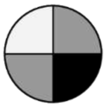


Auf wie viele Arten kann Anna den Turm bauen?

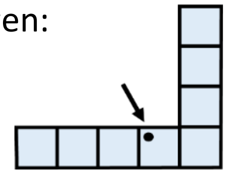
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

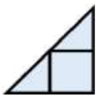
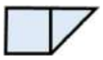
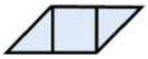
8. Daniel klebt diese zwei Papierstücke   auf diesen schwarzen Kreis: 
Dabei dürfen die beiden Papierstücke nicht überlappen.

Welches Bild erhält er?

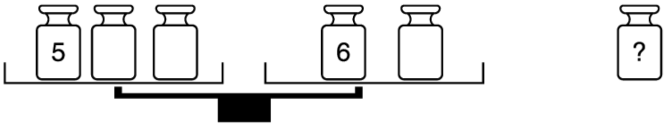
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Punkte Beispiele -

9. Mit den 5 Stücken A, B, C, D und E lässt sich diese Figur vollständig auslegen: 
Welches Stück liegt auf dem Punkt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

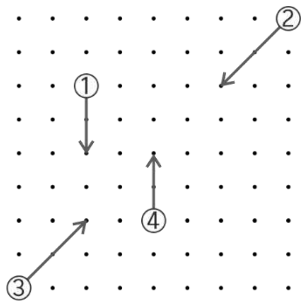
10. Die sechs Gewichte einer Waage haben 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg und 6 kg. Rosi verteilt fünf Gewichte auf die beiden Waagschalen so, dass sich die Waagschalen im Gleichgewicht befinden. Das sechste Gewicht legt sie zur Seite.



Welches Gewicht hat sie zur Seite gelegt?

(A) 1 kg (B) 2 kg (C) 3 kg (D) 4 kg (E) 5 kg

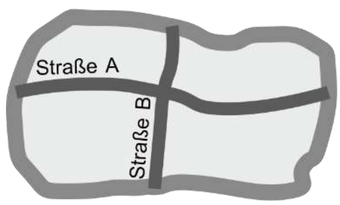
11. Im Bild sieht man vier Autos 1, 2, 3 und 4. Die Pfeile zeigen an, wohin sich die Autos in 5 Sekunden bewegen.

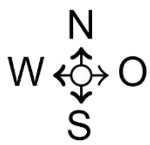


Welche Autos werden zusammenstoßen?

(A) 1 und 2 (B) 1 und 3 (C) 1 und 4 (D) 2 und 3 (E) 3 und 4

12. Nördlich von Straße A stehen 7 Häuser.
Östlich von Straße B stehen 8 Häuser.
Südlich von Straße A stehen 5 Häuser.





Wie viele Häuser stehen westlich von Straße B?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

13. In der Warteschlange vor der Fähre stehen 8 Autos mit insgesamt 19 Personen. In jedem Auto sitzen entweder 2 oder 3 Personen.

In wie vielen Autos sitzen genau 2 Personen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

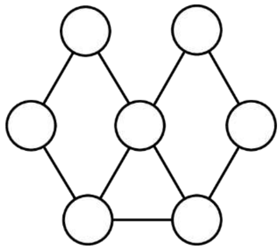
14. 6 Biber und 2 Kängurus stehen auf den Feldern in dieser Reihe: 

Von drei aufeinanderfolgenden Tieren ist immer genau eines ein Känguru.

Auf welcher dieser Zahlen steht ein Känguru?

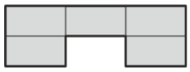
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Hanni möchte die Kreise im Bild anmalen. Wenn zwei Kreise mit einer Linie verbunden sind, sollen sie unterschiedliche Farben haben.

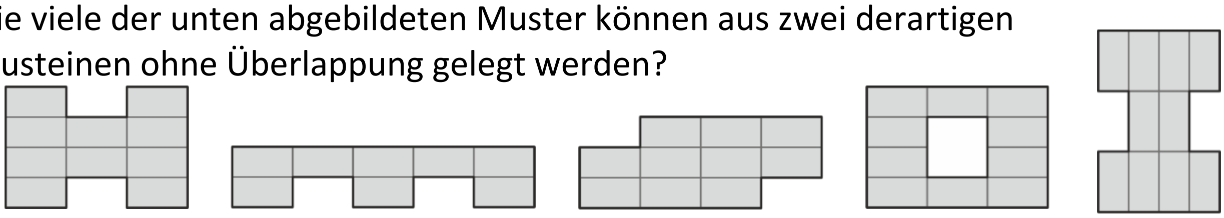


Wie viele Farben braucht sie mindestens?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

16. Ein Baustein besteht aus fünf gleichen Rechtecken: 

Wie viele der unten abgebildeten Muster können aus zwei derartigen Bausteinen ohne Überlappung gelegt werden?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

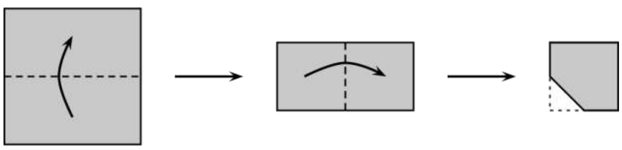
- 5 Punkte Beispiele -

17. Eine U-Bahn-Linie hat die 6 Stationen A, B, C, D, E und F. Der Zug bleibt an jeder Station stehen. Nach dem Halt in der Endstation A oder F fährt er in der umgekehrten Richtung weiter.
Der Zugführer beginnt seine Fahrt in Station B.
Sein erster Halt ist in Station C.

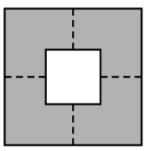
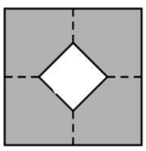
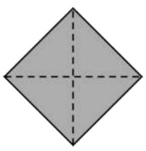
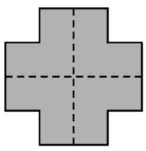
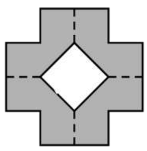
In welcher Station wird sein 46. Halt sein?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

18. Rebecca faltet ein quadratisches Papier zwei Mal. Dann schneidet sie eine Ecke ab, wie du im Bild sehen kannst.
Danach faltet sie das Papier wieder auseinander.



Wie kann das Papier jetzt aussehen?

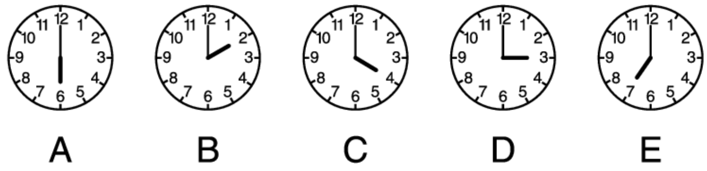
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

19. Drei Buben betreten nacheinander einen Raum.
Hermann ist nicht der Erste. Felix ist nicht der Zweite. Clemens ist nicht der Dritte.

In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können die Buben den Raum betreten?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)4 (E) 6

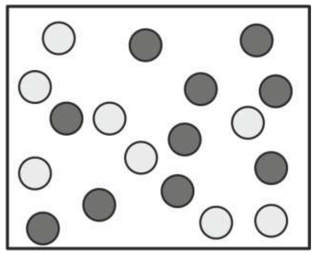
20. An der Wand hängen fünf Uhren. Eine Uhr geht eine Stunde vor. Eine andere geht eine Stunde nach und eine geht richtig. Zwei Uhren sind stehen geblieben.



Welche Uhr zeigt die richtige Zeit an?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

21. Adam hat 9 Murmeln und Brenda hat auch 9 Murmeln. Zusammen haben sie 8 weiße und 10 schwarze Murmeln. Brenda hat doppelt so viele schwarze Murmeln wie weiße Murmeln.



Wie viele schwarze Murmeln hat Adam?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 0

22. Else hat zwei Maschinen R und S.
Wenn sie ein quadratisches Blatt in Maschine R gibt, wird es gedreht: 

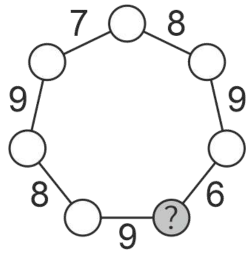
Wenn sie das Blatt in Maschine S gibt, wird es bedruckt: 

Sie möchte dieses Bild erstellen: 

In welcher Reihenfolge verwendet Else die beiden Maschinen, damit dieses Bild entsteht? 

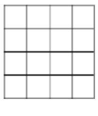
(A) SRR (B) RSR (C) RSS (D) RRS (E) SRS

23. Ein Lehrer möchte die Zahlen von 1 bis 7 in die Kreise schreiben. Er schreibt in jeden Kreis genau eine Zahl. Zählt er die beiden Zahlen in benachbarten Kreisen zusammen, so erhält er genau die Zahl, die zwischen den beiden Kreisen steht.

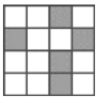
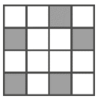
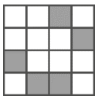
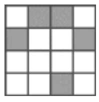
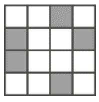


Welche Zahl muss er in den Kreis mit dem Fragezeichen schreiben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24. Maria färbt genau 5 Felder dieses Rasters  grau. Dann lässt sie ihre 5 Freunde raten, welche Felder sie gefärbt hat, und erhält als Antwort die 5 Muster A, B, C, D und E. Maria betrachtet die Muster und sagt: „Einer von euch hat recht. Die übrigen haben alle genau vier Felder richtig erraten.“

Welches Muster hat Maria gemalt?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023

16. 3. 2023

Level: Écolier, Grade: Schulstufe 3 + 4

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
each correct answer to questions 1. – 8.: 3 points
each correct answer to questions 9. – 16.: 4 points
each correct answer to questions 17. – 24.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

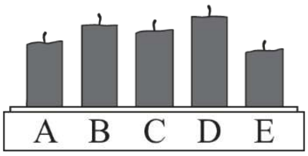
17	18	19	20	21	22	23	24

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at

Känguru der Mathematik Österreich – 16. 3. 2023 Level École r (Schulstufe 3 and 4)	Name:

- 3 Point Examples -

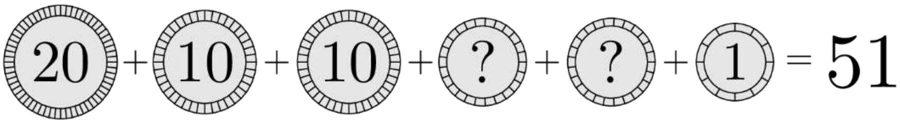
1. Five children each light a candle at the same time. Lisa blows out the candles at different times. Now they look as shown in the picture.



Which candle did Lisa blow out first?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

2. The two markers with a question mark have the same value.



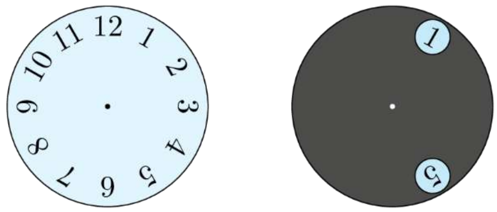
Which value do you have to use instead of the question mark so that the calculation is correct?

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10 (E) 20

3. A black disc with two holes is placed on top of a dial of a watch.

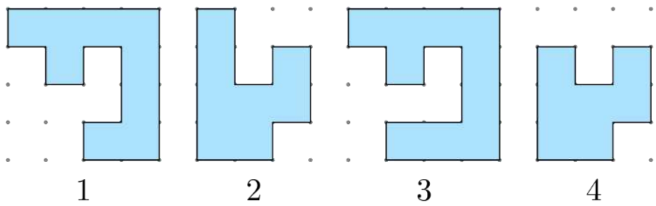
The black disc is turned.

Which two numbers can be seen at the same time?

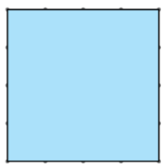


(A) 4 and 9 (B) 5 and 10 (C) 5 and 9 (D) 6 and 9 (E) 7 and 12

4. Alice has these four jigsaw pieces:

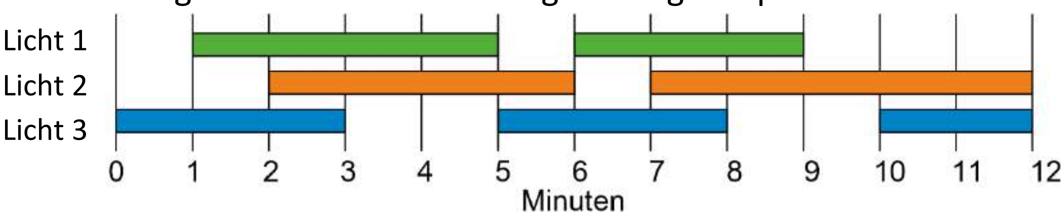


Which two can she put together to form this square?



(A) 1 and 2 (B) 1 and 3 (C) 2 and 3 (D) 2 and 4 (E) 1 and 4

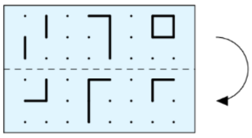
5. Maria switches the lights on and off according to the given plan.



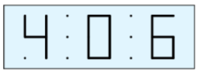
For how many minutes in total are there exactly two lights on at the same time?

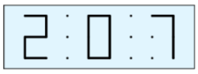
(A) 2 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

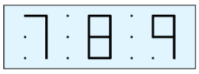
6. Christoph folds a see-through piece of foil along the dashed line.



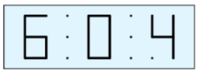
What can he then see?

(A) 

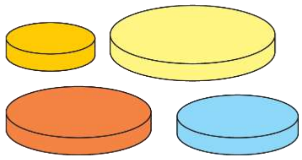
(B) 

(C) 

(D) 

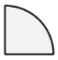
(E) 

7. Anna has four discs of different sizes. She wants to build a tower using 3 discs. A smaller disc always has to lie on top of a bigger disc.

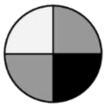


How many ways are there for Anna to build this tower?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

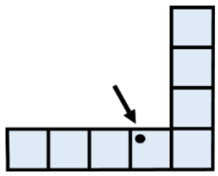
8. Daniel sticks these two pieces of paper   on this black circle: 
The two pieces of paper are not allowed to overlap.

Which picture does he get?

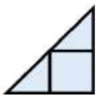
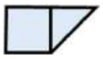
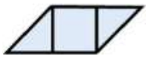
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

- 4 Point Examples -

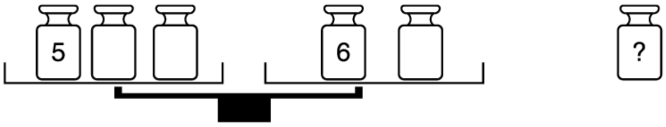
9. Using the pieces A, B, C, D and E one can fill this shape completely:



Which of the pieces lies on the dot?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

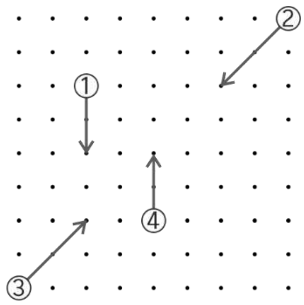
10. The six weights of a scale weigh
1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg and 6 kg.
Rosi places five weights on the two scale pans so that they are balanced. The sixth weight is left aside.



Which weight is left aside?

(A) 1 kg (B) 2 kg (C) 3 kg (D) 4 kg (E) 5 kg

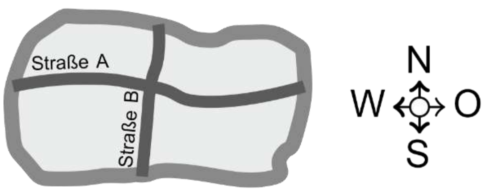
11. The diagram shows four cars 1, 2, 3 and 4. The arrows show where the cars move to in 5 seconds.



Which cars will crash into each other?

(A) 1 and 2 (B) 1 and 3 (C) 1 and 4 (D) 2 and 3 (E) 3 and 4

12. North of Straße A (street A) there are 7 houses.
East of Straße B (street B) there are 8 houses.
South of Straße A (street A) there are 5 houses.



How many houses are there West of Straße B (street B)?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

13. In a queue in front of a ferry there are 8 cars with 19 people in total. There are either 2 or 3 people in each car.

How many cars are there with exactly 2 people?

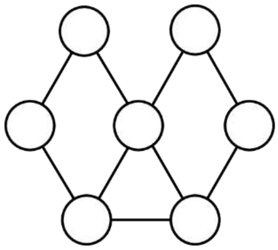
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

14. 6 beavers and 2 kangaroos are standing on the fields in this order: Of three animals in a row there is always exactly one kangaroo.

On which of these numbers stands a kangaroo?

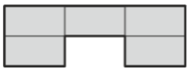
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

15. Hanni wants to colour in the circles in the diagram. When two circles are connected by a line they should have different colours.

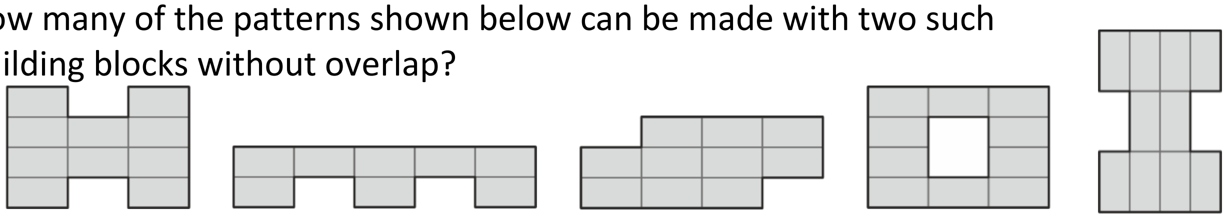


What is the minimum number of colours she needs?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

16. A building block is made up of five identical rectangles: 

How many of the patterns shown below can be made with two such building blocks without overlap?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

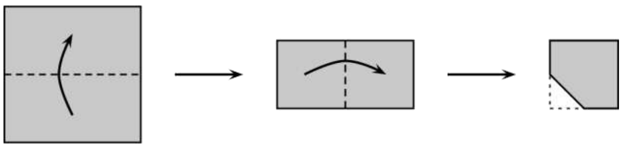
- 5 Point Examples -

17. An underground line has the six stations A, B, C, D, E and F. The train stops at every station. After reaching the end of the line A or F the train continues in the opposite direction.
The train conductor starts his journey in station B.
His first stop is in station C.

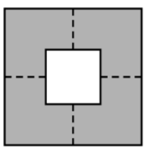
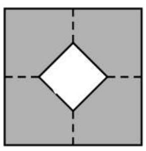
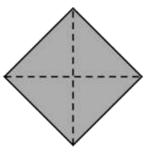
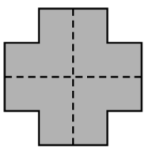
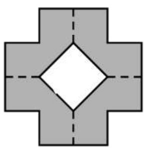
In which station will be his 46th stop?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

18. Rebecca folds a square piece of paper twice.
Then she cuts off one corner as you can see in the diagram.
Then she unfolds the paper.



What could the paper look like now?

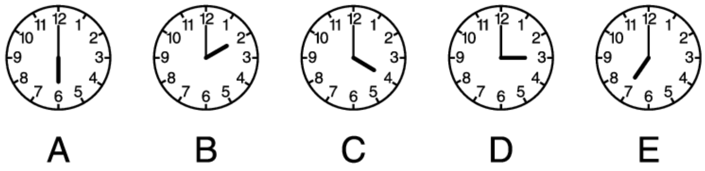
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

19. Three boys enter a room one after the other.
Hermann is not the first. Felix is not the second. Clemens is not the third.

How many different orders are there for the boys to enter the room?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)4 (E) 6

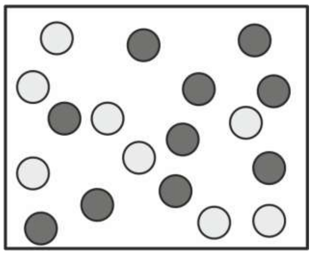
20. Five clocks are hanging on the wall. One clock is one hour ahead. Another one is one hour late and one is correct. Two clocks have stopped working.



Which clock shows the correct time?

(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

21. Adam has 9 marbles and Brenda also has 9 marbles. Together they have 8 white and 10 black marbles. Brenda has twice as many black marbles as white marbles.



How many black marbles does Adam have?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 0

22. Else has two machines R and S.
If she puts a square piece of paper into machine R it is rotated: 

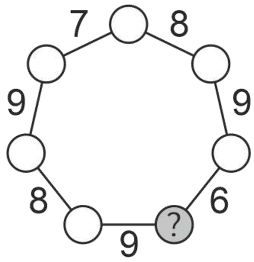
If she puts the piece of paper in machine S it is printed on: 

She wants to produce the following picture: 

In which order does Else use the two machines so that she gets this picture?

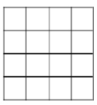
(A) SRR (B) RSR (C) RSS (D) RRS (E) SRS

23. A teacher wants to write the numbers from 1 to 7 into the circles. He writes exactly one number in each circle. When he adds up the two numbers of circles that are next to each other , he gets the number that is written between the two circles.

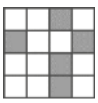
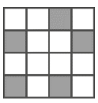
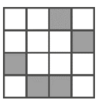
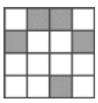
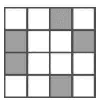


Which number does he write in the circle with the question mark?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

24. Maria colours exactly 5 cells of this grid  in grey. Then she has her 5 friends guess which cells she has coloured in and their answers are the five patterns A, B, C, D and E. Maria looks at the patterns and says: „One of you is right. The others have each guessed exactly four cells correctly."

Which pattern did Maria paint?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

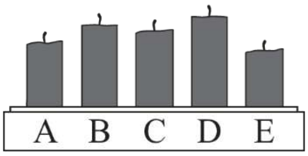
Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Écoler (3. und 4. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

Lösungsvektor

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D	C	C	E	C	A	C	E	E	A	D	A	D	C	B	D	D	B	B	D	B	B	D	E

3 Punkte Beispiele

1. Fünf Kinder zünden gleichzeitig je eine Kerze an. Lisa bläst die Kerzen zu verschiedenen Zeitpunkten aus. Sie sehen nun so aus wie im Bild.

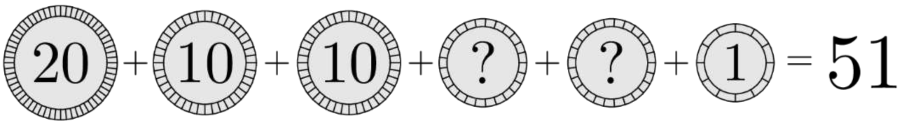


Welche Kerze hat Lisa zuerst ausgeblasen?

(A) A (B) B (C) C **(D)** D (E) E

Je länger eine Kerze brennt, desto niedriger wird sie. Deshalb muss Lisa die höchste Kerze **D** als erstes ausgeblasen haben.

2. Die beiden Spielsteine mit dem Fragezeichen haben den gleichen Wert.

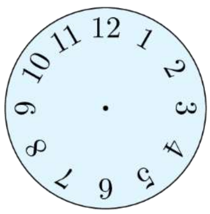


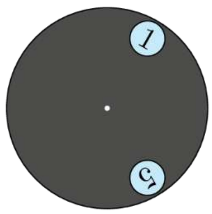
Welchen Wert musst du für das Fragezeichen einsetzen, damit die Rechnung stimmt?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 5 (D) 10 (E) 20

Rechnest du 20 + 10 + 10 + 1, so erhältst du 41. Es fehlen somit gesamt noch 10 auf 51. Beide Fragezeichen ergeben gemeinsam 10. Ein Fragezeichen muss damit für die Zahl **5** stehen, 10 : 2 = 5.

3. Auf das Ziffernblatt einer Uhr wird eine schwarze Scheibe mit zwei Löchern gelegt.



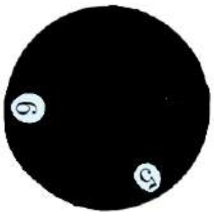


Die schwarze Scheibe wird gedreht.

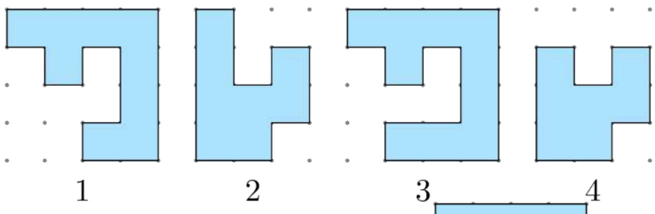
Welche beiden Zahlen könnte man gleichzeitig sehen?

(A) 4 und 9 (B) 5 und 10 **(C)** 5 und 9 (D) 6 und 9 (E) 7 und 12

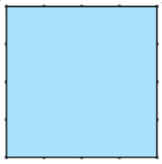
Zwischen den beiden Löchern befinden sich 3 Zahlen, 2, 3, und 4.
Nur zwischen dem Zahlenpaar **5 und 9** liegen genau 3 Zahlen.



4. Alice hat diese vier Puzzleteile:

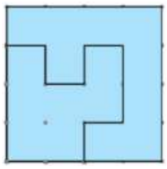


Welche zwei kann sie zu diesem Quadrat zusammensetzen?

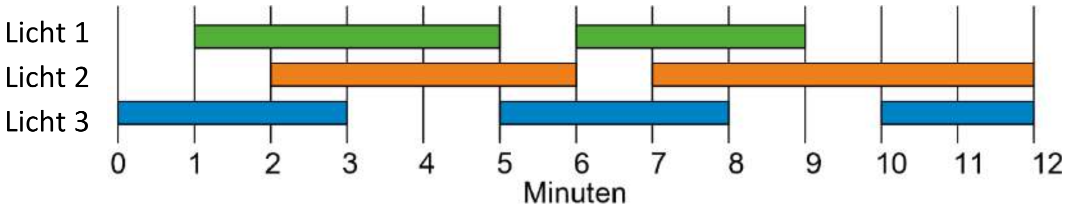


(A) 1 und 2 (B) 1 und 3 (C) 2 und 3 (D) 2 und 4 **(E)** 1 und 4

Zum Puzzleteil 1 oder 3 könnte nur 2 oder 4 passen. Da die untere Kante bei 1 nur zwei Kästchen lang ist muss es eines der gesuchten Teile sein. Dann passt das Puzzleteil **4** genau in das Puzzleteil **1**, sodass sich das Quadrat ergibt.



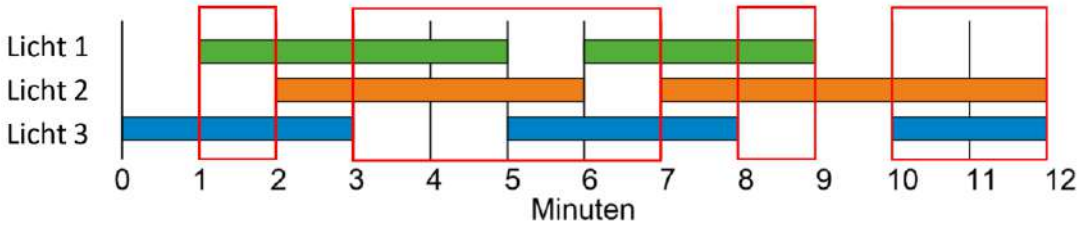
5. Maria schaltet nach dem vorgegebenen Plan zu bestimmten Zeiten die Lichter ein oder aus.



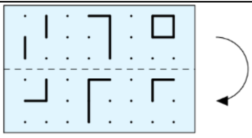
Wie viele Minuten sind insgesamt genau zwei Lichter gleichzeitig an?

(A) 2 (B) 6 **(C)** 8 (D) 9 (E) 10

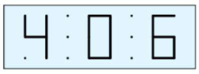
Die roten Rechtecke zeigen dir, wann genau zwei Lichter eingeschaltet sind:

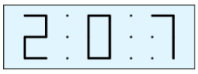


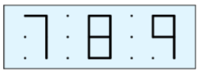
Von Minute 1 bis 2, von Minute 3 bis 7, von Minute 8 bis 9 und von Minute 10 bis 12.
Insgesamt sind es also 1 + 4 + 1 + 2 = **8** Minuten.

6. Christoph faltet die durchsichtige Folie entlang der strichlierten Linie. 

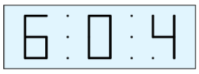
Was kann er dann sehen?

(A) 

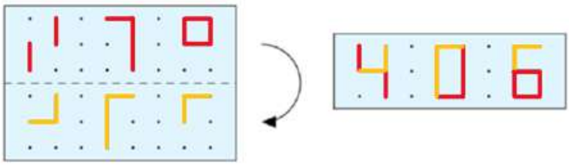
(B) 

(C) 

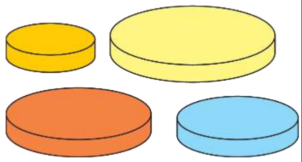
(D) 

(E) 

Hier siehst du, wie das Bild zustande kommt:

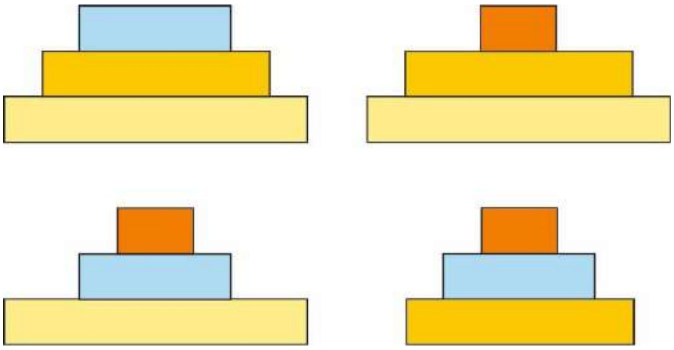


7. Anna hat vier verschieden große Scheiben. Sie möchte einen Turm aus 3 Scheiben bauen.
Dabei muss immer eine kleinere auf einer größeren liegen.
Auf wie viele Arten kann Anna den Turm bauen?

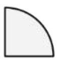


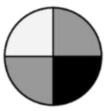
(A) 1 (B) 2 **(C)** 4 (D) 5 (E) 6

Das sind alle möglichen Türme (von vorne), die Anna bauen kann.



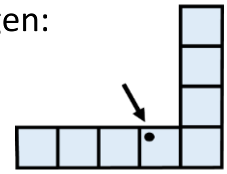
Es gibt also insgesamt **4** Möglichkeiten.

8. Daniel klebt diese zwei Papierstücke   auf diesen schwarzen Kreis: 
Dabei dürfen die beiden Papierstücke nicht überlappen.
Welches Bild erhält er?

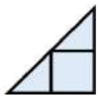
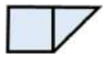
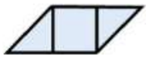
(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Antwort **E** ist die richtige, da die beiden Papierstücke hier nicht überlappen. 

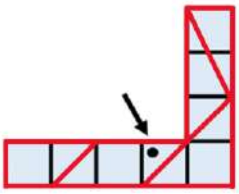
9. Mit den 5 Stücken A, B, C, D und E lässt sich diese Figur vollständig auslegen:



Welches Stück liegt auf dem Punkt?

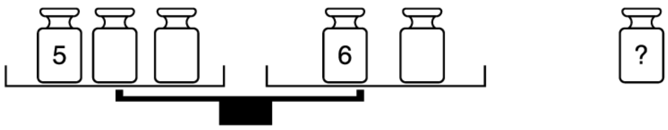
(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Hier siehst du die gelegte Figur aus den gegebenen Stücken:



E ist somit die richtige Antwort.

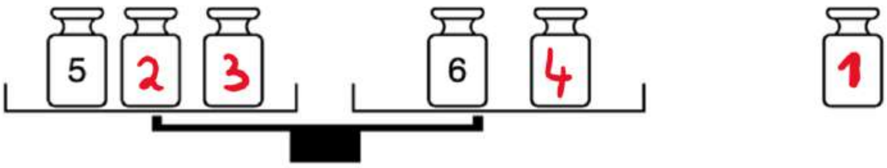
10. Die sechs Gewichte einer Waage haben 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg und 6 kg. Rosi verteilt fünf Gewichte auf die beiden Waagschalen so, dass sich die Waagschalen im Gleichgewicht befinden. Das sechste Gewicht legt sie zur Seite.



Welches Gewicht hat sie zur Seite gelegt?

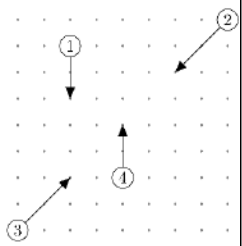
(A) 1 kg (B) 2 kg (C) 3 kg (D) 4 kg (E) 5 kg

Damit die Waage im Gleichgewicht ist, müssen auf jeder Seite gleich viele kg sein. Links sind 5 kg, rechts 6 kg. Somit musst du links um 1 kg mehr dazugeben als rechts. Das ist nur möglich, wenn du die Gewichte wie folgt verteilt sind.



1 kg ist somit das Gewicht, das Rosi zur Seite gelegt hat.

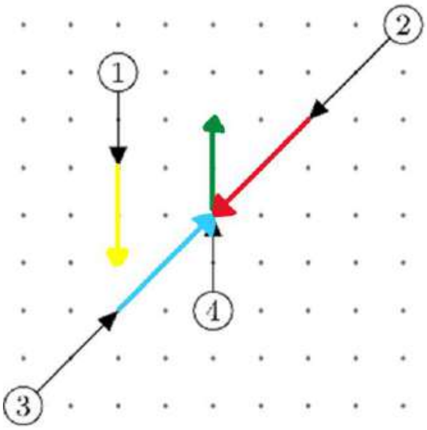
11. Im Bild sieht man vier Autos 1, 2, 3 und 4. Die Pfeile zeigen an, wohin sich die Autos in 5 Sekunden bewegen.



Welche Autos werden zusammenstoßen?

(A) 1 und 2 (B) 1 und 3 (C) 1 und 4 **(D)** 2 und 3 (E) 3 und 4

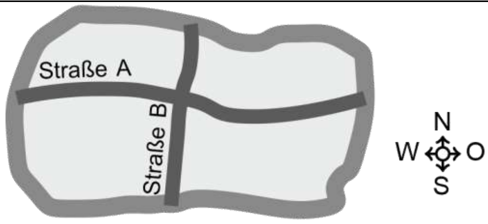
Hier siehst du, wohin sich die Autos innerhalb der nächsten 5 Sekunden bewegen werden:



Auto **2 und 3** werden zusammenstoßen.

12. Nördlich von Straße A stehen 7 Häuser.
Östlich von Straße B stehen 8 Häuser.
Südlich von Straße A stehen 5 Häuser.

Wie viele Häuser stehen westlich von Straße B?



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Nördlich der Straße A stehen 7 Häuser und südlich davon 5. Somit gibt es insgesamt 7 + 5 = 12 Häuser.
Wenn östlich von Straße 8 stehen, müssen westlich davon 12 – 8 = **4** Häuser stehen.

13. In der Warteschlange vor der Fähre stehen 8 Autos mit insgesamt 19 Personen. In jedem Auto sitzen entweder 2 oder 3 Personen.

In wie vielen Autos sitzen genau 2 Personen?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 **(D)** 5 (E) 6

Insgesamt gibt es 19 Leute. Diese müssen in zwei Gruppen geteilt werden. Die eine Gruppe muss ein Vielfaches von 3 sein, die andere ein Vielfaches von 2. Somit ergeben sich folgende Möglichkeiten: 3, 6, 9, 12, 15 und 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14. Da es insgesamt 8 Autos geben muss, kommt nur die Aufteilung von 10 + 9 = 19 Personen in Frage.
5 · 2 = 10 Personen, also **5** Autos mit zwei Personen, und 3 · 3 = 9 Personen, also 3 Autos mit drei Personen, insgesamt also 5 + 3 = 8 Autos.

14. 6 Biber und 2 Kängurus stehen auf den Feldern in dieser Reihe: 1 2 3 4 5 6 7 8

Von drei aufeinanderfolgenden Tieren ist immer genau eines ein Känguru.

Auf welcher dieser Zahlen steht ein Känguru?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

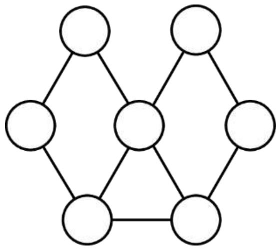
Die 2 Kängurus und 6 Biber müssen so stehen:

B B K B B K B B

1 2 3 4 5 6 7 8

Anders geht sich die Aufteilung nicht aus, da es sonst zu wenig Kängurus gibt. Auf der Zahl **3** und der Zahl 6 stehen die Kängurus.

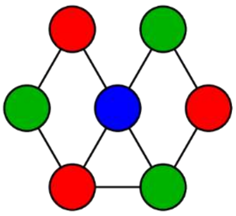
15. Hanni möchte die Kreise im Bild anmalen. Wenn zwei Kreise mit einer Linie verbunden sind, sollen sie unterschiedliche Farben haben.

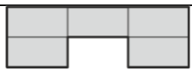


Wie viele Farben braucht sie mindestens?

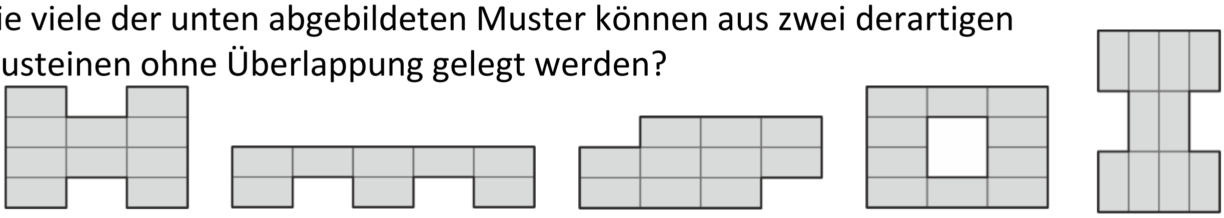
(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Mit **3** Farben kann Hanni die Kreise wie gefordert anmalen:



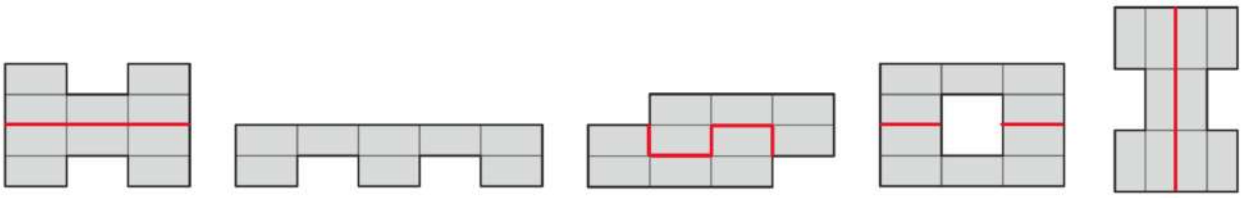
16. Ein Baustein besteht aus fünf gleichen Rechtecken: 

Wie viele der unten abgebildeten Muster können aus zwei derartigen Bausteinen ohne Überlappung gelegt werden?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 **(D)** 4 (E) 5

Es sind **4** Muster möglich. Im zweiten Muster würden die Bausteine überlappen.

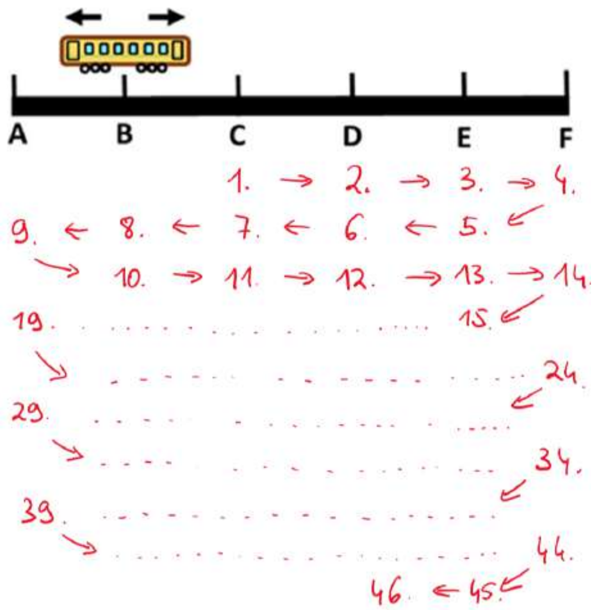


17. Eine U-Bahn-Linie hat die 6 Stationen A, B, C, D, E und F. Der Zug bleibt an jeder Station stehen. Nach dem Halt in der Endstation A oder F fährt er in der umgekehrten Richtung weiter.
Der Zugführer beginnt seine Fahrt in Station B.
Sein erster Halt ist in Station C.

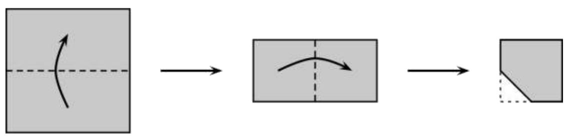
In welcher Station wird sein 46. Halt sein?

(A) A (B) B (C) C **(D)** D (E) E

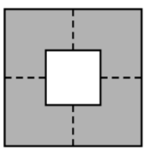
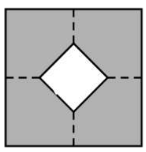
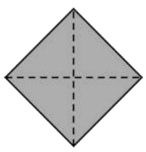
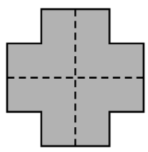
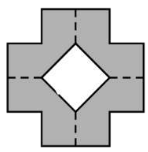
In Station F befindet sich der Zug beim 4., 14., 24., 34. und 44. Halt. Der 46. Halt ist somit in Station **D**.



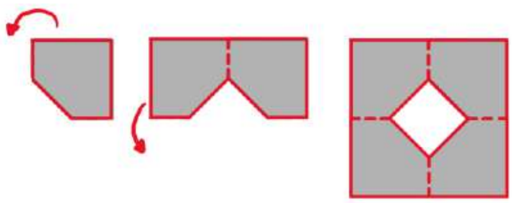
18. Rebecca faltet ein quadratisches Papier zwei Mal. Dann schneidet sie eine Ecke ab, wie du im Bild sehen kannst.
Danach faltet sie das Papier wieder auseinander.



Wie kann das Papier jetzt aussehen?

(A)  **(B)**  (C)  (D)  (E) 

Hier siehst du, wie das Blatt wieder aufgefaltet wird:



19. Drei Buben betreten nacheinander einen Raum.
Hermann ist nicht der Erste. Felix ist nicht der Zweite. Clemens ist nicht der Dritte.

In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können, die Buben den Raum betreten?

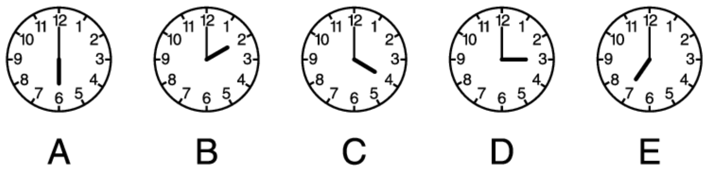
(A) 1 **(B)** 2 (C) 3 (D)4 (E) 6

Folgendes ist möglich:

Reihenfolge 1:	Reihenfolge 2:
Felix	Clemens
Clemens	Herrmann
Herrmann	Felix

Somit gibt es **2** mögliche Reihenfolgen.

20. An der Wand hängen fünf Uhren. Eine Uhr geht eine Stunde vor. Eine andere geht eine Stunde nach und eine geht richtig. Zwei Uhren sind stehen geblieben.



Welche Uhr zeigt die richtige Zeit an?

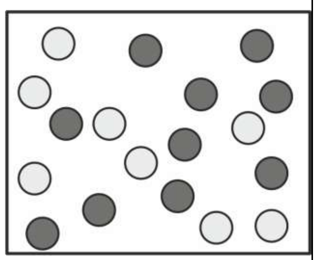
(A) A (B) B (C) C **(D)** D (E) E

Da eine Uhr richtig geht, eine 1 Stunde vor und eine 1 Stunde nach, muss es drei Uhren geben, die einen Zeitunterschied von je einer Stunde anzeigen:
Das sind die Uhren B, D und C.
Die Uhr D zeigt als einzige die Uhrzeit zwischen der Uhr, die nachgeht, B, und der Uhr, die vorgeht, C, an. Somit geht **D** richtig.

21. Adam hat 9 Murmeln und Brenda hat auch 9 Murmeln. Zusammen haben sie 8 weiße und 10 schwarze Murmeln. Brenda hat doppelt so viele schwarze Murmeln wie weiße Murmeln.

Wie viele schwarze Murmeln hat Adam?

(A) 3 **(B)** 4 (C) 5 (D) 6 (E) 0



Wenn Brenda 9 Kugeln hat und doppelt so viele schwarze wie weiße Kugeln hat, muss sie 6 schwarze und 3 weiße Kugeln haben, da 6 + 3 = 9 ist.
Brenda hat somit 6 der insgesamt 10 schwarzen Kugeln, weshalb Adam 10 – 6 = **4** schwarze Kugeln haben muss.

22. Else hat zwei Maschinen R und S.
Wenn sie ein quadratisches Blatt in Maschine R gibt, wird es gedreht:

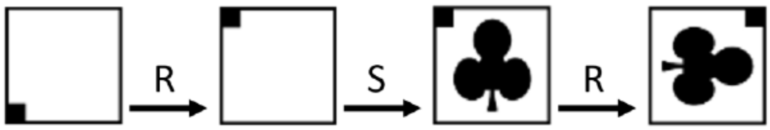
Wenn sie das Blatt in Maschine S gibt, wird es bedruckt:

Sie möchte dieses Bild erstellen: 

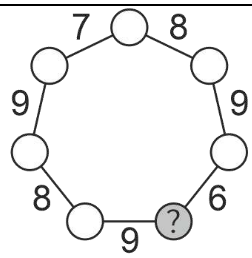
In welcher Reihenfolge verwendet Else die beiden Maschinen, damit dieses Bild entsteht?

(A) SRR (B) RSR (C) RSS (D) RRS (E) SRS

Hier siehst du die Reihenfolge, in der das Blatt durch die Maschinen geht.



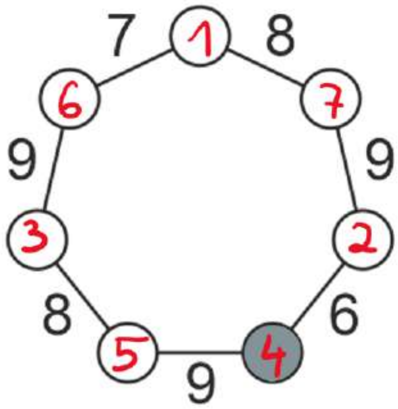
23. Ein Lehrer möchte die Zahlen von 1 bis 7 in die Kreise schreiben. Er schreibt in jeden Kreis genau eine Zahl. Zählt er die beiden Zahlen in benachbarten Kreisen zusammen, so erhält er genau die Zahl, die zwischen den beiden Kreisen steht.

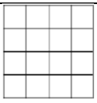


Welche Zahl muss er in den Kreis mit dem Fragezeichen schreiben?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

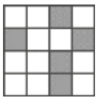
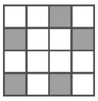
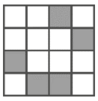
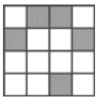
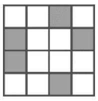
Er muss die Zahl **4** hineinschreiben:



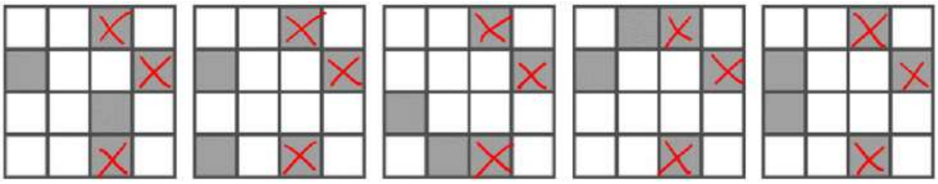
24. Maria färbt genau 5 Felder dieses Rasters  grau. Dann lässt sie ihre 5 Freunde raten, welche Felder sie gefärbt hat, und erhält als Antwort die 5 Muster A, B, C, D und E.

Maria betrachtet die Muster und sagt: „Einer von euch hat recht. Die übrigen haben alle genau vier Felder richtig erraten.“

Welches Muster hat Maria gemalt?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

Die Felder mit den roten Kreuzen sind bei allen Mustern A, B, C, D und E eingefärbt und müssen deshalb auf alle Fälle stimmen.



Nun musst du alle Muster durchgehen:

Würde A stimmen, so hätte C nur drei richtige Felder, was nicht sein darf. A kann somit nicht stimmen.

Würde B stimmen, so hätte wieder C nur drei richtige Felder.

Würde C stimmen, so hätten A, B und auch D jeweils nur drei richtige Felder.

Würde D stimmen, so hätte C nur drei richtige Felder.

E muss somit stimmen, da alle anderen Muster dadurch jeweils genau vier richtig eingefärbte Felder haben.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Kategorie: Benjamin, Schulstufe: 5. – 6.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 60 min.
jede richtige Antwort Aufgabe 1. - 8. 3 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 9. - 16. 4 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 17. - 24. 5 Punkte
jede Aufgabe ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 24 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 24) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

pwc

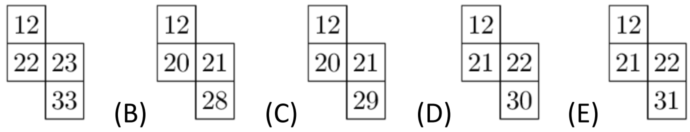
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

- 3 Punkte Beispiele -

1. Holger schreibt die Zahlen bis 40 auf die gleiche Art wie im Bild weiter in die Tabelle.
Welches der Stücke A bis E kann er dann aus der Tabelle schneiden?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12				

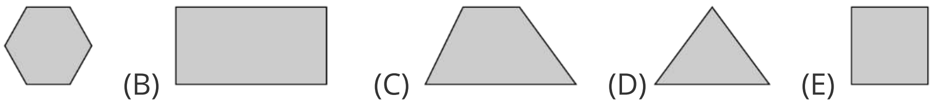


(A) (B) (C) (D) (E)

2. Zündhölzer werden wie abgebildet zu Zahlen angeordnet. Um die Zahl 15 zu bilden, benötigt man 7 Zündhölzer. Ebenso viele benötigt man, um die Zahl 8 zu bilden.
Wie lautet die größtmögliche Zahl, die man mit 7 Zündhölzern bilden kann?

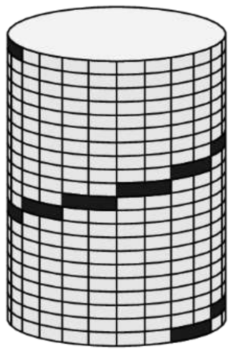
(A) 31 (B) 51 (C) 74 (D) 711 (E) 800

3. Welche der Figuren kann **nicht** durch eine einzige gerade Linie in zwei Dreiecke unterteilt werden?



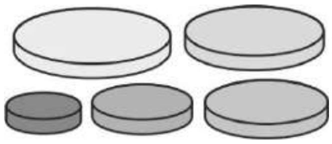
(A) (B) (C) (D) (E)

4. Es sind neun Stufen einer zylindrisch angeordneten Treppe zu sehen, die am Boden beginnt und ganz nach oben führt. Alle Stufen sind gleich hoch.
Wie viele Stufen kann man **nicht** sehen?



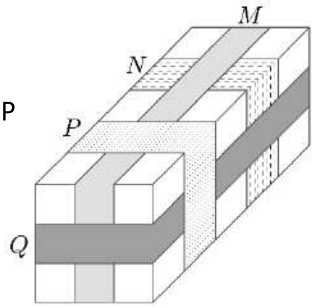
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

5. Anna hat fünf verschieden große Scheiben. Sie möchte einen Turm aus 4 Scheiben bauen.
Dabei muss immer eine kleinere auf einer größeren liegen.
Auf wie viele Arten kann Anna den Turm bauen?



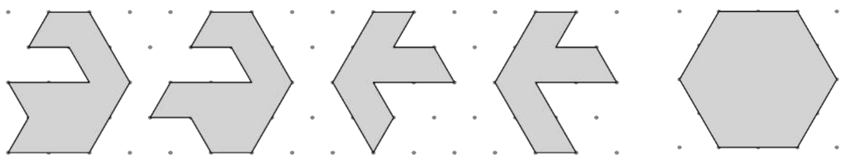
(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 12 (E) 20

6. Um eine Schachtel wurden die vier Bänder M, N, P und Q gewickelt.
In welcher Reihenfolge wurden sie um die Schachtel gewickelt?



(A) M, N, Q, P (B) N, M, P, Q (C) N, Q, M, P (D) N, M, Q, P (E) Q, N, M, P

7. Alice hat vier Puzzleteile.

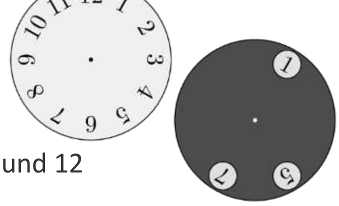


1 2 3 4

Welche zwei können zu einem Sechseck zusammengefügt werden?

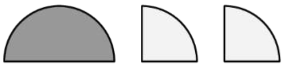
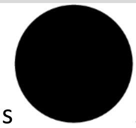
(A) 1 und 2 (B) 1 und 3 (C) 2 und 3 (D) 2 und 4 (E) 1 und 4

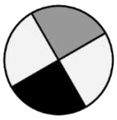
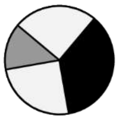
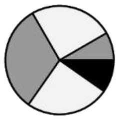
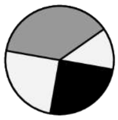
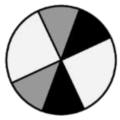
8. Auf das Ziffernblatt einer Uhr wird eine dunkle Kreisscheibe mit drei Löchern gelegt (siehe Abbildung). Dann verdreht man die Scheibe um ihren Mittelpunkt.
Welche Zahlen kann man gleichzeitig sehen?



(A) 4, 6 und 12 (B) 1, 5 und 10 (C) 2, 4 und 9 (D) 3, 6 und 9 (E) 5, 7 und 12

- 4 Punkte Beispiele -

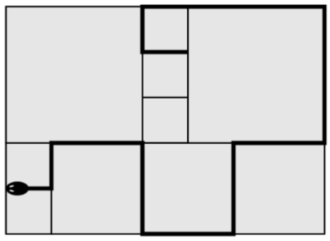
9. Jan klebt diese drei Papierstücke  auf diesen schwarzen Kreis .
Welches Bild kann er dabei **nicht** erhalten?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Franziska schreibt drei aufeinanderfolgende zweistellige Zahlen an. Diese sind aufsteigend geordnet. Anstatt der Ziffern verwendet sie Symbole und schreibt □◊, ♡△, ♡□.
Wie sieht Franziskas nächste Zahl aus?

(A) □♡ (B) □□ (C) ♡♡ (D) ◊□ (E) ♡◊

11. Eine Terrasse ist mit quadratischen Fliesen in drei unterschiedlichen Größen ausgelegt. Die kleinste Fliese hat einen Umfang von 80 cm. Eine Schlange hat sich entlang der Kanten der Fliesen gelegt (siehe Abbildung).
Wie lang ist die Schlange?



(A) 380 cm (B) 400 cm (C) 420 cm (D) 440 cm (E) 1680 cm

12. In einem Spiegel sieht man das Bild einer digitalen Uhr: 
Welches Bild von der Uhr kann man 30 Minuten später im Spiegel sehen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Maria, Peter, Richard und Tina spielten im Klassenzimmer Fußball. Dabei wurde eine Fensterscheibe zerbrochen. Als die Direktorin herausfinden wollte, wer die Scheibe zerbrochen hat, bekam sie folgende Antworten:
Maria: „Es war Peter." Peter: „Es war Richard." Richard: „Ich war es nicht." Tina: „Ich war es nicht."
Es stellte sich später heraus, dass nur ein Kind die Wahrheit sagte. Wer zerbrach die Scheibe?

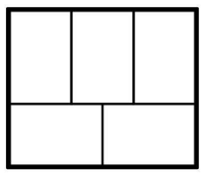
(A) Maria (B) Tina (C) Peter (D) Richard (E) Das kann nicht entschieden werden.

14. Die Summen der Zahlen in den weißen und in den grauen Feldern sollen gleich groß sein.
Welche zwei Zahlen müssen getauscht werden, damit die Summen gleich groß werden?

1	3	5	2	13
7	4	6	8	11

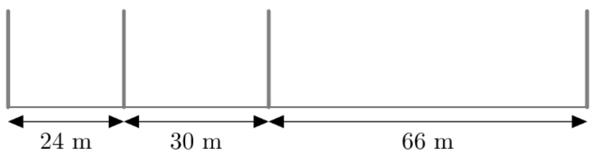
(A) 1 und 11 (B) 2 und 8 (C) 3 und 7 (D) 4 und 13 (E) 7 und 13

15. Das große Rechteck besteht aus fünf kleinen Rechtecken (siehe Abbildung). Lukas möchte die kleinen Rechtecke rot, blau und gelb färben. Zwei angrenzende Rechtecke sollen mit verschiedenen Farben gefärbt werden.
Auf wie viele verschiedene Arten kann Lukas das tun?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

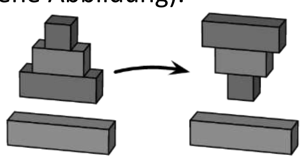
16. Entlang einer 120 m langen Laufbahn wurden 4 Pflöcke gesetzt.
Wie viele weitere Pflöcke müssen gesetzt werden, damit die Laufbahn dadurch in gleich lange Teilstrecken unterteilt wird?

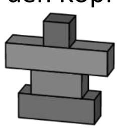


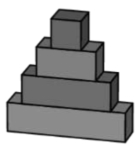
(A) 12 (B) 15 (C) 17 (D) 20 (E) 37

- 5 Punkte Beispiele -

17. Bei einem Spiel darf man gestapelte Bausteine in einem Spielzug umschichten, indem man (einige oder alle) Bausteine von oben nimmt, sie auf den Kopf dreht und an denselben Platz zurückstellt (siehe Abbildung).



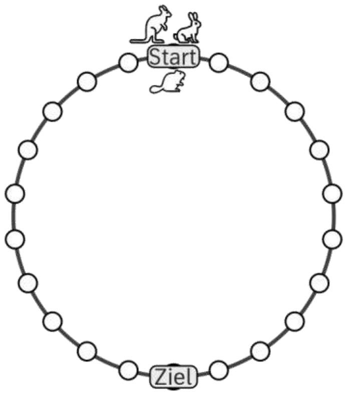
Goran beginnt mit diesem Turm: 

Am Ende sollen die Bausteine der Größe nach so geordnet sein: 
Wie viele Spielzüge benötigt Goran mindestens?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

18. Robert und Sonja spielen ein Spiel mit folgenden Regeln: Abwechselnd können sie in jedem Spielzug 1, 2, 3, 4 oder 5 Karten vom Stapel nehmen. Wer die letzte Karte nimmt, hat verloren.
Im Augenblick befinden sich 10 Karten im Stapel, und Robert ist gerade an der Reihe.
Wie viele Karten soll er Sonja übriglassen, damit er sicher gewinnen kann?

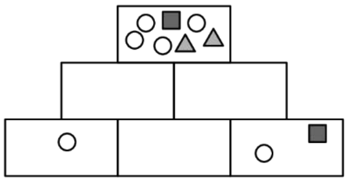
(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5

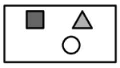
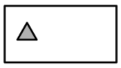
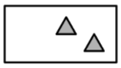
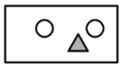


19. Ein Hase, ein Biber und ein Känguru machen einen Wettbewerb. Alle drei beginnen gleichzeitig beim Start und springen in die gleiche Richtung.
Mit einem Sprung kommt der Biber immer ein Feld weiter. Der Hase kommt mit einem Sprung immer zwei Felder und das Känguru immer drei Felder weiter.
Sieger ist, wer mit der geringsten Anzahl an Sprüngen genau im Ziel landet.
Wer gewinnt den Wettbewerb?

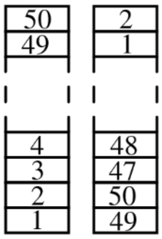
(A) Känguru und Hase (B) Hase (C) Känguru (D) Biber (E) Känguru und Biber

20. Tina zeichnet in jedes Feld der Pyramide Figuren. Jedes Feld in der zweiten und dritten Reihe enthält genau die Figuren der beiden darunterliegenden Felder.
In einige der Felder hat sie die Figuren schon gezeichnet.
Welche Figuren zeichnet sie in das leere Feld in der untersten Reihe?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

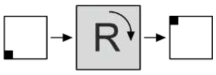
21. Ein Turm besteht aus Blöcken, die von unten nach oben mit den Zahlen von 1 bis 50 beschriftet sind.
Bob baut aus diesen Blöcken einen neuen Turm.
Dabei nimmt er jeweils die obersten zwei Blöcke vom alten Turm herunter und legt sie ohne ihre Reihenfolge zu verändern auf den neuen Turm (siehe Abbildung).
Welche beiden Bausteine liegen übereinander, wenn er mit dem Umschlichten fertig ist?



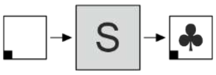
(A) 29 und 28 (B) 34 und 35 (C) 29 und 26 (D) 31 und 33 (E) 27 und 30

22. Martin hat drei Karten, die auf beiden Seiten mit einer Zahl beschriftet sind.
Martin legt die drei Karten, ohne Vorder- und Rückseite zu beachten, auf den Tisch. Er addiert die drei Zahlen, die er dann sehen kann.
Wie viele verschiedene Summen kann Martin dabei erhalten?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) Es ist eine andere Anzahl.

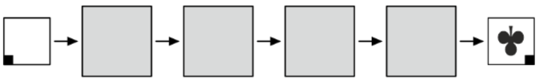
23. Anna hat zwei Maschinen R und S. Wenn sie ein quadratisches Blatt in Maschine R gibt, wird es im Uhrzeigersinn um 90° gedreht. 

(Hinweis: Achte auf die Markierung im Eck!)

Wenn sie das Blatt in Maschine S gibt, wird es bedruckt. 

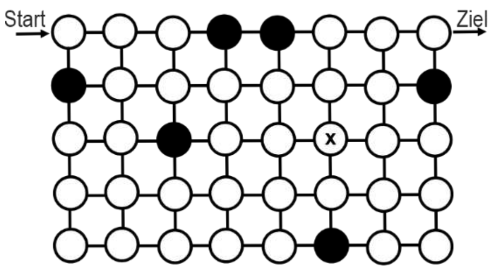
Sie möchte dieses Bild herstellen: 

In welcher Reihenfolge verwendet Anna die beiden Maschinen, damit dieses Bild entsteht?



(A) SRRR (B) RSRR (C) SRSR (D) RRRS (E) SRRS

24. Monika möchte einen Weg durch das Labyrinth vom Start bis zum Ende finden. Dabei muss sie folgende Regeln beachten:
Sie darf sich nur waagrecht beziehungsweise senkrecht fortbewegen.
Sie muss jeden weißen Kreis genau einmal betreten, darf aber keinen schwarzen Kreis betreten.
In welche Richtung muss Monika gehen, wenn sie im Kreis mit dem x angelangt ist?



(A) ↓ (B) ↑ (C) → (D) ←
(E) es gibt mehrere Möglichkeiten

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Level: Benjamin, Grade: Schulstufe 5 + 6

Name:	
School:	
Class:	

Time: 60 min.
24 starting points
each correct answer to questions 1. – 8.: 3 points
each correct answer to questions 9. – 16.: 4 points
each correct answer to questions 17. – 24.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 24). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16

17	18	19	20	21	22	23	24

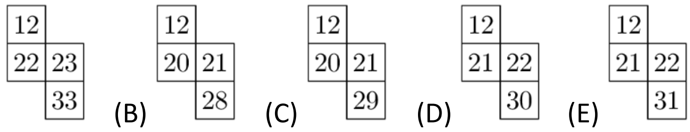
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2023
Level Benjamin (Schulstufe 5 and 6)
Austria – 16. 3. 2023

- 3 Point Examples -

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12				

1. Holger writes the numbers up to 40 in the table in the same way as shown.
Which of the pieces A to E can he then cut from the table?

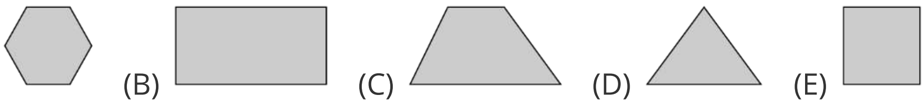


(A) (B) (C) (D) (E)

2. Matchsticks are arranged to form numbers as shown. To form the number 15 one needs 7 matchsticks.
To form the number 8 one needs the same amount.
What is the biggest number that one can build using 7 matchsticks?

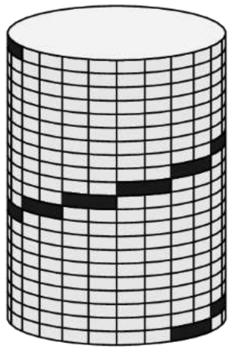
(A) 31 (B) 51 (C) 74 (D) 711 (E) 800

3. Which of the shapes **cannot** be split into two triangles using a single straight line?



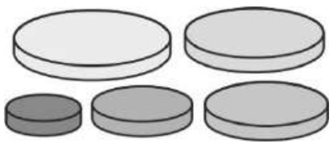
(A) (B) (C) (D) (E)

4. Nine steps of a staircase arranged in a cylindrical order starting at the bottom and leading all the way to the top can be seen. All steps are equally high.
How many steps **cannot** be seen?



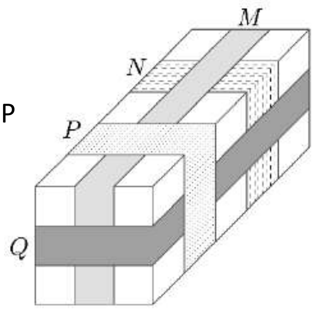
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

5. Anna has five discs of different sizes. She wants to use 4 of them to build a tower.
She always has to place a smaller one on top of a bigger one.
How many ways are there for Anna to build the tower?



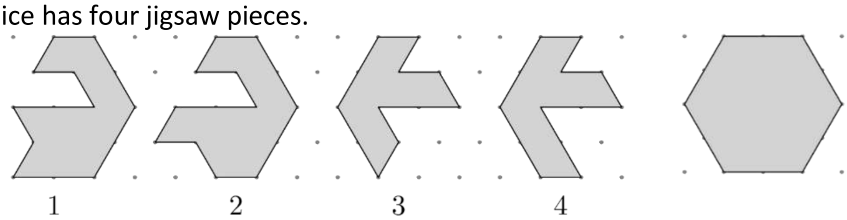
(A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 12 (E) 20

6. Four ribbons M, N, P and Q are wrapped around a box.
In which order were they wrapped around the box?



(A) M, N, Q, P (B) N, M, P, Q (C) N, Q, M, P (D) N, M, Q, P (E) Q, N, M, P

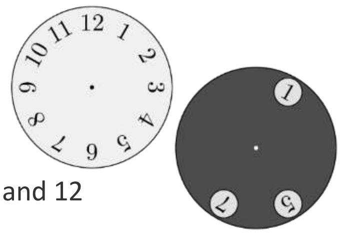
7. Alice has four jigsaw pieces.



Which two can be fitted together to form a hexagon?

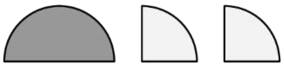
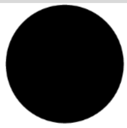
(A) 1 and 2 (B) 1 and 3 (C) 2 and 3 (D) 2 and 4 (E) 1 and 4

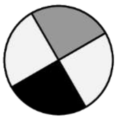
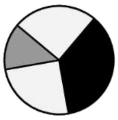
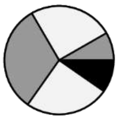
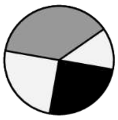
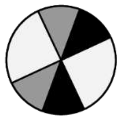
8. A dark disc with three holes is placed on top of a dial of a watch (see diagram). Then the disc is rotated around its centre.
Which numbers can be seen at the same time?



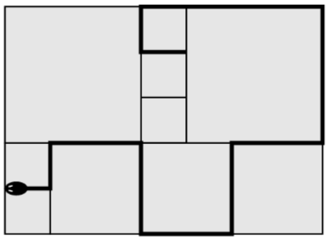
(A) 4, 6 and 12 (B) 1, 5 and 10 (C) 2, 4 and 9 (D) 3, 6 and 9 (E) 5, 7 and 12

- 4 Point Examples -

9. Jan sticks these three pieces of paper  on top of a black circle .
Which picture can he **not** obtain?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

10. Franziska writes down three consecutive two-digit numbers. They are in increasing order. Instead of the digits she uses symbols and writes □◊, ♡△, ♡□.
What does Franziska's next number look like?
(A) □♡ (B) □□ (C) ♡♡ (D) ◊□ (E) ♡◊



11. A terrace is covered with square tiles of different sizes. The smallest tile has a perimeter of 80 cm. A snake lay down along the edges of the tiles (see diagram).
How long is the snake?
(A) 380 cm (B) 400 cm (C) 420 cm (D) 440 cm (E) 1680 cm

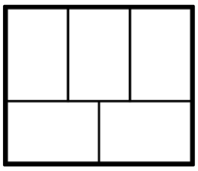
12. The picture of a digital watch can be seen in a mirror: 
Which picture of the watch can be seen in the mirror 30 minutes later?
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

13. Maria, Peter, Richard and Tina play football in the classroom. While doing so a window pane broke. When the head mistress wanted to find out who broke the window pane she got the following answers:
Maria: „It was Peter." Peter: „It was Richard." Richard: „It wasn't me." Tina: „It wasn't me."
Later is became clear that only one child spoke the truth. Who broke the window pane?
(A) Maria (B) Tina (C) Peter (D) Richard (E) It cannot be determined.

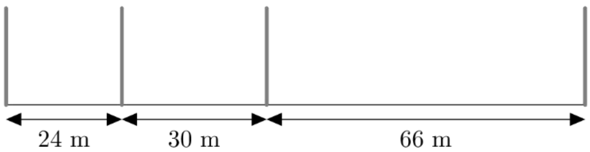
14. The sums of the numbers in the white and in the grey fields should be equally big.
Which two numbers have to be swapped so that the sums are equally big?
(A) 1 and 11 (B) 2 and 8 (C) 3 and 7 (D) 4 and 13 (E) 7 and 13

1	3	5	2	13
7	4	6	8	11

15. The big rectangle is made up of five small rectangles (see diagram). Lukas wants to colour in the small rectangles in red, blue and yellow. Two rectangles next to each other should be coloured in different colours.
How many ways are there for Lukas to do that?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

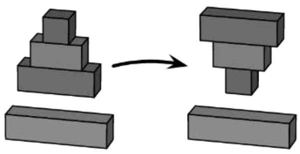


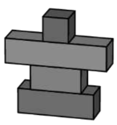
16. 4 posts are placed along a 120 m long running track.
How many more posts have to be placed so that the running track is split into equally long sections that way?
(A) 12 (B) 15 (C) 17 (D) 20 (E) 37

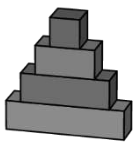


- 5 Point Examples -

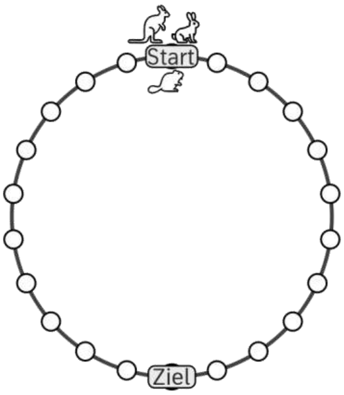
17. In a game one is allowed to take (some or all) building blocks from the top of a stack of building blocks, turn them upside down and place them back in the same position within one move (see diagram).



Goran starts with this stack of building blocks: 

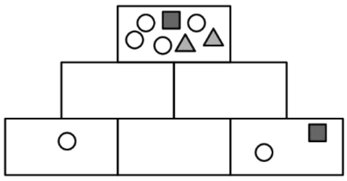
In the end all building blocks should be ordered according to size like this: 
What is the minimum number of moves Goran needs to make?
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

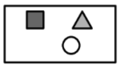
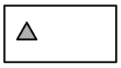
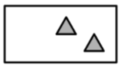
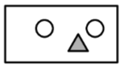
18. Robert and Sonja play a game with the following rules: taking it in turn they can take 1, 2, 3, 4 or 5 cards from the pile on each move. Whoever takes the last card has lost.
At the moment there are 10 cards on the pile and it is Robert's turn.
How many cards should he leave for Sonja so that he can be certain to win?
(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5



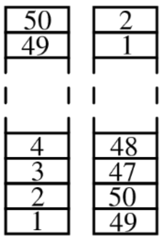
19. A rabbit, a beaver and a kangaroo are having a competition. All three begin at the same time from the "Start" and hop in the same direction.
The beaver always moves one position forwards with each jump. The rabbit always moves two positions forwards with one jump and the kangaroo always three positions.
Whoever takes the least amount of jumps to land exactly in the position labelled „Ziel" is the winner.
Who wins the competition?
(A) Kangaroo and rabbit (B) Rabbit (C) Kangaroo (D) Beaver (E) Kangaroo and beaver

20. Tina draws shapes into each field of the pyramid. Each field in the second and third row contains exactly the shapes of the two fields below. Some fields are already done.
Which shapes does she draw into the empty field of the bottom row?

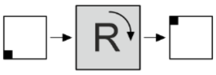


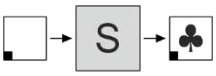
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

21. A tower is made up of bricks that are labelled with the numbers from 1 to 50 from bottom to top.
Bob uses these bricks to build a new tower.
Each time he takes the two topmost bricks off the old tower and places them down on top of the new tower without changing their order (see diagram).
Which two bricks lie on top of each other when he is finished with the re-arrangement?
(A) 29 and 28 (B) 34 and 35 (C) 29 and 26 (D) 31 and 33 (E) 27 and 30

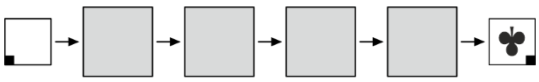


22. Martin has three cards that are labelled on both sides with a number.
Martin places the three cards on the table without paying attention to back or front. He adds the three numbers that he can then see.
How many different sums can Martin get that way?
(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) A different amount.

23. Anna has two machines R and S. If she places a square piece of paper in machine R it is rotated 90° in a clockwise direction. 

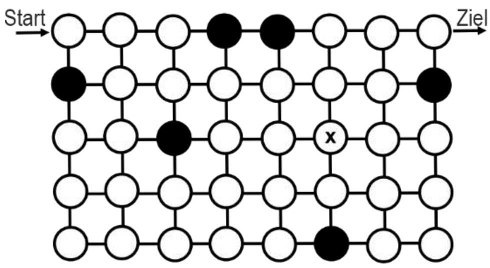
(Hint: Note the marking in the corner!)
If she places the piece of paper in machine S, it gets printed on. 

She wants to produce this picture: 
In which order does Anna use the two machines so that this picture is made?



(A) SRRR (B) RSRR (C) SRSR (D) RRRS (E) SRRS

24. Monika wants to find a path through the labyrinth from 'Start' to 'Ziel'.
She has to stick to the following rules:
She is only allowed to move horizontally and vertically respectively.
She has to enter every white circle exactly once but is not allowed to enter a black circle.
In which direction does Monika have to move forwards when she reaches the circle marked with x?
(A) ↓ (B) ↑ (C) → (D) ←
(E) there are several possibilities



Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Benjamin (5. und 6. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

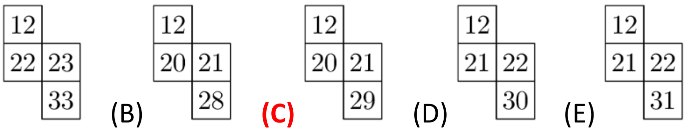
– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
C	D	A	D	B	D	B	A	C	C	C	D	B	A	D	C	B	C	E	D	E	E	B	A

- 3 Punkte Beispiele -

1. Holger schreibt die Zahlen bis 40 auf die gleiche Art wie im Bild weiter in die Tabelle. Welches der Stücke A bis E kann er dann aus der Tabelle schneiden?

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12				



(A) (B) **(C)** (D) (E)

Lösung: In der ersten Reihe stehen die Zahlen 1 bis 8. Die zweite Reihe beginnt mit der Zahl 9, die genau unter der Zahl 1 steht. Somit muss jede Zahl in der zweiten Reihe um 8 größer sein als die Zahl, die genau oberhalb in der ersten Reihe steht, jede Zahl in der dritten Reihe um 8 größer als die Zahl in der zweiten Reihe u.s.w.

2. Zündhölzer werden wie abgebildet zu Zahlen angeordnet. Um die Zahl 15 zu bilden, benötigt man 7 Zündhölzer. Ebenso viele benötigt man, um die Zahl 8 zu bilden.
Wie lautet die größtmögliche Zahl, die man mit 7 Zündhölzern bilden kann?

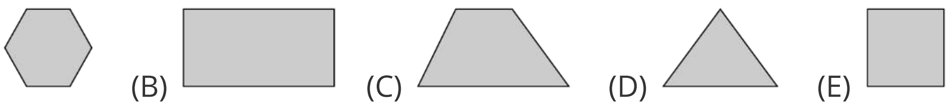
(A) 31 (B) 51 (C) 74 **(D)** 711 (E) 800

Lösung: Jede Ziffer benötigt verschieden viele Zündhölzer, die Ziffer 1 nur zwei, und die Ziffer 8 benötigt sogar 7 Zündhölzer. Die beiden größten Zahlen benötigen folgende Anzahl von Zündhölzern:

711: **7** Zündhölzer

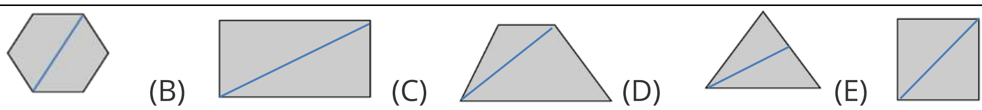
800: 19 Zündhölzer

3. Welche der Figuren kann **nicht** durch eine einzige gerade Linie in zwei Dreiecke unterteilt werden?



(A) (B) (C) (D) (E)

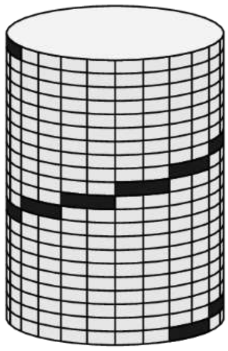
Lösung:



(A) (B) (C) (D) (E)

4. Es sind neun Stufen einer zylindrisch angeordneten Treppe zu sehen, die am Boden beginnt und ganz nach oben führt. Alle Stufen sind gleich hoch.
Wie viele Stufen kann man **nicht** sehen?

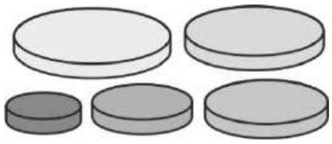
(A) 9 (B) 10 (C) 11 **(D)** 12 (E) 13



Lösung: Der Zylinder besteht aus 21 „Stufen“, davon sind 9 sichtbar. 21 – 9 = **12**

5. Anna hat fünf verschieden große Scheiben. Sie möchte einen Turm aus 4 Scheiben bauen.
Dabei muss immer eine kleinere auf einer größeren liegen.
Wie viele Arten kann Anna den Turm bauen?

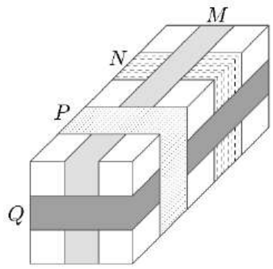
(A) 4 **(B)** 5 (C) 9 (D) 12 (E) 20



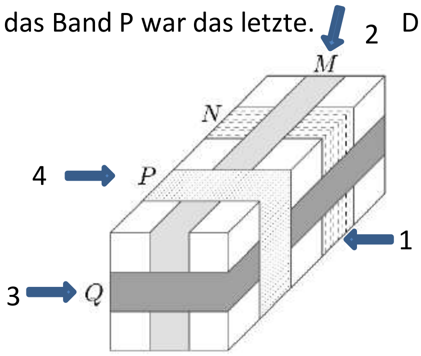
Lösung: Anna nummeriert die Scheiben von der kleinsten, mit der Nummer 1, bis zur größten, Nummer 5.
Sie kann nun also folgende Türme bauen, wenn sie sich an die Vorgabe hält:
1234, 1235, 1245, 1345, 2345. Es gibt daher **fünf** verschiedene Arten.

6. Um eine Schachtel wurden die vier Bänder M, N, P und Q gewickelt.
In welcher Reihenfolge wurden sie um die Schachtel gewickelt?

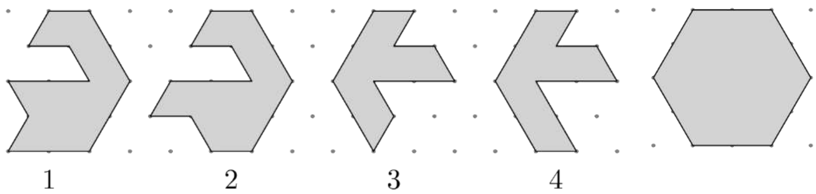
(A) M, N, Q, P (B) N, M, P, Q (C) N, Q, M, P **(D)** N, M, Q, P (E) Q, N, M, P



Lösung: Das Band P überdeckt M, Q und auch N, da N von Q überdeckt wird. Q überdeckt M und N. M überdeckt N.
Das Band N wird von allen Bändern überdeckt, war deshalb das erste, das herumgewickelt wurde.
Dann folgt M, gefolgt von Q und das Band P war das letzte. Die richtige Reihenfolge ist somit: **N,M,Q,P**

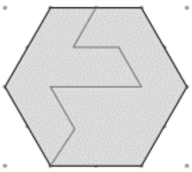


7. Alice hat vier Puzzleteile.

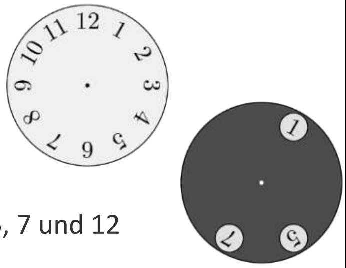


Welche zwei können zu einem Sechseck zusammengefügt werden?

(A) 1 und 2 **(B)** 1 und 3 (C) 2 und 3 (D) 2 und 4 (E) 1 und 4

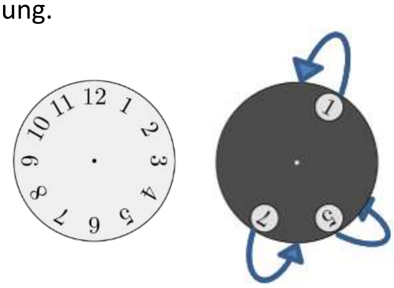
Lösung:  Die Teile **1 und 3** ergeben das Sechseck.

8. Auf das Ziffernblatt einer Uhr wird eine dunkle Kreisscheibe mit drei Löchern gelegt (siehe Abbildung). Dann verdreht man die Scheibe um ihren Mittelpunkt.
Welche Zahlen kann man gleichzeitig sehen?

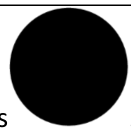


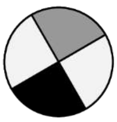
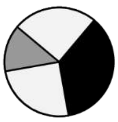
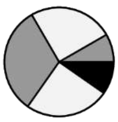
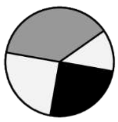
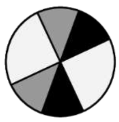
(A) 4, 6 und 12 (B) 1, 5 und 10 (C) 2, 4 und 9 (D) 3, 6 und 9 (E) 5, 7 und 12

Lösung: Dreht man die Scheibe mit den drei Löchern nur um eine Stunde gegen den Uhrzeigersinn, dann liefert uns **A** die richtige Lösung.



- 4 Punkte Beispiele -

9. Jan klebt diese drei Papierstücke  auf diesen schwarzen Kreis .
Welches Bild kann er dabei **nicht** erhalten?

(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Lösung: Der dunkelgraue Halbkreis kann nicht mehr als die Hälfte des schwarzen Kreises überdecken. In der Darstellung bei der vorgeschlagenen Lösung **C** überdeckt der dunkelgraue Halbkreis allerdings mehr als die Hälfte, und kann somit nicht mit den vorgegebenen Papierstücken erhalten werden.

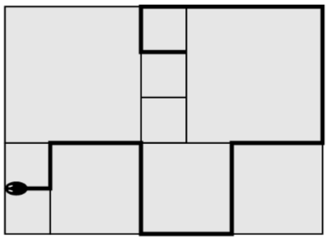
10. Franziska schreibt drei aufeinanderfolgende zweistellige Zahlen an. Diese sind aufsteigend geordnet. Anstatt der Ziffern verwendet sie Symbole und schreibt □◊, ♡△, ♡□.
Wie sieht Franziskas nächste Zahl aus?

(A) □♡ (B) □□ **(C)** ♡♡ (D) ◊□ (E) ♡◊

Lösung: Franziska schreibt zweistellige Zahlen an. Da ihre Zehnerziffer sich bei der zweiten Zahl ändert, kann man daraus schließen, dass ◊ = 9 ist, △ = 0 und □ = 1. Ihre erste Zahl lautet somit 19, damit muss ♡ = 2 sein.
Da die dritte Zahl 21 ist, folgt nun die Zahl 22, die Franziska so anschreibt: ♡♡.

11. Eine Terrasse ist mit quadratischen Fliesen in drei unterschiedlichen Größen ausgelegt. Die kleinste Fliese hat einen Umfang von 80 cm. Eine Schlange hat sich entlang der Kanten der Fliesen gelegt (siehe Abbildung).
Wie lang ist die Schlange?

(A) 380 cm (B) 400 cm **(C)** 420 cm (D) 440 cm (E) 1680 cm



Lösung: Die kleinste Fliese hat den Umfang 80 cm, die Seitenlänge beträgt daher 80 cm : 4 = 20 cm. Die mittlere Fliese hat die Seitenlänge 40 cm und die große Fliese 60 cm. Die Länge der Schlange kann somit berechnet werden: 5 x 20 cm + 5 x 40 cm + 2 x 60 cm = **420 cm.**

12. In einem Spiegel sieht man das Bild einer digitalen Uhr: 
Welches Bild von der Uhr kann man 30 Minuten später im Spiegel sehen?

(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Lösung: Zu Beginn ist es 21 : 51 Uhr. 30 Minuten später ist es 22 : 21 Uhr. Im Spiegel wird diese Zeit von der Lösung

 angezeigt.

13. Maria, Peter, Richard und Tina spielten im Klassenzimmer Fußball. Dabei wurde eine Fensterscheibe zerbrochen. Als die Direktorin herausfinden wollte, wer die Scheibe zerbrochen hat, bekam sie folgende Antworten: Maria: „Es war Peter." Peter: „Es war Richard." Richard: „Ich war es nicht." Tina: „Ich war es nicht."
Es stellte sich später heraus, dass nur ein Kind die Wahrheit sagte. Wer zerbrach die Scheibe?

(A) Maria **(B)** Tina (C) Peter (D) Richard (E) Das kann nicht entschieden werden.

Lösung: Wenn Richard die Wahrheit sagt, dann lügt Peter.
Wenn Peter die Wahrheit sagt, dann lügt Richard.
Wenn Tanja die Wahrheit sagt, kann keine Aussage getroffen werden, somit muss Tina lügen, und sie hat die Scheibe zerbrochen. Um zu überprüfen ob tatsächlich nur ein Kind die Wahrheit sagt, kann man alle Aussagen, die die Kinder gemacht haben überprüfen, wenn Tina gelogen hat.
Maria: „Es war Peter", stimmt nicht.
Richard: „Es war Richard", stimmt nicht.
Richard: „Ich war es nicht", stimmt.
Tina: „Ich war es nicht", stimmt nicht.

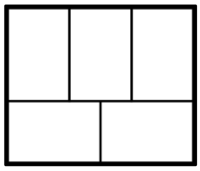
14. Die Summen der Zahlen in den weißen und in den grauen Feldern sollen gleich groß sein.
Welche zwei Zahlen müssen getauscht werden, damit die Summen gleich groß werden?

(A) 1 und 11 (B) 2 und 8 (C) 3 und 7 (D) 4 und 13 (E) 7 und 13

1	3	5	2	13
7	4	6	8	11

Lösung: Die Summe der grauen Felder beträgt 1 + 2 + 4 + 6 + 7 = 20, die Summe der weißen 3 + 5 + 8 + 11 + 13 = 40. Beide Summen betragen zusammen 20 + 40 = 60. Wenn beide Summen gleich groß sein sollen, dann muss die Summe der grauen Felder um 10 vergrößert, die Summe der weißen Felder um 10 verkleinert werden. Das kann erreicht werden, wenn **1 und 11** getauscht werden.

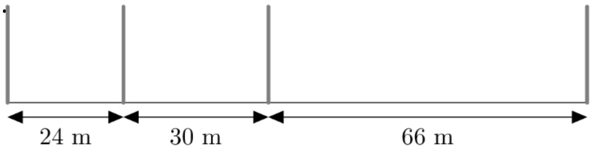
15. Das große Rechteck besteht aus fünf kleinen Rechtecken (siehe Abbildung). Lukas möchte die Kleinen Rechtecke rot, blau und gelb färben. Zwei angrenzende Rechtecke sollen mit verschiedenen Farben gefärbt werden.
Auf wie viele verschiedene Arten kann Lukas das tun?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 **(D)** 6 (E) 7

Lösung: Lukas kann sich für das erste Rechteck oben links eine der drei Farben aussuchen. Für die beiden angrenzenden Rechtecke hat er zwei Möglichkeiten sie zu färben. Die restlichen beiden Rechtecke können nicht mehr frei gewählt werden, müssen an die beiden angrenzenden Rechtecken laut Vorschrift angepasst werden. Lukas hat also **3 x 2 = 6** Möglichkeiten das Rechteck mit den Farben rot, blau und gelb zu färben.

16. Entlang einer 120 m langen Laufbahn wurden 4 Pflöcke gesetzt. Wie viele weitere Pflöcke müssen gesetzt werden, damit die Laufbahn dadurch in gleich lange Teilstrecken unterteilt wird?



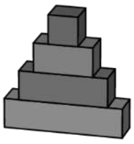
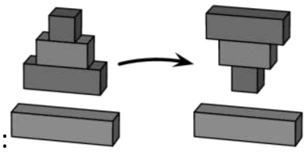
(A) 12 (B) 15 **(C)** 17 (D) 20 (E) 37

Lösung: Um die Laufbahn in weitere gleich lange Teilstrecken zu unterteilen, benötigt man den größten gemeinsamen Teiler von 24, 30 und 66. Der größte gemeinsame Teiler ist die Zahl 6. Die Laufbahn hat 120 m. Man benötigt daher 120 cm : 6 + 1 = 21 Pflöcke. Vier Pflöcke sind bereits vorhanden, deshalb müssen noch weitere **17** gesetzt werden.

- 5 Punkte Beispiele -

17. Bei einem Spiel darf man gestapelte Bausteine in einem Spielzug umschichten, indem man (einige oder alle) Bausteine von oben nimmt, sie auf den Kopf dreht und an denselben Platz zurückstellt (siehe Abbildung).

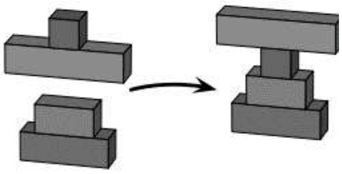
Goran beginnt mit diesem Turm: 

Am Ende sollen die Bausteine der Größe nach so geordnet  sein: 

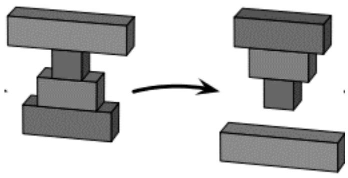
Wie viele Spielzüge benötigt Goran mindestens?

(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

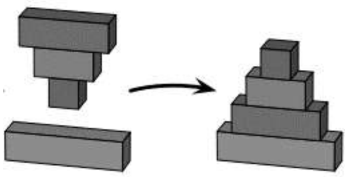
Lösung: Schritt 1: die beiden obersten Bausteine werden auf den Kopf gestellt.



Schritt 2: Der gesamte Turm wird auf den Kopf gestellt und die oberen drei werden dann heruntergenommen:



Schritt 3: die oberen drei Bausteine werden auf den Kopf gestellt:

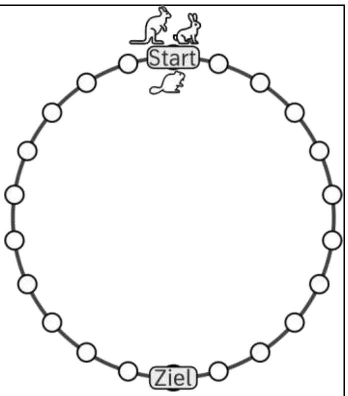


18. Robert und Sonja spielen ein Spiel mit folgenden Regeln: Abwechselnd können sie in jedem Spielzug 1, 2, 3, 4 oder 5 Karten vom Stapel nehmen. Wer die letzte Karte nimmt, hat verloren.
Im Augenblick befinden sich 10 Karten im Stapel, und Robert ist gerade an der Reihe.
Wie viele Karten soll er Sonja übriglassen, damit er sicher gewinnen kann?

(A) 9 (B) 8 **(C)** 7 (D) 6 (E) 5

Lösung: Wenn ein Spieler nur noch eine Karte hat, verliert dieser Spieler. Wenn ein Spieler 2, 3, 4, 5 oder 6 Karten übrig hat, kann dieser Spieler die Karte für den Gegner übriglassen und gewinnt. Wenn ein Spieler 7 Karten übrig hat, besteht die einzige Möglichkeit darin, 2, 3, 4, 5 oder 6 Karten dem Gegner zu lassen, daher verliert dieser Spieler. Wenn ein Spieler 8 oder 9 Karten hat, kann dieser Spieler 7 Karten dem Gegner übriglassen und gewinnt. Deshalb soll Robert **7** Karten für Sonja übriglassen.

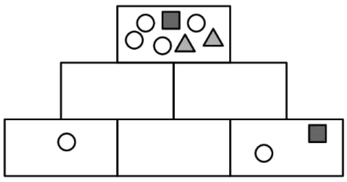
19. Ein Hase, ein Biber und ein Känguru machen einen Wettbewerb. Alle drei beginnen gleichzeitig beim Start und springen in die gleiche Richtung.
Mit einem Sprung kommt der Biber immer ein Feld weiter. Der Hase kommt mit einem Sprung immer zwei Felder und das Känguru immer drei Felder weiter.
Sieger ist, wer mit der geringsten Anzahl an Sprüngen genau im Ziel landet.
Wer gewinnt den Wettbewerb?

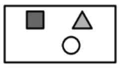
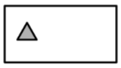
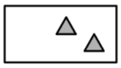
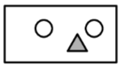


(A) Biber (B) Hase (C) Känguru (D) Känguru und Hase **(E)** Känguru und Biber

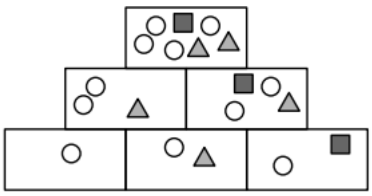
Lösung: Sowohl der Biber, als auch das Känguru benötigen jeweils 11 Sprünge um das Ziel zu erreichen.
Der Hase kann das Ziel niemals erreichen, daher ist die Lösung **E** richtig.

20. Tina zeichnet in jedes Feld der Pyramide Figuren. Jedes Feld in der zweiten und dritten Reihe enthält genau die Figuren der beiden darunterliegenden Felder.
In einige der Felder hat sie die Figuren schon gezeichnet.
Welche Figuren zeichnet sie in das leere Feld in der untersten Reihe?

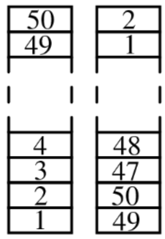


(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Lösung: In der mittleren Reihe links muss ein Kreis sein, da es in der untersten Reihe im linken Feld einen Kreis gibt.
In der mittleren Reihe rechts müssen ein Kreis und ein Quadrat gezeichnet werden, da diese beide Figuren wieder aus dem Feld der untersten Reihe übernommen werden. Da das oberste Feld vier Kreise, ein Quadrat und zwei Dreiecke hat, müssen in den Feldern in der zweiten Reihe zwei Kreise und zwei Dreiecke hinzugefügt werden. Die ersten beiden Felder in der untersten Reihe sind bereits vorgegeben, und da man zwei Kreise und zwei Dreiecke braucht, können in der untersten Reihe in der Mitte nur ein Kreis und ein Dreieck eingezeichnet werden, damit die weiteren Felder das gewünschte Ergebnis liefern.



21. Ein Turm besteht aus Blöcken, die von unten nach oben mit den Zahlen von 1 bis 50 beschriftet sind. Bob baut aus diesen Blöcken einen neuen Turm.
Dabei nimmt er jeweils die obersten zwei Blöcke vom alten Turm herunter und legt sie ohne ihre Reihenfolge zu verändern auf den neuen Turm (siehe Abbildung).
Welche beiden Bausteine liegen übereinander, wenn er mit dem Umschlichten fertig ist?



(A) 29 und 28 (B) 34 und 35 (C) 29 und 26 (D) 31 und 33 **(E)** 27 und 30

Lösung: Im neuen Turm befindet sich im untersten Block die Zahl 49, darüber liegt 50, dann 47 und 48. Jetzt kämen die Zahlen 45 und 46. Man kann folgendes Muster erkennen. Auf eine ungerade Zahl folgt die nächst höhere, auf eine gerade Zahl folgt eine Zahl, die um 3 kleiner ist. Nur bei Lösung **E** mit den Zahlen 27 und 30 kann man dieses Muster erkennen.

22. Martin hat drei Karten, die auf beiden Seiten mit einer Zahl beschriftet sind.
Martin legt die drei Karten, ohne Vorder- und Rückseite zu beachten, auf den Tisch.
Er addiert die drei Zahlen, die er dann sehen kann.
Wie viele verschiedene Summen kann Martin dabei erhalten?

(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 9 **(E)** Es ist eine andere Anzahl.

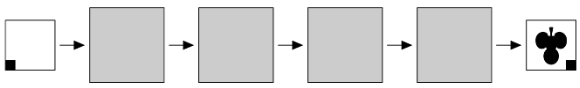
Lösung: Die kleinste Summe ist die Summe der Zahlen auf der Vorderseite der Karten. Jedes Mal, wenn sie eine der Karten umdrehen, erhöhen sie die Summe um 3. Dies ist dreimal möglich, es gibt also vier verschiedene Summen.

23. Anna hat zwei Maschinen R und S. Wenn sie ein quadratisches Blatt in Maschine R gibt, wird es im Uhrzeigersinn um 90° gedreht.

Wenn sie das Blatt in Maschine S gibt, wird es bedruckt.

Sie möchte dieses Bild herstellen:

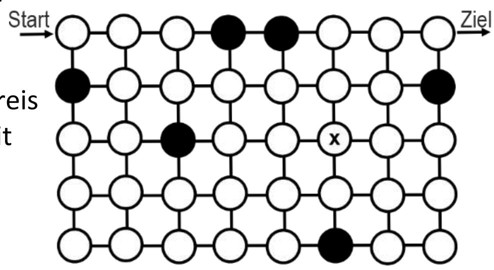
In welcher Reihenfolge verwendet Anna die beiden Maschinen, damit dieses Bild entsteht?



(A) SRRR **(B)** RSRR (C) SRSR (D) RRRS (E) SRRS

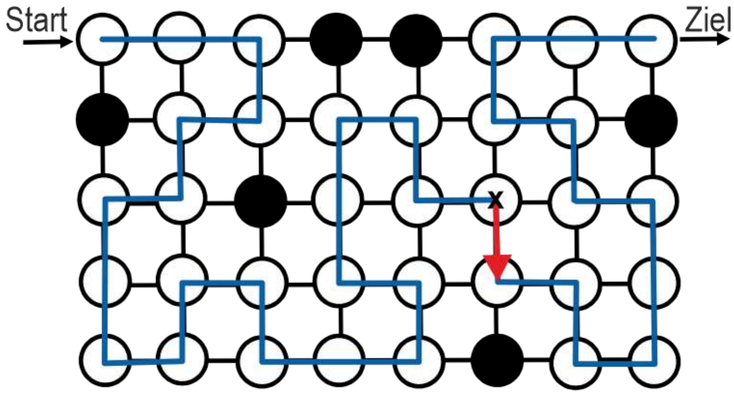
Lösung: Das Papier wurde dreimal um 90° im Uhrzeigersinn gedreht, dann wurde es gestempelt und weitere zweimal Um 90° gedreht. Daher liefert die Reihenfolge **RSRR** das Ergebnis.

24. Monika möchte einen Weg durch das Labyrinth vom Start bis zum Ende finden. Dabei muss sie folgende Regeln beachten: Sie darf sich nur waagrecht beziehungsweise senkrecht fortbewegen. Sie muss jeden weißen Kreis genau einmal betreten, darf aber auf keinen schwarzen Kreis betreten. In welche Richtung muss Monika gehen, wenn sie im Kreis mit dem X angelangt ist?



(A) ↓ (B) ↑ (C) → (D) ← (E) es gibt mehrere Möglichkeiten

Lösung: Der Weg durch das Labyrinth unter den gegebenen Voraussetzungen ist eindeutig bestimmt, und es gibt auch nur eine Möglichkeit den Weg nach dem „x“ so weiterzugehen, dass man zum Ziel kommt, siehe Grafik!



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Kategorie: Kadett, Schulstufe: 7. – 8.

Name:	
Schule:	
Klasse:	

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Aufgabe 1. - 10. 3 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 11. - 20. 4 Punkte
jede richtige Antwort Aufgabe 21. - 30. 5 Punkte
jede Aufgabe ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

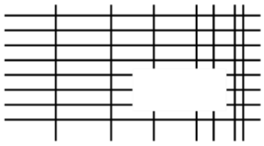
pwc

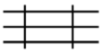
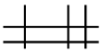
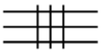
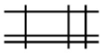
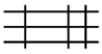
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

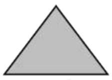
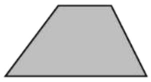
- 3 Punkte Beispiele -

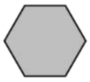
1. Die Grafik zeigt ein Gitter aus senkrechten und waagrechten Linien. Welcher Teil wurde aus dem Gitter geschnitten?



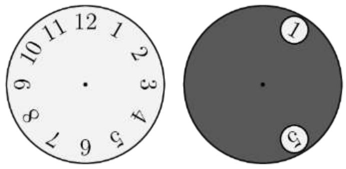
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Welche der folgenden Figuren kann man **nicht** mit einer einzigen geraden Linie in zwei Trapeze teilen?

(A)  (Dreieck) (B)  (Rechteck) (C)  (Trapez)

(D)  (regelmäßiges Sechseck) (E)  (Quadrat)

3. Eine dunkle Scheibe mit zwei Löchern wird wie abgebildet auf das Ziffernblatt einer Uhr gelegt. Die dunkle Scheibe wird nun so gedreht, dass die Zahl 8 durch eines der beiden Löcher sichtbar ist.
Welche der Zahlen könnte man im anderen Loch sehen?

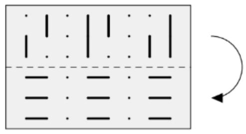


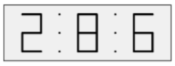
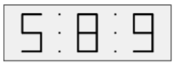
(A) 4 und 12 (B) 1 und 5 (C) 1 und 4 (D) 7 und 11 (E) 5 und 12

4. John wirft 150 Münzen auf einen Tisch. 60 von ihnen zeigen „Kopf“, die anderen zeigen „Zahl“. Er möchte, dass gleich viele Münzen „Kopf“ wie „Zahl“ zeigen. Wie viele Münzen, die „Zahl“ zeigen, muss er umdrehen?

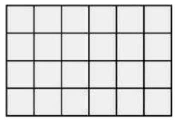
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

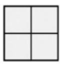
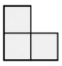
5. Kristina hat ein Stück durchsichtige Folie, auf dem einige Punkte und Linien gezeichnet sind. Sie faltet die Folie wie abgebildet entlang der strichlierten Linie.
Was sieht sie nun?



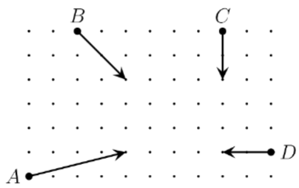
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Ein Raster soll entlang der schwarzen Linien in lauter identische Figuren zerschnitten werden. Es darf kein Stück übrigbleiben.
In welche der folgenden Figuren kann das Raster auf diese Art **nicht** zerschnitten werden?



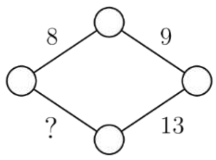
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. Die Grafik zeigt Ausgangspositionen, Fahrtrichtungen und Längen der Strecken, die vier Autodrom-Autos in 5 Sekunden zurücklegen.
Welche zwei Autos werden als erstes zusammenstoßen?



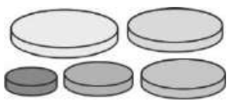
(A) A und B (B) A und C (C) A und D (D) B und C (E) C und D

8. Werner möchte jede Seite und jeden Eckpunkt der nebenstehenden Raute mit jeweils genau einer Zahl beschriften. Er möchte, dass die Zahl an jeder Seite gleich der Summe der Zahlen an den angrenzenden Eckpunkten ist. Welche Zahl schreibt er an die Stelle des Fragezeichens?



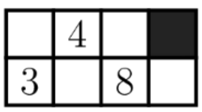
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

9. Anna hat fünf kreisrunde Scheiben, die alle unterschiedlich groß sind. Sie möchte einen Turm aus drei Scheiben bauen, wobei immer eine kleinere auf einer größeren Scheibe liegen muss. Auf wie viele Arten kann Anna den Turm bauen?



(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 15

10. Evita möchte die Zahlen von 1 bis 8 in jeweils ein Feld schreiben. Dabei sollen die Summen der Zahlen in den zwei Zeilen gleich sein. Die Summen der Zahlen in den vier Spalten sollen auch jeweils übereinstimmen. Sie hat bereits die Zahlen 3, 4 und 8 eingetragen (siehe Abbildung).
Welche Zahl muss sie ins dunkle Feld schreiben?



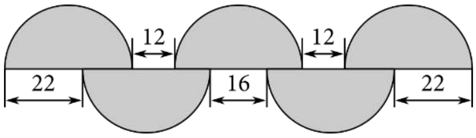
(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 6 (E) 7

- 4 Punkte Beispiele -

11. Dorli schreibt drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen in aufsteigender Reihenfolge.
Sie ersetzt die Ziffern durch Symbole und erhält: □♦♦, ♡ΔΔ, ♡Δ□.
Was wäre die nächstgrößere Zahl in dieser Schreibweise?

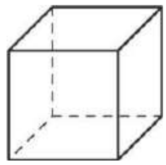
(A) ♡♡♦ (B) □♡□ (C) ♡Δ♦ (D) ♡♦□ (E) ♡Δ♡

12. Die Grafik zeigt 5 gleich große Halbkreise und die Längen von 5 Strecken.
Wie groß ist der Radius eines Halbkreises?



(A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 22 (E) 36

13. Einige Kanten eines Würfels werden derart rot gefärbt, dass jede Fläche des Würfels mindestens eine rote Kante hat.
Wie viele rote Kanten hat der Würfel mindestens?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

14. Die Ziffern 0 bis 9 können mit Zündhölzern gelegt werden (siehe Abbildung).
Wie viele verschiedene positive ganze Zahlen können auf diese Weise mit genau 6 Zündhölzern gelegt werden?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

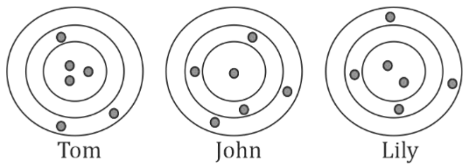
15. Die Seiten eines Quadrats sind 1 cm lang.
Wie viele Punkte in der Ebene gibt es, die von zwei Eckpunkten des Quadrats genau 1 cm entfernt sind?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 10 (E) 12

16. Einige Kängurus und drei Biber stehen in einem Kreis. Kein Biber steht direkt neben einem anderen Biber.
Es gibt genau drei Kängurus, die direkt neben einem anderen Känguru stehen.
Was ist die größtmögliche Anzahl an Kängurus im Kreis?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

17. Tom, John und Lily haben jeweils 6 Pfeile auf eine Scheibe mit drei Bereichen geschossen (siehe Abbildung). Die Anzahl der Punkte eines Treffers hängt davon ab, welchen Bereich man trifft. Tom hat 46 Punkte und John hat 34 Punkte erreicht. Wie viele Punkte hat Lily erreicht?

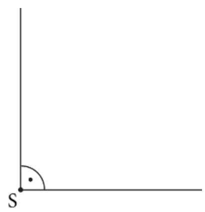


(A) 37 (B) 38 (C) 39 (D) 40 (E) 41

18. Max und zwei seiner Freunde stehen in einer Reihe. Die Anzahl der Personen in der Reihe ist ein Vielfaches von 3. Er bemerkt, dass genau so viele Personen vor ihm wie hinter ihm stehen. Seine zwei Freunde stehen beide hinter ihm: einer an der 19. Stelle, der andere an der 28. Stelle der Reihe. An welcher Stelle der Reihe steht Max?

(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 17. (E) 18.

19. Zwei Strahlen bilden einen rechten Winkel mit Scheitel *S*. Es werden zusätzliche Strahlen mit Anfangspunkt *S* innerhalb des rechten Winkels eingezeichnet, sodass jeder der Winkel 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° und 80° von zwei Strahlen eingeschlossen wird.
Wie viele Strahlen müssen mindestens eingezeichnet werden?



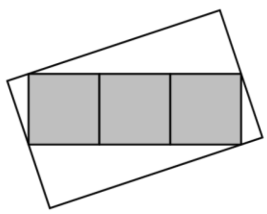
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. Die Summe von 2023 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist 2023.
Was ist die Ziffernsumme der größten dieser Zahlen?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

- 5 Punkte Beispiele -

21. Die Abbildung zeigt ein graues Rechteck, das innerhalb eines größeren Rechtecks liegt und dessen Seiten berührt. Zwei Eckpunkte des grauen Rechtecks sind die Mittelpunkte der kürzeren Seiten des größeren Rechtecks. Das graue Rechteck besteht aus drei Quadraten, die jeweils einen Flächeninhalt von 25 cm^2 haben.
Wie groß ist der Flächeninhalt des größeren Rechtecks in cm^2?

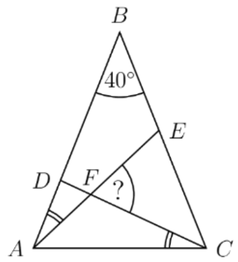


(A) 125 (B) 136 (C) 149 (D) 150 (E) 172

22. Schneewittchen organisierte ein mehrtägiges Schachturnier für die sieben Zwerge. Dabei spielte jeder Zwerg genau ein Spiel gegen jeden anderen Zwerg.
Am Montag spielte Grumpy 1 Spiel, Sneezy spielte 2, Sleepy 3, Bashful 4, Happy 5 und Doc 6 Spiele.
Wie viele Spiele spielte der 7. Zwerg Dopey am Montag?

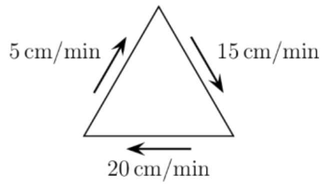
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

23. Das abgebildete Dreieck ABC ist gleichschenkelig mit $\measuredangle ABC = 40°$.
Die zwei gekennzeichneten Winkel $\measuredangle EAB$ und $\measuredangle DCA$ sind gleich groß.
Wie groß ist der Winkel $\measuredangle CFE$?



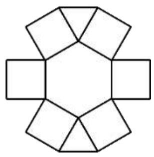
(A) 55° (B) 60° (C) 65° (D) 70° (E) 75°

24. Eine Ameise geht entlang der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung).
Ihre Geschwindigkeit beträgt bei der ersten Seite 5 cm/min,
bei der zweiten 15 cm/min und bei der dritten 20 cm/min.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit in cm/min geht die Ameise einmal um das ganze Dreieck?



(A) 10 (B) $\frac{80}{11}$ (C) $\frac{180}{19}$ (D) 15 (E) $\frac{40}{3}$

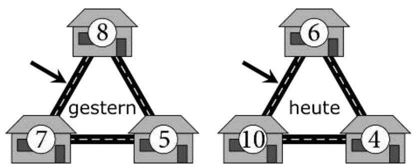
25. Elisabeth möchte alle ganzen Zahlen von 1 bis 9 in die Felder der abgebildeten Figur schreiben, sodass das Produkt der Zahlen zweier benachbarter Felder nicht größer als 15 ist.
Zwei Felder werden „benachbart" genannt, wenn sie eine gemeinsame Kante haben.



Wie viele Möglichkeiten hat Elisabeth, die Felder zu beschriften?

(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 32

26. Einige Mäuse leben in drei Häusern. Gestern Nacht verließ jede Maus ihr Haus und übersiedelte direkt in eines der anderen beiden Häuser. In der Abbildung sieht man, wie viele Mäuse gestern und heute in den einzelnen Häusern waren.
Wie viele Mäuse benutzten den Weg, der mit dem Pfeil markiert ist?



(A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 16 (E) 19

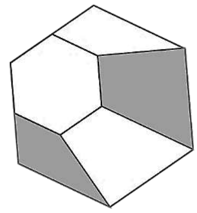
27. Bart schrieb die Zahl 1015 als Summe von Zahlen, die nur die Ziffer 7 enthalten. Er benutzte dafür die Ziffer 7 insgesamt 10 Mal. Nun möchte er auch die Zahl 2023 als Summe von Zahlen schreiben, die nur die Ziffer 7 enthalten. Er benutzt die Ziffer 7 insgesamt 19 Mal.
Wie oft muss er die Zahl 77 verwenden?

$$\begin{array}{r} 777 \\ 77 \\ +\ 77 \\ 77 \\ \underline{7} \\ 1015 \end{array}$$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

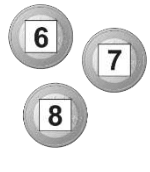
28. Ein regelmäßiges Sechseck ist in vier Vierecke und ein kleineres regelmäßiges Sechseck unterteilt. Das Verhältnis $\frac{\textit{Flächeninhalt des dunklen Bereiches}}{\textit{Flächeninhalt des kleinen Sechsecks}} = \frac{4}{3}$.

Wie groß ist das Verhältnis $\frac{\textit{Flächeninhalt des kleinen Sechsecks}}{\textit{Flächeninhalt des großen Sechsecks}}$?



(A) $\frac{3}{11}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{3}{5}$

29. Jakob schrieb sechs aufeinanderfolgende Zahlen auf sechs kleine weiße Papierstücke, eine Zahl pro Papierstück. Er klebte diese sechs Papierstücke auf die Vorder- und die Rückseite von drei Münzen. Dann warf er die Münzen dreimal. Nach dem ersten Wurf kamen die Zahlen 6, 7, 8 oben zu liegen (siehe Abbildung), die Jakob danach rot bemalte.
Nach dem zweiten Wurf war die Summe der sichtbaren Zahlen 23 und nach dem dritten Wurf die Summe 17.
Wie groß ist die Summe der Zahlen auf den drei weißen Papierstücken?



(A) 18 (B) 19 (C) 23 (D) 24 (E) 30

30. Ein Rugby-Team erreichte 24, 17 und 25 Punkte im 7., 8. und 9. Spiel der vergangenen Saison. Die durchschnittliche Punktezahl pro Spiel war nach 9 Spielen höher als nach ihren ersten 6 Spielen. Ihr Durchschnitt nach 10 Spielen war mehr als 22 Punkte. Wie viele Punkte haben sie im 10. Spiel mindestens erreicht?

(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Level: Kadett, Grade: Schulstufe 7 + 8

Name:	
School:	
Class:	

Time: 75 min.
30 starting points

each correct answer to questions 1. – 10.:	3 points
each correct answer to questions 11. – 20.:	4 points
each correct answer to questions 21. – 30.:	5 points
each questions left unanswered:	0 points
each incorrect answer:	minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

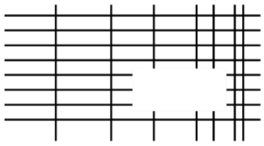
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

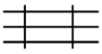
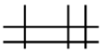
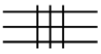
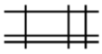
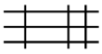
Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2023
Level Kadett (Schulstufe 7 and 8)
Austria – 16. 3. 2023

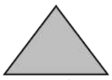
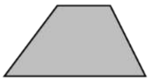
- 3 Point Examples -

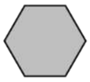
1. The diagram shows a grid made of vertical and horizontal lines.
Which part was cut from the grid?



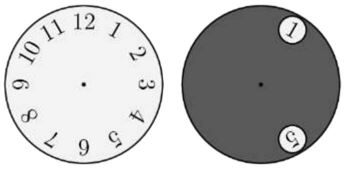
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

2. Which of the following shapes **cannot** be cut into two trapeziums with one single straight line?

(A)  (triangle) (B)  (rectangle) (C)  (trapezium)

(D)  (regular hexagon) (E)  (square)

3. A dark disc with two holes is placed on top of a dial of a watch as shown. The dark disc is now rotated so that the number 8 can be seen through one of the holes.
Which of the numbers could one see through the other hole now?

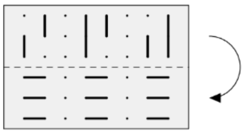


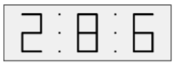
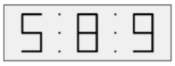
(A) 4 and 12 (B) 1 and 5 (C) 1 and 4 (D) 7 and 11 (E) 5 and 12

4. John throws 150 coins onto a table. 60 of them show „head", the others show „tail". He wants the same amount of coins to show „head" as „tail". How many coins that show „head" does he have to turn over?

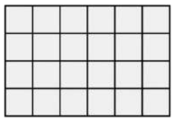
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

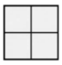
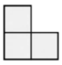
5. Kristina has a piece of see-through foil on which some points and lines are drawn. She folds the foil along the dotted line.
What can she see now?



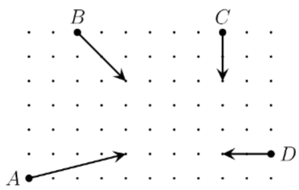
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. A grid should be cut along the black lines into several identical shapes. No piece is to be left over.
Into which of the following shapes is it **not** possible to cut this grid in this way?



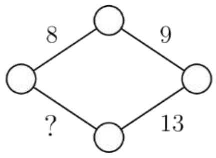
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

7. The diagram shows the starting position, the direction and the distance covered within 5 seconds by four bumper cars.
Which two cars will first crash into each other?



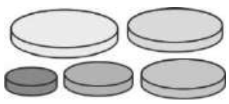
(A) A and B (B) A and C (C) A and D (D) B and C (E) C and D

8. Werner wants to label each side and each corner point of the rhombus shown with exactly one number. He wants the number on each side to be equal to the sum of the numbers on the corner points of that sides.
Which number is he going to write in the place of the question mark?



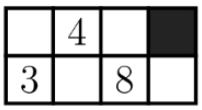
(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

9. Anna has five circular discs that are all of different sizes. She wants to build a tower using three discs where a smaller disc always has to lie on top of a bigger disc.
How many ways are there for Anna to build the tower?



(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 15

10. Evita wants to write the numbers from 1 to 8 with one number in each field. The sum of the numbers in each row should be equal. The sum of the numbers in the four columns should also be the same. She has already written in the numbers 3, 4 and 8 (see diagram).
Which number does she have to write in the dark field?



(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 6 (E) 7

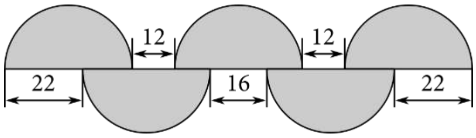
- 4 Point Examples-

11. Dorli writes down three consecutive natural numbers in increasing order.

She replaces the digits using symbols and gets: □♦♦, ♡ΔΔ, ♡Δ□.
What would be the next bigger number in this notation?

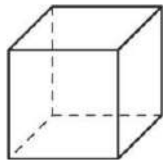
(A) ♡♡♦ (B) □♡□ (C) ♡Δ♦ (D) ♡♦□ (E) ♡Δ♡

12. The diagram shows 5 equally big semicircles and the length of 5 distances.
How big is the radius of one semicircle?



(A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 22 (E) 36

13. Some edges of a cube are coloured in red so that each sides of the cube has at least one red edge.
What is the minimum number of red edges that the cube has?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

14. The digits 0 to 9 can be formed using matchsticks (see diagram).
How many different positive whole numbers can be formed this way with exactly 6 matchsticks?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

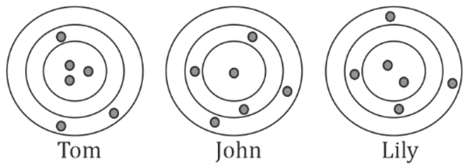
15. The side lengths of a square are 1 cm long.
How many points on a plane surface are there that are exactly 1 cm away from two corner points of the square?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 10 (E) 12

16. Some kangaroos and three beavers are standing in a circle. No beaver stands directly next to another beaver. There are exactly three kangaroos that are standing next to another kangaroo.
What is the biggest possible number of kangaroos in the circle?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

17. Tom, John and Lily have each shot 6 arrows on a disc with three sections (see diagram). The number of points of a hit depends on the section that has been hit. Tom has 46 points and John has 34 points. How many points did Lily get?

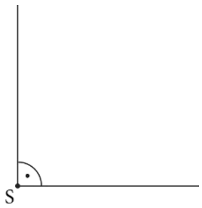


(A) 37 (B) 38 (C) 39 (D) 40 (E) 41

18. Max and two of his friends are standing in a line. The number of people in the line is a multiple of 3. He realises that there are the same number of people in front of him as there are behind him. His two friends are both behind him: one is in position 19, the other one in position 28 of the line. In which position of the line is Max?

(A) 14. (B) 15. (C) 16. (D) 17. (E) 18.

19. Two rays starting in *S* form a right angle. More rays starting in *S* are drawn within the right angle so that each angle 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° and 80° is enclosed by two rays.
What is the minimum number of rays that have to be drawn?



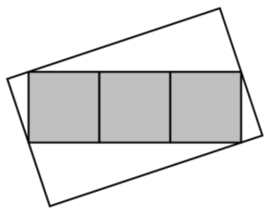
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

20. The sum of 2023 consecutive integers is 2023.
What is the sum of the digits of the biggest of those numbers?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

- 5 Point Examples -

21. The diagram shows a grey rectangle that lies within a bigger rectangle which sides it touches. Two corner points of the grey rectangle are the midpoints of the shorter sides of the bigger rectangle. The grey rectangle is made up of three squares that each have an area of 25 cm^2.
How big is the area of the bigger rectangle in cm^2?

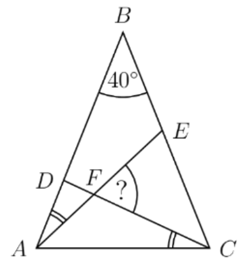


(A) 125 (B) 136 (C) 149 (D) 150 (E) 172

22. Snow White organises a chess tournament for the seven dwarfs lasting several days. Every dwarf has to play every other dwarf exactly once.
On Monday Grumpy plays 1 game, Sneezy plays 2, Sleepy 3, Bashful 4, Happy 5 and Doc 6 games.
How many games does Dopey, the 7th dwarf, play on Monday?

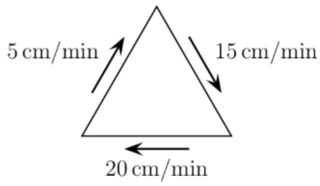
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

23. The shown triangle ABC is isosceles with $\measuredangle ABC = 40°$.
The two angles indicated $\measuredangle EAB$ and $\measuredangle DCA$ are equally big.
How big is the angle $\measuredangle CFE$?



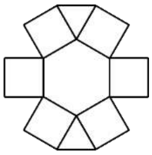
(A) 55° (B) 60° (C) 65° (D) 70° (E) 75°

24. An ant walks along the sides of an equilateral triangle (see diagram). Its velocity is 5 cm/min along the first side, 15 cm/min along the second and 20 cm/min along the third.
With which average velocity in cm/min does the ant walk once around the entire triangle?



(A) 10 (B) $\frac{80}{11}$ (C) $\frac{180}{19}$ (D) 15 (E) $\frac{40}{3}$

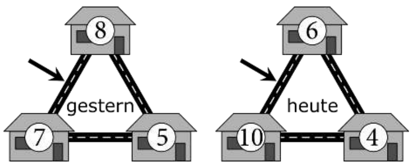
25. Elisabeth wants to write the numbers 1 to 9 in the fields of the diagram shown so that the product of the numbers of two fields next to each other is no greater than 15.
Two fields are called „next to each other“ if they share a common edge.



How many ways are there for Elisabeth to label the fields?

(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 24 (E) 32

26. Several mice live in three houses. Last night every mouse left their house and moved directly to one of the other two houses. The diagram shows how many mice were in each house yesterday and today.
How many mice used the path that is indicated with an arrow?



(A) 9 (B) 11 (C) 12 (D) 16 (E) 19

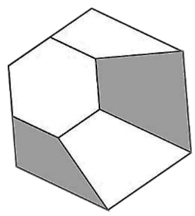
27. Bart wrote the number 1015 as a sum of numbers that are made up of only the digit 7. In total he uses the digit 7, 10 times. Now he wants to the write the number 2023 as a sum of numbers that are made up of only the digit 7. He uses the digit 7, 19 times in total.
How often does he have to use the number 77?

$$\begin{array}{r} 777 \\ 77 \\ +\ 77 \\ 77 \\ \underline{7} \\ 1015 \end{array}$$

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

28. A regular hexagon is split into four quadrilaterals and a smaller regular hexagon.
The ratio $\frac{\textit{Area of the dark sections}}{\textit{Area of the small hexagon}} = \frac{4}{3}$.

How big is the ratio $\frac{\textit{Area of the small hexagon}}{\textit{Area of the big hexagon}}$?



(A) $\frac{3}{11}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{3}{5}$

29. Jakob wrote six consecutive numbers on six little pieces of white paper, one number per piece of paper. He stuck those six pieces of paper on the front and back of three coins. Then he threw the coins three times. After the first throw the numbers 6, 7, 8 were on top (see diagram) which Jakob then coloured in red.
After the second throw the sum of the numbers on top was 23 and after the third throw the sum was 17.
How big is the sum of the numbers on the three white pieces of paper?

(A) 18 (B) 19 (C) 23 (D) 24 (E) 30

30. A rugby team scored 24, 17 and 25 points in their 7th , 8th and 9th game of the previous season. The average number of points per game was higher after 9 games than after their first 6 games. Their average after 10 games was more than 22 points. What is the minimum number of points they have scored in their 10th game?

(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 (E) 26

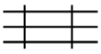
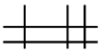
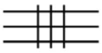
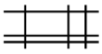
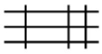
Känguru der Mathematik 2022
Gruppe Kadett (7. und 8. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2022

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
E	A	A	B	C	D	B	B	D	E	E	C	B	C	E	B	D	D	B	A	D	C	D	C	C	B	E	A	A	C

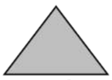
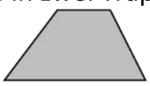
– 3 Punkte Beispiele –

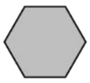
1. Die Grafik zeigt ein Gitter aus senkrechten und waagrechten Linien.
Welcher Teil wurde aus dem Gitter geschnitten?

(A)  (B)  (C)  (D)  **(E)** 

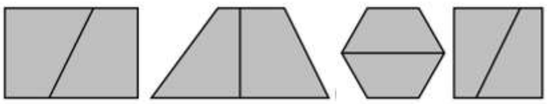
Lösung:

2. Welche der folgenden Figuren kann man nicht mit einer einzigen geraden Linie in zwei Trapeze teilen?

(A)  (Dreieck) (B)  (Rechteck) (C)  (Trapez)

(D)  (regelmäßiges Sechseck) (E)  (Quadrat)

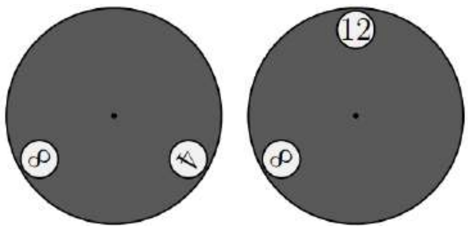
Lösung:
(B) bis (E) können jeweils mit einer geraden Linie in zwei Trapeze geteilt werden:



3. Eine dunkle Scheibe mit zwei Löchern wird wie abgebildet auf das Ziffernblatt einer Uhr gelegt. Die dunkle Scheibe wird nun so gedreht, dass die Zahl 8 durch eines der beiden Löcher sichtbar ist.
Welche der Zahlen könnte man im anderen Loch sehen?

(A) 4 und 12 (B) 1 und 5 (C) 1 und 4 (D) 7 und 11 (E) 5 und 12

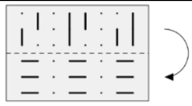
Lösung: Das Bild zeigt, dass in einem Loch die um 4 größere Zahl sichtbar ist als die im anderen Loch. Wenn die 8 in einem Loch sichtbar ist, können die 4 oder die 12 im anderen Loch sichtbar sein (siehe Grafik). Dadurch ist (A) korrekt.

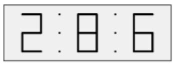
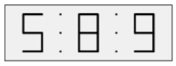


4. John wirft 150 Münzen auf einen Tisch. 60 von ihnen zeigen „Kopf“, die anderen zeigen „Zahl“. Er möchte, dass gleich viele Münzen „Kopf“ wie „Zahl“ zeigen. Wie viele Münzen, die „Zahl“ zeigen, muss er umdrehen?
(A) 10 **(B)** 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

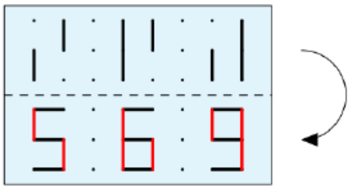
Lösung:
Die Hälfte der Münzen sind 75 Münzen. Also müssen jeweils 75 Münzen „Kopf“ und „Zahl“ zeigen. 60 zeigen bereits „Kopf“, also muss er noch 15 umdrehen.

5. Kristina hat ein Stück durchsichtige Folie, auf dem einige Punkte und Linien gezeichnet sind. Sie faltet die Folie wie abgebildet entlang der strichlierten Linie.
Was sieht sie nun?

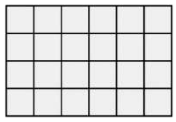


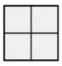
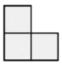
(A)  (B)  **(C)**  (D)  (E) 

Lösung:



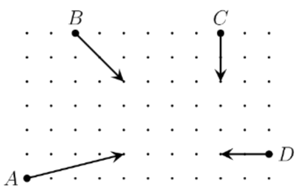
6. Ein Raster soll entlang der schwarzen Linien in lauter identische Figuren zerschnitten werden. Es darf kein Stück übrigbleiben.
In welche der folgenden Figuren kann das Raster auf diese Art **nicht** zerschnitten werden?



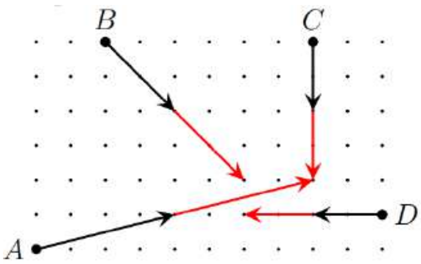
(A)  (B)  (C)  **(D)**  (E) 

Lösung: Das Raster besteht aus 24 Quadraten. Die Figur in (D)  besteht aus 5 Quadraten.
24 ist kein Vielfaches von 5, also kann das Raster sicherlich nicht auf diese Art zerschnitten werden.

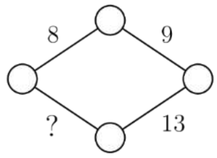
7. Die Grafik zeigt Ausgangspositionen, Fahrtrichtungen und Längen der Strecken, die vier Autodrom-Autos in 5 Sekunden zurücklegen.
Welche zwei Autos werden als erstes zusammenstoßen?
(A) A und B **(B)** A und C (C) A und D (D) B und C (E) C und D



Lösung: Zeichnet man die Pfeile jeweils noch einmal ein, sieht man, dass die Positionen der Autodrom-Autos nach weiteren 5 Sekunden (siehe Grafik). Dabei stoßen A und C in einem Punkt zusammen.

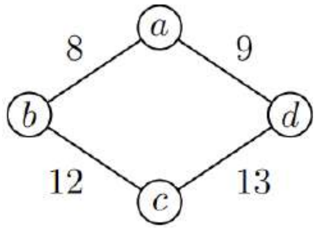


8. Werner möchte jede Seite und jeden Eckpunkt der nebenstehenden Raute mit jeweils genau einer Zahl beschriften. Er möchte, dass die Zahl an jeder Seite gleich der Summe der Zahlen an den angrenzenden Eckpunkten ist. Welche Zahl schreibt er an die Stelle des Fragezeichens?

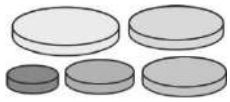


(A) 11 **(B)** 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

Lösung:
Wir bezeichnen die Zahlen in den Eckpunkten mit a, b, c und d.
Die Summe der beiden Zahlen an jeweils zwei gegenüberliegenden Seiten (z.B. $8 + 13$) muss jeweils gleich sein: Diese ist nämlich immer $a + b + c + d$ wegen $8 = a + b$ und $13 = d + c$. Dann muss $9 + ?$ auch gleich 22 sein.
Also ist (B) 12 die korrekte Antwort.



9. Anna hat fünf kreisrunde Scheiben, die alle unterschiedlich groß sind. Sie möchte einen Turm aus drei Scheiben bauen, wobei immer eine kleinere auf einer größeren Scheibe liegen muss.
Auf wie viele Arten kann Anna den Turm bauen?



(A) 5 (B) 6 (C) 8 **(D)** 10 (E) 15

Lösung:
Wir nummerieren die Scheiben der Größe nach: Sei D1 die Scheibe mit dem kleinsten Radius und D5 die Scheibe mit dem größten Radius.
(D3, D4, D5) sei der Turm, bei dem die Scheibe D3 auf D4 und D5 ganz unten liegt.

Alle möglichen Türme sind:

(D3, D4, D5)	(D2, D4, D5)	(D1, D4, D5)	(D2, D3, D5)	(D1, D3, D5)
(D1, D2, D5)	(D2, D3, D4)	(D1, D3, D4)	(D1, D2, D4)	(D1, D2, D3)

Also gibt es 10 verschiedene mögliche Türme.

10. Evita möchte die Zahlen von 1 bis 8 in jeweils ein Feld schreiben. Dabei sollen die Summen der Zahlen in den zwei Zeilen gleich sein. Die Summen der Zahlen in den vier Spalten sollen auch jeweils übereinstimmen. Sie hat bereits die Zahlen 3, 4 und 8 eingetragen (siehe Abbildung).
Welche Zahl muss sie ins dunkle Feld schreiben?

	4		
3		8	

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 6 **(E)** 7

Lösung: Die Gesamtsumme aller Zahlen von 1 bis 8 ist 36, also muss die Summe der Zahlen in den zwei Zeilen jeweils 18 sein und die Summe in den vier Spalten jeweils 9.
Das Feld muss also so beschriftet werden:

6	4	1	7
3	5	8	2

– 4 Punkte Beispiele –

11. Dorli schreibt drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen in aufsteigender Reihenfolge.
Sie ersetzt die Ziffern durch Symbole und erhält: □♦♦, ♡ΔΔ, ♡Δ□.
Was wäre die nächstgrößere Zahl in dieser Schreibweise?

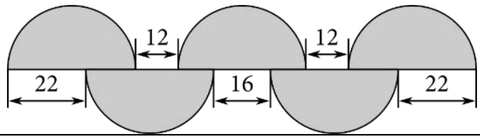
(A) ♡♡♦ (B) □♡□ (C) ♡Δ♦ (D) ♡♦□ **(E)** ♡Δ♡

Lösung: Da sich die erste Ziffer ändert, können wir daraus schließen, dass ♦ = 9, Δ = 0 und □ = 1.

Also ist □♦♦ = 199, ♡ΔΔ = 200 und ♡Δ□ = 201. Die nächste Zahl ist 202 und diese muss so aussehen: ♡Δ♡

12. Die Grafik zeigt 5 gleich große Halbkreise und die Längen von 5 Strecken.
Wie groß ist der Radius eines Halbkreises?

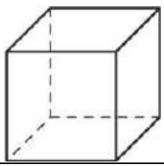
(A) 12 (B) 16 **(C)** 18 (D) 22 (E) 36



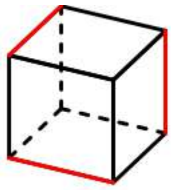
Lösung: Sei r der Radius der Halbkreise.
Aus der Grafik kann man dann die folgende Gleichung ablesen: $6r + 12 + 12 = 4r + 22 + 16 + 22$
Daraus folgt: $r = 18$

13. Einige Kanten eines Würfels werden derart rot gefärbt, dass jede Fläche des Würfels mindestens eine rote Kante hat.
Wie viele rote Kanten hat der Würfel mindestens?

(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



Lösung: Dass 2 rote Kanten nicht ausreichen, um alle Flächen eine rote Kante haben, ist klar.
In der nebenstehenden Grafik sieht man ein Beispiel, wie dies mit 3 roten Kanten möglich ist:



14. Die Ziffern 0 bis 9 können mit Zündhölzern gelegt werden (siehe Abbildung).
Wie viele verschiedene positive ganze Zahlen können auf diese Weise mit genau 6 Zündhölzern gelegt werden?

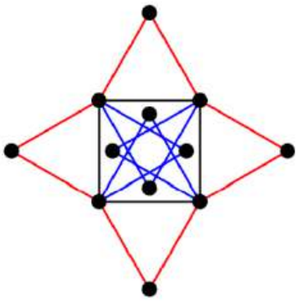
(A) 2 (B) 4 **(C)** 6 (D) 8 (E) 9

Lösung: Man muss sich überlegen, welche Ziffer aus wie vielen Streichhölzern besteht:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl Streichhölzer	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

Nun sucht man die Kombinationsmöglichkeiten für 6 Streichhölzer. Da keine Ziffer mit einem einzigen Zündholz gelegt werden kann, gibt es folgende Möglichkeiten: $6 = 4 + 2 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$
Die Ziffer 4 benötigt 4 Zündhölzer, die Ziffer 1 braucht 2 Zündhölzer und die Ziffer 7 braucht 3 Zündhölzer.
Also können folgende 6 Zahlen mit genau 6 Zündhölzern gelegt werden:
6, 9, 14, 41, 77, 111

15. Die Seiten eines Quadrats sind 1 cm lang.
Wie viele Punkte in der Ebene gibt es, die von zwei Eckpunkten des Quadrats genau 1 cm entfernt sind?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 10 **(E)** 12



Lösung: Es gibt insgesamt 12 Punkte, die genau 1 cm von zwei Eckpunkten des Quadrats entfernt sind: 4 innerhalb de Quadrats, 4 außerhalb des Quadrats und dazu noch die 4 Eckpunkte:

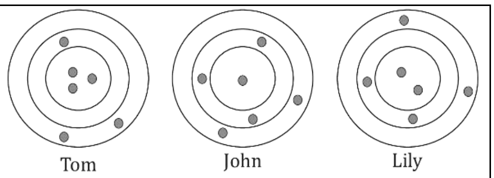
16. Einige Kängurus und drei Biber stehen in einem Kreis. Kein Biber steht direkt neben einem anderen Biber.
Es gibt genau drei Kängurus, die direkt neben einem anderen Känguru stehen.
Was ist die größtmögliche Anzahl an Kängurus im Kreis?
(A) 4 **(B)** 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung:
Beginnen wir damit, dass drei Bieber im Kreis stehen: BBB.
Zwischen ihnen muss jeweils mindestens ein Känguru stehen, also mindestens: BKBKBK.

Es gibt drei Kängurus, die direkt neben einem anderen Känguru stehen. In der Variante BKKBKKBK hätten aber 4 Kängurus ein Känguru als Nachbarn, also bleibt nur die Möglichkeit BKKKBKBK.

Somit sind 5 Kängurus das Maximum.

17. Tom, John und Lily haben jeweils 6 Pfeile auf eine Scheibe mit drei Bereichen geschossen (siehe Abbildung). Die Anzahl der Punkte eines Treffers hängt davon ab, welchen Bereich man trifft. Tom hat 46 Punkte und John hat 34 Punkte erreicht. Wie viele Punkte hat Lily erreicht?



(A) 37 (B) 38 (C) 39 **(D)** 40 (E) 41

Lösung: Zählt man die Pfeile pro Scheibe von Tom und John zusammen, erhält man jeweils genau doppelt so viele wie die von Lily.

Tom und John haben gemeinsam $46 + 34 = 80$ Punkte erreicht, also hat Liliy 40 Punkte erreicht.

18. Max und zwei seiner Freunde stehen in einer Reihe. Die Anzahl der Personen in der Reihe ist ein Vielfaches von 3. Er bemerkt, dass genau so viele Personen vor ihm wie hinter ihm stehen. Seine zwei Freunde stehen beide hinter ihm: einer an der 19. Stelle, der andere an der 28. Stelle der Reihe. An welcher Stelle der Reihe steht Max?

(A) 14. (B) 15. (C) 16. **(D)** 17. (E) 18.

Lösung: Wir nehmen an, dass Martin n Personen vor ihm und n hinter ihm hat. Das bedeutet, er steht an der $n+1$. Stelle.

Wir wissen außerdem: $n+1<19$ und insgesamt stehen in der Reihe mindestens 28 Personen, also $2n+1 \geq 28$

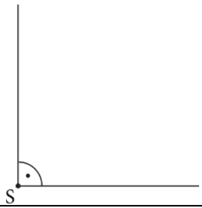
Also kann n nur noch $14, 15, 16$ oder 17 sein.

Die Anzahl der Personen in der Reihe ist durch 3 teilbar, also $3|\,(2n+1)$, muss $n=16$ sein. Martin steht also an der 17. Stelle.

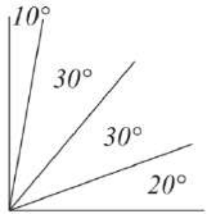
19. Zwei Strahlen bilden einen rechten Winkel mit Scheitel S. Es werden zusätzliche Strahlen mit Anfangspunkt S innerhalb des rechten Winkels eingezeichnet, sodass jeder der Winkel 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° und 80° von zwei Strahlen eingeschlossen wird.

Wie viele Strahlen müssen mindestens eingezeichnet werden?

(A) 2 **(B)** 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6



Lösung: Man erkennt schnell, dass zwei zusätzliche Strahlen nicht ausreichen. Ein Beispiel für drei zusätzliche Strahlen ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



20. Die Summe von 2023 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist 2023.

Was ist die Ziffernsumme der größten dieser Zahlen?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Lösung: Würde man nur positive ganze Zahlen verwenden (zum Beispiel 1 bis 2023), wäre die Summe viel zu groß. Also müssen einige negative Zahlen verwendet werden.

Würde man alle ganzen Zahlen von -1011 bis 1011 addieren, erhält man die Summe 0.

Stattdessen könnten wir jeweils die um 1 größeren Zahlen verwenden: Addiert man -1010 bis 1012, so ergeben die Zahlen von -1010 bis 1010 addiert 0 und $1011 + 1012 = 2023$.

Also ist 1012 die größte dieser Zahlen. Ihre Ziffernsumme ist $1+0+1+2=4$.

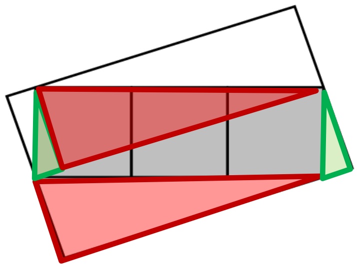
– 5 Punkte Beispiele –

21. Die Abbildung zeigt ein graues Rechteck, das innerhalb eines größeren Rechtecks liegt und dessen Seiten berührt. Zwei Eckpunkte des grauen Rechtecks sind die Mittelpunkte der kürzeren Seiten des größeren Rechtecks. Das graue Rechteck besteht aus drei Quadraten, die jeweils einen Flächeninhalt von 25 cm2 haben.

Wie groß ist der Flächeninhalt des größeren Rechtecks in cm2?

(A) 125 (B) 136 (C) 149 **(D)** 150 (E) 172

Lösung: Verschiebt man das untere große (rote) rechtwinkelige Dreieck sowie das kleine rechte (grüne) Dreieck in das graue Rechteck, so erkennt man, dass diese beiden Dreiecke gemeinsam genau halb so groß wie die Fläche des grauen Rechtecks sind.



Das graue Rechteck hat eine Gesamtfläche von 75 cm^2.

Also ist der Flächeninhalt des weißen Rechtecks $4 \cdot \frac{75\ cm^2}{2} = 150\ cm^2$ groß.

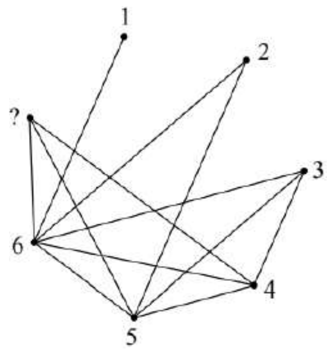
22. Schneewittchen organisierte ein mehrtägiges Schachturnier für die sieben Zwerge. Dabei spielte jeder Zwerg genau ein Spiel gegen jeden anderen Zwerg.

Am Montag spielte Grumpy 1 Spiel, Sneezy spielte 2, Sleepy 3, Bashful 4, Happy 5 und Doc 6 Spiele.

Wie viele Spiele spielte der 7. Zwerg Dopey am Montag?

(A) 1 (B) 2 **(C)** 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Die Spiele sind in der folgenden Abbildung als Verbindungslinien zwischen den Zwergen eingezeichnet. An den Punkten steht jeweils die Anzahl an Spiele, die der Zwerg gespielt hat.



Dopey spielte also 3 Spiele.

23. Das abgebildete Dreieck ABC ist gleichschenkelig mit ∡ABC=40°.

Die zwei gekennzeichneten Winkel ∡EAB und ∡DCA sind gleich groß.

Wie groß ist der Winkel ∡CFE?

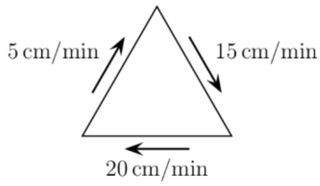
(A) 55° (B) 60° (C) 65° **(D)** 70° (E) 75°

Lösung: Da das Dreieck gleichschenkelig ist, gilt: $\measuredangle BCA = \measuredangle CAB = \frac{180°-40°}{2} = 70°$

Wir betrachten nun man das Dreieck FAC: $\measuredangle AFC = 180° - \measuredangle FCA - (70° - \measuredangle FCA) = 110°$

Der gesuchte Winkel $\measuredangle CFE$ ist dann $180° - 110° = 70°$ groß.

24. Eine Ameise geht entlang der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung). Ihre Geschwindigkeit beträgt bei der ersten Seite 5 cm/min, bei der zweiten 15 cm/min und bei der dritten 20 cm/min.
Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit in cm/min geht die Ameise einmal um das ganze Dreieck?



(A) 10 (B) $\frac{80}{11}$ **(C)** $\frac{180}{19}$ (D) 15 (E) $\frac{40}{3}$

Lösung:

Die Seitenlänge des Dreiecks sei x cm.

Die Ameise legt also eine Distanz von $3x$ cm zurück.

Dafür benötigt sie insgesamt $\frac{x}{5}+\frac{x}{15}+\frac{x}{20}=\frac{19x}{60}$ Minuten.

Ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt also $\frac{3x\text{ cm}}{\frac{19x}{60}\text{min}}=\frac{180}{19}\text{cm/min}$

25. Elisabeth möchte alle ganzen Zahlen von 1 bis 9 in die Felder der abgebildeten Figur schreiben, sodass das Produkt der Zahlen zweier benachbarter Felder nicht größer als 15 ist.
Zwei Felder werden „benachbart" genannt, wenn sie eine gemeinsame Kante haben.
Wie viele Möglichkeiten hat Elisabeth, die Felder zu beschriften?

(A) 8 (B) 12 **(C)** 16 (D) 24 (E) 32

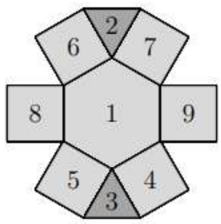
Lösung:

Man beachte, dass 8 und 9 höchstens einen Nachbarn haben dürfen, und dieser Nachbar muss jedenfalls 1 sein. Daraus folgt, dass die Zahlen 8 und 9 in den Feldern ganz rechts und links liegen müssen. Dafür gibt es 2 Möglichkeiten.

In der Mitte muss also die 1 stehen.

Dann bestimmen wir die Position der Zahlen 6 und 7, die beide nur die 1 und 2 als Nachbar haben dürfen. Es gibt also 4 Möglichkeiten, wobei das Dreieck zwischen der 6 und der 7 mit der 2 beschriftet werden muss.

Die 4 und 5 dürfen nicht benachbart sein, aber die 3 als Nachbar haben. So muss die 3 das Dreieck zwischen der 4 und 5 einnehmen, während es für die Anordnung von 4 und 5 2 Möglichkeiten gibt.

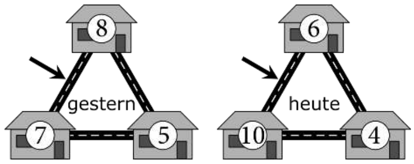


Insgesamt gibt es also $2\cdot 4\cdot 2=16$ Möglichkeiten, die Felder zu beschriften. Eine spezifische Möglichkeit ist in der Abbildung dargestellt.

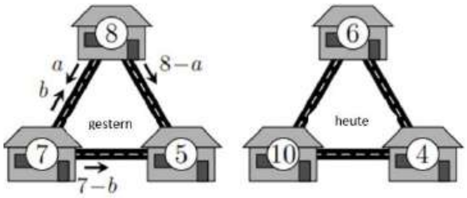
26. Einige Mäuse leben in drei Häusern. Gestern Nacht verließ jede Maus ihr Haus und übersiedelte direkt in eines der anderen beiden Häuser. In der Abbildung sieht man, wie viele Mäuse gestern und heute in den einzelnen Häusern waren.

Wie viele Mäuse benutzten den Weg, der mit dem Pfeil markiert ist?

(A) 9 **(B)** 11 (C) 12 (D) 16 (E) 19



Lösung: Vom oberen Haus übersiedelten a Mäuse ins linke Haus und b Mäuse kamen in die Gegenrichtung (siehe Abbildung. Gesucht ist demnach $a + b$.



Zum rechten Haus gingen $8 - a + 7 - b$ Mäuse, also ist $8 - a + 7 - b = 4$. Also ist $a + b = 8 + 7 - 4 = 11$.

27. Bart schrieb die Zahl 1015 als Summe von Zahlen, die nur die Ziffer 7 enthalten. Er benutzte dafür die Ziffer 7 insgesamt 10 Mal. Nun möchte er auch die Zahl 2023 als Summe von Zahlen schreiben, die nur die Ziffer 7 enthalten. Er benutzt die Ziffer 7 insgesamt 19 Mal.

Wie oft muss er die Zahl 77 verwenden?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 **(E)** 6

$$\begin{array}{rr} & 777 \\ & 77 \\ + & 77 \\ & 77 \\ & 7 \\ \hline & 1015 \end{array}$$

Lösung:

Drei 777 sind zu viel, weil $3 \cdot 777 > 2023$ und eine ist zu wenig. Also muss die Zahl 777 zwei Mal verwendet werden. Es bleiben $2023 - 2 \cdot 777 = 469$ übrig.

$469: 77 = 6$, ... Wenn die Zahl 77 nur 5 Mal verwendet wird, müsste 7 genau 12 Mal verwendet werden, aber dann würden insgesamt zu viele Ziffern verwendet werden. Also muss die Zahl 77 genau 6 Mal verwendet werden.

$$\begin{array}{rr} & 777 \\ & 777 \\ & 77 \\ & 77 \\ + & 77 \\ & 77 \\ & 77 \\ & 77 \\ & 7 \\ \hline & 2023 \end{array}$$

Alternative Lösung:

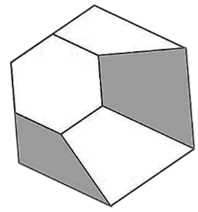
Da die Einerstelle von 2023 eine 3 ist, müssen wir also genau 9 Zahlen addieren, denn das einzige Vielfache von 7, das auf eine 3 endet, ist $7 \cdot 9 = 63$.

Bleibt also 6 als Zehnerübertrag. Die Zehner der neun Zahlen müssen also auf 6 enden, damit 6+6 auf einer 2 endet. 56 ist das einzige Vielfache von 7 mit einer 6 an der Einerstelle. Das bedeutet, dass die Zahl 7 nur einmal vorkommt (weil wir in 8 von 9 Zahlen zumindest eine 7 als Zehner brauchen).

Es gibt also wieder einen Übertrag von 6. Wir brauchen also noch an der Hunderterstelle die Summe 14 (um mit der 6 auf 20 zu kommen). Das bedeutet, es muss zwei Mal die Zahl 777 verwendet werden.

28. Ein regelmäßiges Sechseck ist in vier Vierecke und ein kleineres regelmäßiges Sechseck unterteilt. Das Verhältnis $\frac{Flächeninhalt\ des\ dunklen\ Bereiches}{Flächeninhalt\ des\ kleinen\ Sechsecks} = \frac{4}{3}$.

Wie groß ist das Verhältnis $\frac{Flächeninhalt\ des\ kleinen\ Sechsecks}{Flächeninhalt\ des\ großen\ Sechsecks}$?



(A) $\frac{3}{11}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{3}{5}$

Lösung: Sei A die Fläche des großen Sechsecks, a die Fläche des kleinen Sechsecks und d die Fläche des dunklen Bereichs. Dann ist $d = \frac{A-a}{2}$

Aus $\frac{d}{a} = \frac{4}{3}$ folgt dann also $\frac{a}{A} = \frac{3}{11}$

29. Jakob schrieb sechs aufeinanderfolgende Zahlen auf sechs kleine weiße Papierstücke, eine Zahl pro Papierstück. Er klebte diese sechs Papierstücke auf die Vorder- und die Rückseite von drei Münzen. Dann warf er die Münzen dreimal. Nach dem ersten Wurf kamen die Zahlen 6, 7, 8 oben zu liegen (siehe Abbildung), die Jakob danach rot bemalte.

Nach dem zweiten Wurf war die Summe der sichtbaren Zahlen 23 und nach dem dritten Wurf die Summe 17.

Wie groß ist die Summe der Zahlen auf den drei weißen Papierstücken?

(A) 18 (B) 19 (C) 23 (D) 24 (E) 30

Lösung: Die Zahlen 6, 7 und 8 wurden gesehen, also gibt es folgende Möglichkeiten für die sechs aufeinanderfolgenden Zahlen: 3 bis 8, 4 bis 9, 5 bis 10 oder 6 bis 11.

Die Summe 23 lässt sich nicht aus drei Zahlen zwischen 5 und 10 bilden und die Summe 17 kann nicht mit drei Zahlen aus 5 bis 10 und 6 bis 11 gebildet werden.

Es müssen also die Zahlen von 4 bis 9 sein und die Summe der Zahlen auf den drei weißen Zetteln muss $4 + 5 + 9 = 18$ sein.

30. Ein Rugby-Team erreichte 24, 17 und 25 Punkte im 7., 8. und 9. Spiel der vergangenen Saison. Die durchschnittliche Punktezahl pro Spiel war nach 9 Spielen höher als nach ihren ersten 6 Spielen. Ihr Durchschnitt nach 10 Spielen war mehr als 22 Punkte. Wie viele Punkte haben sie im 10. Spiel mindestens erreicht?

(A) 22 (B) 23 **(C)** 24 (D) 25 (E) 26

Lösung:

Der Punktedurchschnitt im 7., 8. und 9. Spiel betrug $\frac{24+25+17}{3} = 22$ Punkte. Das bedeutet, dass der Durchschnitt in den ersten sechs Spielen weniger als 22 Punkte betragen musste. Das bedeutet, dass das Team in den ersten 6 Spielen weniger als $6 \cdot 22 = 132$ erreicht haben musste.

In den 10 Spielen hat das Team mehr als 220 Punkte erreicht, also mindestens 221.

Also muss das Team im 10. Spiel mindestens $221 - 131 - 24 - 25 - 17 = 24$ Punkte erreicht haben.

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Kategorie: Junior, Schulstufe: 9. – 10.

Vor- und Zuname:

Schule:

Klasse:

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

Mit meiner Unterschrift gebe ich das Einverständnis, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

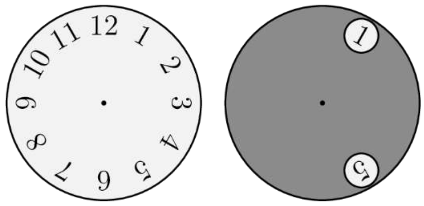
Ort, Datum Unterschrift

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

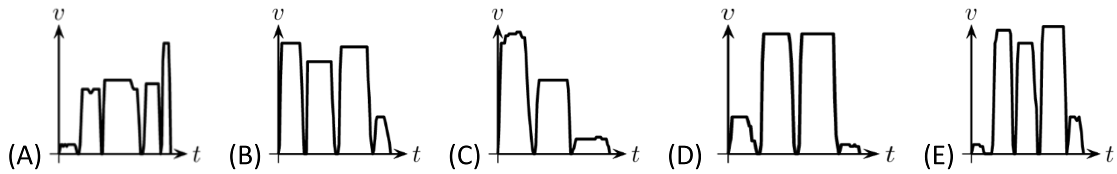
- 3 Punkte Beispiele -

1. Eine dunkle Scheibe mit zwei Löchern wird wie abgebildet auf das Ziffernblatt einer Uhr gelegt. Die dunkle Scheibe wird nun so gedreht, dass die Zahl 10 durch eines der beiden Löcher sichtbar ist.
Welche der Zahlen könnte man dann im anderen Loch sehen?



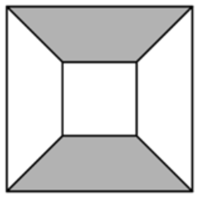
(A) 2 und 6 (B) 3 und 7 (C) 3 und 6 (D) 1 und 9 (E) 2 und 7

2. Auf ihrem Schulweg musste Maria zuerst zur U-Bahn laufen, stieg aus dieser zwei Haltestellen später wieder aus und ging anschließend den Rest des Weges zu Fuß bis zur Schule.
Welches der folgenden Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme entspricht ihrem Schulweg am besten?



3. Die beiden ganzen Zahlen m und n sind positiv und ungerade. Welche der folgenden Zahlen ist ungerade?
(A) $m \cdot n + 2$ (B) $(m+1) \cdot (n+1)$ (C) $m + n + 2$ (D) $m \cdot (n+1)$ (E) $m + n$

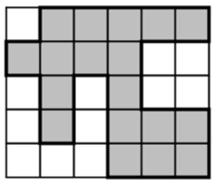
4. In einem großen Quadrat mit Seitenlänge 10 cm ist ein kleines Quadrat mit Seitenlänge 4 cm eingezeichnet, dessen Seiten parallel zu denen des großen Quadrats sind (siehe Abbildung).
Welcher Anteil der Figur ist gefärbt?



(A) 25 % (B) 30 % (C) 40 % (D) 42 % (E) 45 %

5. Heute ist Donnerstag. Welcher Wochentag ist in 2023 Tagen?
(A) Dienstag (B) Mittwoch (C) Donnerstag (D) Freitag (E) Samstag

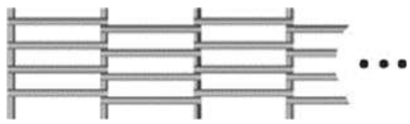
6. Das abgebildete große Rechteck wird in 30 gleich große Quadrate unterteilt. Der Umfang der grau markierten Fläche ist 240 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Rechtecks?



(A) 480 cm² (B) 750 cm² (C) 1080 cm² (D) 1920 cm² (E) 2430 cm²

7. Addiert man die Alter aller Mitglieder einer fünfköpfigen Familie, erhält man 80. Die jüngsten beiden Kinder sind 6 und 8 Jahre alt. Wie groß war die Summe der Alter der Familienmitglieder vor 7 Jahren?
(A) 35 (B) 36 (C) 44 (D) 46 (E) 66

8. Ein gerader Holzzaun besteht aus senkrechten in den Boden eingeschlagenen Balken, von denen jeder mit dem nächsten Balken durch 4 waagrechte Balken verbunden ist. Der Zaun beginnt und endet mit einem senkrechten Balken. Aus wie vielen Balken könnte ein solcher Zaun bestehen?



(A) 95 (B) 96 (C) 97 (D) 98 (E) 99

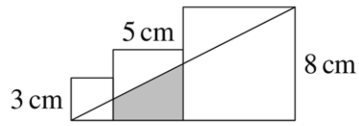
9. Wie viele Paare positiver ganzer Zahlen (a, b) erfüllen die Gleichung $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

10. Nachdem Beth insgesamt 200 Schachpartien gespielt hat, liegt ihre Gewinnrate genau bei 49 %.
Wie viele weitere Partien muss sie noch mindestens spielen, damit ihre Gewinnrate auf genau 50 % steigen kann?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Punkte Beispiele -

11. Jennifer möchte Wasser sparen. Sie reduziert den Wasserdruck, dadurch sinkt der Wasserverbrauch um ein Viertel. Außerdem reduziert sie die Dauer des Duschens um ein Viertel.
Um welchen Anteil reduziert sie den Wasserverbrauch beim Duschen insgesamt?
(A) um $\frac{1}{4}$ (B) um $\frac{3}{8}$ (C) um $\frac{1}{16}$ (D) um $\frac{5}{12}$ (E) um $\frac{7}{16}$

12. In der Abbildung sind drei aneinander liegende Quadrate mit Seitenlängen 3 cm, 5 cm und 8 cm zu sehen. Wie groß ist der Flächeninhalt des gefärbten Trapezes?

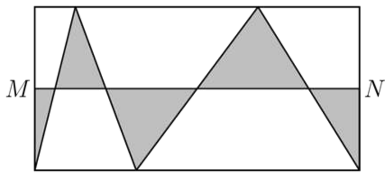


(A) 13 cm² (B) $\frac{55}{4}$ cm² (C) $\frac{61}{4}$ cm² (D) $\frac{65}{4}$ cm² (E) $\frac{69}{4}$ cm²

13. Ein Seil der Länge 95 m wird so in drei Teile geschnitten, dass jedes Teilstück um die Hälfte länger ist als das jeweils vorangehende Teilstück. Wie lang ist das längste der drei Teilstücke?

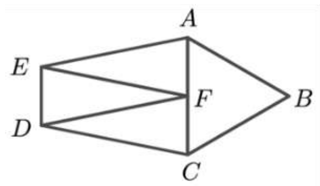
(A) 39 m (B) 42 m (C) 45 m (D) 48 m (E) 54 m

14. Die Punkte *M* und *N* sind die Mittelpunkte zweier Seiten des großen Rechtecks (siehe Abbildung). Welcher Anteil der Fläche des großen Rechtecks ist gefärbt?



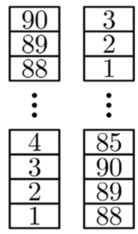
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

15. Das Fünfeck *ABCDE* ist in vier Dreiecke zerlegt, die alle den gleichen Umfang besitzen (siehe Abbildung). Das Dreieck *ABC* ist gleichseitig und die Dreiecke *AEF*, *DFE* und *CDF* sind kongruente gleichschenkelige Dreiecke.
Wie groß ist das Verhältnis des Umfangs des Fünfecks *ABCDE* zum Umfang des Dreiecks *ABC*?



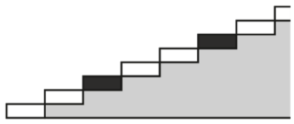
(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{5}{2}$

16. Ein Turm besteht aus Blöcken, die von unten nach oben mit den Zahlen von 1 bis 90 beschriftet sind. Bob baut aus diesen Blöcken einen neuen Turm. Dabei nimmt er jeweils die obersten drei Blöcke vom alten Turm herunter und legt sie, ohne ihre Reihenfolge zu verändern, auf den neuen Turm (siehe Abbildung). Wie viele Blöcke befinden sich im neuen Turm zwischen den beiden Blöcken mit den Nummern 39 und 40?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

17. Eine Treppe besteht aus 2023 Stufen. Jede dritte Stufe ist schwarz gefärbt. Die ersten sieben Stufen dieser Treppe sind in der Abbildung vollständig zu sehen. Anita geht die Treppe hinauf und betritt dabei jede der Stufen genau einmal. Sie kann entweder mit dem rechten oder linken Fuß beginnen und tritt dann abwechselnd mit dem rechten oder linken Fuß auf.
Wie viele schwarze Stufen betritt sie mindestens mit dem rechten Fuß?

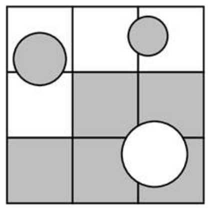


(A) 332 (B) 333 (C) 336 (D) 337 (E) 672

18. Wir nennen eine positive ganze Zahl *potenzfrei,* wenn keine ihrer Ziffern als Potenz einer ganzen Zahl mit Hochzahl größer als 1 geschrieben werden kann. Die Zahl 53 ist beispielsweise potenzfrei, aber die Zahl 54 ist nicht potenzfrei, da $4 = 2^2$ gilt.
Welche der folgenden Zahlen ist die Differenz der größten und kleinsten potenzfreien zweistelligen Zahlen?

(A) 24 (B) 55 (C) 63 (D) 88 (E) 89

19. Ein Quadrat mit Seitenlänge 30 cm ist in 9 Quadrate zerlegt. Wie in der Abbildung zu sehen, enthält das große Quadrat drei Kreise mit den Radien 5 cm (rechts unten), 4 cm (links oben) sowie 3 cm (rechts oben).
Wieviel cm² sind grau gefärbt?



(A) $500 + 25\pi$ (B) 500 (C) $400 + 50\pi$ (D) 400 (E) $500 - 25\pi$

20. Das arithmetische Mittel von fünf verschiedenen Primzahlen ist eine ganze Zahl.
Was ist der kleinstmögliche Wert dieses arithmetischen Mittels?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

- 5 Punkte Beispiele -

21. Die Zahlen von 1 bis 9 sollen gemäß folgenden Regeln auf die 9 Quadrate im Bild verteilt werden: In jedem Quadrat soll eine Zahl stehen. Die Summe von drei benachbarten Zahlen ist immer ein Vielfaches von 3. Die Zahlen 3 und 1 sind bereits eingesetzt worden.

				3		1		

Auf wie viele Arten können die übrigen Zahlen eingesetzt werden?

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

22. Auf wie viele verschiedene Arten können wir das Wort *BANANA* in der folgenden Tabelle lesen, wenn wir immer nur zu einem Feld wechseln können, das eine Kante mit dem aktuellen Feld gemeinsam hat und Felder auch mehrmals verwendet werden dürfen?

B	A	B
A	N	A
B	A	B

(A) 56 (B) 64 (C) 84 (D) 112 (E) 128

23. Ausgehend von den vier Zahlen

$$2, 0, 2, 3$$

erstellt die Känguru-Maschine Zahlen nach der folgenden Regel: Die nächste Zahl ist jeweils die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden von den vier direkt vorausgehenden Zahlen ist.
Welche Zahl befindet sich an der Position 2023?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

24. Aus einem Rechteck mit den Eckpunkten (0|0), (100|0), (100|50) und (0|50) wird ein Kreis mit Mittelpunkt (75|30) und Radius 10 ausgeschnitten.
Welche Steigung besitzt die Gerade, die den Punkt (75|30) enthält und den verbliebenen Teil des Rechtecks in zwei flächengleiche Teilstücke unterteilt?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{2}{3}$

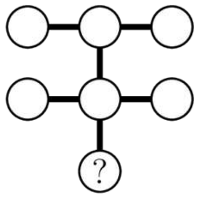
25. Wenn Matildas Smartphone ganz aufgeladen ist, hat es eine Laufzeit von

--- 32 Stunden, wenn sie durchgängig telefoniert,
--- 20 Stunden, wenn sie durchgängig im Internet surft und
--- 80 Stunden, wenn sie es gar nicht benutzt.

Matilda steigt mit einem zur Hälfte gefüllten Akku in einen Zug. Während der Zeit im Zug verbringt sie jeweils genau den gleichen Zeitraum mit Telefonieren, mit Internetsurfen und mit gar keiner Nutzung des Smartphones. Genau bei der Ankunft am Ziel wird der Akku leer.
Wie viele Stunden dauert die Zugfahrt?

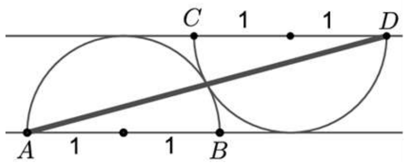
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

26. Sieben paarweise verschiedene einstellige Zahlen werden so auf die abgebildeten Kreise verteilt, dass die Produkte der drei jeweils durch eine gerade Strecke verbundenen Zahlen in allen drei Fällen gleich sind.
Welche Zahl steht im Kreis mit dem Fragezeichen?



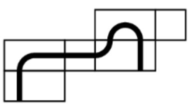
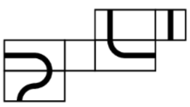
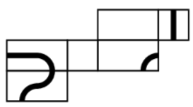
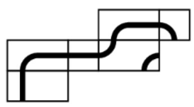
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

27. Gegeben sind zwei einander berührende Halbkreise mit Radius 1 und zueinander parallelen Durchmessern AB sowie CD. Die Verlängerungen der beiden Durchmesser sind gleichzeitig Tangenten an den jeweils anderen Halbkreis (siehe Abbildung).
Wie groß ist das Quadrat der Länge der Strecke AD?



(A) 16 (B) $8+4\sqrt{3}$ (C) 12 (D) 9 (E) $5+2\sqrt{3}$

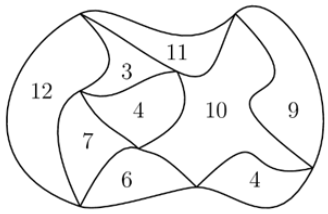
28. Leon hat einen geschlossenen Weg auf der Oberfläche eines Quaders gezeichnet.
Welches Netz kann seinen Weg **nicht** darstellen?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

29. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert. Renate markiert zwischen jedem Paar benachbarter Punkte einen weiteren Punkt. Diesen Vorgang wiederholt sie drei weitere Male. Nun gibt es 225 markierte Punkte auf der Geraden.
Wie viele Punkte waren zu Beginn markiert?

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 29 (E) 32

30. Die Abbildung zeigt die Karte eines großen Parks. Der Park ist in einige Bereiche unterteilt, wobei die Zahl in jedem Bereich dessen Umfang in km angibt.
Wie groß ist der Umfang des gesamten Parks in km?



(A) 18 (B) 22 (C) 26 (D) 32 (E) 42

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Level: Junior, Grade: Schulstufe 9 + 10

Full name:

School:

Class:

Time: 75 min.
30 starting points
each correct answer to questions 1. – 10.: 3 points
each correct answer to questions 11. – 20.: 4 points
each correct answer to questions 21. – 30.: 5 points
each questions left unanswered: 0 points
each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

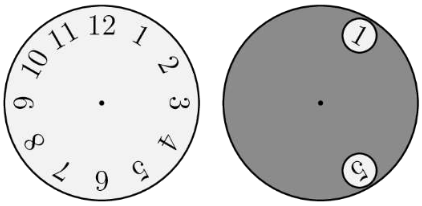
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

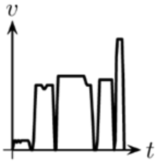
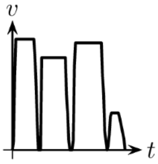
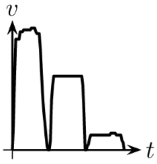
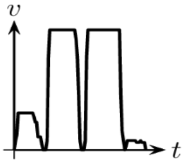
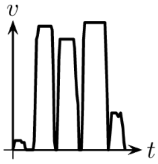
Känguru der Mathematik 2023
Level Junior (Schulstufe 9 and 10)
Austria – 16. 3. 2023

- 3 Point Examples -

1. A dark disc with two holes is placed on the dial of a watch as shown in the diagram. The dark disc is now rotated so that the number 10 can be seen through one of the two holes.
Which of the numbers could one see through the other hole now?
(A) 2 and 6 (B) 3 and 7 (C) 3 and 6 (D) 1 and 9 (E) 2 and 7

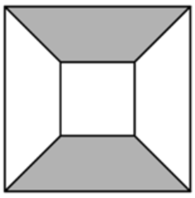


2. On her way to school Maria first had to run to the underground, she exited from that after two stops and subsequently walked the rest of the way by foot all the way to school.
Which of the following speed-time-diagrams best describes her journey to school?

(A) 
(B) 
(C) 
(D) 
(E) 

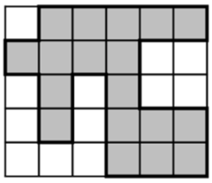
3. The two integers m and n are positive and odd. Which of the following numbers is odd?
(A) $m \cdot n + 2$ (B) $(m+1) \cdot (n+1)$ (C) $m + n + 2$ (D) $m \cdot (n+1)$ (E) $m + n$

4. A small square with side length 4 cm is drawn within a big square with side length 10 cm; their sides are parallel to each other (see diagram). What percentage of the figure is shaded?
(A) 25 % (B) 30 % (C) 40 % (D) 42 % (E) 45 %



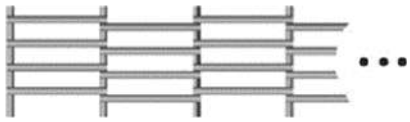
5. Today is Thursday. What day of the week is it in 2023 days?
(A) Tuesday (B) Wednesday (C) Thursday (D) Friday (E) Saturday

6. The big rectangle shown is divided into 30 equally big squares. The perimeter of the area shaded in grey is 240 cm. How big is the area of the big rectangle?
(A) 480 cm² (B) 750 cm² (C) 1080 cm² (D) 1920 cm² (E) 2430 cm²



7. If one adds the ages of all members of a family of five together, one gets 80. The two youngest children are 6 and 8 years old. How big was the sum of the ages of the family members 7 years ago?
(A) 35 (B) 36 (C) 44 (D) 46 (E) 66

8. A straight wooden fence is made up of vertical beams stuck in the ground which are each connected to the next beam by 4 horizontal beams. The fence begins and ends with a vertical beam. Out of how many beams could such a fence be made?
(A) 95 (B) 96 (C) 97 (D) 98 (E) 99



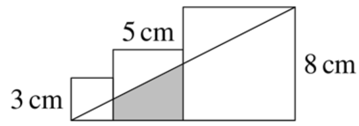
9. How many pairs of positive integers (a, b) fulfil the equation $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

10. After playing 200 games of chess, Beth's winning rate is exactly 49 %.
What is the minimum number of games she has to still play to increase her winning rate to 50 %?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 4 Points Examples -

11. Jennifer wants to save water. She reduces the water pressure and thus reduces the water usage by one quarter. Furthermore, she reduces the time she takes a shower by one quarter.
By which fraction in total does she reduce the water usage for her shower?
(A) by $\frac{1}{4}$ (B) by $\frac{3}{8}$ (C) by $\frac{1}{16}$ (D) by $\frac{5}{12}$ (E) by $\frac{7}{16}$

12. The diagram shows three adjacent squares with side lengths 3 cm, 5 cm and 8 cm. How big is the area of the shaded in trapezium?

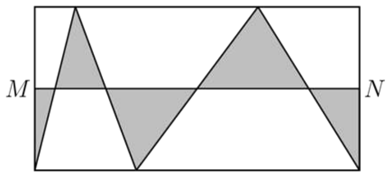


(A) 13 cm² (B) $\frac{55}{4}$ cm² (C) $\frac{61}{4}$ cm² (D) $\frac{65}{4}$ cm² (E) $\frac{69}{4}$ cm²

13. A rope with length 95 m is cut into three pieces so that each piece is half as long again as the respective previous piece. How long is the longest of the three pieces?

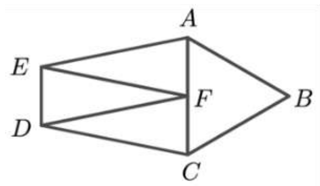
(A) 39 m (B) 42 m (C) 45 m (D) 48 m (E) 54 m

14. The points *M* and *N* are the midpoints of two sides of the big rectangle (see diagram). Which part of the area of the big rectangle is shaded?



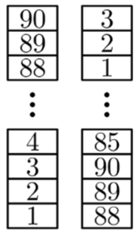
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

15. The pentagon *ABCDE* is split into four triangles that all have the same perimeter (see diagram). Triangle *ABC* is equilateral and the triangles *AEF*, *DFE* and *CDF* are congruent isosceles triangles.
How big is the ratio of the perimeter of the pentagon *ABCDE* to the perimeter of the triangle *ABC*?



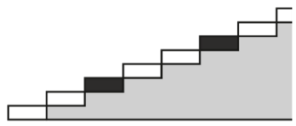
(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{5}{2}$

16. A tower consists of blocks that are labelled from bottom to top with the numbers from 1 to 90. Bob uses these blocks to build a new tower. For each step he takes the top three blocks from the old tower and places them on the new tower without changing their order (see diagram). How many blocks are there in the new tower between the blocks with the numbers 39 and 40?



(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

17. A staircase has 2023 steps. Every third step is coloured in black. The first seven steps of this staircase can be fully seen in the diagram. Anita walks up the staircase and steps on each step exactly once. She can start with either the right or the left foot and then steps down alternately with the right or left foot.
What is the minimum number of black steps she sets her right foot on?

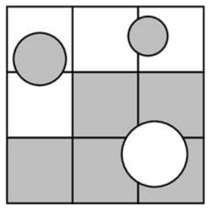


(A) 332 (B) 333 (C) 336 (D) 337 (E) 672

18. We call a positive integer *powerfree* if none of its digits can be written as a power of an integer with an exponent bigger than 1. For example, the number 53 is powerfree, but the number 54 is not powerfree since $4 = 2^2$.
Which one of the following numbers is the difference between the biggest and the smallest two-digit powerfree numbers?

(A) 24 (B) 55 (C) 63 (D) 88 (E) 89

19. A square with side length 30 cm is split into 9 squares. The big square contains three circles with radii 5 cm (bottom right), 4 cm (top left) as well as 3 cm (top right) as seen in the diagram. How many cm² are shaded in grey?



(A) $500 + 25\pi$ (B) 500 (C) $400 + 50\pi$ (D) 400 (E) $500 - 25\pi$

20. The arithmetic mean of five different prime numbers is an integer number.
What is the smallest possible number of this arithmetic mean?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

- 5 Points Examples -

21. The numbers from 1 to 9 should be distributed among the 9 squares in the diagram according to the following rules:

There should be one number in each square. The sum of three adjacent numbers is always a multiple of 3. The numbers 3 and 1 are already placed.
How many ways are there to place the remaining numbers?

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

22. How many different ways are there to read the word *BANANA* in the following table if we can only cross to a field that shares an edge with the current field and we can use fields several times?

B	A	B
A	N	A
B	A	B

(A) 56 (B) 64 (C) 84 (D) 112 (E) 128

23. Starting with the four numbers

$$2, 0, 2, 3$$

the kangaroo-machine creates numbers according to the following rule: the next number is always the smallest non-negative integer that is different to the four directly previous numbers.
Which number is in position 2023?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

24. A circle with midpoint (75|30) and radius 10 is cut from a rectangle with vertices (0|0), (100|0), (100|50) and (0|50).
What is the gradient of the straight line that goes through the point (75|30) and divides the remaining part of the rectangle into two parts with equal area?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{2}{3}$

25. When Matilda's smartphone is fully charged it has a battery life of

32 hours if she phones continuously,

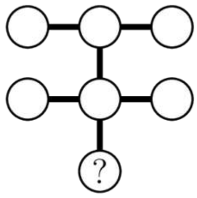
20 hours if she surfs the internet continuously and

80 hours if she does not use it at all.

Matilda boards a train with a half full battery. During her time on board she spends the same amount of time each on phoning, surfing the internet and not using the phone at all. Just when she arrives at her destination the battery is empty.
How many hours did the train ride take?

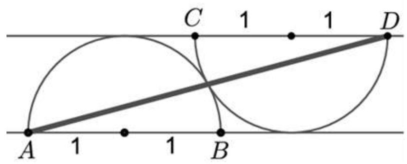
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

26. Seven pairwise different single-digit numbers are distributed among the circles shown so that the product of the three numbers that are connected by a straight line is the same in all three cases.
Which number is written in the circle with the question mark?



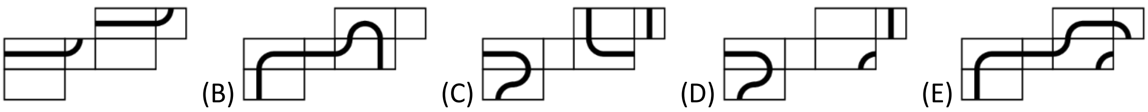
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

27. Consider the two touching semicircles with radius 1 and their diameters *AB* and *CD* respectively that are parallel to each other. The extensions of the two diameters are also tangents to the respective other semicircle (see diagram).
How big is the square of the length *AD*?



(A) 16 (B) 8+4$\sqrt{3}$ (C) 12 (D) 9 (E) 5+2$\sqrt{3}$

28. Leon has drawn a closed loop on the surface of a cuboid.
Which net **cannot** show his loop?

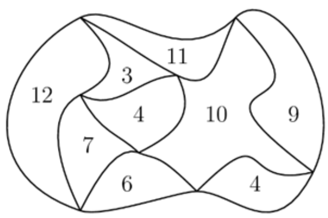


(A) (B) (C) (D) (E)

29. Several points are marked on a straight line. Renate marks another point between each pair of adjacent points. She repeats this process three more times. Now there are 225 points marked on this straight line.
How many points were marked to start with?

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 29 (E) 32

30. The diagram shows the map of a big park. The park is split into several sections and the number in each section states its perimeter in km.
How big is the perimeter of the entire park in km?



(A) 18 (B) 22 (C) 26 (D) 32 (E) 42

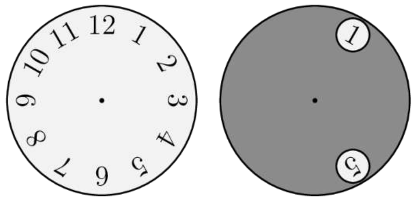
Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Junior (9. und 10. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

– Lösungsvektor –

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	D	A	D	C	D	D	B	E	D	E	B	C	C	D	E	D	B	B	B	E	E	C	A	D	A	B	C	A	C

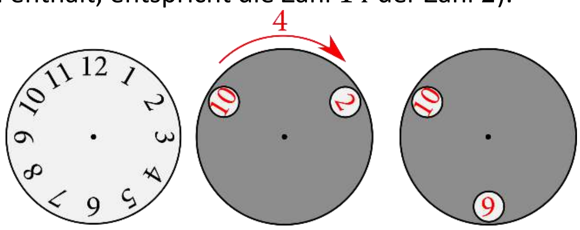
– 3 Punkte Beispiele –

1. Eine dunkle Scheibe mit zwei Löchern wird wie abgebildet auf das Ziffernblatt einer Uhr gelegt. Die dunkle Scheibe wird nun so gedreht, dass die Zahl 10 durch eines der beiden Löcher sichtbar ist.
Welche der Zahlen könnte man dann im anderen Loch sehen?

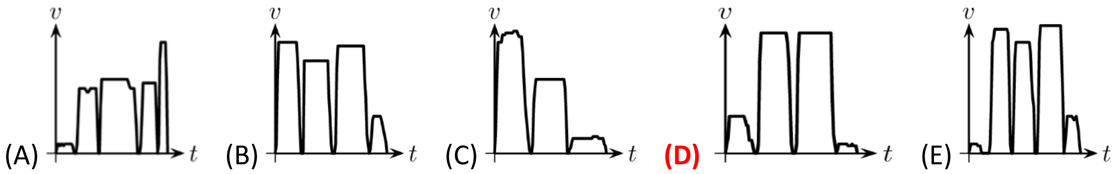


(A) 2 und 6 (B) 3 und 7 (C) 3 und 6 (D) 1 und 9 (E) 2 und 7

Lösung: Durch die dunkle Scheibe können immer solche zwei Zahlen am Ziffernblatt sichtbar werden, die 4 Zahlen voneinander entfernt liegen. Für die Zahl 10 ist möglich: $10 - 4 = \mathbf{6}$ und $10 + 4 = 14$ entspricht **2**. (Da das Ziffernblatt nur 12 Zahlen enthält, entspricht die Zahl 14 der Zahl 2).



2. Auf ihrem Schulweg musste Maria zuerst zur U-Bahn laufen, stieg aus dieser zwei Haltestellen später wieder aus und ging anschließend den Rest des Weges zu Fuß bis zur Schule.
Welches der folgenden Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme entspricht ihrem Schulweg am besten?



Lösung: Den ersten Teil des Weges läuft Marta, dann fährt sie mit der U-Bahn und den letzten Teil geht sie zu Fuß. Ihr Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm wird also 3 unterschiedliche Geschwindigkeiten zeigen. Wenn Marta geht, bewegt sie sich mit der geringsten Geschwindigkeit. Beim Laufen hat sie eine größere Geschwindigkeit als beim Gehen. Und in der U-Bahn bewegt sie sich mit einer vielfach größeren Geschwindigkeit fort als zu Fuß. Ihr Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm wird also zuerst eine mittlere Geschwindigkeit zeigen, dann eine sehr hohe und zuletzt die niedrigste. Weiters fährt sie mit der U-Bahn 2 Haltestellen. Zwischen ihrem Einstieg und Ausstieg kann die U-Bahn also 1-mal halten (Bei einem Halt ist die Geschwindigkeit gleich 0). Das entsprechende Diagramm ist in **D** gezeigt.

3. Die beiden ganzen Zahlen m und n sind positiv und ungerade. Welche der folgenden Zahlen ist ungerade?
(A) $m \cdot n + 2$ (B) $(m+1) \cdot (n+1)$ (C) $m + n + 2$ (D) $m \cdot (n+1)$ (E) $m + n$

Lösung: In den Termen kommen die Addition und Multiplikation der Zahlen m und n vor. Hier muss man die Rechenregeln für gerade und ungerade Zahlen beachten:
Addiert man zwei ungerade Zahlen, erhält man immer eine gerade Zahl:

$$(m+1), \qquad (n+1), \qquad (m+n) = Antwort\ E$$

Addiert man eine gerade mit einer geraden Zahl, erhält man eine gerade Zahl:

$$(m+n) + 2 = Antwort\ C$$

Multipliziert man eine gerade mit einer ungeraden Zahl, erhält man eine gerade Zahl:

$$m \cdot (n+1) = Antwort\ D, \qquad (m+1) \cdot (n+1) = Antwort\ B$$

Antwort B, C, D und E kommen also nicht in Betracht.

Multipliziert man zwei ungerade Zahlen, erhält man eine ungerade Zahl.

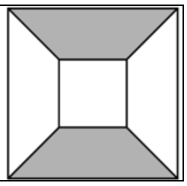
$$m \cdot n$$

Addiert man eine ungerade Zahl mit einer geraden Zahl, erhält man eine ungerade Zahl:

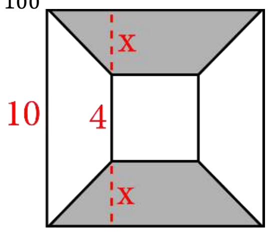
$$\boldsymbol{m \cdot n + 2 = Antwort\ A}$$

4. In einem großen Quadrat mit Seitenlänge 10 cm ist ein kleines Quadrat mit Seitenlänge 4 cm eingezeichnet, dessen Seiten parallel zu denen des großen Quadrats sind (siehe Abbildung). Welcher Anteil der Figur ist gefärbt?

(A) 25 % (B) 30 % (C) 40 % **(D)** 42 % (E) 45 %



1. Lösung: Da das kleine Quadrat genau in der Mitte des großen Quadrates liegt, sind alle vier äußeren Trapeze kongruent. Die Fläche eines der vier Trapeze berechnet sich laut Flächenformel $\frac{(Seite\ a + Seite\ c) \cdot Höhe}{2} = \frac{(10+4) \cdot x}{2}$ (siehe Abbildung). Für die gesamte dunkle Fläche beider Trapeze ergibt das $\frac{2 \cdot x \cdot (10+4)}{2}$. Die Länge $2 \cdot x$ entspricht der Differenz der Seitenlänge des großen Quadrates und des kleinen Quadrates $2 \cdot x = 10 - 4 = 6$ cm. Der dunkle Flächeninhalt beträgt also $\frac{6 \cdot (10+4)}{2} = 42$ cm². Der Flächeninhalt des großen Quadrats beträgt $10 \cdot 10 = 100$ cm². Somit sind $\frac{42}{100} = \mathbf{42}$ % dunkel gefärbt.



2. Lösung: Der Flächeninhalt des großen Quadrates beträgt 100 cm², der Flächeninhalt des kleinen Quadrates 16 cm². Da das kleine Quadrat genau in der Mitte des großen Quadrates liegt, sind alle vier äußeren Trapeze kongruent. Die Summe der Flächeninhalte der vier Trapeze beträgt also $100 - 16 = 84$ cm². Da zwei der vier Trapeze gefärbt sind, beträgt der dunkle Flächeninhalt genau die Hälfte davon, also 42 cm². Somit sind $\mathbf{42}$ % dunkel gefärbt.

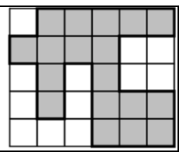
5. Heute ist Donnerstag. Welcher Wochentag ist in 2023 Tagen?

(A) Dienstag (B) Mittwoch **(C)** Donnerstag (D) Freitag (E) Samstag

Lösung: Eine Woche hat 7 Tage. 2023 ist durch 7 teilbar: $2023 : 7 = 289$. Das heißt nach 2023 Tagen sind genau 289 Wochen vergangen und es ist wieder der gleiche Wochentag wie heute. Da heute Donnerstag ist, muss in 2023 Tagen auch **Donnerstag** sein.

6. Das abgebildete große Rechteck wird in 30 gleich große Quadrate unterteilt. Der Umfang der grau markierten Fläche ist 240 cm. Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Rechtecks?

(A) 480 cm² (B) 750 cm² (C) 1080 cm² **(D)** 1920 cm² (E) 2430 cm²



Lösung: Der Umfang der dunkel markierten Fläche setzt sich aus 30 Seiten der kleinen Quadrate zusammen. Eine Quadratseite hat also die Länge $240 : 30 = 8$ cm. Das Rechteck ist 6 Quadrate lang und 5 Quadrate breit, die Seitenlängen des Rechtecks betragen also $5 \cdot 8 = 40$ cm und $6 \cdot 8 = 48$ cm. Der Flächeninhalt des großen Rechtecks beträgt schließlich $40 \cdot 48 = \mathbf{1920}$ **cm²**.

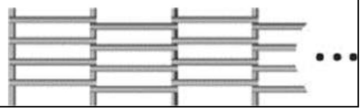
7. Addiert man die Alter aller Mitglieder einer fünfköpfigen Familie, erhält man 80. Die jüngsten beiden Kinder sind 6 und 8 Jahre alt. Wie groß war die Summe der Alter der Familienmitglieder vor 7 Jahren?

(A) 35 (B) 36 (C) 44 **(D)** 46 (E) 66

Lösung: Die Familie besteht aus 5 Personen. Die jüngsten beiden Kinder sind 6 und 8 Jahre, die Alter der restlichen 3 Familienmitglieder sind x, y, z Jahre. Gemeinsam sind sie $x + y + z + 6 + 8 = 80$ Jahre alt. Vor 7 Jahren war das jüngste Kind noch nicht geboren, die restlichen 4 Personen waren um 7 Jahre jünger. Vor 7 Jahren hat sich das Gesamtalter also zusammengesetzt aus $(x-7) + (y-7) + (z-7) + (8-7) = x + y + z + 8 - 4 \cdot 7$. Nach Umformen und Einsetzen der ersten Gleichung $(x + y + z + 8) = 80 - 6$ folgt: $(x + y + z + 8) - 4 \cdot 7 = (80 - 6) - 4 \cdot 7 = \mathbf{46}$.

Bemerkung: Die Aufgabe lässt sich auch ohne Verwendung von Variablen lösen: Vor sieben Jahren war das jüngste Kind noch nicht geboren und alle anderen Familienmitglieder um 7 Jahre jünger, insgesamt war die Familie zusammengenommen also um $6 + 4 \cdot\ 7 = 34$ Jahre jünger. Wenn sie aktuell alle zusammengenommen 80 Jahre alt sind, so waren sie vor vier Jahren also zusammengenommen $80 - 34 = 46$ Jahre alt.

8. Ein gerader Holzzaun besteht aus senkrechten in den Boden eingeschlagenen Balken, von denen jeder mit dem nächsten Balken durch 4 waagrechte Balken verbunden ist. Der Zaun beginnt und endet mit einem senkrechten Balken. Aus wie vielen Balken könnte ein solcher Zaun bestehen?



(A) 95 (B) 96 (C) 97 (D) 98 (E) 99

Lösung: An jedem senkrechten Balken sind 4 weitere Balken befestigt. Jeder solcher Abschnitt des Zauns besteht also aus 5 Balken. Außerdem endet der Zaun mit einem einzelnen senkrechten Balken. Lässt man den letzten Balken weg, muss die verbliebene Anzahl der Balken also durch 5 teilbar sein. Nur bei Antwort B **96** erhält man nach Subtraktion von 1 eine durch 5 teilbare Zahl $96 - 1 = 95$.

9. Wie viele Paare positiver ganzer Zahlen (a, b) erfüllen die Gleichung $\frac{a}{5} = \frac{7}{b}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: Umformen der Gleichung führt zu $\frac{a}{5} = \frac{7}{b} \Leftrightarrow a \cdot b = 5 \cdot 7 \Leftrightarrow a \cdot b = 35$. Die Zahl 35 ist als Produkt der beiden positiven ganzen Zahlen 1 und 35 oder 5 und 7 darstellbar. Es gibt also **4** mögliche Zahlenpaare $(1{,}35), (35{,}1), (5{,}7), (7{,}5)$.

10. Nachdem Beth insgesamt 200 Schachpartien gespielt hat, liegt ihre Gewinnrate genau bei 49 %.
Wie viele weitere Partien muss sie noch mindestens spielen, damit ihre Gewinnrate auf genau 50 % steigen kann?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Lösung: Beth hat 49% von 200 Partien gewonnen. Das heißt, sie hat $200 \cdot \frac{49}{100} = 98$ Partien gewonnen.
$200 - 98 = 102$ Partien hat sie verloren. Um gleich viele Partien gewonnen wie verloren zu haben, muss sie also mindestens noch **4** Partien spielen und alle gewinnen.

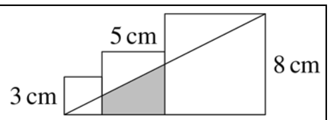
– 4 Punkte Beispiele –

11. Jennifer möchte Wasser sparen. Sie reduziert den Wasserdruck, dadurch sinkt der Wasserverbrauch um ein Viertel. Außerdem reduziert sie die Dauer des Duschens um ein Viertel.
Um welchen Anteil reduziert sie den Wasserverbrauch beim Duschen insgesamt?

(A) um $\frac{1}{4}$ (B) um $\frac{3}{8}$ (C) um $\frac{1}{16}$ (D) um $\frac{5}{12}$ (E) um $\frac{7}{16}$

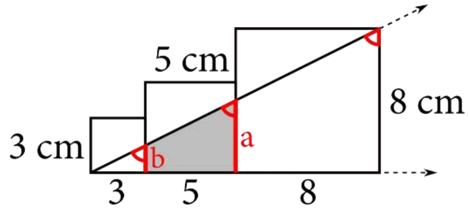
Lösung: Vor ihren Sparmaßnahmen verbraucht Jennifer die Menge X an Wasser. Durch die Reduktion des Wasserdruckes braucht sie nun ein Viertel weniger Wasser, also $\frac{3}{4}X$. Weiters reduziert sie auch die Dauer des Duschens um ein Viertel. Sie verbraucht nun also $\frac{3}{4}$ der ursprünglichen Menge in $\frac{3}{4}$ der Zeit. Ihr neuer Wasserverbrauch beträgt also $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} X = \frac{9}{16} X$. Sie verbraucht somit um $X - \frac{9}{16} X = \left(\frac{16}{16} - \frac{9}{16}\right) X = \mathbf{\frac{7}{16}} X$ weniger Wasser.

12. In der Abbildung sind drei aneinander liegende Quadrate mit Seitenlängen 3 cm, 5 cm und 8 cm zu sehen. Wie groß ist der Flächeninhalt des gefärbten Trapezes?



(A) 13 cm² (B) $\frac{55}{4}$ cm² (C) $\frac{61}{4}$ cm² (D) $\frac{65}{4}$ cm² (E) $\frac{69}{4}$ cm²

Lösung: Da die drei Quadrate aneinander liegen, sind ihre Seiten parallel zueinander und die schräge Linie schneidet die senkrechten Seiten der Quadrate jeweils im gleichen Winkel (siehe Abbildung). Mit Hilfe des Strahlensatzes können wir nun die Längen der Trapezseiten bestimmen.
Für Länge a gilt: $\frac{a}{8} = \frac{3+5}{3+5+8} \Leftrightarrow a = \frac{8 \cdot 8}{16} = 4$ cm.
Für Länge b gilt: $\frac{b}{8} = \frac{3}{3+5+8} \Leftrightarrow b = \frac{3 \cdot 8}{16} = \frac{3}{2}$ cm.
Der Flächeninhalt des Trapezes ist daher $\frac{(Seite\ a + Seite\ b) \cdot Höhe}{2} = \frac{\left(4+\frac{3}{2}\right) \cdot 5}{2} = \frac{\frac{11}{2} \cdot 5}{2} = \mathbf{\frac{55}{4}}$ **cm²**.



13. Ein Seil der Länge 95 m wird so in drei Teile geschnitten, dass jedes Teilstück um die Hälfte länger ist als das jeweils vorangehende Teilstück. Wie lang ist das längste der drei Teilstücke?

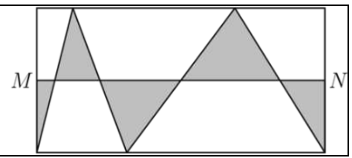
(A) 39 m (B) 42 m **(C)** 45 m (D) 48 m (E) 54 m

1. Lösung: Das kleinste Teilstück ist x Meter lang. Das nächstgrößere Stück y ist um die Hälfte länger, also $y = x + \frac{x}{2}$ Meter lang. Das dritte Stück z ist wieder um die Hälfte länger als das Stück davor und somit $y + \frac{y}{2} = x + \frac{x}{2} + \frac{x+\frac{x}{2}}{2} = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = 2x + \frac{x}{4}$. Meter lang.
Die Gesamtlänge des Seils beträgt $x + y + z = x + x + \frac{x}{2} + 2x + \frac{x}{4} = 4x + \frac{3x}{4} = \frac{19x}{4} = 95$ m.
Für das kürzeste Teilstück erhalten wir eine Länge von $x = \frac{95\cdot 4}{19} = 20$ m. Das längste Stück muss also $z = 2x + \frac{x}{4} = 2 \cdot 20 + \frac{20}{4} = \mathbf{45\ m}$ lang sein.

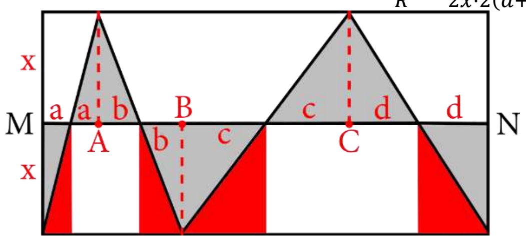
2. Lösung: Man kann natürlich auch verkehrt an die Sache herangehen. Sei das größte Teilstück x Meter lang, dann muss das vorhergehende $\frac{2}{3}x$ lang sein. Und das kleinste ist $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x$ lang.
Die Gesamtlänge des Seils beträgt also $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x + x = 95$ m und $x = \mathbf{45\ m}$ lang.

14. Die Punkte *M* und *N* sind die Mittelpunkte zweier Seiten des großen Rechtecks (siehe Abbildung). Welcher Anteil der Fläche des großen Rechtecks ist gefärbt?

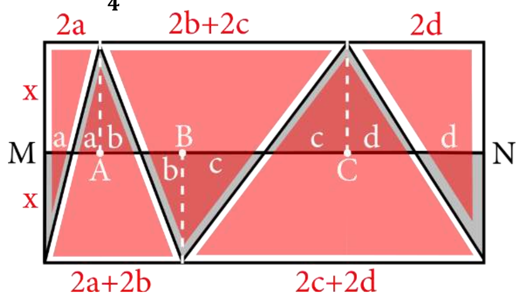
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$



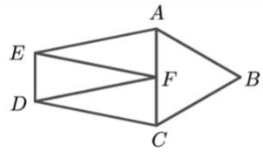
1. Lösung: Die Mittellinie $\overline{MN}$ halbiert die kurze Seite des Rechtecks in die beiden Strecken x. Diese Strecken x entsprechen weiterhin den Höhen der dunkel gefärbten Dreiecke mit den Höhenfußpunkten A, B, C (siehe Abbildung). Da $\overline{MN}$ eine Mittellinie des Rechtecks ist, werden die Segmente $\overline{MA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CN}$ wiederum von den schrägen Dreieckseiten halbiert, das heißt: $\overline{MA} = 2a, \overline{AB} = 2b, \overline{BC} = 2c, \overline{CN} = 2d$. Durch passenden Vergleich von Winkel und Seitenlänge erkennt man nun, dass jedes Dreieck aus der oberen Rechteckshälfte ein Gegenstück in der unteren Hälfte besitzt. Zwei passende Dreiecke ergänzen sich also zu einem Rechteck mit der Höhe x. Aufsummieren der Rechtecke ergibt für den Flächeninhalt der dunkel gefärbten Fläche: $G = ax + bx + cx + dx = x \cdot (a + b + c + d)$.
Der Flächeninhalt des großen Rechtecks beträgt $R = 2x \cdot (2a + 2b + 2c + 2d) = 2x \cdot 2(a + b + c + d)$.
Das Verhältnis der gefärbten Fläche zum großen Rechteck ist $\frac{G}{R} = \frac{x\cdot(a+b+c+d)}{2x\cdot 2(a+b+c+d)} = \mathbf{\frac{1}{4}}$.



2. Lösung: Hat man erkannt, dass die schrägen Dreiecksseiten und die Höhenfußpunkte, die Mittellinie in jeweils gleich große Abschnitte unterteilen, kann man auch den folgenden Zusammenhang sehen. Zu jedem kleinen dunklen Dreieck ergibt sich ein größeres Dreieck, dessen Höhe und Grundfläche doppelt so lang ist. Jedes große Dreieck ist also 4 mal so groß wie sein kleines Gegenstück. Es gilt dann auch für die Fläche aller kleinen dunklen Dreiecke, dass diese $\mathbf{\frac{1}{4}}$ der Gesamtfläche des Rechtecks beträgt.

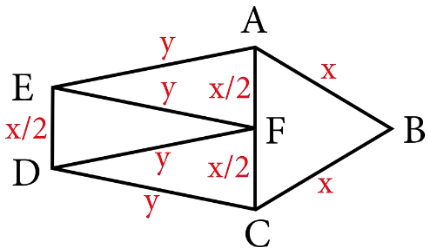


15. Das Fünfeck *ABCDE* ist in vier Dreiecke zerlegt, die alle den gleichen Umfang besitzen (siehe Abbildung). Das Dreieck *ABC* ist gleichseitig und die Dreiecke *AEF*, *DFE* und *CDF* sind kongruente gleichschenkelige Dreiecke.
Wie groß ist das Verhältnis des Umfangs des Fünfecks *ABCDE* zum Umfang des Dreiecks *ABC*?

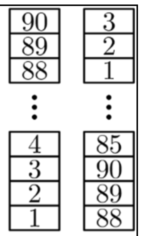


(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{5}{2}$

Lösung: Das Dreieck ABC besitzt die Seitenlänge x und ist gleichseitig. Sein Umfang ist daher $3 \cdot x$.
Für den Gesamtumfang des Fünfecks ABCDE brauchen wir noch Informationen über die Seitenlängen der drei Dreiecke *AEF*, *DFE* und *CDF*. Jeweils zwei Seiten der drei gleichschenkeligen Dreiecke besitzen die Länge y (siehe Abbildung). Da die Dreiecke zudem kongruent sind, müssen die Strecken $\overline{AF} = \overline{FC}$ gleich lang sein. Das heißt, der Punkt F muss die Strecke $\overline{AC} = x$ halbieren. Die dritte Seite dieser Dreiecke besitzt also die Länge $\frac{x}{2}$. Der Umfang eines gleichschenkeligen Dreiecks beträgt somit $2y + \frac{x}{2}$ und der Umfang des Fünfecks $2x + 2y + \frac{x}{2}$. Weiters wissen wir, dass alle vier Dreiecke den gleichen Umfang besitzen. Es gilt $3x = 2y + \frac{x}{2}$.
Den Umfang des Fünfecks kann man nun umformen zu $2x + \left(2y + \frac{x}{2}\right) = 2x + 3x = 5x$. Für das Verhältnis des Umfangs des Fünfecks *ABCDE* zum Umfang des gleichseitigen Dreieck *ABC* ergibt sich: $\frac{5x}{3x} = \mathbf{\frac{5}{3}}$.

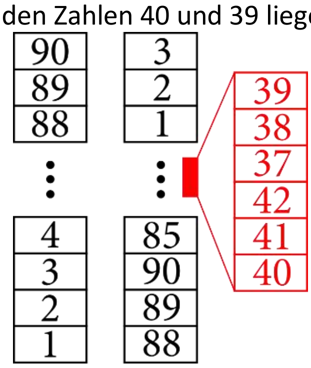


16. Ein Turm besteht aus Blöcken, die von unten nach oben mit den Zahlen von 1 bis 90 beschriftet sind. Bob baut aus diesen Blöcken einen neuen Turm. Dabei nimmt er jeweils die obersten drei Blöcke vom alten Turm herunter und legt sie, ohne ihre Reihenfolge zu verändern, auf den neuen Turm (siehe Abbildung). Wie viele Blöcke befinden sich im neuen Turm zwischen den beiden Blöcken mit den Nummern 39 und 40?

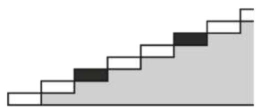


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 **(E)** 4

Lösung: Bob nimmt vom alten Turm jeweils drei Blöcke herunter, die wir zu einem Baustein zusammenfassen. Der oberste Block so eines Bausteines ist mit einer Zahl beschriftet, die durch 3 teilbar ist. Die Zahlen der beiden darunter liegenden Blöcke sind um jeweils 1 bzw. 2 kleiner. 39 ist durch 3 teilbar und somit der oberste Block eines Bausteines. Unter 39 müssen dann die Blöcke 38 und 37 liegen. Unter 37 beginnt der nächste Baustein mit der nächsthöheren, durch 3 teilbaren Zahl. Nach 39 ist das 42. Unter 42 liegen 41 und 40 (siehe Abbildung). Zwischen dem Block mit den Zahlen 40 und 39 liegen also $(41, 42, 37, 38) = \mathbf{4}$ Blöcke.

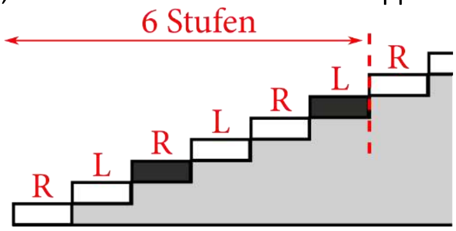


17. Eine Treppe besteht aus 2023 Stufen. Jede dritte Stufe ist schwarz gefärbt. Die ersten sieben Stufen dieser Treppe sind in der Abbildung vollständig zu sehen. Anita geht die Treppe hinauf und betritt dabei jede der Stufen genau einmal. Sie kann entweder mit dem rechten oder linken Fuß beginnen und tritt dann abwechselnd mit dem rechten oder linken Fuß auf.
Wie viele schwarze Stufen betritt sie mindestens mit dem rechten Fuß?



(A) 332 (B) 333 (C) 336 **(D)** 337 (E) 672

Lösung: Anita betritt alle ungeraden Stufen mit dem Fuß, mit dem sie die erste Stufe betreten hat. Alle geraden Stufen betritt sie mit dem jeweils anderen Fuß. Unabhängig, ob Anita mit dem rechten oder dem linken Fuß beginnt, betritt sie die erste schwarze Stufe (=dritte Stufe) daher mit dem Fuß, mit dem sie auch die erste Stufe betreten hat. Die zweite schwarze Stufe (=sechste Stufe) betritt sie mit dem jeweils anderen Fuß. In einem Intervall von 6 Stufen steigt sie also jeweils ein Mal mit dem einen und ein Mal mit dem anderen Fuß auf eine schwarze Stufe (siehe Abbildung). Anita wiederholt diese Schrittfolge insgesamt $2023 : 6 = 337$ Mal und betritt somit auch mindestens **337**-mal eine schwarze Stufe mit dem rechten Fuß. (Eine Stufe bleibt „Rest", das ist eine weiße Stufe, da auch die erste Stufe der Treppe weiß ist.)

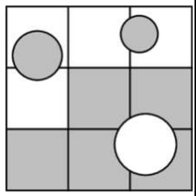


18. Wir nennen eine positive ganze Zahl *potenzfrei,* wenn keine ihrer Ziffern als Potenz einer ganzen Zahl mit Hochzahl größer als 1 geschrieben werden kann. Die Zahl 53 ist beispielsweise potenzfrei, aber die Zahl 54 ist nicht potenzfrei, da $4 = 2^2$ gilt.
Welche der folgenden Zahlen ist die Differenz der größten und kleinsten potenzfreien zweistelligen Zahlen?

(A) 24 (B) 55 (C) 63 (D) 88 (E) 89

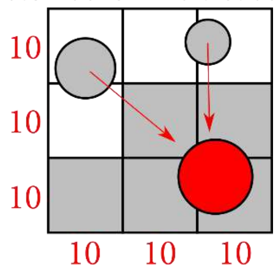
Lösung: Unter den 10 Ziffern können folgende Zahlen als Potenz mit Hochzahl größer als 1 geschrieben werden: $0 = 0^2, 1 = 1^2, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 9 = 3^2$. Bei den Ziffern $2, 3, 5, 6, 7$ ist das nicht möglich. Potenzfreie Zahlen müssen also aus diesen Ziffern bestehen. Die kleinste potenzfreie Zahl, die man bilden kann, ist 22. Die größte ist 77. Die Differenz der beiden Zahlen beträgt $77 - 22 = \mathbf{55}$.

19. Ein Quadrat mit Seitenlänge 30 cm ist in 9 Quadrate zerlegt. Wie in der Abbildung zu sehen, enthält das große Quadrat drei Kreise mit den Radien 5 cm (rechts unten), 4 cm (links oben) sowie 3 cm (rechts oben).
Wieviel cm² sind grau gefärbt?



(A) $500 + 25\pi$ (B) 500 (C) $400 + 50\pi$ (D) 400 (E) $500 - 25\pi$

Lösung: Für die Fläche eines Kreises gilt $A = Radius^2 * \pi$. Die Flächeninhalte der drei Kreise betragen also $3^2\pi = 9\pi\ \text{cm}^2, 4^2\pi = 16\pi\ \text{cm}^2$ und $5^2\pi = 25\pi\ \text{cm}^2$. Da $25\pi = 9\pi + 16\pi$ erkennt man, dass die Fläche des großen, hellen Kreises genau der Summe der gefärbten Kreise entspricht (siehe Abbildung). Die gesamte gefärbte Fläche entspricht also einfach der Fläche von 5 kleinen Quadraten. Da die Seitenlänge des großen Quadrats 30 cm beträgt, muss die Seite eines kleinen Quadrats 10 cm lang sein und sein Flächeninhalt $10 \cdot 10 = 100$ cm². Der gesamte gefärbte Flächeninhalt ist dann $5 \cdot 100 = \mathbf{500}$ **cm²** groß.



20. Das arithmetische Mittel von fünf verschiedenen Primzahlen ist eine ganze Zahl.
Was ist der kleinstmögliche Wert dieses arithmetischen Mittels?

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

Lösung: Da der Mittelwert der 5 verschiedenen Primzahlen eine ganze Zahl ist, muss er durch 5 teilbar sein. Die Summe der 5 kleinsten Primzahlen ist $2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$ und nicht durch 5 teilbar. Die nächste, durch 5 teilbare Zahl ist 30. Um die Summe wie gewünscht um 2 zu erhöhen, wählt man statt 11 die um 2 größere Primzahl 13. Man erhält $\frac{2+3+5+7+13}{5} = \frac{30}{5} = \mathbf{6}$ als kleinstmögliches arithmetisches Mittel.

– 5 Punkte Beispiele –

21. Die Zahlen von 1 bis 9 sollen gemäß folgenden Regeln auf die 9 Quadrate im Bild verteilt werden: In jedem Quadrat soll eine Zahl stehen. Die Summe von drei benachbarten Zahlen ist immer ein Vielfaches von 3. Die Zahlen 3 und 1 sind bereits eingesetzt worden.

				3		1		

Auf wie viele Arten können die übrigen Zahlen eingesetzt werden?

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 **(E)** 24

Lösung: Es müssen noch 7 Ziffern verteilt werden. Für das Quadrat zwischen den Zahlen 3 und 1 gibt es 3 mögliche Ziffern: $2, 5, 8$. In den nächsten 3 Schritten kann man wiederum zwischen 2 möglichen Ziffern aussuchen: je nachdem welches Quadrat man wählt, hat man die Wahl zwischen 4 und 7, zwischen 6 und 9 oder zwischen den zwei noch übrigen Ziffern von $2, 5, 8$, die man im ersten Schritt nicht verwendet hat. Für die letzten drei verbliebenen Quadrate gibt es jeweils nur mehr eine mögliche Wahl. Insgesamt gibt es also $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{24}$ Wahlmöglichkeiten.

22. Auf wie viele verschiedene Arten können wir das Wort *BANANA* in der folgenden Tabelle lesen, wenn wir immer nur zu einem Feld wechseln können, das eine Kante mit dem aktuellen Feld gemeinsam hat und Felder auch mehrmals verwendet werden dürfen?

B	*A*	*B*
A	*N*	*A*
B	*A*	*B*

(A) 56 (B) 64 (C) 84 (D) 112 **(E)** 128

Lösung: Um das Wort BANANA zu schreiben gibt es pro B 2 Möglichkeiten zu einem A zu wechseln, pro A nur 1 mögliches N und pro N vier mögliche A. Pro B gibt es also $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ Möglichkeiten das Wort zu schreiben. Da es 4 B gibt, kann man das Wort auf insgesamt $4 \cdot 32 = \mathbf{128}$ verschiedene Arten schreiben.

23. Ausgehend von den vier Zahlen

$$2, 0, 2, 3$$

erstellt die Känguru-Maschine Zahlen nach der folgenden Regel: Die nächste Zahl ist jeweils die kleinste nicht-negative ganze Zahl, die verschieden von den vier direkt vorausgehenden Zahlen ist.
Welche Zahl befindet sich an der Position 2023?

(A) 0 (B) 1 **(C)** 2 (D) 3 (E) 4

Lösung: Ausgehend von der Zahlenfolge 2,0,2,3 ist gemäß der Regel die 1 die nächste Zahl. Für die Zahlenfolge ergibt sich:

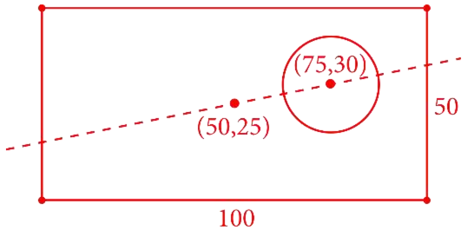
$$2, 0, 2, 3, 1, | \ 4, 0, 2, 3, 1, | \ 4, 0, 2, 3, 1, \ldots$$

Man kann erkennen, dass mit Ausnahme der ersten 5 Stellen sich die 5 Zahlen 4,0,2,3,1 periodisch wiederholen. An jeder durch 5 teilbaren Position muss also wieder die 1 stehen. Position 2020 ist durch 5 teilbar und somit eine 1. Position 2023 ist somit die dritte Zahl nach einer 1, und das ist die Zahl **2**.

24. Aus einem Rechteck mit den Eckpunkten (0|0), (100|0), (100|50) und (0|50) wird ein Kreis mit Mittelpunkt (75|30) und Radius 10 ausgeschnitten.
Welche Steigung besitzt die Gerade, die den Punkt (75|30) enthält und den verbliebenen Teil des Rechtecks in zwei flächengleiche Teilstücke unterteilt?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{2}{3}$

Lösung: Stellen wir zunächst eine Überlegung über die beiden flächengleichen Teilstücke an. Die Seitenlängen des Rechtecks betragen 100 und 50, sein Flächeninhalt ist somit $50 * 100 = 5000$. Aus diesem Rechteck wird ein vollständiger Kreis mit der Fläche $r^2\pi = 10^2\pi = 100\pi$ ausgeschnitten. Jedes Teilstück besitzt also den Flächeninhalt von $\frac{5000-100\pi}{2} = \frac{5000}{2} - \frac{100\pi}{2}$. In anderen Worten entspricht jedes Teilstück der Hälfte des Rechtecks, aus dem je ein Halbkreis ausgeschnitten wurde. Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt $(75|30)$ des Kreises geht, teilt ihn in zwei gleich große Halbkreise. Um das Rechteck in zwei gleich große Hälften zu teilen, muss die Gerade auch durch den Mittelpunkt $(50|25)$des Rechtecks gehen. Die Gerade, die sowohl durch den Punkt $(75|30)$ als auch durch den Punkt $(50|25)$ geht, besitzt die Steigung $\frac{30-25}{75-50} = \frac{5}{25} = \mathbf{\frac{1}{5}}$.



25. Wenn Matildas Smartphone ganz aufgeladen ist, hat es eine Laufzeit von

32 Stunden, wenn sie durchgängig telefoniert,

20 Stunden, wenn sie durchgängig im Internet surft und

80 Stunden, wenn sie es gar nicht benutzt.

Matilda steigt mit einem zur Hälfte gefüllten Akku in einen Zug. Während der Zeit im Zug verbringt sie jeweils genau den gleichen Zeitraum mit Telefonieren, mit Internetsurfen und mit gar keiner Nutzung des Smartphones. Genau bei der Ankunft am Ziel wird der Akku leer.
Wie viele Stunden dauert die Zugfahrt?

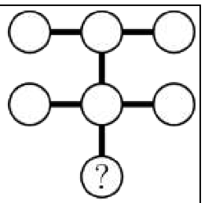
(A) 10 (B) 12 (C) 14 **(D)** 16 (E) 18

Lösung: Dauert die Zugfahrt x Stunden, verbringt sie jeweils $\frac{x}{3}$ der Zeit mit einer der drei Tätigkeiten. Reichen 100% des Akkus für $80\ h$, nimmt er beim Nichtstun um $\frac{100}{80} \cdot \frac{x}{3}\%$ ab. Im Vergleich zum Nichtstun nimmt ihr Akku $\frac{80}{32} = \frac{5}{2}$ mal so schnell ab, wenn sie telefoniert und $\frac{80}{20} = 4$ mal so schnell ab, wenn sie im Internet surft. Während sie telefoniert, nimmt er also um $\frac{100}{80} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{3}\%$ ab. Und während sie surft, nimmt er um $\frac{100}{80} \cdot 4 \cdot \frac{x}{3}\%$ ab. Da ihr Akku zu Beginn nur zu 50% geladen war, ergibt sich für die Zugfahrt die Gleichung:

$$\frac{100}{80} \cdot \frac{x}{3} + \frac{100}{80} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{100}{80} \cdot 4 \cdot \frac{x}{3} = 50$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{100x + 250x + 400x}{240} = 50$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 16.$$

Die Zugfahrt dauerte insgesamt also $\mathbf{16}\ \boldsymbol{h}$.

26. Sieben paarweise verschiedene einstellige Zahlen werden so auf die abgebildeten Kreise verteilt, dass die Produkte der drei jeweils durch eine gerade Strecke verbundenen Zahlen in allen drei Fällen gleich sind.
Welche Zahl steht im Kreis mit dem Fragezeichen?

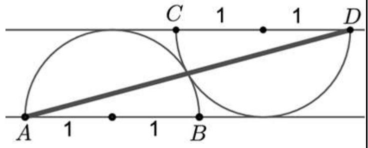


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

Lösung: Sei a das Produkt von drei durch eine Linie verbundenen Ziffern. Da keine Ziffer entlang aller drei Linien vorkommt, können die Ziffern 5 und 7 nicht in der Multiplikation verwendet werden und können vollständig ausgeschlossen werden. Es stehen also die Zahlen $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$ zur Verfügung. Weiters wissen wir, dass das Produkt von Zahlen entlang zweier gerader Linien das Quadrat der Zahl a sein muss. In der Multiplikation der beiden horizontalen Reihen werden 6 verschiedene Zahlen multipliziert. Das Quadrat a^2 kann also maximal das Produkt der Zahlen $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 = 2^7 \cdot 3^4$ sein. Es muss außerdem möglich sein die Wurzel aus dem Produkt dieser 6 verschiedenen Zahlen so zu ziehen, dass a eine positive ganze Zahl ist. Man sieht, dass dies nur möglich ist, wenn a^2 nicht die Zahl 2 als Faktor enthält, denn dann wäre $a = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = 72$, oder wenn a^2 nicht die Zahl $8 = 2^3$ als Faktor enthält, denn dann wäre $a = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 36$. Dieser fehlende Faktor kann also nicht in einer der beiden horizontalen Reihen stehen, sondern muss im Kreis mit dem Fragezeichen stehen. Dies kann nicht 8 sein, da die Zahl a durch jede vorkommende Ziffer teilbar sein muss und $a = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 36$ nicht durch 8 teilbar ist. Im Kreis mit dem Fragezeichen muss also die **2** stehen.

Bemerkung. Das folgende Beispiel zeigt, dass eine Belegung aller Felder in diesem Fall auch möglich ist: Die erste horizontale Reihe enthält die Zahlen 1, 9 und 8, die zweite horizontale Reihe die Zahlen 3, 4 und 6 und die vertikale Reihe die Zahlen 9, 4 und 2; und das Produkt je dreier verbundener Zahlen ist damit 72.

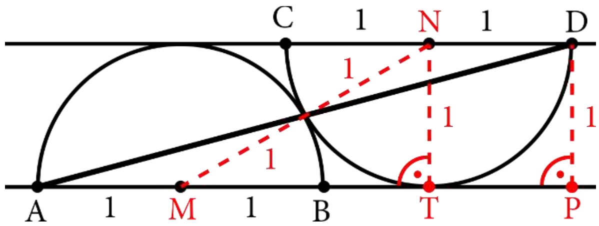
27. Gegeben sind zwei einander berührende Halbkreise mit Radius 1 und zueinander parallelen Durchmessern AB sowie CD. Die Verlängerungen der beiden Durchmesser sind gleichzeitig Tangenten an den jeweils anderen Halbkreis (siehe Abbildung).
Wie groß ist das Quadrat der Länge der Strecke AD?



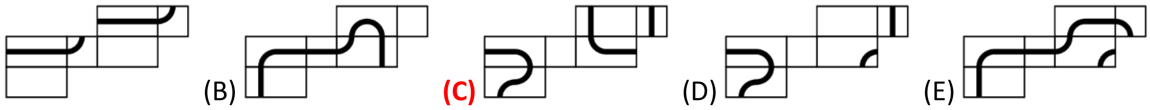
(A) 16 **(B)** $8+4\sqrt{3}$ (C) 12 (D) 9 (E) $5+2\sqrt{3}$

Lösung: Das Quadrat der Strecke $\overline{AD}$ kann über den Satz des Pythagoras im Dreieck ADP durch $\overline{AD}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PD}^2$ erhalten werden (siehe Abbildung). Da die Verlängerungen der Durchmesser Tangenten an die Halbkreise bilden, besitzt die Strecke $\overline{PD}$ die Länge 1. Die Strecke $\overline{AP}$ setzt sich zusammen aus 2 mal dem Radius und der noch unbekannten Strecke $\overline{MT}$ als $\overline{AP} = 1 + \overline{MT} + 1$. Wir wissen aber, dass sich die beiden Halbkreise in nur einem Punkt berühren. Da sie auch den gleichen Radius besitzen, entspricht die Verbindung ihrer beiden Mittelpunkte $\overline{MN}$ einer Strecke mit der Länge $2r = 2 \cdot 1$. Die Länge der Strecke $\overline{MT}$ kann nun mittels Satz des Pythagoras als $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ berechnet werden. Die Strecke $\overline{AP}$ ist also $1 + \sqrt{3} + 1$ lang. Für das Quadrat der Strecke $\overline{AD}$ ergibt sich somit eine Länge von

$\overline{AD}^2 = 1^2 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 = \mathbf{8 + 4\sqrt{3}}$.

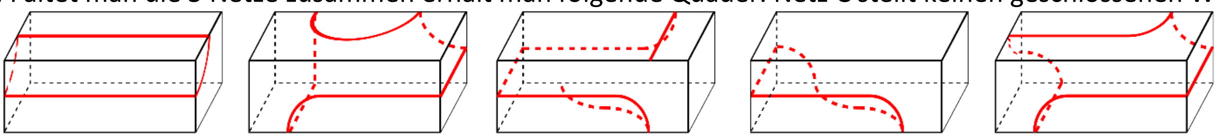


28. Leon hat einen geschlossenen Weg auf der Oberfläche eines Quaders gezeichnet.
Welches Netz kann seinen Weg **nicht** darstellen?



(A) (B) **(C)** (D) (E)

Lösung: Faltet man die 5 Netze zusammen erhält man folgende Quader. Netz **C** stellt keinen geschlossenen Weg dar.



29. Auf einer Geraden sind einige Punkte markiert. Renate markiert zwischen jedem Paar benachbarter Punkte einen weiteren Punkt. Diesen Vorgang wiederholt sie drei weitere Male. Nun gibt es 225 markierte Punkte auf der Geraden.
Wie viele Punkte waren zu Beginn markiert?

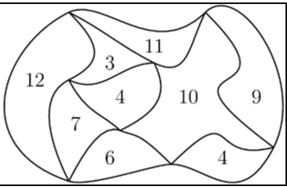
(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 29 (E) 32

1. Lösung: Auf der Geraden sind x Punkte markiert. Markiert man zwischen jedem Paar benachbarter Punkte einen weiteren Punkt, kommen $x - 1$ Punkte hinzu. Renate macht diesen Vorgang insgesamt 4 Mal. Nach dem ersten Mal hat sie $x + (x - 1) = 2x - 1$ Punkte. Nach dem zweiten Mal hat sie $(2x - 1) + (2x - 1 - 1) = 4x - 3$ Punkte. Nach dem dritten Mal hat sie $(4x - 3) + (4x - 3 - 1) = 8x - 7$ Punkte. Und nach dem vierten Mal hat sie $(8x - 7) + (8x - 7 - 1) = 16x - 15 = 225$ Punkte.
Zu Beginn hatte sie also $\frac{(225+15)}{16} = \mathbf{15}$ Punkte.

2. Lösung: Auf der Geraden sind x Punkte markiert. Markiert man zwischen jedem Paar benachbarter Punkte einen weiteren Punkt, so kommen $x - 1$ Punkte hinzu und man erhält insgesamt nach einem solchen Schritt $y = 2x - 1$ Punkte. Die Anzahl x der *vor* einem Schritt markierten Punkte lässt sich also bestimmen, indem man mithilfe der bekannten Anzahl y an *nach* einem Schritt markierten Punkten $\frac{y+1}{2} = x$ berechnet.
Mit diesem Wissen kann man die Aufgabe durch schrittweises Rückwärtsrechnen beginnend mit dem Ergebnis lösen. Im letzten Schritt gelangt Male auf 225 Punkte, davor waren also bereits $\frac{225+1}{2}$ =113 Punkte markiert (und 112 im letzten Schritt von Male neu markiert). Vor dem dritten Schritt waren demnach $\frac{113+1}{2}$ =57 Punkte markiert. Auf dieselbe Weise berechnen wir, dass vor dem zweiten Schritt $\frac{57+1}{2}$ =29 Punkte markiert waren und vor dem ersten Schritt (d.h. zu Beginn) $\frac{29+1}{2}$ =**15** Punkte.

30. Die Abbildung zeigt die Karte eines großen Parks. Der Park ist in einige Bereiche unterteilt, wobei die Zahl in jedem Bereich dessen Umfang in km angibt.
Wie groß ist der Umfang des gesamten Parks in km?

(A) 18 (B) 22 **(C)** 26 (D) 32 (E) 42



Lösung: Betrachten wir den Umfang jedes einzelnen Bereichs (siehe Abbildung):

$$12 = a + f + j$$
$$6 = b + g + o$$
$$4 = c + n$$
$$9 = d + m$$
$$11 = e + k + l$$
$$7 = f + g + h$$
$$4 = h + i + p$$
$$3 = i + j + k$$
$$10 = l + m + n + o + p$$

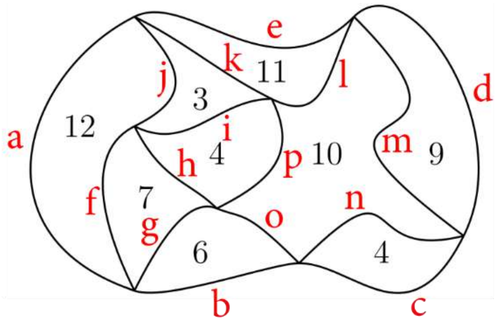
In dieser Schreibweise beträgt der Umfang des gesamten Parks: $U = a + b + c + d + e$.
Durch geschicktes Addieren und Subtrahieren der Umfänge der Teilbereiche kann man den Gesamtumfang des Parks erhalten. Zunächst addiert man die Umfänge der äußeren Bereiche:

$$12 + 6 + 4 + 9 + 11 = (a + f + j) + (b + g + o) + (c + n) + (d + m) + (e + k + l)$$
$$42 = (a + b + c + d + e) + f + g + j + k + l + m + n + o$$

Man erkennt bereits den Ausdruck für den Gesamtumfang U, dieser ist allerdings noch zu lang. Nun subtrahiert man die Bereiche, die Seiten mit den äußersten Bereichen teilen:

$$42 - 7 - 3 - 10 = U + f + g + j + k + l + m + n + o - (f + g + h) - (i + j + k) - (l + m + n + o + p)$$
$$22 = U - h - i - p = U - (h + i + p)$$
$$22 + (h + i + p) = U$$

Der Ausdruck $(h + i + p)$ entspricht dem Umfang des innersten Bereichs, den man noch addieren muss. Der Gesamtumfang beträgt also $U = 22 + 4 =$ **26 km**.



KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Kategorie: Student, Schulstufe: 11. – 13.

Vor- und Zuname:

Schule:

Klasse:

Arbeitszeit: 75 min.
jede richtige Antwort Beispiel 1. – 10.: 3 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 11. – 20.: 4 Punkte
jede richtige Antwort Beispiel 21. – 30.: 5 Punkte
jede Frage ohne Antwort: 0 Punkte
jede falsche Antwort: Abzug von ¼ der erreichbaren Punkte
dazu 30 Basispunkte

Bitte den Buchstaben (A, B, C, D, E) der richtigen Antwort in das Kästchen unter die Nummer des Beispiels (1 bis 30) leserlich und eindeutig schreiben!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

Mit meiner Unterschrift gebe ich das Einverständnis, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

Ort, Datum Unterschrift

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2023
Gruppe Student (11., 12. und 13. Schulstufe)
Österreich – 16. 3. 2023

- 3 Punkte Beispiele -

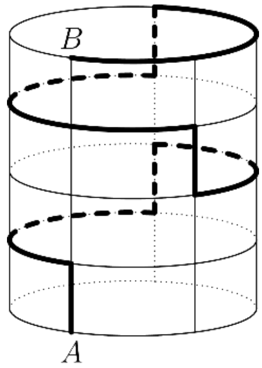
1. Was ist die gekürzte Darstellung des folgenden Bruchs? $\dfrac{7777^2}{5555 \cdot 2222}$

(A) 1 (B) $\dfrac{7}{10}$ (C) $\dfrac{49}{10}$ (D) $\dfrac{77}{110}$ (E) 49

2. Julia wirft gleichzeitig 5 Spielwürfel. Sie erhält zusammen 19 Punkte.
Wie viele Sechser kann sie höchstens geworfen haben?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

3. Eine zylindrische Dose ist 15 cm hoch. Der Umfang ihres Basiskreises beträgt 30 cm. Eine Ameise spaziert vom Punkt A auf der Basis zum Punkt B auf der Deckfläche. Ihr Weg verläuft zum Teil senkrecht nach oben und zum Teil längs waagrecht liegender Kreisbögen. Ihr Weg ist in der Abbildung dick eingezeichnet (auf der Vorderseite der Dose voll, auf der Rückseite strichliert). Wie lang ist der Gesamtweg, den die Ameise zurücklegt?

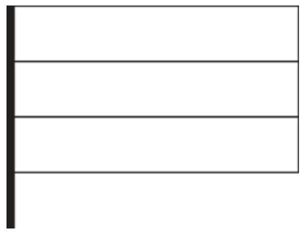


(A) 45 cm (B) 55 cm (C) 60 cm (D) 65 cm (E) 75 cm

4. Es sei A die 2023-stellige Zahl, bei der jede Ziffer 1 ist. Was ist die Ziffernsumme der Zahl $A \cdot 1111$?

(A) 8080 (B) 8083 (C) 8086 (D) 8092 (E) 8101

5. Emma soll die drei Streifen der abgebildeten Fahne färben. Es stehen ihr vier Farben zur Verfügung. Sie soll für jeden Streifen nur eine Farbe verwenden und keine unmittelbar benachbarten Streifen gleich färben.
Auf wie viele verschiedene Arten kann sie die Fahne färben?



(A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 (E) 64

6. Wir bezeichnen eine positive ganze Zahl *n* als *zweiprim*, wenn sie genau drei verschiedene positive Teiler besitzt, nämlich 1, 2 und die Zahl *n* selbst. Wie viele zweiprime Zahlen gibt es?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. Wie lautet die Einerziffer des folgenden Produkts? $\left(5^5+1\right)\cdot\left(5^{10}+1\right)\cdot\left(5^{15}+1\right)$

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

8. Wie lautet der Wert der folgenden Summe?

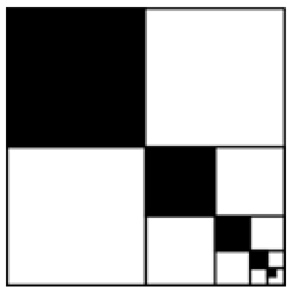
$$2^{0^{2^3}} + 0^{2^{3^2}} + 2^{3^{2^0}} + 3^{2^{0^2}}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 12 (E) mehr als 100

9. 23 Tiere sitzen in einer Reihe im Kino. Jedes Tier ist entweder ein Biber oder ein Känguru.
Jedes Tier hat zumindest ein Känguru als Nachbarn.
Wie viele Biber sitzen höchstens in der Reihe?

(A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

10. Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 84 wird in vier Quadrate geteilt. Das obere linke Quadrat wird schwarz gefärbt. Das rechte untere Quadrat wird wieder in vier Quadrate geteilt, und so fort. Der Prozess wird unendlich oft wiederholt.
Wie groß ist der Flächeninhalt des schwarz gefärbten Bereichs?



(A) 24 (B) 28 (C) 31 (D) 35 (E) 42

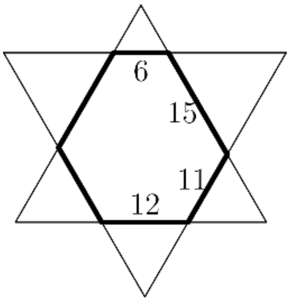
4 Punkte Beispiele -

11. Die Zahlen von 1 bis 9 sollen gemäß folgenden Regeln auf die 9 Quadrate im Bild verteilt werden: In jedem Quadrat soll eine Zahl stehen. Die Summe von drei benachbarten Zahlen ist immer ein Vielfaches von 3. Die Zahlen 7 und 9 sind bereits eingesetzt worden.
Auf wie viele Arten können die übrigen Zahlen eingesetzt werden?

	7		9					

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

12. Zwei verschieden große gleichseitige Dreiecke werden so übereinander gelegt, dass im Inneren ein Sechseck mit gegenüberliegenden parallelen Seiten entsteht. Vier Seitenlängen des Sechsecks sind in der Abbildung gegeben.
Wie groß ist der Umfang des Sechsecks?

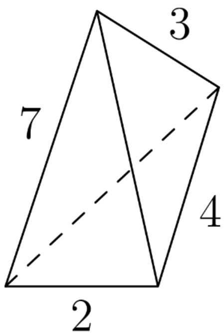


(A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 72

13. Fünf Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 mit der Summe S sind gegeben. Es ist bekannt, dass die Beziehung $a_k = k + S$ für $1 \le k \le 5$ gilt. Was ist der Wert von S ?

(A) $\frac{15}{4}$ (B) $-\frac{15}{4}$ (C) -15 (D) 15 (E) eine andere Zahl

14. Eine dreiseitige Pyramide hat lauter ganzzahlige Kantenlängen. Vier dieser Kantenlängen sind in der Abbildung zu sehen.
Wie groß ist die Summe der restlichen beiden Kantenlängen?



(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

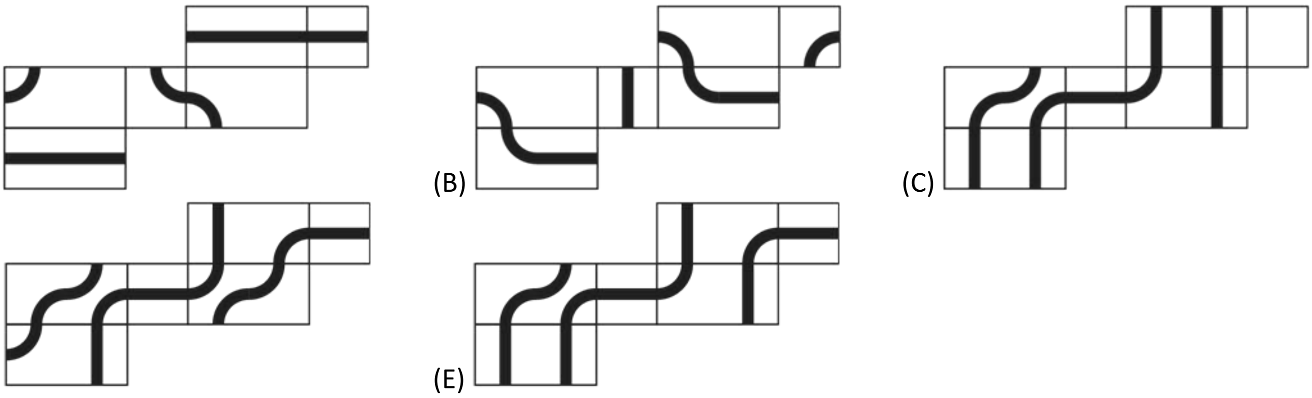
15. Wie viele Paare ganzer Zahlen (m, n) erfüllen die Ungleichung $|2m - 2023| + |2n - m| \le 1$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

16. Die Zahl 5^{5^6} wird in der Form n^n mit einer natürlichen Zahl n geschrieben. Wie lautet der Wert von n ?

(A) $5 \cdot 5^4$ (B) $5 \cdot 5^5$ (C) 5^{30} (D) 30 (E) 25^{25}

17. Leon hat einen geschlossenen Weg auf der Oberfläche eines Quaders gezeichnet.
Welches Netz kann seinen Weg darstellen?



(A) (B) (C) (D) (E)

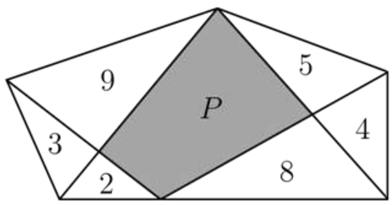
18. Für jede positive ganze Zahl n ist die Zahl $n!$ definiert als Produkt aller Zahlen von 1 bis n. So gilt z.B. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Für ein bestimmtes N gilt die Formel $N! = 6! \cdot 7!$.
Wie groß ist die Ziffernsumme von N ?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 9

19. Die Graphen der Funktionen $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ gehen unabhängig von der Wahl von a alle durch denselben Punkt. Wie groß ist die Summe der Koordinaten dieses gemeinsamen Punktes?

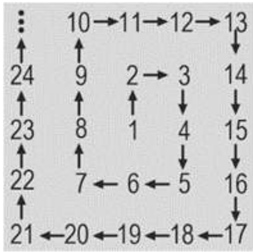
(A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 8 (E) eine andere Zahl

20. Ein Fünfeck ist, wie in der Abbildung zu sehen, in kleinere Teile unterteilt. Die Zahlen in den Dreiecken geben den Flächeninhalt des jeweiligen Dreiecks an. Wie groß ist der Flächeninhalt P des grauen Vierecks?

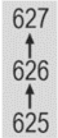


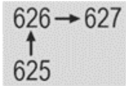
(A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) 16 (D) 17 (E) eine andere Zahl

- 5 Punkte Beispiele -

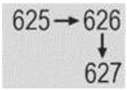


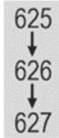
21. Die Abbildung zeigt eine Spirale aufeinanderfolgender Zahlen, die mit 1 beginnt.
In welcher Anordnung werden die Zahlen 625, 626 und 627 in der Spirale auftreten?

(A) 

(B) 

(C) 

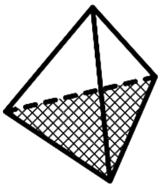
(D) 

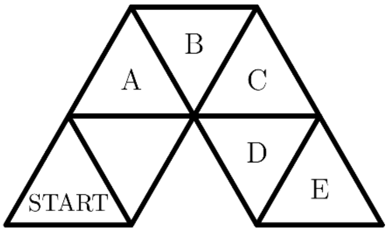
(E) 

22. Wie viele positive ganze Zahlen teilen $2^{20} \cdot 3^{23}$, aber nicht $2^{10} \cdot 3^{20}$?
(A) 13 (B) 30 (C) 273 (D) 460 (E) eine andere Zahl

23. An einem dreiteiligen Kletterwettbewerb nehmen 13 Athleten teil. In keinem Teil gibt es einen Gleichstand. Der Gesamtrang jedes Athleten wird durch Reihung der Produkte der erreichten Ränge in den drei Teilen berechnet: Erreicht ein Athlet etwa einmal den 4. Rang, einmal den 3. Rang und einmal den 6. Rang, so erhält er das Punkteergebnis $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. Je höher das Punkteergebnis ist, umso schlechter ist der Gesamtrang. Welchen Gesamtrang kann Hans im schlechtesten Fall erreichen, wenn er in zwei Teilen jeweils den 1. Rang erreicht?
(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5. (E) 6.

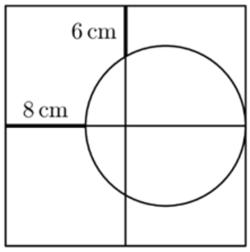
24. Ein Spielstein in der Form eines regelmäßigen Tetraeders hat eine markierte Fläche. Diese Fläche wird auf das mit START beschriftete Dreieck gestellt. Der Spielstein wird dann innerhalb der Figur der Reihe nach auf die angrenzenden Dreiecke durch Rollen um eine Kante bewegt. Auf welchem Dreieck liegt der Spielstein, wenn er zum ersten Mal wieder auf der markierten Fläche zu stehen kommt?
(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E





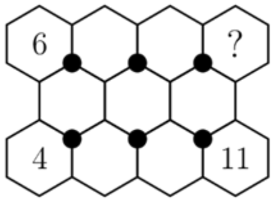
25. Ein Teil eines Polynoms fünften Grades ist wegen eines Tintenflecks unlesbar. Es ist bekannt, dass alle Nullstellen des Polynoms ganzzahlig sind. Was ist die höchstmögliche Potenz von $x-1$, die das Polynom teilt?
(A) $(x-1)^1$ (B) $(x-1)^2$ (C) $(x-1)^3$ (D) $(x-1)^4$ (E) $(x-1)^5$

26. Das große abgebildete Quadrat ist in vier kleine Quadrate geteilt. Der Kreis berührt die rechte Seite des großen Quadrats in ihrem Mittelpunkt. Wie groß ist die Seitenlänge des großen Quadrats? (Hinweis: Die Abbildung ist nicht im Maßstab gezeichnet.)
(A) 18 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 30 cm

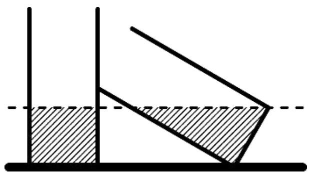


27. Was ist der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen der Gestalt
$n^3 \cdot (n+1)^3 \cdot (n+2)^3 \cdot (n+3)^3 \cdot (n+4)^3$, wobei *n* eine positive ganze Zahl ist?
(A) $2^9 \cdot 3^3$ (B) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ (C) $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ (D) $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ (E) $2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

28. Die Zahlen von 1 bis 11 werden in die leeren Sechsecke geschrieben. Dabei sind die Summen von drei Zahlen, die in drei Sechsecken mit einem gemeinsamen dicken Punkt stehen, jeweils gleich. Drei der elf Zahlen sind bereits eingetragen (siehe Abbildung).
Welche Zahl wird in das Sechseck mit dem Fragezeichen geschrieben?
(A) 5 (B) 4 (C) 7 (D) 3 (E) 9



29. Zwei identische zylindrische Gläser beinhalten gleich viel Wasser. Das linke Glas steht gerade, während das rechte schräg angelehnt ist. Der Wasserspiegel befindet sich in beiden Gläsern in derselben Höhe. Der Wasserspiegel im schräg liegenden Glas berührt dessen Boden in exakt einem Punkt (siehe Abbildung). Die Grundflächen beider Gläser sind Kreise mit dem Flächeninhalt 3π cm². Wie viel Wasser befindet sich in jedem Glas?



(A) 9π cm³ (B) 6π cm³ (C) $3\sqrt{3}\pi$ cm³ (D) $\frac{3\pi}{4}$ cm³ (E) Es ist aus dieser Information nicht eindeutig bestimmbar.

30. Das Produkt von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen ist eine 12-ziffrige Zahl der Gestalt *abb cdd cdd abb*, wobei die Ziffern *a, b, c* und *d* auch aufeinanderfolgende Zahlen in irgendeiner Reihenfolge sind.
Was ist der Wert der Ziffer *d*?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

KÄNGURU DER MATHEMATIK 2023
16. 3. 2023

Level: Student, Grade: Schulstufe 11–13

Full name:

School:

Class:

Time: 75 min.
30 starting points

each correct answer to questions 1. – 10.:	3 points
each correct answer to questions 11. – 20.:	4 points
each correct answer to questions 21. – 30.:	5 points
each questions left unanswered:	0 points

each incorrect answer: minus ¼ of the points for the question

Please write the letter (A, B, C, D, E) of the correct answer in the square under the question number (1 bis 30). Write clearly and carefully!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Zustimmungserklärung zur Datenverarbeitung für den österreichischen Wettbewerb „Känguru der Mathematik“

Mit meiner Unterschrift gebe ich das Einverständnis, dass meine angeführten personenbezogenen Daten (Vor- und Zuname, Klasse, Schulstufe, Schulstandort und Schulart) zum Zweck der Organisation und Durchführung des Wettbewerbs, der Auswertung der Wettbewerbsergebnisse (Ermitteln der erreichten Punkte und Prozentzahlen), des Erstellens von schulweiten Reihungen, sowie zur Erstellung und Veröffentlichung der Siegerlisten auf unserer Vereinshomepage (sofern mindestens 50 % der zu erreichenden Punktezahl erlangt werden bzw. ich unter den besten 10 einer Kategorie liege) verwendet werden dürfen.

Betroffenenrechte
Die Verwendung dieser Daten ist bis 31. Dezember des 2. Folgejahres gestattet. Nach diesem 31. Dezember werden Vor- und Zuname, die Klasse und der Schulstandort gelöscht, wobei dieser durch die Angabe des Bundeslandes ersetzt wird. Die Verwendung der auf diese Art anonymisierten Daten ist nur mehr für statistische Zwecke auf der Grundlage der DSGVO erlaubt.

Ich habe ein Recht auf Auskunft über meine gespeicherten personenbezogenen Daten, sowie das Recht auf Berichtigung, Datenübertragung, Widerspruch, Einschränkung der Bearbeitung sowie Sperrung oder Löschung unrichtig verarbeiteter Daten.

Ich kann die erteilte Einwilligung jederzeit auf der Homepage des Vereines Känguru der Mathematik unter www.kaenguru.at mittels des dafür bereitgestellten Formulars mit Wirkung für die Zukunft widerrufen (Art. 21 Abs. 1 DSGVO).
Ein Widerruf hat zur Folge, dass die personenbezogenen Daten nach gegenseitiger Rücksprache innerhalb von 31 Tagen gelöscht werden.
Durch den Widerruf wird die Rechtmäßigkeit der aufgrund der Einwilligung bis zum Widerruf erfolgten Verarbeitung nicht berührt. (Art. 7 Abs. 2 DSGVO)

Ort, Datum Unterschrift

pwc

Information über den Känguruwettbewerb: www.kaenguru.at
Wenn du mehr in dieser Richtung machen möchtest,
gibt es die Österreichische Mathematikolympiade.
Infos unter: www.oemo.at

Känguru der Mathematik 2023
Level Student (Schulstufe 11, 12 and 13)
Austria – 16. 3. 2023

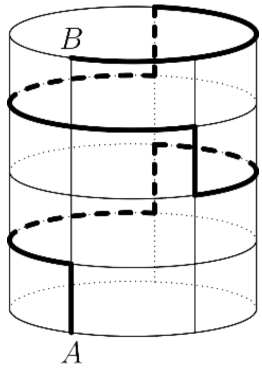
- 3 Point Examples -

1. What is the simplified representation of the following fraction? $\frac{7777^2}{5555\cdot 2222}$

(A) 1 (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{49}{10}$ (D) $\frac{77}{110}$ (E) 49

2. Julia rolls 5 dice at the same time. She obtains a sum total of 19 points.
What is the biggest number of sixes she can have rolled?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

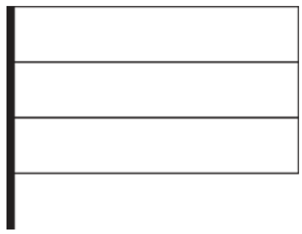


3. A cylindrical tin is 15 cm high. The circumference of the base circle is 30 cm. An ant walks from point A at the base to point B at the top. Its path is partly vertically upwards and partly along horizontal circular arcs. Its path is drawn in bold on the diagram (with a solid line on the front and a dashed line at the back). How long is the total distance covered by the ant?

(A) 45 cm (B) 55 cm (C) 60 cm (D) 65 cm (E) 75 cm

4. Let A be a 2023-digit number where every digit is 1. What is the sum of the digits of the number $A\cdot 1111$?

(A) 8080 (B) 8083 (C) 8086 (D) 8092 (E) 8101



5. Emma should colour in the three strips of the flag shown. She has four colours available. She can only use one colour for each strip and immediately adjacent strips are not to be of the same colour.
How many different ways are there for her to colour in the flag?

(A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 (E) 64

6. We call a positive integer *n twoprime*, if it has exactly three different positive factors, namely 1, 2 and the number *n* itself. How many twoprime numbers are there?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

7. What is the units digit of the following product? $\left(5^5+1\right)\cdot\left(5^{10}+1\right)\cdot\left(5^{15}+1\right)$

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 5 (E) 6

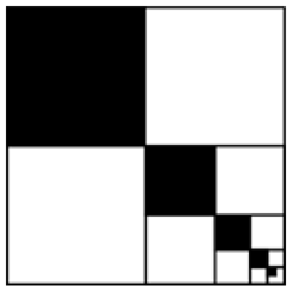
8. What is the value of the following sum?

$$2^{0^{2^3}}+0^{2^{3^2}}+2^{3^{2^0}}+3^{2^{0^2}}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 7 (D) 12 (E) more than 100

9. 23 animals are sitting in the first row of a cinema. Each animal is either a beaver or a kangaroo.
Each animal has at least one kangaroo next to it.
What is the maximum amount of beavers in the row?

(A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12



10. A square with area 84 is split into four squares. The upper left square is coloured in black. The lower right square is again split into four squares and so on. The process is repeated infinitely many times.
How big is the area coloured in black?

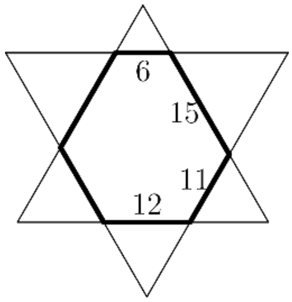
(A) 24 (B) 28 (C) 31 (D) 35 (E) 42

- 4 Point Examples -

11. The numbers from 1 to 9 are to be distributed to the nine squares in the diagram according to the following rules: There is to be one number in each square. The sum of three adjacent numbers is always a multiple of 3. The numbers 7 and 9 are already written in.

How many ways are there to insert the remaining numbers?

(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 24

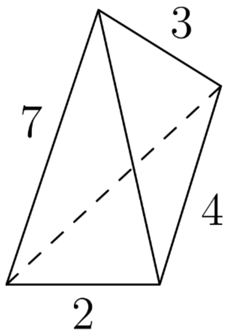


12. Two equilateral triangles of different sizes are placed on top of each other so that a hexagon is formed on the inside whose opposite sides are parallel.
Four of the side lengths of the hexagon are stated in the diagram.
How big is the perimeter of the hexagon?

(A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 72

13. Consider the five numbers a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 with sum S. It is known that $a_k = k + S$ for $1 \le k \le 5$. What is the value of S?

(A) $\frac{15}{4}$ (B) $-\frac{15}{4}$ (C) -15 (D) 15 (E) another number



14. In a three-sided pyramid all side lengths are integers.
Four of the side lengths can be seen in the diagram.
What is the sum of the two remaining side lengths?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

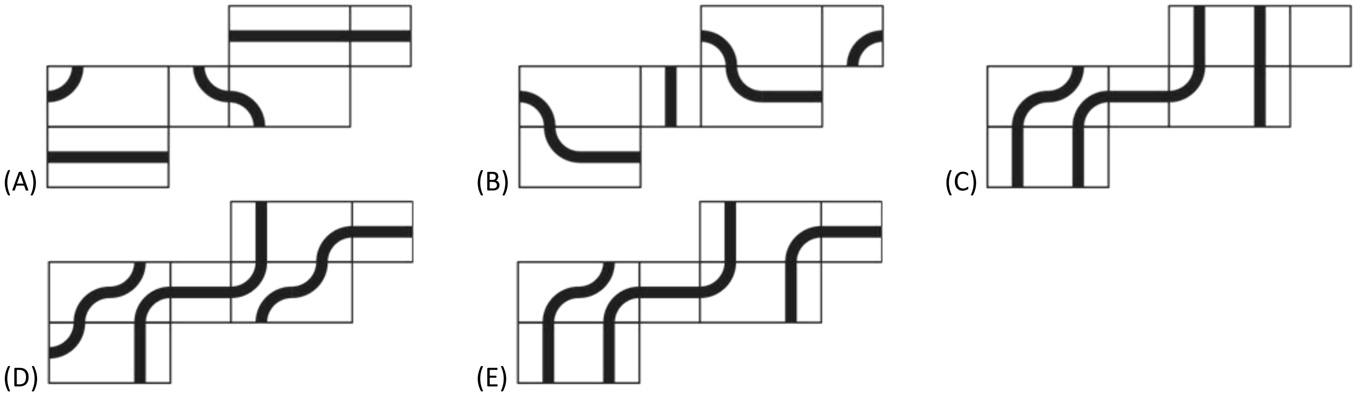
15. How many pairs of integers (m,n) fulfil the inequality $|2m-2023|+|2n-m|\le 1$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

16. The number 5^{5^6} is to be written in the form n^n where n is a natural number. What is the value of n?

(A) $5\cdot 5^4$ (B) $5\cdot 5^5$ (C) 5^{30} (D) 30 (E) 25^{25}

17. Leon has drawn a closed path on the surface of a cuboid.
Which net can represent his path?



18. For each positive integer n the number $n!$ is defined as the product of all numbers from 1 to n. For example, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$. For a certain N the formula $N! = 6!\cdot 7!$ holds.
How big is the sum of the digits of N?

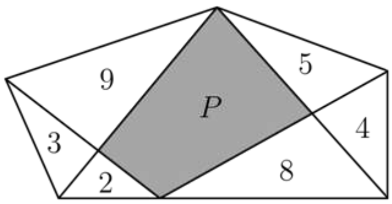
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 9

19. The graphs of the functions $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ all pass through a common point independent of the choice of a. How big is the sum of the co-ordinates of this common point?

(A) 2 (B) 4 (C) 7 (D) 8 (E) another number

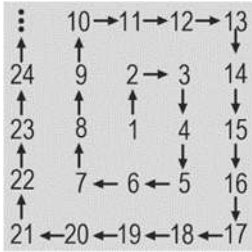
20. A pentagon is cut into smaller parts as shown in the diagram.
The numbers in the triangles state the area of the according triangle.
How big is the area P of the grey quadrilateral?

(A) 15 (B) $\frac{31}{2}$ (C) 16 (D) 17 (E) another number

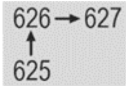


- 5 Point Examples -

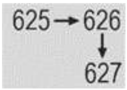
21. The diagram shows a spiral of consecutive numbers starting with 1.
In which order will the numbers 625, 626 and 627 appear in the spiral?

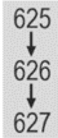


(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

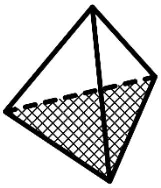
22. How many positive integers divide $2^{20}\cdot 3^{23}$ but not $2^{10}\cdot 3^{20}$?

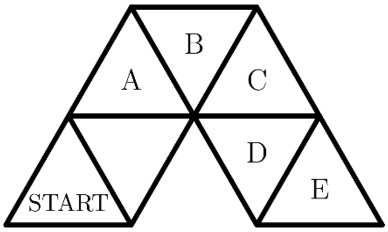
(A) 13 (B) 30 (C) 273 (D) 460 (E) another number

23. 13 athletes took part in a three-part climbing competition. There are no draws in any part. The final rank of each athlete is determined by arranging the products of the ranks in each of the three parts: If an athlete for example comes 4th once, 3rd once and 6th once, he has $4\cdot 3\cdot 6=72$ points. The higher the number of points, the worse the final rank. What is the worst possible final rank Hans can get to if he was 1st in two of the parts?

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5. (E) 6.

24. A game marker in the shape of a regular tetrahedron has one marked area. That side is placed on the triangle marked START. The marker is then moved within the diagram always to the next adjacent triangle by rolling it around an edge. On which triangle is the marker when it is on the marked side again for the first time?



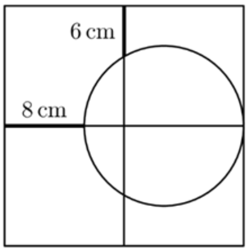


(A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

25. A part of a polynomial of degree five is illegible due to an ink stain. It is known that all zeros of the polynomial are integers. What is the highest power of $x-1$ that divides this polynomial?

(A) $(x-1)^1$ (B) $(x-1)^2$ (C) $(x-1)^3$ (D) $(x-1)^4$ (E) $(x-1)^5$

26. The big square shown is split into four small squares. The circle touches the right side of the square in its midpoint. How big is the side length of the big square? (Hint: The diagram is not drawn to scale.)

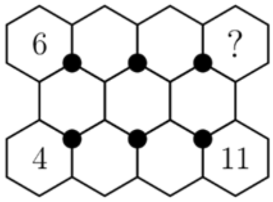


(A) 18 cm (B) 20 cm (C) 24 cm (D) 28 cm (E) 30 cm

27. What is the biggest common factor of all numbers of the form
$n^3\cdot(n+1)^3\cdot(n+2)^3\cdot(n+3)^3\cdot(n+4)^3$ where *n* is a positive integer?

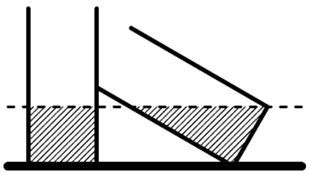
(A) $2^9\cdot 3^3$ (B) $2^3\cdot 3^3\cdot 5^3$ (C) $2^6\cdot 3^3\cdot 5^3$ (D) $2^8\cdot 3^2\cdot 5^3$ (E) $2^9\cdot 3^3\cdot 5^3$

28. The numbers from 1 to 11 are written in the empty hexagons. The sums of the three numbers in three hexagons with a common bold point are always equal. Three of the eleven numbers are already written in (see diagram).
Which number is written in the hexagon with the question mark?



(A) 5 (B) 4 (C) 7 (D) 3 (E) 9

29. Two identical cylindrical glasses contain the same amount of water. The left glass is upright, while the right one rests against the other one at a slant. The water level in both glasses is at the same height. The water level in the leaning glass touches its bottom in exactly one point (see diagram). The bases of both glasses have an area of 3π cm². How much water is in each glass?



(A) 9π cm³ (B) 6π cm³ (C) $3\sqrt{3}\pi$ cm³ (D) $\frac{3\pi}{4}$ cm³ (E) It cannot be uniquely determined from this information.

30. The product of six consecutive numbers is a 12-digit number of the form *abb cdd cdd abb*, where the digits *a, b, c* and *d* are also consecutive numbers in any order.
What is the value of the digit *d*?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Känguru 2023 – Student – Lösungen und Erklärungen

1. Wir nutzen, dass jede Zahl, die aus lauter gleichen Ziffern besteht, dargestellt werden kann als $111\dots1$ multipliziert mit dieser Ziffer, d.h. $7777 = 1111 \cdot 7$, $5555 = 1111 \cdot 5$ und $2222 = 1111 \cdot 2$. Damit erhalten wir:

$$\frac{7777^2}{5555 \cdot 2222} = \frac{(1111 \cdot 7)^2}{1111 \cdot 5 \cdot 1111 \cdot 2} = \frac{1111^2 \cdot 7^2}{1111^2 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{7^2}{5 \cdot 2} = \mathbf{\frac{49}{10}}.$$

2. Wenn vier oder fünf Würfel einen Sechser zeigen würden, hätten schon allein diese Würfel eine höhere Summe als 19.

   Wenn Julia drei Sechser geworfen hätte, würden diese drei Würfel 18 zur Summe beitragen und die restlichen zwei Würfel jeweils mindestens 1, sodass die Summe mindestens 20 wäre.

   Mit **zwei** Sechsern ist es möglich, die Summe 19 zu erreichen, beispielsweise als $19 = 6 + 6 + 5 + 1 + 1$.

3. Wir betrachten die senkrechten Wege und die Wege entlang der Kreisbögen getrennt voneinander.

   Die vier senkrechten Stücke summieren sich genau auf ein Mal die Höhe des Zylinders. (Die Ameise startet ganz unten, geht senkrecht immer nur nach oben und nie nach unten, und endet ganz oben.)

   Die Stücke entlang der Kreisbögen, wenn man alle senkrechten Strecken weglassen würde, summieren sich auf zwei vollständige Runden um den Zylinder, da B genau senkrecht über A liegt.

   Insgesamt legt die Ameise somit $15\,\text{cm} + 2 \cdot 30\,\text{cm} = \mathbf{75\,cm}$ zurück.

4. Wir schreiben die Multiplikationstabelle für $A \cdot 1111$ an:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&1&1&.&.&.&.&.&.&.&1&1&1&1&1&1&&\times&&1&1&1&1\\ \hline
&&&&1&1&1&1&1&1&.&.&.&.&.&.&.&1&1&1&1&1&1&&&\\
&&&&&1&1&1&1&1&1&.&.&.&.&.&.&.&1&1&1&1&1&1&&\\
&&&&&&1&1&1&1&1&1&.&.&.&.&.&.&.&1&1&1&1&1&1&\\
&&&&&&&1&1&1&1&1&1&.&.&.&.&.&.&.&1&1&1&1&1&1\\ \hline
&&&&1&2&3&4&4&4&.&.&.&.&.&.&.&.&.&.&4&4&4&3&2&1
\end{array}$$

   Dabei steht in jeder der vier Zeilen die Zahl A, jeweils um eine Stelle versetzt. Die neu entstandene Zahl hat um drei Stellen mehr als A, wie wir aus Vergleich der letzten Zeile mit dem Ergebnis leicht ablesen können.

   Von diesen $2023 + 3 = 2026$ Ziffern sind die erste und letzte je 1, die zweite und vorletzte je 2, die dritte und drittletzte je 3, und alle anderen $2026 - 6 = 2020$ Ziffern sind 4, weil an all diesen Stellen immer vier Einser addiert werden und es keine Überträge gibt.

   Die Ziffernsumme beträgt somit $1 + 2 + 3 + 2020 \cdot 4 + 3 + 2 + 1 = 6 + 8080 + 6 = \mathbf{8092}$.

5. Emma kann die Fahne beispielsweise von oben nach unten färben: Für den obersten Streifen hat sie vier Farben zur Auswahl. Für den mittleren Streifen kann sie alle bis auf die oben verwendete Farbe verwenden, es bleiben ihr also drei Möglichkeiten. Für den untersten Streifen hat sie ebenso alle Farben bis auf die in der Mitte verwendete zur Auswahl, also wieder drei Möglichkeiten.

   Insgesamt hat sie somit $4 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{36}$ Möglichkeiten.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Wenn man ganz genau sein will, kann man sich jetzt noch überlegen, ob alle legalen Färbungen wirklich mit dieser Methode erreicht werden können. Dies ist jedoch leicht zu argumentieren, dass eine vorgegebene legale Färbung sicher nach diesen Regeln von oben nach unten bemalt werden kann.

   Eine etwas rechenintensivere alternative Methode kann darin bestehen, alle $4^3 = 64$ mit vier Farben möglichen Färbungen zu betrachten und davon alle illegalen abzuziehen. Zunächst betrachten wir illegale Färbungen, bei denen die oberen zwei Streifen dieselbe Farbe haben; derer gibt es $4 \cdot 4 = 16$ (nämlich 4 Optionen für die doppelt verwendete Farbe oben, und 4 Optionen für den unteren Streifen). Ebenso gibt es 16 Optionen, bei denen die unteren beiden Streifen dieselbe Farbe haben.

   Nun kommen wir aber nur auf $64 - 16 - 16 = 32$ Möglichkeiten. Das liegt daran, dass wir alle mit drei gleichen Streifen gleich doppelt abgezogen haben. Wenn wir diese vier Möglichkeiten, alle drei Streifen gleich zu färben, wieder dazuaddieren, erhalten wir schließlich dieselben $64-16-16+4 = 36$ Möglichkeiten. Diese Methode nennt sich „Inklusion-Exklusion“.

6. Wenn 2 die Zahl n teilt, dann ist auch $y = \frac{n}{2}$ eine ganze Zahl, die n teilt (weil $2 \cdot y = n$).

   Wir wissen aber, dass n nur die Teiler 1, 2 und n hat. Offensichtlich ist y weder gleich 1 noch gleich n, also muss $y = 2$ gelten. Somit folgt $n = 2 \cdot y = 2 \cdot 2 = 4$ als **einzige Lösung**.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Es ist auch bekannt, dass eine Zahl genau dann eine ungerade Anzahl von Teilern hat, wenn sie eine Quadratzahl ist. Das kann man wie folgt begründen: Bei jeder Zahl kann man die Menge aller Teiler in Paare $(t, \frac{n}{t})$ einteilen, deren Produkt jeweils n ergibt, wobei immer einer der Teiler im Paar kleiner oder gleich $\sqrt{n}$ und der andere größer oder gleich $\sqrt{n}$ ist. Bei einer Quadratzahl hat man jedoch als Sonderfall darunter das Paar $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$, bei dem derselbe Teiler doppelt vorkommt.

   Genau drei Teiler haben dabei nur die Quadrate von Primzahlen, da jedes Quadrat einer zusammengesetzten Zahl $n = (a \cdot b)^2$ mit $a > 1$ und $b > 1$ (aber a und b nicht notwendigerweise verschieden) mindestens 1, a, a^2, a^2b und a^2b^2 als Teiler hätte, die sicher alle verschieden sind. (Jeder ist das Produkt des vorigen Teilers mit einer Zahl größer als 1, daher sind sie aufsteigend nach Größe sortiert.)

   Wir wissen also, dass n das Quadrat einer Primzahl sein muss und 2 als Faktor hat, damit ist $n = 4$ eindeutig.

7. Da uns nur die Einerziffer interessiert, können wir bei allen Zwischenschritten alle höheren Stellen immer gleich „wegwerfen“. (Mathematisch ausgedrückt: Wir rechnen modulo 10.)

   Zunächst beobachten wir, dass alle Fünferpotenzen immer mit der Ziffer 5 enden: 5, 25, 125, 625, ... Dies können wir zum Beispiel beweisen, indem wir die Multiplikation Schritt für Schritt betrachten: Die neue Einerstelle ergibt sich immer aus dem Produkt der alten beiden Einerstellen, alle höheren Stellen haben auf die neue Einerstelle keinen Einfluss. Wenn man eine Zahl, die auf 5 endet, also mit einer anderen Zahl multipliziert, die auf 5 endet, erhält man wegen $5 \cdot 5 = 25$ wieder eine Zahl, die auf 5 endet.

   In jeder Klammer wird demnach zu einer auf 5 endenden Fünferpotenz die Zahl 1 addiert, und wir erhalten somit eine auf 6 endende Zahl.

   Dasselbe wie mit der Endziffer 5 passiert praktischerweise auch mit der Ziffer 6: Wenn man eine Zahl, die auf 6 endet, mit einer anderen Zahl multipliziert, die auf 6 endet, erhält man wegen $6 \cdot 6 = 36$ wieder eine Zahl, die auf 6 endet.

   Das Produkt der drei Klammern, die jeweils auf 6 enden, endet daher wieder auf **6**.

   Alternativlösungen und Anmerkungen:

   Dasselbe modulo 10 angeschrieben: Es gilt $5^n \equiv 5 \pmod{10}$ und $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ für alle positiven ganzen Zahlen n, und somit

   $$(5^5 + 1) \cdot (5^{10} + 1)(5^{15} + 1) \equiv (5 + 1) \cdot (5 + 1) \cdot (5 + 1) = 6^3 \equiv \mathbf{6} \pmod{10}.$$

8. Die Zahl 0 hoch jeder beliebigen Zahl außer 0 ergibt immer 0, also $0^x = 0$ für alle $x \neq 0$. In jedem der Potenztürme kommt nur eine 0 vor, also können wir den gesamten Turm darüber jeweils sofort durch 0 ersetzen.

   Konkret für den zweiten Summanden ergibt sich sofort $0^{2^{3^2}} = 0$.

   Die zweite benötigte Rechenregel mit 0 lautet, dass jede Zahl außer 0, wenn man sie hoch 0 nimmt, immer 1 ergibt, also $x^0 = 1$ für alle $x \neq 0$.

   Für den ersten Summanden erhalten wir, indem wir diese beiden Regeln anwenden, somit $2^{0^{2^3}} = 2^0 = 1$.

   Bei den restlichen beiden Summanden müssen wir neben der Anwendung dieser Regeln zudem die Hochzahlen in der richtigen Reihenfolge auflösen; die Schreibweise x^{y^z} ist gleichbedeutend mit $x^{(y^z)}$. Wir erhalten $2^{3^{2^0}} = 2^{3^1} = 2^3 = 8$ und $3^{2^{0^2}} = 3^{2^0} = 3^1 = 3$.

   In Summe erhalten wir $1 + 0 + 8 + 3 = \mathbf{12}$.

9. Es können nie drei Biber nebeneinander sitzen, weil der mittlere dann kein Känguru als Nachbarn hätte. Ebenso muss jedes Känguru neben einem anderen Känguru sitzen.

   Etwas mathematisch unpräzise kann man wie folgt argumentieren: Wenn man so viele Biber wie möglich hinsetzen will, muss man also immer abwechselnd zwei Biber und zwei Kängurus hinsetzen, irgendwo in der Mitte sieht die Reihe also etwa wie folgt aus: „$\ldots BBKKBBKKBBKKBB\ldots$“ (wobei B für einen Biber und K für ein Känguru steht).

Es gibt vier Möglichkeiten, wie man so eine Reihe beim ersten Sitzplatz beginnen kann, nämlich „$KKBB\ldots$“, „$BKKB\ldots$“, „$BBKK\ldots$“ oder „$KBBK\ldots$“. Von diesen ist die Möglichkeit „$BBKK\ldots$“ verboten, weil der erste Biber kein Känguru als Nachbarn hat. Ebenso würde Möglichkeit „$KBBK\ldots$“ am rechten Rand mit zwei Bibern enden und ist daher nicht möglich. Die beiden verbleibenden Möglichkeiten $KKBBKKBBKKBBKKBBKKBBKKB$ und $BKKBBKKBBKKBBKKBBKKBBKK$ haben jeweils **11** Biber unter den 23 Plätzen.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Dem*der echten Mathematiker*in ist die in den Raum gestellte Behauptung, man müsse immer zwei Biber und dann zwei Kängurus nebeneinandersetzen, natürlich zu unpräzise. Zwar haben wir eine Möglichkeit mit 11 Bibern gefunden, aber geht es denn wirklich nicht besser, wenn wir vielleicht doch irgendwo einen einzelnen Biber zwischen zwei Kängurus setzen und dafür zum Ausgleich woanders vielleicht mehr Biber unterbringen könnten?

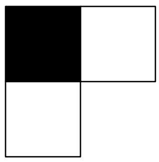
Zwar kann man hier „händefuchtelnd“ recht viel argumentieren, beispielsweise, dass die Anordnung links von einem Känguru unabhängig ist von jener rechts davon und das Herausnehmen eines Bibers zwischen zwei Kängurus somit nur dort die Situation verschlechtert und nirgends etwas verbessert... Eine sehr elegante Möglichkeit, es ohne langen Text zu beweisen, lautet jedoch wie folgt:

Wir teilen die 23 Sitzplätze in 5 Vierergruppen und 3 Plätze am Ende: [....][....][....][....][....][...]

Unter vier benachbarten Tieren „$\ldots PQRS\ldots$“ müssen immer mindestens zwei Kängurus sein, weil die zwei Tiere in der Mitte, Q und R, sonst kein Känguru als Nachbarn hätten (selbst, wenn sich links und rechts von der Vierergruppe lauter Kängurus befinden würden) und ein einzelnes Känguru auch nicht gleichzeitig zu Q und R benachbart sein kann. Daher sitzen auf den ersten 20 Plätzen mindestens 10 Kängurus und folglich höchstens 10 Biber.

In der Dreiergruppe „$\ldots PQR$“ am Ende werden mindestens zwei Kängurus benötigt, damit Q und R jeweils ein Känguru als Nachbarn haben, daher kann die Dreiergruppe höchstens einen Biber enthalten. Maximal bringen wir daher $10+1 = 11$ Biber unter – und das ganz unabhängig von jedweden Überlegungen, in welcher Reihenfolge man sie am besten hinsetzen sollte.

10. Die Figur setzt sich zusammen aus unendlich vielen Elementen dieser Form, jedes halb so groß wie das vorige:



In jedem dieser Teile macht die schwarze Fläche ein Drittel der Gesamtfläche aus, also beträgt die schwarze Fläche auch insgesamt ein Drittel von 84, alos $84/3 =$ **28**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Natürlich kann man auch banal eine geometrische Reihe berechnen: Der Anteil der schwarzen Fläche beträgt

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

wobei wir die Formel $q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} - 1$ verwendet haben. (Das -1 kommt gegenüber der vielleicht bekannteren Formel aus dem Formelheft ins Spiel, weil wir bei q^1 statt q^0 beginnen.)

11. Wir teilen die Zahlen in drei „Restklassen“ bei Division durch 3: Die Zahlen 3, 6 und 9 sind alle durch 3 teilbar, die Zahlen 1, 4 und 7 lassen jeweils einen Rest von 1 bei Division durch 3, und die Zahlen 2, 5 und 8 lassen jeweils einen Rest von 2 bei Division durch 3.

    Betrachten wir als erstes diejenige Dreiergruppe, in der links bereits die Zahl 7 (Rest 1) und rechts die Zahl 9 (Rest 0) steht. Damit die Summe der drei Zahlen durch 3 teilbar ist, muss die mittlere Zahl einen Rest von 2 bei Division durch 3 haben. Zwischen den drei solchen Zahlen, 2, 5, und 8, können wir frei wählen.

    Nun stellen wir eine unabhängige Überlegung für vier beliebige nebeneinanderliegende Zahlen a, b, c, d an, die die Bedingung erfüllen, d.h. $a+b+c$ ist ein Vielfaches von 3, und $b+c+d$ ist ebenfalls ein Vielfaches von 3. Die Differenz von zwei Vielfachen von 3 ist wieder ein Vielfaches von 3, daher ist die Differenz $a+b+c-(b+c+d) = a-d$ ein Vielfaches von 3, und daraus folgt, dass a und d dieselbe Restklasse bei Division durch 3 haben. Kurz: Wenn man bei der Betrachtung der Summen von drei benachbarten Zahlen um ein Feld nach rechts geht, dann hat die rechts neu dazukommende Zahl immer genau dieselbe Restklasse wie die links wegfallende. (Dasselbe funktioniert natürlich auch in die andere Richtung.)

    Da wir die Restklassen einer kompletten Dreiergruppe schon kennen, folgt, dass die Zahlen den folgenden Restklassen angehören müssen, wobei die zwei vorgegebenen Zahlen blau markiert sind und die im ersten Schritt abgeleitete Restklasse der mittleren Zahl orange:

0	1	2	0	1	2	0	1	2

    Da wir auf keine Eigenschaft außer der Restklasse achten brauchen, sind die Zahlen mit derselben Restklasse jeweils völlig frei vertauschbar. Auf die drei Felder mit Restklasse 2 können wir die Zahlen 2, 5 und 8 also beliebig verteilen, wofür es $3! = 6$ Möglichkeiten gibt.

    Bei den drei Feldern mit Restklasse 1 ist eines bereits vorgegeben (der 7er), also können wir nur noch 1 und 4 auf die anderen beiden verteilen, wofür es zwei Möglichkeiten gibt.

    Ebenso ist ein Feld mit Restklasse 0 bereits vorgegeben (der 9er), und wir können 3 und 6 auf zwei Arten auf die restlichen beiden Verteilen.

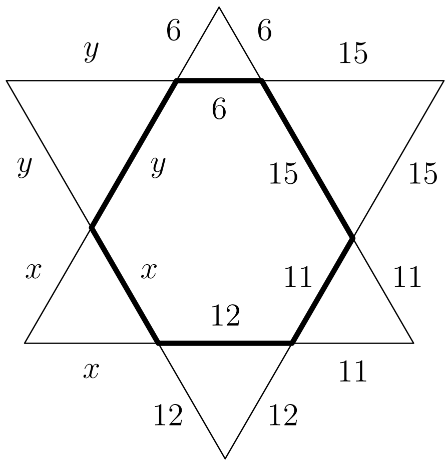
    Insgesamt finden wir somit $6 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{24}$ Möglichkeiten.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Natürlich kann man auch einfach durchprobieren; falls man dabei auf mehr oder weniger als 24 Möglichkeiten gekommen ist, ist hier die vollständige Liste aller Möglichkeiten zum Vergleichen:

    - 372915648
    - 372918645
    - 375912648
    - 375918642
    - 378912645
    - 378915642
    - 672915348
    - 672918345
    - 675912348
    - 675918342
    - 678912345
    - 678915342
    - 372945618
    - 372948615
    - 375942618
    - 375948612
    - 378942615
    - 378945612
    - 672945318
    - 672948315
    - 675942318
    - 675948312
    - 678942315
    - 678945312

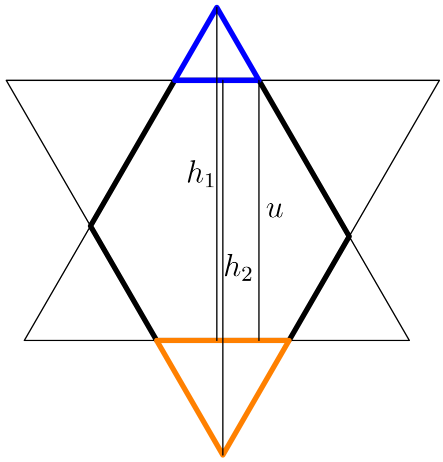
12. Wir erkennen, dass die Spitzen des Sterns lauter gleichseitige Dreiecke sind; dies folgt direkt aus den Winkeln in den zwei großen gleichseitigen Dreiecken und der Parallelität der Seiten. Damit kennen wir die Längen einiger weiterer Strecken:

Somit können wir direkt ablesen, dass für die Seitenlängen des großen Dreiecks mit der Spitze nach unten gilt, dass $12 + 11 + 15 = 38 = 15 + 6 + y = y + x + 12$. Für das andere große Dreieck gilt $11 + 15 + 6 = 32 = 6 + y + x = x + 12 + 11$. Daraus folgt $y = 38 - 15 - 6 = 17$ und $x = 32 - 12 - 11 = 9$.

Der Umfang beträgt folglich $12 + 11 + 15 + 6 + 9 + 17 =$ **70**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:



Als ganz anderen Lösungsweg können wir überlegen, wie die Größe zweier gegenüberliegender Spitzen sich verändert, wenn man die beiden großen Dreiecke zueinander verschiebt. Seien h_1 und h_2 die Höhen der beiden großen Dreiecke, und sei u die Überlappung der Dreiecke in die betrachtete Richtung (siehe Abbildung).

Die beiden gleichseitigen Dreiecke, die die Spitzen bilden, haben dann eine Höhe von $h_1 - u$ (blaues Dreieck) bzw. $h_2 - u$ (oranges Dreieck). Wenn die Überlappung u sich vergrößert oder verkleinert, ändern sich diese beiden Höhen folglich um denselben Betrag.

Weiters wissen wir, dass die Seitenlänge s eines gleichseitigen Dreiecks sich linear zur Höhe h verhält, konkret gilt $s = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot h$.

Also wachsen bei jeder Verschiebung auch beide Seitenlängen um denselben Betrag, oder anders ausgedrückt: *Die Differenz der Seitenlängen gegenüberliegender Spitzen bleibt immer gleich.*

(Das können wir auch nachprüfen, indem wir die Differenz der Seitenlängen als Formel ansetzen:

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (h_2 - u) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (h_1 - u) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (h_2 - u - (h_1 - u)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (h_2 - h_1) \end{aligned}$$

Das u kürzt sich also weg, übrig bleibt nur der (konstante) Unterschied zwischen den Höhen der beiden großen Dreiecke. Dieselbe Rechnung gilt außerdem für alle drei Paare gegenüberliegender Spitzen.)

Daraus folgt, dass die Seitenlänge der Spitze des größeren Dreiecks immer um genau 6 größer ist als jene der gegenüberliegenden Spitze des kleineren Dreiecks. Die beiden fehlenden Sechseckseiten haben also eine Länge von $x = 15 - 6 = 9$ bzw. $y = 11 + 6 = 17$.

13. Wir setzen in die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S$ einfach die alternativen Schreibweisen für die a_k ein und erhalten $(1 + S) + (2 + S) + (3 + S) + (4 + S) + (5 + S) = S$, was sich vereinfacht zu $15 + 5S = S$, woraus $15 = -4S$ und schließlich $S = \boldsymbol{-\frac{15}{4}}$ folgt.

14. Hier müssen wir mehrfach die Dreiecksungleichung anwenden, die besagt, dass keine Seite eines Dreiecks länger sein kann als die Summe der anderen beiden Seiten. In dieser Aufgabe ist außerdem auch der Gleichheitsfall, bei dem das Dreieck zu einem Strich würde, nicht erlaubt.

Zunächst betrachten wir die vordere Seite x. Diese muss kleiner als 7 sein, weil sonst $x \geq 3+4$ wäre und die drei Seiten rechts kein Dreieck mehr bilden würden. Umgekehrt muss sie größer sein als 5, weil sonst $7 \geq 2+x$ wäre und die drei Seiten links kein Dreieck bilden könnten. Wegen der Ganzzahligkeit der Seitenlängen folgt $x=6$.

Für die hintere Seitenlänge y gilt, dass sie kleiner als 6 sein muss, weil sonst $y \geq 2+4$. Umgekehrt muss sie größer als 4 sein, weil sonst $7 \geq 4+y$ gelten würde. Wegen der Ganzzahligkeit folgt $y=5$.

Insgesamt haben wir $x+y=6+5=$ **11**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Wenn bei einer Känguru-Aufgabe nach einer Summe gefragt wird, vermutet man oft, dass es einen Trick geben muss, diese Summe direkt zu bestimmen statt mühsam ihre einzelnen Teile. In diesem Fall dürfte kein solcher Trick existieren, sondern die Frage nach der Summe dient nur dazu, dass die Antwortmöglichkeiten nicht den Lösungsweg verraten.

15. Im Betrag $|2m-2023|$ steht als Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl auf jeden Fall eine ungerade Zahl. Die einzigen ungeraden Zahlen, deren Betrag höchstens 1 ist, sind 1 und -1; für alle anderen ungeraden Zahlen wäre bereits der erste der beiden Beträge zu groß, um die Ungleichung zu erfüllen.

    Daraus folgt, dass $2m$ entweder 2022 oder 2024 sein muss. In beiden Fällen „verbraucht" bereits der erste Betrag den gesamten Spielraum bis zur oberen Grenze von 1, d.h. der zweite Betrag muss 0 sein, damit es sich noch ausgehen kann.

    Damit $2n-m=0$ gelten kann, muss m gerade sein. Für $2m=2024$ und daher $m=1012$ geht sich das aus, für $2m=2022$ und daher $m=1011$ nicht. Somit ist $(m,n)=(1012,506)$ die **einzige Lösung**.

16. Eine Zahl der Form 5^x mit einer positiven ganzen Zahl x kann keine anderen Primfaktoren als 5 enthalten, und somit muss $n=5^k$ mit einer noch zu bestimmenden positiven ganzen Zahl k sein.

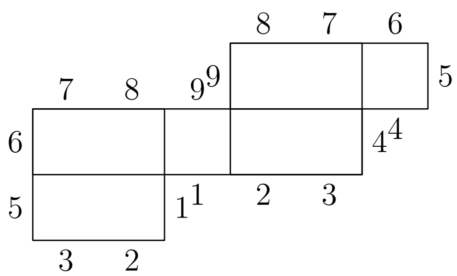
    Dann gilt $n^n = \left(5^k\right)^{\left(5^k\right)} = 5^{k\cdot 5^k}$.

    Dies soll gleich sein wie 5^{5^6}. Zwei Zahlen a^b und a^c mit $a>0$ sind dann und nur dann gleich, wenn ihre Hochzahlen b und c gleich sind, also schließen wir, dass $k \cdot 5^k = 5^6$ gelten muss.

    Wir sehen, dass k nicht allzu groß werden kann, sonst wird die linke Seite viel größer als die rechte. Ausprobieren kleiner Werte führt schnell zu $k=5$. (Wir können die meisten Werte auch dadurch ausschließen, dass die rechte Seite eine Fünferpotenz ist und somit auch k eine Fünferpotenz sein muss.)

    Somit ist $n=5^5=$ $\mathbf{5\cdot 5^4}$.

17. Wir markieren mit gleichen Zahlen jeweils die Stellen vom Quader, die aufeinandergeklebt werden (zwei Klebestellen pro langer Seite, eine pro kurzer Seite).



    Jede Klebestelle muss entweder auf beiden oder keiner Seite eine Linie haben, die direkt in die Schnittstelle hineinläuft.

    - Bei (A) verletzen Klebestellen 1, 2, 6 und 7 dieses Prinzip.
    - Bei (B) verletzen Klebestellen 5 und 6 dieses Prinzip.
    - Bei (C) verletzen Klebestellen 2 und 7 dieses Prinzip.
    - Bei (E) verletzen Klebestellen 2 und 5 dieses Prinzip.

Übrig bleibt **(D)**, wo Leons Weg beispielsweise bei der linken mit 2 markierten Klebestelle nach oben beginnen kann, dann über die Klebestelle 8 führt, von dort weiter nach links zur Klebestelle 5, und von dort wieder zurück zur Klebestelle 2.

18. Es gilt

$$\begin{aligned} N! &= 6! \cdot 7! \\ &= 7! \cdot 6! \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 10! \end{aligned}$$

und somit $N = 10$ mit Ziffernsumme **1**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Da es sich um eine Känguru-Aufgabe handelt, können wir davon ausgehen, dass tatsächlich so ein N mit dieser Eigenschaft existiert und brauchen für eine korrekte Lösung nur einige Vermutungen darüber anstellen, was dieses N sein könnte. Wir sehen, dass 6! und 7! jeweils einen Faktor 5 enthalten, also muss N mindestens 10 sein, damit $N!$ zwei Faktoren 5 enthält.

Andererseits enthalten 6! und 7! keinen Faktor 11, also muss N kleiner als 11 sein. Damit ist $N = 10$ eindeutig.

19. Wir suchen jenes x, für das $x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ für jede Wahl von a denselben Wert ergibt, oder anders ausgedrückt: konstant in a ist, wenn man den Term als Funktion in a statt als Funktion in x betrachtet.

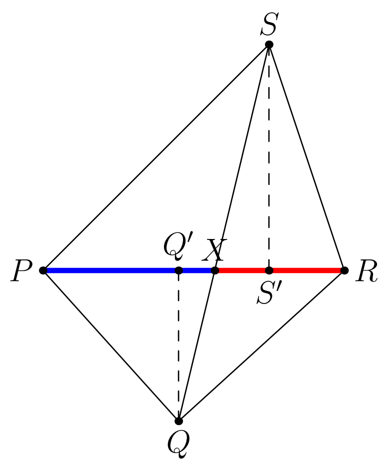
Für ein fixes x haben x^3, $3x^2$ und 4 keinen Einfluss, es bleibt nur $ax + 2a$ zu betrachten, das wir auch als $a \cdot (x + 2)$ anschreiben können. Wir sehen, dass für die Wahl $x = -2$ der Wert von a keinen Einfluss mehr auf diesen Term hat.

An dieser Stelle gilt $y = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 + a \cdot 0 + 4 = -8 + 12 + 4 = 8$. Somit sind die Koordinaten $(x, y) = (-2, 8)$ und deren Summe beträgt **6 (= eine andere Zahl)**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Etwas mehr mit Formeln geschrieben betrachten wir zwei verschiedene Werte a und $\tilde{a}$ und bestimmen den Schnittpunkt der beiden Kurven $y = x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4$ und $y = x^3 + 3x^2 + \tilde{a}x + 2\tilde{a} + 4$. Dazu setzen wir sie gleich und erhalten $x^3 + 3x^2 + ax + 2a + 4 = x^3 + 3x^2 + \tilde{a}x + 2\tilde{a} + 4$ und somit $ax + 2a = \tilde{a}x + 2\tilde{a}$. Das lösen wir nach x auf und erhalten $x(a - \tilde{a}) = -2(a - \tilde{a})$. Da wir $a \neq a'$ angenommen haben, können wir durch $(a - \tilde{a})$ dividieren und erhalten bei $x = -2$ den einzigen Schnittpunkt der beiden Kurven.

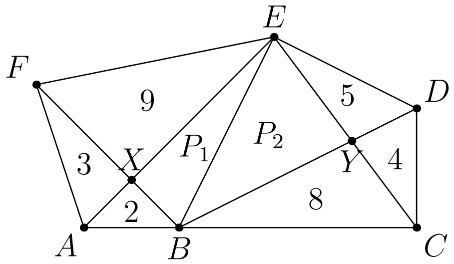
20. Zuerst stellen wir eine allgemeine Überlegung an Hand der folgenden Skizze an:



Sei $PQRS$ ein konvexes Viereck, X der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und seien Q' und S' die Fußpunkte von Q bzw. S auf PR. Die beiden Dreiecke XQR und XSR haben dieselbe Grundlinie XR, daher verhalten sich ihre Flächen (wegen der Formel „Grundlinie mal Höhe Halbe") wie ihre Höhen QQ' und SS'. Weiters sind die Dreiecke $QQ'X$ und $SS'X$ ähnlich (weil alle Seiten zueinander parallel sind), daher verhalten sich QQ' und SS' wie XQ zu XS.

Wenn wir diese beiden Dinge zusammenfassen, erhalten wir, dass die Flächen $[XQR]$ und $[XSR]$ sich zueinander verhalten wie XQ zu XS.

Wir bezeichnen einige Punkte in der gegebenen Grafik wie folgt:



Außerdem haben wir die Fläche P durch die Strecke BE in zwei Teile P_1 und P_2 geteilt.

Gemäß unserer Vorüberlegung gilt $XB : XF = 2 : 3$, aber auch $P_1 : 9 = XB : XF = 2 : 3$, woraus $P_1 = 6$ folgt.

Auf der anderen Seite gilt $YB : YD = 8 : 4 = 2 : 1$ und $P_2 : 5 = YB : YD = 2 : 1$, woraus $P_2 = 10$ folgt.

Insgesamt erhalten wir $P = P_1 + P_2 = 6 + 10 = \mathbf{16}$.

21. Wir beobachten zunächst an Hand des schon gezeichneten Beginns der Spirale, dass ungerade Quadratzahlen immer im linken oberen Eck des bis dahin gezeichneten Quadrats aufscheinen, und gerade Quadratzahlen immer im rechten unteren Eck.

    Dass das immer so sein muss, lässt sich leicht argumentieren: Quadratzahlen sind, ihrer Definition nach, Zahlen, für die sich die entsprechende Anzahl Kästchen als Quadrat anordnen lässt, und von einem Quadrat mit Seitenlänge n zum nächstgrößeren mit Seitenlänge $n+1$ kommt man immer, indem man an einer senkrechten und einer waagrechten Seite jeweils eine Spalte bzw. Zeile anfügt. Von 3×3 auf 4×4 kommt man beispielsweise, indem man in der Spirale die Zahlen von 10 bis 16 hinzufügt.

    Durch die Anordnung als Spirale ist es so, dass man dabei das Quadrat abwechselnd ein Mal mit einer Zeile oben und einer Spalte rechts erweitert, ein Mal mit einer Zeile unten und einer Spalte links.

    Die Zahl 625 ist 25^2, daher ist sie in einem linken oberen Eck, ganz gleich wie beispielsweise die Zahl 9 im gezeichneten Anfang der Spirale. Von dort geht es demnach ein Mal nach oben und dann nach rechts, wie in **(B)** zu sehen.

22. Zunächst betrachten wir allgemein, wieviele Teiler eine Zahl der Form $2^x \cdot 3^y$ (für positive ganzen Zahlen x und y) hat. Die Teiler einer solchen Zahl dürfen keinen Primfaktor außer 2 und 3 enthalten; sie dürfen den Primfaktor 2 höchstens x Mal enthalten; und sie dürfen den Primfaktor 3 höchstens y Mal enthalten. Erlaubt sind also alle Kombinationen von 0 bis x Primfaktoren 2 mit 0 bis y Primfaktoren 3, das ergibt $(x+1) \cdot (y+1)$ erlaubte Teiler.

    Die Zahl $A = 2^{10} \cdot 3^{20}$ teilt $B = 2^{20} \cdot 3^{23}$, daher ist jeder Teiler von A auch ein Teiler von B. Deswegen können wir die gesuchte Anzahl berechnen als

$$\begin{aligned}\text{Anzahl Teiler von B} - \text{Anzahl Teiler von A} &= (20+1) \cdot (23+1) - (10+1) \cdot (20+1) \\ &= 21 \cdot 24 - 11 \cdot 21 \\ &= 21 \cdot (24-11) = 21 \cdot 13 = \mathbf{273}.\end{aligned}$$

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Die Berechnung der Anzahl der Teiler lässt sich verallgemeinern: Sei $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$ die Primfaktorisierung einer Zahl, dann gilt für die Anzahl der Teiler $d(n) = (\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot (\alpha_3+1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k+1)$.

    Die Überlegung, dass jeder Teiler von A auch ein Teiler von B ist, ist notwendig, damit wir hier einfach die Differenz bilden dürfen. Andernfalls könnte es uns passieren, dass wir zu viele Teiler abziehen. Wäre die Anzahl der Zahlen gefragt, die 10 teilen (1, 2, 5, 10, also vier Zahlen), aber nicht 7 (1 und 7, also zwei Zahlen), so wäre die Antwort drei (2, 5 und 10) und nicht $4 - 2 = 2$. Den Teiler 7 dürften wir nicht abziehen, weil er 10 gar nicht teilt.

23. Im schlechtesten Fall landet Hans im dritten Teil am 13. Platz und sein Punkteergebnis wäre $1 \cdot 1 \cdot 13 = 13$.

    Vor ihm landen könnten dann beispielsweise noch zwei Athleten, von denen einer in allen drei Bewerben den 2. Platz hatte (Punkteergebnis 8), und einer, der 3., 3. und 1. wurde (Punkteergebnis 9).

    Es bleibt zu überlegen, ob es auch irgendwie passieren könnte, dass drei (oder mehr) Athleten vor ihm landen könnten. Da die Punkteergebnisse jeweils Produkte sind, könnte es nützlich zu sein, deren Produkt zu betrachten, weil wir dann die Reihenfolge der Multiplikationen vertauschen können.

    Nehmen wir also an, es gäbe drei Athleten mit einem besseren Gesamtrang, und seien A, B und C die Punkteergebnisse dieser drei Athleten. Da Hans ein Punkteergebnis von 13 hat und alle vor ihm sind, muss $A \leq 13$, $B \leq 13$ und $C \leq 13$ sein, also $ABC \leq 13^3 = 2197$.

    Andererseits setzt sich ABC zusammen als Produkt von 9 Zahlen: Den drei Rängen der drei Athleten im ersten Teil, den drei Rängen im zweiten Teil und den drei Rängen im dritten Teil. Im ersten und zweiten Teil können die drei jeweils bestenfalls 2., 3. und 4. Rang in irgendeiner Reihenfolge belegt haben (da der 1. Rang jeweils an Hans ging und es keine Gleichstände gab), im drittem Teil bestenfalls den 1., 2. und 3. Rang. Das Produkt ABC beträgt also mindestens $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3456$, ein Widerspruch.

    Daher können höchstens zwei Athleten vor Hans landen, er hat im schlechtesten Fall also den **3.** Platz.

    Alternativlösungen und Anmerkungen:

    Statt dem Trick mit der Multiplikation kann man natürlich auch etwas textueller argumentieren. Mögliche (jeweils aufsteigend sortierte) Kombinationen, die zu einem Punkteergebnis kleiner oder gleich 13 führen, sind $(1, 1, x)$ mit $1 \leq x \leq 13$, $(1, 2, x)$ mit $2 \leq x \leq 6$, $(1, 3, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$. Da Hans schon zwei der drei ersten Plätze weggeschnappt hat, ist die Möglichkeit $(1, 1, x)$ gar nicht mehr verfügbar, und es kann auch höchstens ein Athlet eine der Möglichkeiten mit einem 1er erreicht haben. Von den verbliebenen Möglichkeiten $(2, 2, 3)$ und $(2, 2, 2)$ können wir aber ebenfalls höchstens eine verwenden, weil es nur drei zweite Plätze zu vergeben gibt.

    Für die Abschätzung zwischen 13^3 und $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ will man ohne Taschenrechner vielleicht nicht alle Produkte ausrechnen. Mit geschicktem Zusammenfassen kann man das zweite Produkt umformen zu $(3 \cdot 4)^3 = 2 \cdot 12^3$, und Division ergibt

    $$\frac{2 \cdot 12^3}{13^3} = 2 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^3 > 1,$$

    wobei wir im letzten Schritt grob abgeschätzt haben, dass $\frac{12}{13}$ „recht nahe" an 1 und damit selbst hoch 3 wahrscheinlich noch deutlich über $\frac{1}{2}$ ist. Ganz mathematisch präzise ist das nicht, für einen groben Plausibilitätscheck während dem Bewerb jedoch hinreichend.

24. Wir bezeichnen den Eckpunkt gegenüber der markierten Fläche als „Spitze" des Tetraeders. Beim ersten Rollen kommt diese Spitze auf dem gemeinsamen Eckpunkt von A, B, C und D zu liegen. Dort bleibt sie auch die ganze Zeit, während der Tetraeder auf A, B, C und schließlich D weitergerollt wird (und solange die Spitze am Boden liegt, ist die markierte Fläche jedenfalls in der Luft.

    Erst beim letzten Rollen auf **E** richtet sich der Tetraeder wieder auf und steht wieder auf der markierten Fläche.

25. Die Möglichkeit $(x-1)^5$ können wir ausschließen, da das Polynom sonst $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ (oder ein konstantes Vielfaches davon) lauten müsste.

    Als nächstes versuchen wir $(x-1)^4$, dann hätte das Polynom also die Form $(x-1)^4 \cdot (x-a)$ für eine noch zu bestimmende Konstante a.

    Wir rechnen $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ aus. Multipliziert man das mit $(x-a)$, so ergibt sich für den Koeffizienten von x^4, dass dieser $-4-a$ beträgt (weil x^4 im Produkt zwei Mal vorkommt, als $-4x^3 \cdot x$ und als $x^4 \cdot (-a)$)). Wenn dieser Koeffizient -11 sein soll, folgt $a = 7$.

    Praktischerweise passt das mit dem sichtbaren konstanten Term zusammen, der sich aus $1 \cdot (-a)$ ergibt.

    Folglich ist $\mathbf{(x-1)^4}$ ein Teiler von einem möglichen Polynom, das unter dem Tintenklecks stehen könnte, nämlich $(x-1)^4 \cdot (x-7) = x^5 - 11x^4 + 34x^3 - 46x^2 + 29x - 7$.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Ganz allgemein angesetzt hat das Polynom die Form $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \cdot (x - x_5) \cdot c$, wobei x_1 bis x_5 die fünf (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen sind. Wir sehen sofort, dass $c = 1$ gilt, weil der Koeffizient von x^5 gleich 1 ist.

Das Produkt der 5 Klammern erhält man als Summe aller 2^5 Möglichkeiten, aus jeder Klammer entweder den ersten oder den zweiten Term zu wählen, also beispielsweise $x \cdot x \cdot (-x_3) \cdot x \cdot (-x_5)$.

Unter diesen 32 Möglichkeiten enthält nur eine gar kein x, nämlich, wenn man aus jeder Klammer den zweiten Term wählt. Daher erhält man für den konstanten Term $(-x_1) \cdot (-x_2) \cdot (-x_3) \cdot (-x_4) \cdot (-x_5)$. Damit dieser gleich -7 ist, muss (weil 7 eine Primzahl ist) genau eine Nullstelle gleich 7 oder gleich -7 sein, und alle anderen -1 oder 1, wobei insgesamt eine gerade Anzahl von Nullstellen negativ sein muss.

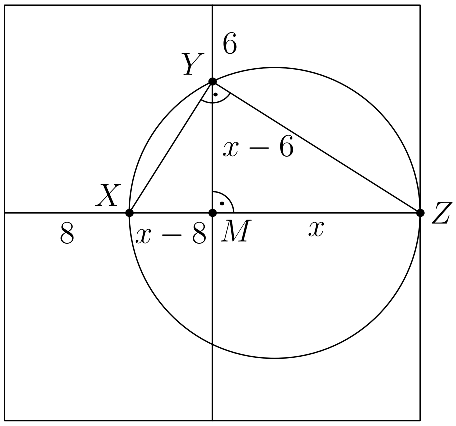
Für den Koeffizienten von x^4 sehen wir, dass wir in der Multiplikation der fünf Klammern immer dann ein x^4 erhalten, wenn wir von vier Klammern das x und von einer Klammer das $(-x_i)$ miteinander multiplizieren. Der Koeffizient ist daher $(-x_1) + (-x_2) + (-x_3) + (-x_4) + (-x_5)$ und soll gleich -11 sein. Multiplizieren wir alles mit -1, erhalten wir $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$.

Da wir schon wissen, dass eine Nullstelle gleich 7 oder -7 und die anderen vier gleich 1 oder -1 sein müssen, ergibt sich, dass nur $7+1+1+1+1$ die gewünschte Summe von 11 ergibt und das in der oberen Lösung durch Probieren gefundene Polynom daher sogar eindeutig ist.

Die hier durch Ausmultiplizieren hergeleiteten Beziehungen, dass der konstante Term gleich dem Produkt der $(-x_i)$ ist und der Koeffizient der zweithöchsten Potenz gleich der Summe der $(-x_i)$, sind auch als Satz von Vieta bekannt.

Ein weiterer bekannter Satz in diesem Zusammenhang lautet, dass bei einem Polynom mit lauter ganzzahligen Nullstellen alle diese Nullstellen den konstanten Term teilen. Diese Tatsache folgt ebenfalls sofort daraus, dass der konstante Term gleich dem Produkt der (ganzzahligen) $(-x_i)$ ist.

26. Wir bezeichnen die Punkte X, Y, Z und M wie in der folgenden Abbildung:



Sei x die Seitenlänge eines kleinen Quadrats. Dann gilt $MZ = x$, $MX = x - 8$ und $MY = x - 6$.

Aus dem Satz von Thales wissen wir, dass $\angle XYZ$ ein rechter Winkel ist.

Das Dreieck XMY ist ähnlich zu XYZ, da es den Winkel $\angle MXY$ mit diesem teilt und beide einen rechten Winkel haben; nach Winkelsumme im Dreieck muss damit auch der dritte Winkel übereinstimmen. Ebenso ist das Dreieck YMZ ähnlich zu XYZ.

Damit sind auch XMY und YMZ zueinander ähnlich, also gilt für das Verhältnis ihrer Katheten $(x-8) : (x-6) = (x-6) : x$.

Ausmultipliziert ergibt das $x \cdot (x-8) = (x-6)^2$, also $x^2 - 8x = x^2 - 12x + 36$, und damit $4x = 36$ und schließlich $x = 9$. Da x die halbe Seitenlänge des großen Quadrates ist, ergibt sich für dieses eine Seitenlänge von **18**.

27. Wir ignorieren vorerst alle dritten Potenzen, berechnen den größten gemeinsamen Teiler aller $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$, und nehmen diesen am Ende hoch drei.

Es kann sicher kein Primfaktor p größer oder gleich 7 vorkommen, da für $n = p + 1$ alle Terme von n bis $n + 4$ zwischen p und $2p$ liegen, also nicht durch p teilbar sind.

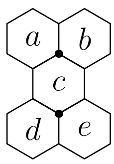
Der Primfaktor 5 kommt immer in genau einem der Terme n bis $n + 4$ vor, daher ist 5 ein gemeinsamer Teiler aller solchen Zahlen. Keine höhere Potenz von 5 ist gemeinsamer Teiler, da beispielsweise $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ den Primfaktor 5 nur ein Mal enthält.

Der Primfaktor 3 kommt, je nach Wahl von n, entweder ein oder zwei Mal vor – es können n und $n + 3$ durch 3 teilbar sein, oder $n + 1$ und $n + 4$, oder nur $n + 2$. Da wir den größten gemeinsamen Teiler aller solcher Zahlen suchen, müssen wir uns am schlechtesten Fall orientieren und können somit nur einen Primfaktor 3 garantieren. Beispielsweise in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ kommt auch tatsächlich nur ein Dreier vor.

Der Primfaktor 2 kommt entweder an zwei oder an drei Stellen vor – entweder sind n, $n + 2$ und $n + 4$ gerade, oder $n + 1$ und $n + 3$. Hier finden wir aber kein Beispiel, das wirklich nur zwei Primfaktoren 2 enthält. Wir beobachten, dass von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen immer eine sogar durch 4 teilbar ist. Im Fall, dass $n + 1$ und $n + 3$ gerade sind, haben wir daher sogar drei Primfaktoren 2 (und im anderen Fall sogar mindestens vier). Ein Beispiel mit genau drei Primfaktoren 2 finden wir, beispielsweise wieder $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Der größte gemeinsame Teiler aller $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ ist daher $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, und dessen dritte Potenz somit $\mathbf{2^9 3^3 5^3}$.

28. Wir betrachten Teile dieser Form:



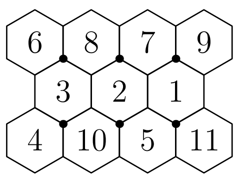
Es gilt $a + b + c = d + e + c$, und daher nach Subtraktion von c auch $a + b = d + e$.

Wenn beispielsweise a größer ist als d, dann muss b um den entsprechenden Betrag kleiner sein, damit die Summen gleich sind. Wenn wir mit diesem Gedanken umformen, erhalten wir $a - d = e - b$.

Zurück in der originalen Anordnung ist 6 um 2 größer als 4, also muss in den beiden Zahlen rechts daneben die Zahl neben 6 um 2 kleiner sein als die Zahl neben 4. Dasselbe können wir ein weiteres Mal anwenden, womit die dritte Zahl in der oberen Zeile wieder um 2 größer als die dritte Zahl in der unteren Zeile sein muss. Wenden wir es ein drittes Mal an, so muss die Zahl unter dem Fragezeichen wieder um 2 kleiner als 11 sein, also **9**.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Die einzige mögliche Anordnung sieht aus wie folgt:

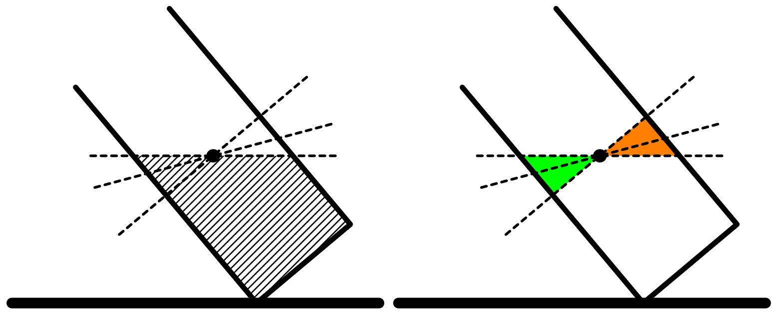


Um diese zu finden, sind zwei Überlegungen nützlich: Erstens wissen wir bereits, dass übereinanderliegende Zahlen in der ersten und dritten Reihe immer eine Differenz von 2 haben müssen. Von den möglichen solchen Paaren sind $(2, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 8)$, $(7, 9)$ und $(9, 11)$ nicht mehr möglich, weil mindestens eine ihrer beiden Zahlen bereits eingezeichnet ist. Es bleiben nur noch $(1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$ und $(8, 10)$ als Optionen für die zwei mittleren Felderpaare.

Weiters können wir die Summe S bei jedem dicken schwarzen Punkt berechnen. Würde man alle sechs solchen Summen addieren, kämen in dieser Summe die vier bekannten Felder am Rand je genau ein Mal vor und alle anderen je zwei Mal. Das können wir auch berechnen, indem wir alle 11 Felder addieren, mit 2 multiplizieren und die vier bekannten Felder dann abziehen. Das Sechsfache der Summe S beträgt daher $6S = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 11) - 4 - 6 - 9 - 11 = 2 \cdot 66 - 30 = 102$ und damit $S = 17$.

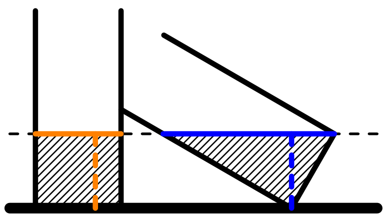
Ab hier findet man mit ein wenig Durchprobieren schnell die einzige Lösung.

29. Zunächst überlegen wir, was mit dem Wasserstand passiert, wenn man ein Glas kippt:



Wir stellen fest, dass es einen Punkt in der Mitte der Wasseroberfläche gibt, durch den auch bei Neigung des Glases immer noch die Wasseroberfläche hindurch geht, weil der fehlende diagonal durchgeschnittene Halbzylinder auf der einen Seite (orange) genau dieselbe Form und Größe hat wie der dazukommende auf der anderen Seite (grün). (Das funktioniert natürlich nur so lange, bis das Glas so schräg steht, dass die Wasseroberfläche entweder auf der einen Seite den Boden berührt oder auf der anderen das Wasser aus dem Glas hinausfließt.)

Auch im Querschnitt erscheinen die Wasserflächen daher gleich groß, weil in einem Trapez bei Veränderung der Neigung einer Kante um ihren Mittelpunkt genau dasselbe Argument mit dem dazukommenden grünen und dem wegfallenden orangen Dreieck funktioniert.



Zurück in der originalen Skizze stellen wir daher fest, dass wir ein Rechteck und ein Dreieck mit derselben Fläche sehen. Da die Fläche vom Rechteck sich berechnet als „Grundlinie (orange) mal Höhe (orange strichliert)“ und jene vom Dreieck als „Grundlinie (blau) mal Höhe (blau strichliert) Halbe“, und die beiden Höhen gleich sind, ergibt sich, dass die blaue Grundlinie genau doppelt so lang ist wie die orange.

Die orange ihrerseits ist aber wieder gleich lang wie der Boden des Glases breit ist. Im Dreieck, das einen rechten Winkel hat, ist daher die Hypotenuse doppelt so lang wie die aus dem Boden bestehende Kathete. Damit ist das Dreieck genau die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks und hat daher Winkel von 30°, 60° und 90°.

Die Grundfläche ist gegeben als 3π und der Flächeninhalt eines Kreise berechnet sich als $r^2\pi$, daher beträgt der Radius des Glasbodens $r = \sqrt{3}$. Damit hat die eine Kathethe eine Länge von $2r$, die Hypotenuse eine Länge von $4r$, und die andere Kathete eine Länge von $\sqrt{16r^2 - 4r^2} = r \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6$.

Die Wasserhöhe im stehenden Glas ist gemäß der Vorüberlegung genau halb so groß wie diese längere Kathete, also 3.

Damit ergibt sich ein Volumen von Grundfläche · Höhe $= 3\pi \cdot 3 = \mathbf{9\pi}$.

30. Unter sechs aufeinanderfolgenden Zahlen ist sicher mindestens eine durch 2 und mindestens eine durch 5 teilbar, also ist deren Produkt durch 10 teilbar und endet auf 0. Damit erhalten wir $b = 0$, und die restlichen drei Ziffern müssen 1, 2 und 3 in irgendeiner Reihenfolge sein.

Nun zählen wir etwas genauer ab, wieviele Zweier wir mindestens haben. Wie schon in Aufgabe 27 überlegt, befinden sich unter sechs aufeinanderfolgenden Zahlen drei gerade, und jede zweite davon ist obendrein durch 4 teilbar, also haben wir mindestens vier Zweier.

Da die Zahl auf zwei Nullen endet, muss auch noch ein zweiter Fünfer im Produkt sein. Wenn wir durch $100 = 2^2 \cdot 5^2$ dividieren, fallen einerseits die zwei Nullen am Ende weg, andererseits verbrauchen wir dabei nur zwei der vorhandenen Vierer. Daher ist die neue kürzere Zahl $abb\,cdd\,cdd\,a$ gerade, und damit auch ihre Einerziffer a gerade. Da a nur 1, 2 oder 3 sein kann, folgt $a = 2$.

In Frage kommen also nur noch die Zahlen 200 133 133 200 oder 200 311 311 200. Unter sechs aufeinanderfolgenden Zahlen ist sicher mindestens eine durch 3 teilbar (sogar mindestens zwei), also ist das Produkt durch 3 teilbar. Die Teilbarkeitsregel für 3 besagt, dass eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist. Die Zahl 200 311 311 200 hat eine Ziffernsumme von 14 und kommt daher nicht in Frage. Dagegen hat 200 133 133 200 eine Ziffernsumme von 18 und könnte daher die gesuchte Zahl sein.

Da wir alle anderen Möglichkeiten ausgeschlossen haben und die Frage so gestellt ist, dass sicher eine der Antwortmöglichkeiten richtig sein muss, können wir $d = \mathbf{3}$ schließen.

Alternativlösungen und Anmerkungen:

Tatsächlich finden sich auch 6 aufeinanderfolgende Zahlen, die die Bedingung erfüllen: $74 \cdot 75 \cdot 76 \cdot 77 \cdot 78 \cdot 79 = 200\,133\,133\,200$.

Wenn wir einmal sehen, dass die Zahl auf zwei Nullen enden muss, können wir den Rest auch mit „Brute Force“ erledigen, indem wir einige wenige Multiplikationen tatsächlich ausrechnen. Grobe Größenabschätzung zeigt, dass die kleinste der 6 Zahlen größer als 60 sein muss (da $60 \cdot 61 \cdot 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 < 65^6$ und selbst 65^6 erst 11-stellig ist) und kleiner als 100 (da $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot 104 \cdot 105 > 100^6$ und 100^6 bereits 13 Stellen hat).

Außerdem müssen zwei Fünfer im Produkt vorkommen, was nur dann geht, wenn entweder die erste und letzte Zahl beide durch fünf teilbar sind, oder eine der Zahlen durch 25. Die einzige Zahl in unserem Bereich, die letzteres erfüllt, ist 75.

Als kleinste der sechs Zahlen kommen damit nur noch die folgenden in Frage: 65, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 80, 85, 90, 95. Wenn wir die dazugehörigen Produkte ausrechnen, finden wir darunter die gesuchte Zahl.