COMPENDIUM KMO

Korean Mathematical Olympiad

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección Vol. 3

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", “licencias de uso” y en general cualquier forma de “pago por el acceso a los materiales didácticos”, con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato “**pdf**” para una cómoda lectura y en el formato “**doc**” de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática Problemas de Geometría Vol. 1 Vol. 2 Vol. 3
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Vol. 1 Vol. 2 Combinatoria
Probabilidad Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

Cálculo infinitesimal ESP CAT Álgebra Lineal ESP CAT Geometría Lineal ESP CAT
Números Complejos ESP CAT Combinatoria y probabilidad ESP CAT Estadística ESP CAT
Programación Lineal ESP CAT Álgebra ESP CAT Trigonometria ESP CAT
Geometria analítica ESP CAT Funciones ESP CAT Números (Preálgebra) ESP CAT
Proporcionalidad ESP CAT Medidas geométricas ESP CAT Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

Reválidas internacionales:

Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Polonia Pearson Edexcel International A Level
China-Gaokao China-Zhongkao Corea-Suneung Cambridge International A Level
Cambridge IGCSE AQA GCSE International Baccalaureate (IB) Pearson Edexcel IGCSE

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam HMMT
España: OME OMEFL OMEEX OMC OMEA OMEM OMA CDP
Europa: OMI Arquimede BMO BalkanMO JBMO OPM
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO EGMO KMO KJMO
AHSME: Book 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otros materiales:

Pizzazz! Book A B C D E Pre-Algebra Algebra REOIM , Llibre3r , Excalibur

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables “MS Word” de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates Aquí MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: https://www.youtube.com/c/GerardRomo
Visita mi **blog:** https://toomatesbloc.blogspot.com/

Versión de este documento: **29/12/2025**

Presentación.

La Korean Mathematical Olympiad (KMO) es una prestigiosa competencia matemática en Corea del Sur, organizada por la Sociedad Matemática Coreana (KMS) para identificar y formar a jóvenes talentos en matemáticas, preparando a los mejores para representar a Corea en la IMO (Olimpiada Internacional de Matemáticas) y contribuir al desarrollo científico y tecnológico del país.

Se divide en partes (Gauss y Euler) y un riguroso proceso de selección a través de exámenes y escuelas de verano, enfocándose en la resolución de problemas avanzados y el pensamiento matemático profundo para cultivar futuros científicos de clase mundial.

Fuente de estos documentos: https://www.kmo.or.kr/kmo/sub07.html

Índice.

#	Año	Nivel	Día	Grupo		Página
22	2009	MID	1		ENUN	7
					RESP	11
			2	A	ENUN	12
				B	ENUN	13
		HIGH	1		ENUN	14
					RESP	18
			2		ENUN	19
					ENUN	20
		FINAL	1		ENUN	21
			2		ENUN	22
23	2010	MID	1		ENUN	23
					RESP	25
			2	A	ENUN	26
				B	ENUN	27
		HIGH	1		ENUN	28
					RESP	30
			2	A	ENUN	31
				B	ENUN	32
		FINAL	1		ENUN	33
			2		ENUN	34
24	2011	MID	1		ENUN	35
					RESP	37
			2	A	ENUN	38
				B	ENUN	39
		HIGH	1		ENUN	40
					RESP	42
			2	A	ENUN	43
				B	ENUN	44
		FINAL	1		ENUN	45
			2		ENUN	46
25	2012	MID	1		ENUN	47
					RESP	49
			2	A	ENUN	50
				B	ENUN	51
		HIGH	1		ENUN	52
					RESP	54
			2	A	ENUN	55
				B	ENUN	56
		FINAL	1		ENUN	57
			2		ENUN	58
26	2013	MID	1		ENUN	59
					RESP	61
			2	A	ENUN	62

				B	ENUN	63
		HIGH	1		ENUN	64
					RESP	66
			2	A	ENUN	67
				B	ENUN	68
		FINAL	1		ENUN	69
			2		ENUN	70
27	2014	MID	1		ENUN	71
					RESP	73
			2		ENUN	74
		HIGH	1		ENUN	76
					RESP	78
			2		ENUN	79
		FINAL			ENUN	81
28	2015	MID	1		ENUN	83
					RESP	85
			2		ENUN	86
		HIGH	1		ENUN	88
					RESP	90
			2		ENUN	91
		FINAL			ENUN	93
29	2016	MID	1		ENUN	95
					RESP	97
			2		ENUN	98
		HIGH	1		ENUN	100
					RESP	102
			2		ENUN	103
		FINAL			ENUN	105
30	2017	MID	1		ENUN	107
					RESP	111
			2	A	ENUN	112
				B	ENUN	113
		HIGH	1		ENUN	114
					RESP	118
			2	A	ENUN	119
				B	ENUN	120
		FINAL			ENUN	121
31	2018	MID	1		ENUN	123
					RESP	127
			2	A	ENUN	128
				B	ENUN	129
		HIGH	1		ENUN	130
					RESP	134
			2	A	ENUN	135
				B	ENUN	136
		FINAL			ENUN	137

32	2019	MID	1	ENUN	139
				RESP	143
			2	ENUN	144
		HIGH	1	ENUN	146
				RESP	150
			2	ENUN	151
		FINAL		ENUN	153
33	2020	MID	1	ENUN & SOL	155
			2	ENUN	158
		HIGH	1	ENUN & SOL	159
				ENUN & SOL	162
			2	ENUN	165
		FINAL		ENUN	166
34	2021	MID	1	ENUN & SOL	168
			2	ENUN	171
		HIGH	1	ENUN & SOL	173
				ENUN & SOL	176
			2	ENUN	179
		FINAL		ENUN	181
35	2022	MID	1	ENUN & SOL	183
			2	ENUN	187
		HIGH	1	ENUN & SOL	189
				ENUN & SOL	192
			2	ENUN	195
		FINAL		ENUN	197
36	2023	MID	1	ENUN	199
			2	ENUN	201
		HIGH	1	ENUN	203
			2	ENUN	205
		FINAL	1	ENUN	207
			2	ENUN	208
37	2024	MID	1	ENUN	209
			2	ENUN	211
		HIGH	1	ENUN	213
			2	ENUN	215
		FINAL	1	ENUN	217
			2	ENUN	218
38	2025	MID		ENUN	219
		HIGH		ENUN	221
		FINAL	1	ENUN	224
			2	ENUN	225

제 23회 한국수학올림피아드 1차시험(중등부)

유형 가

2009 년 5 월 23 일; 제한시간 4 시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4 번은 각 4 점, 문제 17～20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 방정식 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여

$$xy(x-y)(x-2y)$$

의 최댓값을 구하여라.

2. 직사각형 $ABCD$ 에서 $AD = 400, AB = 222$ 이다. 두 변 AD 와 BC 의 중점을 각각 E, F 라 하고 BF 의 중점을 G 라 하자. 선분 EG 와 AF 의 교점을 X 라 하고 EF 와 XD 의 교점을 H 라고 할 때, HF 의 길이를 구하여라.

3. 연립방정식

$$\frac{x(y-1)}{2x+y-1} = 3, \quad \frac{x(z+1)}{x+2z+2} = 3, \quad \frac{(y-1)(z+1)}{2y+z-1} = 3$$

을 만족하는 x, y, z 에 대하여 xyz 의 값을 구하여라.

4. 외심이 O 인 예각삼각형 ABC 가 있다. 점 B 에서 변 AC 에 내린 수선의 연장선 위에 점 D 를 $BC = CD$ 가 되도록 잡고 직선 AO 와 CD 의 교점을 E 라 하자. $\angle AED = 35°$, $\angle BDE = 30°$, $\angle ABC = x°$ 일 때, x 를 구하여라.

5. 다섯 개의 수 $1, 2, 3, 4, 5$ 를 모두 한번씩 사용하여 만든 다섯 자리 양의 정수 중, 만의 자리 수가 $1, 2$ 가 아니고 일의 자리 수가 $1, 5$ 가 아닌 것의 개수를 구하여라.

6. 정30각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 세 점을 택하여 이 점들을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들고자 한다. 이런 삼각형 중 내각의 크기가 모두 $120°$ 이하인 삼각형의 개수를 구하여라.

7. 각 자리의 수가 모두 1 또는 2 또는 3인 6자리 양의 정수 중, 1도 이웃한 자리에 연속하여 나타나지 않고 2도 이웃한 자리에 연속하여 나타나지 않는 것의 개수를 구하여라.

8. 소수 p, r $(p > r)$ 에 대하여 $p^r + 9r^6$ 이 정수의 제곱일 때, $p + r$ 의 값을 구하여라.

9. 다음 수를 넘지 않는 가장 큰 정수를 구하여라.

$$\sqrt{900+1} + \sqrt{900+3} + \sqrt{900+5} + \cdots + \sqrt{900+59}$$

10. 분수 $\dfrac{a}{b}$ $(a, b$ 는 서로 소인 양의 정수$)$는 $\dfrac{10}{57}$ 보다 크고 $\dfrac{5}{28}$ 보다 작은 분수 중 분모가 가장 작은 것이다. ab 의 값을 구하여라.

11. 양의 정수 m 과 홀수 n 이 방정식 $m + \dfrac{1}{m} = 6\left(\dfrac{n}{8} + \dfrac{8}{n}\right)$ 을 만족할 때, mn 의 값을 구하여라.

12. 볼록오각형 $ABCDE$ 에서 BE 와 BC 가 각각 CD 와 AD 에 평행하고 $BC = ED$, $AB = CD$ 이다. $\angle BCD = 130°$ 이고 $\angle ACE = x°$ 일 때, x 를 구하여라.

13. 정삼각형 ABC 의 변 BC 위의 점 D 에 대하여, 직선 AD 가 이 정삼각형의 외접원과 만나는 점을 P 라 하자. $BP = 25, PC = 100$ 일 때, AD 의 길이를 구하여라.

14. 넓이가 48 인 정삼각형 ABC 에서 변 AC 의 중점을 D 라 하고 수심을 H 라 하자. 선분 AD 위의 점 P 를 $\angle DPH = 60°$ 가 되도록 잡고, 삼각형 APH 의 외접원이 변 AB 와 만나는 점을 $Q(Q \neq A)$, 삼각형 BQH 의 외접원이 변 BC 와 만나는 점을 R $(R \neq B)$라고 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이를 구하여라.

15. 양의 정수 n 은 두 자리 수이고 n^2 의 각 자릿수의 합이 n 의 각 자릿수의 합의 제곱과 같다. 이러한 수 n 의 개수를 구하여라.

16. 양의 정수 x, y 에 대하여, $x^3 + y^2$ 이 7의 배수인 세 자리 수가 되도록 하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

17. 두 조건

$$(a^2+1)(x^2+1)+(b^2+1)(y^2+1)+(c^2+1)(z^2+1)=4(ax+by+cz),$$

$$1<(a+1)(x+1)+(b+1)(y+1)+(c+1)(z+1)<9$$

을 모두 만족하는 실수 a,b,c,x,y,z 에 대하여

$$(a+1)^2(x+1)^2+(b+1)^2(y+1)^2+(c+1)^2(z+1)^2$$

의 값이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하여라.

18. 방정식 $x(x+5)=y(y+2)$ 를 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x,y) 의 개수를 구하여라.

19. 한 원 위에 시계반대방향으로 점 A,B,C,D,E,F 가 순서대로 놓여있다. 점 A 에서 점 F 로 향한 반직선 AF 와 점 C 에서 점 E 로 향한 반직선 CE 와의 교점을 G, 점 B 에서 점 F 로 향한 반직선 BF 와 점 D 에서 점 E 로 향한 반직선 DE 의 교점을 H 라고 하자. $AB=CD, AF=1, DE=2, AD=4\,EF$ 일 때, $\dfrac{100\,HF}{GE}$ 의 값을 구하여라.

20. 일정한 간격으로 가로로 m 개, 세로로 n 개의 줄이 그어져 있는 판 위의 mn 개의 교차점 위에 빠짐없이 검은 돌 혹은 흰 돌을 1개씩 놓기로 한다. 가로줄의 일부와 세로줄의 일부를 변으로 하는 임의의 직사각형의 네 개의 꼭짓점 위에 놓인 돌 중에 검은 돌도 있고 흰 돌도 있도록 돌을 놓는 방법의 수를 $P(m,n)$ 이라고 하자. 다음 값을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$P(2,7)+P(3,7)+P(4,7)$$

제23회 한국수학올림피아드 1차시험 정답

중 등 부		
문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	004	111
2	111	004
3	720	065
4	065	720
5	042	980
6	980	042
7	239	009
8	009	239
9	914	051
10	051	914
11	108	080
12	080	108
13	105	016
14	016	105
15	009	026
16	026	009
17	048	001
18	001	048
19	150	368
20	368	150

고 등 부		
문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	680	106
2	106	680
3	211	211
4	011	011
5	175	003
6	003	175
7	082	175
8	175	082
9	705	280
10	280	705
11	654	012
12	012	654
13	828	021
14	021	828
15	108	108
16	025	025
17	108	368
18	368	108
19	028	396
20	396	028

대 한 수 학 회

제 23 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

중등부

2009년 8월 23일 (오전)

1. 다음 조건을 모두 만족하는 소수 a, b, c에 대하여, 이 세 수의 곱 abc의 값을 구하여라.

(i) $b+8$은 a의 배수이고, b^2-1은 a와 c의 배수이다.

(ii) $b+c=a^2-1$.

2. 예각삼각형 ABC의 세 꼭지점 A, B, C를 각각 변 BC, CA, AB에 대하여 대칭이동한 점을 A', B', C'이라 하자. 두 직선 $B'C$와 BC'의 교점을 D, 두 직선 $A'C$와 AC'의 교점을 E, 두 직선 $A'B$와 AB'의 교점을 F라 할 때, 세 직선 AD, BE, CF가 한 점에서 만남을 보여라.

3. 0보다 크고 1보다 작은 임의의 양의 실수 x, y에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{1-x}+\frac{(1-x-y)^2}{1-y}\geq\frac{1}{2}$$

4. 학생 9명 중 4명씩으로 이루어진 n개의 동아리가 있다. 서로 다른 두 동아리에 공통으로 속하는 학생이 2명 이하이다. 이때, $n\leq 18$임을 보여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 23 회 한국수학올림피아드 - 2차시험

중등부

2009년 8월 23일 (오후)

5. 예각삼각형 ABC가 $AB < AC$를 만족한다. 이 삼각형의 외심을 O라 하고, 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원과 직선 DF의 두 교점 중 직선 AB를 기준으로 C와 같은 편에 있는 점을 P라 하고, 선분 AC를 지름으로 하는 원과 직선 DE의 두 교점 중 직선 AC를 기준으로 B와 같은 편에 있는 점을 Q라 하자. 두 직선 PQ와 BC의 교점 R를 지나고 직선 BC에 수직인 직선이 직선 AO와 만나는 점을 X라 할 때, $AX = XR$임을 보여라.

6. 양의 실수 a, b, c, d에 대하여 $abcd = 1$ 일 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$1 < \frac{b}{ab+b+1} + \frac{c}{bc+c+1} + \frac{d}{cd+d+1} + \frac{a}{da+a+1} < 2$$

7. 한국, 중국, 일본 각각 3명씩, 모두 9명의 학생들을 원형의 테이블에 일정한 간격으로 앉게 하려고 한다. 같은 나라의 학생끼리는 서로 이웃하지 않도록 하는 배열의 수를 구하여라. 단, 배열 A를 회전하여 배열 B가 된다면 이 두 배열은 같은 배열로 간주한다.

8. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수 x, y, z, u, v가 존재함을 보여라.

$$x^2 + y^3 + z^5 + u^7 = v^{11}$$

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 23회 한국수학올림피아드 1차시험(고등부)

유형 가

2009 년 5 월 23 일; 제한시간 4 시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4 번은 각 4 점, 문제 17～20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 원탁 둘레에 같은 간격으로 놓여있는 9 개의 동일한 의자에 5 명의 사람이 앉아서 생기는 서로 다른 배열의 가짓수를 n 이라 하자. n 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라. 단, 한 의자에 2명 이상 앉을 수 없고, 원탁의 중심을 기준으로 회전시켜 얻을 수 있는 배열들은 모두 같은 것으로 간주한다.

2. 모든 양의 실수 x 에 대하여 정의된 함수

$$f(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right| + \left|x - \frac{2}{x}\right| + \left|x - \frac{3}{x}\right| + \cdots + \left|x - \frac{20}{x}\right|$$

이 $x = \alpha$ 일 때 최솟값 β 를 갖는다. $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

3. 직사각형 $ABCD$ 에서 두 변 AB, AD 의 길이는 각각 $2, 10$ 이다. 이 직사각형의 내부에 CD 를 지름으로 갖는 반원이 있다. 점 A 에서 이 반원에 그은 접선이 반원과 점 E 에서 접하고 변 BC 와 점 F 에서 만난다. $\tan\angle EDF = \dfrac{q}{p}$ (p, q 는 서로 소인 양의 정수)일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

4. 검은 공 6개와 흰 공 4개가 들어있는 주머니에서 공을 한 번에 하나씩 꺼내기로 하되, 검은 공이 모두 나오면 공을 꺼내는 것을 멈춘다고 하자. (한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.) 꺼낸 공의 총 수가 8개일 확률을 $\frac{q}{p}$ (p, q 는 서로 소인 양의 정수) 라고 할 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

5. 서로 다른 양의 정수 m, n 에 대하여, 3^k 이 $|m-n|$ 의 약수가 되도록 하는 정수 k 중 가장 큰 것을 $d(m,n)$ 이라고 하자. $d(x^2, 7) \geq 7$ 을 만족하는 세 자리 양의 정수 x 를 구하여라.

6. 함수 $f(x)$ 가 0 과 1 을 제외한 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

을 만족한다. 이 때 방정식

$$2f(t) = t^2$$

을 만족하는 모든 실수 $t\,(t \neq 1)$의 값의 합을 구하여라.

7. 두 조건

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k^2+1)(b_k^2+1) = 4\sum_{k=1}^{5} a_k b_k, \quad 150 < \sum_{k=1}^{5}(a_k+5)(b_k+5) < 200$$

을 모두 만족하는 실수 $a_1, \ldots, a_5$ 와 $b_1, \ldots, b_5$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k+2)(b_k+2)$ 의 값이 될 수 있는 모든 실수의 합을 구하여라.

8. 다음 수를 넘지 않는 가장 큰 정수를 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{17} \sqrt[3]{10^3 + k^2}$$

9. 정30각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 네 점을 택하여 그 점들을 꼭짓점으로 하는 사각형을 만들고자 한다. 이런 사각형 중 내각의 크기가 모두 $120°$ 보다 작은 사각형의 개수를 구하여라.

10. 양의 정수 m, n, k 가 두 개의 방정식 $m^2 + n^2 = k^2$ 과 $m^2 + 82n^2 = 53^4$ 을 모두 만족할 때, n 의 값을 구하여라.

11. 다음 조건을 만족하는 일대일대응 $f : \{1, 2, \ldots, 11\} \to \{1, 2, \ldots, 11\}$ 의 개수를 구하여라.

$$n - 1 \le f(n) \le 2n, \quad n = 1, 2, \ldots, 11$$

12. 방정식 $x(x + 5) = y(y - 1)(y + 1)(y + 2)$ 를 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

13. 한 원 위에 시계반대방향으로 점 A_1, A_2, A_3, A_4 가 순서대로 놓여 있다. 삼각형 $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ 의 수심을 각각 H_1, H_2, H_3, H_4 라 하자. $H_1H_2 = 3$, $H_2H_3 = 4$, $H_3H_4 = 6$, $H_1H_4 = 7$ 일 때, $15(A_1A_3)^2$ 의 값을 구하여라.

14. 중심이 각각 O_1, O_2, O_3, O_4 인 네 개의 원이 있다. 원 O_1 은 원 O_2 와 점 K_1 에서 외접하고, 원 O_2 는 원 O_3 와 점 K_2 에서 외접하고, 원 O_3 는 원 O_4 와 점 K_3 에서 외접하고, 원 O_4 는 원 O_1 과 점 K_4 에서 외접한다. 또한 점 K_1, K_2, K_3, K_4 가 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\angle K_4O_1K_1 = 140^\circ, \quad \angle K_4O_4K_3 = 100^\circ, \quad K_1K_2 = K_2K_3, \quad K_4K_1 = 4K_3K_4$$

직선 K_1K_3 와 K_2K_4 의 교점을 A 라 할 때, $\dfrac{4\,AK_2}{AK_4}$ 의 값을 구하여라.

15. 양의 정수 m, k 와 홀수 n 이 방정식 $m + \dfrac{1}{m} = 6\left(\dfrac{n}{2^k} + \dfrac{2^k}{n}\right)$ 을 만족할 때, mn 의 값을 구하여라.

16. 어떤 프로축구리그에서 다음 조건을 모두 만족하는 경기 일정을 만들었다고 한다.

(a) 어떤 두 팀도 서로 두 번 이상 경기를 하지 않는다.

(b) 각 팀은 모두 12 개의 팀과 경기를 한다.

(c) 어떤 두 팀이 경기를 하는 경우에는, 이 두 팀 모두와 경기를 하는 팀은 모두 5 개이다.

(d) 어떤 두 팀이 경기를 하지 않는 경우에는, 이 두 팀 모두와 경기를 하는 팀은 모두 6 개이다.

이 리그에 속한 팀의 개수를 구하여라.

17. 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 의 길이가 각각 5, 6, 7 이다. 삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, CA, AB 와 각각 X, Y, Z 에서 접한다. 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 하고 직선 AI 와 직선 XY, XZ 의 교점을 각각 P, Q 라 할 때, $35(PQ)^2$ 의 값을 구하여라.

18. 일정한 간격으로 가로로 m 개, 세로로 n 개의 줄이 그어져 있는 판 위의 mn 개의 교차점 위에 빠짐없이 검은 돌 혹은 흰 돌을 1개씩 놓기로 한다. 가로줄의 일부와 세로줄의 일부를 변으로 하는 임의의 직사각형의 네 개의 꼭짓점 위에 놓인 돌 중에 검은 돌도 있고 흰 돌도 있도록 돌을 놓는 방법의 수를 $P(m,n)$ 이라고 하자. $\sum_{k=2}^{7} P(k,7)$ 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

19. 양의 정수 n 의 모든 양의 약수들의 조화평균이 3 이다. n 을 구하여라. 단, 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 의 조화평균은 $\left[\frac{1}{k}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)\right]^{-1}$ 으로 정의한다.

20. 다항함수 $P_k(x)$ $(k = 1,2,3)$ 에 대하여 방정식 $P_1(x) = 0$ 이 서로 다른 3 개의 실근, $P_2(x) = 0$ 이 서로 다른 4 개의 실근, $P_3(x) = 0$ 이 서로 다른 5 개의 실근을 갖는다. 방정식

$$P_1(x)P_2(y)P_3(z) = P_1(y)P_2(z)P_3(x) = P_1(z)P_2(x)P_3(y) = 0$$

을 만족하는 실수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 집합을 A 라 하자. A 가 유한집합일 때, 집합 A 의 원소의 개수를 구하여라.

제23회 한국수학올림피아드 1차시험 정답

중 등 부

문제 번호	문제유형	
	가형	나형
1	004	111
2	111	004
3	720	065
4	065	720
5	042	980
6	980	042
7	239	009
8	009	239
9	914	051
10	051	914
11	108	080
12	080	108
13	105	016
14	016	105
15	009	026
16	026	009
17	048	001
18	001	048
19	150	368
20	368	150

고 등 부

문제 번호	문제유형	
	가형	나형
1	680	106
2	106	680
3	211	211
4	011	011
5	175	003
6	003	175
7	082	175
8	175	082
9	705	280
10	280	705
11	654	012
12	012	654
13	828	021
14	021	828
15	108	108
16	025	025
17	108	368
18	368	108
19	028	396
20	396	028

대 한 수 학 회

제 23 회 한국수학올림피아드 - 2 차시험

고등부

2009년 8월 23일 (오전)

1. 삼각형 ABC의 내심을 I, 외심을 O라 하자. 세 삼각형 BIC, CIA, AIC의 외심을 각각 D, E, F라 하고, 세 선분 DI, EI, FI의 중점을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 PQR의 외심 M은 선분 IO의 중점임을 보여라.

2. 임의의 양의 실수 a, b, c에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a^3}{c(a^2+bc)} + \frac{b^3}{a(b^2+ca)} + \frac{c^3}{b(c^2+ab)} \geq \frac{3}{2}$$

3. 양의 정수 n에 대해서 방정식

$$z^n = 8x^{2009} + 23y^{2009}$$

의 정수해가 $x = y = z = 0$ 밖에 없을 때, 이러한 n의 최솟값을 구하여라.

4. 학생 $n(n \geq 3)$명이 있다. 이들 중 두 명이 서로 아는 경우가 모두 s가지($s \geq 1$), 세 명이 서로 다 아는 경우가 모두 t가지($t \geq 1$)라 하자. 두 학생 x, y에 대하여, 나머지 학생들 중 이 두 학생을 모두 아는 학생의 수를 $d(x, y)$라 할 때, 다음 부등식을 만족하는 서로 아는 세 명의 학생 u, v, w가 있음을 보여라.

$$d(u,v) + d(v,w) + d(w,u) \geq \frac{9t}{s}$$

단, 학생 A가 B를 알면 B도 A를 안다고 가정하자.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 23 회 한국수학올림피아드 - 2 차 시험

고등부

2009년 8월 23일 (오후)

5. 집합 $A = \{1, 2, \cdots, 12\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응함수 $f : A \to A$의 개수를 구하여라.
조건: 모든 $i \in A$ 에 대하여 $f(i) - i$ 는 3의 정수배가 아니다.

6. 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 P와 변 CA 위의 점 Q에 대하여, 세 삼각형 ABP, APQ, CPQ의 내심을 각각 I, J, K 라 할 때, 사각형 $PIJK$ 는 항상 볼록사각형임을 보여라. 단, P, Q는 삼각형 ABC의 꼭짓점이 아니다.

7. n이 2 이상의 양의 정수일 때, $2^n - 1$ 이 $3^n - 1$의 약수가 될 수 없음을 보여라.

8. 양의 정수 n에 대하여, 구간 $[0, n+1]$에서 함수

$$f_n(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x - i|\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} (x - i)^2$$

의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{11} (-1)^{n+1} a_n$ 의 값을 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제22회 한국수학올림피아드 최종시험

2009년 3월 28일 - 제1일

1. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$A = \frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b},$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}$$

이라 할 때, $AB \geq 9$ 임을 보여라.

2. 각 B가 둔각인 삼각형 ABC의 외접원 O에 대하여, 점 C에서 원 O에 접하는 접선과 직선 AB의 교점을 B_1, 삼각형 AB_1C의 외접원의 중심을 O_1이라 하자. 선분 BB_1의 내부의 점 B_2에서 원 O에 그은 두 접선의 접점 중에서 점 C에 가까운 점을 C_1, 삼각형 AB_2C_1의 외접원의 중심을 O_2라 하자. 두 직선 OO_2와 AO_1이 직교할 때, 다섯 개의 점 O, O_2, O_1, C_1, C가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 탁자 위에 흰 돌과 검은 돌이 일렬로 놓여 있다 (단, 흰 돌과 검은 돌은 각각 적어도 한 개 이상이다). 이때 다음의 행위를 "작업"이라 하자:

검은 돌을 하나 선택하여, 그 검은 돌의 양 옆에 있는 두 개의 돌(선택한 검은 돌이 양 끝에 있는 경우에는 한 개의 돌)을, 흰 돌은 검은 돌로 검은 돌은 흰 돌로 바꾼다.

이제 탁자 위에 2008개의 흰 돌과 한 개의 검은 돌이 일렬로 놓여 있을 때, 위의 "작업"을 유한 번 시행하여 2009개의 돌이 모두 검은 돌이 되도록 만들 수 있는 검은 돌의 처음 위치를 모두 구하여라.

∗ 문항당 7점 ; 제한시간 4시간 30분 ∗

제 22회 한국수학올림피아드 최종시험

2009년 3월 29일 - 제 2 일

4. 예각삼각형 ABC 에 대하여 $\angle B < \angle C$ 라 하자. 직선 AC 와 점 C 에서 접하고 점 B 를 지나는 원의 중심을 O, 원 O 가 선분 AB 와 만나는 점을 D 라 하자. 직선 CO 가 원 O 와 만나는 점을 P, 점 P 를 지나고 직선 AO 와 평행한 직선이 직선 AC 와 만나는 점을 E, 직선 EB 가 원 O 와 만나는 점을 L 이라 하자. 단, L 은 B 와 다른 점이라 가정하자. 선분 BD 의 수직이등분선과 직선 AC 의 교점을 F, 직선 LF 와 CD 의 교점을 K 라 할 때, 직선 EK 와 CL 이 서로 평행임을 보여라.

5. 가로줄 $m+1$ 개, 세로줄 m 개로 이루어진 총 $m(m+1)$ 개의 교차점이 있는 바둑판과 바둑알 하나가 주어져 있다. 두 사람이 교차점 위에 놓여 있는 바둑알을 교대로 한 칸씩 이동시키는 게임을 하는데, 바둑알은 현재 위치에서 위 아래나 좌우로 이웃한 점으로 한 칸씩 이동하여야 하며, 같은 점을 두 번 들르는 것은 허용되나, 이동하는데 한 번 이용하였던 선분은 다시 이용할 수 없다. 자기 차례에서 바둑알을 이동할 수 없으면 게임에서 지는 것으로 하자.

처음에 바둑알이 맨 아랫쪽 가로줄에 있는 교차점에 놓여 있는 경우, 먼저 하는 사람이 반드시 이길 수 있는 전략이 존재함을 보여라.

6. 방정식 $3^m - 7^n = 2$ 를 만족하는 양의 정수 쌍 (m, n) 을 모두 구하여라.

$*$ **문항당 7점; 제한시간 4시간 30분** $*$

제 24회 한국수학올림피아드 1차시험(중등부)

유형 가

2010 년 6 월 5 일; 제한시간 4 시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 지원분야, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1～4 번은 각 4 점, 문제 17～20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 두 다항식

$$P(x) = x^2 + a\ (a \neq 0), Q(x) = x^3 + bx + c$$

가 $P(Q(x)) = Q(P(x))$ 를 만족할 때 $Q(10)$의 값을 구하여라.

2. 원 O에 외접하는 볼록사각형 $ABCD$의 마주보는 두 변 AB와 CD가 평행하다. 원 O와 변 AB의 교점을 P, 원 O와 변 CD의 교점을 Q라고 하자. 선분 AP, BP, CQ의 길이가 각각 175, 147, 75 일 때, 선분 DQ의 길이를 구하여라.

3. 두 삼각형 ABC와 DEF에서

$$\angle A = 60°,\ AB = 36,\ AC = 40$$

이고,

$$\angle D = 60°,\ DE = 18$$

이다. $\angle ABC + \angle DEF = 180°$일 때, 선분 DF의 길이를 구하여라.

4. 8개의 수 $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5$ 중 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리 양의 정수의 개수를 구하여라.

5. 모든 실수 x에 대하여

$$(x^2 + (7-p)x + 2)(px^2 + 12x + 2p) \geq 0$$

을 만족시키는 정수 p의 개수를 구하여라.

6. 두 동점 P, Q가 $AB = 3m$, $BC = 4m$인 직사각형 $ABCD$의 둘레를 각각 분속 $2m$ 와 $3m$로 움직인다. 시각 $t = 0$분에 점 A에서 동시에 출발하여 $A \to B \to C \to D \to A \to \cdots$ 방향으로 60분 동안 움직일 때 두 동점 사이의 거리(선분 PQ의 길이)가 $5m$가 되는 모든 시각 t(분)의 합을 구하여라.

7. 양의 정수 n에 대하여 $\sqrt{n+100}$에 가장 가까운 정수를 a_n이라고 할 때

$$7\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{100}}\right)$$

의 값을 구하여라.

8. 양의 정수 n에 대하여 $f(n)$은 완전제곱이 아닌 양의 정수 중 n번째 수라 하자. 예를 들어,

$$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 5,\ f(4) = 6$$

이다. 이 때, $f(2010)$를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

9. 볼록사각형 $ABCD$에서

$$\angle DBC = \angle CDB = 45°,\ \angle BAC = \angle DAC$$

이고 $AB = 5$, $AD = 1$일 때, $(BC)^2$을 구하여라.

10. 다음 등식을 만족시키는 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라.

$$50x + 51y + 52z = 2010$$

11. 양의 정수 n에 대하여

$$a_n = \sqrt{\frac{n}{8}} + \sqrt{\frac{128}{n}}$$

이라고 하자. $a_1, \ldots, a_{127}$ 중에서 a_{63} 보다 큰 항의 개수를 구하여라.

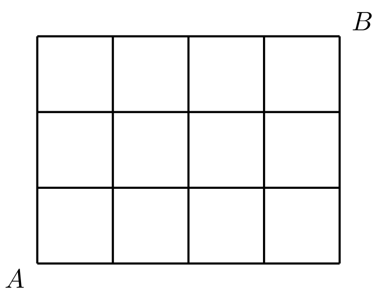
12. 반지름이 100인 원 T_1의 중심 O_1에서 반지름이 200인 원 T_2의 중심 O_2까지의 거리가 500이다. 또, 반지름이 150이고 점 P가 중심인 원 T가 각각 점 A와 B에서 원 T_1과 T_2에 외접한다. 점 A와 B에서의 원 T의 두 접선이 만나는 점이 C이고 점 C를 지나고 직선 O_1O_2에 수직인 직선이 l일 때, 점 P에서 직선 l까지의 거리를 구하여라.

13. 다음 등식을 만족시키는 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

$$\frac{3}{18620} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

14. 유리수 $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{46} + \frac{1}{47}$을 기약분수 $\frac{p}{q}$로 표현하자. 이때, 분자 p의 약수 중 가장 작은 소수를 구하여라.

15. 다음 그래프의 각 변의 길이는 모두 1이다. A에서 B까지의 가는 경로 중 길이가 9이면서 같은 변을 두 번 이상 지나지 않는 것의 개수를 구하여라.



16. 좌표평면에서 x-좌표, y-좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 하자. 다음 명제가 참이 되는 양의 정수 n 중 가장 작은 수를 구하여라.

"임의의 n개의 격자점 중에는 두 점이 존재하여 그 두 점을 잇는 선분의 삼등분점이 격자점이다."

17. 실수

$$A = \sqrt{\frac{5}{5^2+1}} + \sqrt{\frac{6}{6^2+1}} + \cdots + \sqrt{\frac{898}{898^2+1}}$$

보다 작은 양의 정수의 개수를 구하여라.

18. 집합 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 다음 조건 (a), (b), (c)를 모두 만족시키는 함수 $f : S \to S$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(a) n이 3의 배수이면 $f(n)$은 3의 배수가 아니다.

(b) n이 3의 배수가 아니면 $f(n)$은 3의 배수이다.

(c) $f(f(n)) = n$을 만족하는 n의 개수는 6개이다.

19. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 꼭지점 B에서 직선 AD와 CD에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, 꼭지점 D에서 직선 AB와 BC에 내린 수선의 발을 각각 H_3, H_4라 하자. 직선 H_1H_3과 H_2H_4가 서로 평행하고, 변 AB, BC, CD의 길이가 각각 50, 30, $30\sqrt{2}$일 때 변 AD의 길이를 구하여라.

20. 두 수 $n^2 + 3m$과 $m^2 + 3n$이 모두 완전제곱수가 되게 하는 양의 정수 m, n에 대하여 mn의 최댓값을 구하여라.

제24회 한국수학올림피아드 중등부 1차시험 정답

문제 번호	문제유형	
	가형	나형
1	970	063
2	063	209
3	180	970
4	209	180
5	007	012
6	112	058
7	058	055
8	055	007
9	013	112
10	012	080
11	080	030
12	030	013
13	120	010
14	007	091
15	091	120
16	010	007
17	055	040
18	240	055
19	040	176
20	176	240

대 한 수 학 회

제 24 회 한 국 수 학 올 림 피 아 드 - 2 차 시 험

중등부

2010년 8월 22일 (오전)

1. 모든 양의 정수 k에 대하여, $2^{2^k} + 2^{2^{k-1}} + 1$은 소수인 약수를 k개 이상 가짐을 보여라.

2. n^2개의 단위 정사각형으로 이루어진 $n \times n$ 바둑판이 있다. 단위 정사각형 각각에 0 또는 1을 써 넣는다. k번째$(1 \le k \le n)$ 가로줄에 있는 모든 숫자의 곱을 A_k라 할 때, $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$이 짝수가 되도록 써 넣는 방법의 수를 구하여라.

3. 예각삼각형 ABC의 변 AC 위의 점 D와 변 AB 위의 점 E가 $\angle ADE = \angle ABC$를 만족한다. $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 K라 하고, K에서 변 DE에 내린 수선의 발을 P, A에서 변 DE에 내린 수선의 발을 L, 선분 AL의 중점을 Q라 하자. 삼각형 ABC의 내심이 삼각형 ADE의 외접원 위에 있으면, P, Q와 삼각형 ADE의 내심이 일직선 위에 있음을 보여라.

4. 연속한 네 항 a, b, c, d의 다음 항은 $a + 2b + 3c + 4d$를 9로 나눈 나머지가 되도록 정수를 나열하자. 처음에 $2, 0, 1, 0$으로 시작할 때, $0, 1, 0, 2$가 연속한 네 항으로 나타날 수 없음을 보여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 24 회 한국수학올림피아드 - 2차시험

중등부

2010년 8월 22일 (오후)

5. 실수 x, y, z가 $\tan x + \tan y + \tan z = 2$ $(0 < x, y, z < \frac{\pi}{2})$를 만족할 때,

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z < 1$$

임을 보여라.

6. 양의 정수 n과 홀수인 소수 p에 대하여 $n^2 - n$이 p의 배수가 아니다.

$$a_1 = pn + 1, \qquad a_{k+1} = n \cdot a_k + 1 \ (k \geq 1)$$

이라 할 때, a_{p-1}이 소수가 아님을 보여라.

7. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에 대하여 직선 AB와 CD가 점 E에서 만난다. 점 B를 지나고 직선 AC와 직교하는 직선과 점 C를 지나고 직선 BD와 직교하는 직선의 교점을 P라 하고, 점 D를 지나고 직선 AC와 직교하는 직선과 점 A를 지나고 직선 BD와 직교하는 직선의 교점을 Q라 하자. 세 점 E, P, Q가 일직선 위에 있음을 보여라.

8. 좌표평면 상의 네 점 $(0,0)$, $(0,2)$, $(n,0)$, $(n,2)$를 꼭지점으로 하는 직사각형에서, 점 $(0,0)$을 출발하여 다음 조건을 모두 만족하면서 $(n,2)$에 도착하는 경로 중 길이가 최대인 것의 개수를 구하여라. 단, n은 양의 정수이다.

(a) 매 이동시 위, 아래, 좌, 우 중에서 한 방향으로 1씩 이동한다.

(b) 한 번 지난 점을 다시 지나지 않는다.

(c) 직사각형 밖으로 나가지 않는다.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

2010년 한국수학올림피아드 고등부 수행평가

유형 가

2010 년 6 월 12 일; 제한시간 4 시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1∼4 번은 각 4 점, 문제 17∼20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 정삼각형 ABC의 내부의 점 D에 대하여 $DB^2 + DC^2 + BC^2 = 100$ 이고 $\triangle DBC$의 넓이가 $5\sqrt{3}$일 때, 점 A에서 D까지의 거리의 제곱을 구하여라.

2. 심사위원 갑, 을, 병, 정이 각각 1, 2, 3, 4, 5점 중의 한 점수로 어떤 사원을 평가한다. 이때 평가점수의 합계가 13점이 되는 경우의 수를 구하여라.

3. 다음 값을 구하여라.

$$615^5 - 5\cdot 614^5 + 10\cdot 613^5 - 10\cdot 612^5 + 5\cdot 611^5 - 610^5$$

4. 모든 양의 정수 n에 대하여 a_n을

$$a_n = -\frac{2010}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \ (\text{단 } a_0 = 2009)$$

로 정의한다. 이때 $\sum_{n=1}^{2010} n2^n a_n$을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

5. 정수 a, b, c, d가 조건

$$a + bd + cd^2 + 3d^3 = 0, \quad |a|, |b|, |c| \le 400$$

을 만족할 때, $|d|$의 최댓값을 구하여라.

6. 방정식 $x^{11} + 11x + 1 = 0$이 10개의 허근 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10}$을 갖는다. 이때

$$S = \left|\sum_{j=1}^{10} \alpha_j^{10}\right|$$

과 가장 가까운 정수를 구하여라.

7. 정수 x에 대하여 다음 두 등식을 만족하는 정수 a, b, c, d가 존재한다.

$$a+b+c+d = 800, \quad (x-a)^2(x-b)(x-c)(x-d) = 420$$

이러한 정수 x 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차를 구하여라.

8. 삼각형 ABC에서 $AB = 2\sqrt{26}$, $AC = 2\sqrt{2}$, $BC = 8$이다. 세변 BC, CA, AB의 중점이 각각 X, Y, Z이고 세 삼각형 AZY, BXZ, CYX의 외심이 각각 P, Q, R이다. $\triangle XYZ$의 외접원의 중심이 O_1, $\triangle PQR$의 외접원의 중심이 O_2일 때, $(O_1O_2)^2$의 값을 구하여라.

9. 집합 $S = \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$의 부분집합 중, 원소가 3개이고 다음 조건을 만족하는 집합 A의 개수를 구하여라.

$$\sum_{\alpha\in A} \alpha^7 \equiv \sum_{\beta\in S-A} \beta^7 \pmod{31}$$

10. 함수 $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$는 다음 두 조건 (a)와 (b)를 모두 만족한다.

(a) 모든 양의 실수 x, y에 대하여

$$x \neq y \quad \text{이면} \quad f(x) \neq f(y).$$

(b) 모든 양의 실수 x에 대하여

$$f(x) \cdot f(f(x) + \frac{1}{x}) = 1.$$

이때, $(2f(1) - 1)^2$을 구하여라.

11. 모든 성분이 음이 아닌 정수인 4×4 행렬 중, 각 행의 성분의 합과 각 열의 성분의 합이 모두 2인 행렬의 개수를 구하여라.

12. 삼각형 ABC의 변 AB의 중점이 D이다. 변 BC의 삼등분점 2개를 모두 지나고 점 D에서 변 AB에 접하는 원이 변 CA와 두 점 P, Q에서 만난다. $\triangle PDQ$의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 $\frac{1}{4}$이고 $CA = 8\sqrt{3}$일 때, AB의 길이를 구하여라.

13. 서로소인 양의 정수 p, q가 다음 등식을 만족시킬 때 $p + q$의 값을 구하여라.

$$\frac{p}{q} = \cos^{10}\frac{\pi}{5} + \cos^{10}\frac{2\pi}{5} + \cos^{10}\frac{3\pi}{5} + \cos^{10}\frac{4\pi}{5}$$

14. 1부터 10까지의 양의 정수의 집합을 A라 하고, 일대일대응 $f : A \to A$에 대하여

$$M_f = \sum_{k=1}^{10} |f(k) - k|$$

으로 정의하자. M_f가 가질 수 있는 최댓값을 M이라 할 때, $M_f = M$이 되는 일대일대응 f의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

15. 반지름이 20인 원 T_1과 반지름이 40인 원 T_2의 두 공통외접선이 점 A에서 만나고, 두 원의 공통내접선이 T_1과 점 P에서 만나고, T_2와 점 Q에서 만난다. 선분 AQ의 길이가 100일 때, 선분 PQ의 길이를 구하여라.

16. 세 자리 소수 p에 대하여 x, y에 관한 방정식 $x^3 + y^3 = p^2$이 정수해를 가진다. 소수 p를 구하여라.

17. 방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$의 세 실근 a, b, c $(a < b < c)$에 대하여 $20(a^2 + b^2 - a - c)$를 구하여라

18. 볼록사각형 $ABCD$에 대하여 $\triangle ABC$의 외심이 O이고, 직선 AO가 $\triangle ABC$의 외접원과 만나는 점이 E이다. $\angle D = 90°$, $\angle BAE = \angle CDE$, $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = CE = 5$일 때, $\sqrt{10}DE$의 값을 구하여라.

19. 5명의 야구선수가 자신의 글러브와 배트를 각각 하나씩 상자에 넣은 후, 글러브와 배트를 하나씩 꺼낸다. 다음 두 조건을 모두 만족하도록 꺼내는 경우의 수를 구하여라.

(a) 누구도 자신의 물건은 하나도 꺼내지 않는다.

(b) 각 선수가 꺼낸 글러브와 배트의 주인은 서로 다르다.

20. 3의 배수가 아닌 양의 홀수 n에 대하여, n개의 수

$$1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 2 \cdot 3 \cdot 4, \quad 3 \cdot 4 \cdot 5, \quad \ldots, \quad n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

중에서 n과 서로소인 수가 140개이다. 이러한 n 중에서 가장 큰 수를 구하여라.

2010년 한국수학올림피아드 고등부 수행평가 정답

문제 번호	문제유형	
	가형	나형
1	020	080
2	080	120
3	120	180
4	180	020
5	134	110
6	110	106
7	106	073
8	073	134
9	130	282
10	005	012
11	282	005
12	012	130
13	635	181
14	400	030
15	030	635
16	181	400
17	080	425
18	025	080
19	552	025
20	425	552

대 한 수 학 회

제 24 회 한국수학올림피아드 - 2 차시험

고등부

2010년 8월 22일 (오전)

1. 양의 정수 $7^{2^{20}} + 7^{2^{19}} + 1$은 소수인 약수를 21개 이상 가짐을 보여라.

2. 양의 실수 a, b, c가 $ab + bc + ca = 1$을 만족할 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{c^2 + a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{33}$$

3. 삼각형 ABC의 내접원 I가 변 BC, CA, AB와 각각 P, Q, R에서 접한다고 하자. 두 점 B, C를 지나는 원이 원 I와 점 X에서 접하고, C, A를 지나는 원이 원 I와 점 Y에서 접하고, A, B를 지나는 원이 원 I와 점 Z에서 접할 때, 세 직선 PX, QY, RZ가 한 점에서 만남을 보여라.

4. 총 n명($n \geq 4$)의 외교관들이 모여 있다. 임의의 네 외교관 A, B, C, D에 대하여, A와 B가 악수를 했고 B와 C가 악수를 했으며 C와 D가 악수를 했다면, 세 쌍 A와 C, A와 D, B와 D 중에 악수를 했던 쌍이 반드시 존재한다. 이때, 다음을 증명하여라.

(a) 전체 외교관을 다음 성질을 만족하도록 공집합이 아닌 두 집합 X, Y로 나눌 수 있다: X에 속한 모든 외교관이 Y에 속한 어떤 외교관과도 악수를 하지 않았거나, X에 속한 모든 외교관이 Y에 속한 모든 외교관과 악수를 하였다.

(b) 어떤 두 외교관 A, B가 있어서 A, B 이외의 외교관 중에 A와 악수한 사람들의 모임과 B와 악수한 사람들의 모임이 같다.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 24 회 한 국 수 학 올 림 피 아 드 - 2 차 시 험

고등부

2010년 8월 22일 (오후)

5. 양의 실수 x, y, z가 $x+y+z=1$을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{y}{1-y}}+\sqrt{\frac{z}{1-z}}>2$$

6. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에 대하여 직선 AB와 CD가 점 E에서 만난다. 점 B를 지나고 직선 AC와 직교하는 직선과 점 C를 지나고 직선 BD와 직교하는 직선의 교점을 P라 하고, 점 D를 지나고 직선 AC와 직교하는 직선과 점 A를 지나고 직선 BD와 직교하는 직선의 교점을 Q라 하자. 세 점 E, P, Q가 한 직선 위에 있음을 보여라.

7. 정보기관에서 테러리스트 용의자 $2,000$명 사이에 휴대전화 통화가 있었는지 여부를 조사하였다. 그런데 서로 겹치지 않는 3명씩의 두 모임 A, B를 뽑아보면 A와 B 사이에는 반드시 통화하지 않았던 쌍이 있었다. 이때, 통화한 적이 있는 쌍의 개수는 $201,000$보다 작음을 보여라.

8. 원탁에 2010명의 사람이 둥글게 앉아 있다. 어떤 사람에게 과자를 주고, 그 사람으로부터 시계방향으로 1번째, $1+2$번째, $1+2+3$번째, $\ldots$, $1+2+\cdots+2009$번째 사람에게 과자를 주었다. 이때, 과자를 하나 이상 받은 사람의 수를 구하여라.

제한 시간 2시간 30분

문항당 7점

제 23회 한국수학올림피아드 최종시험

2010년 3월 27일 - 제 1 일

1. 임의의 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 P, Q, R이라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 T, 둘레의 길이를 L이라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3 + \left(\frac{BC}{QR}\right)^3 + \left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L^2}{T}$$

2. 예각삼각형 ABC의 내심을 I, 외심을 O, 수심을 H라 하고, 내접원이 변 BC에 접하는 점을 D라 하자. 이때, $\angle B < \angle C$이고, 두 선분 AO와 HD는 평행하다고 한다. 직선 OD와 직선 AH의 교점을 E라 하고 선분 CI의 중점을 F라 할 때, 네 점 E, F, I, O는 한 원 위에 있음을 보여라.

3. i번 웹페이지에서 j번 웹페이지로 가는 링크가 있다면 이 링크를 사용하여 i번 웹페이지에서 j번 웹페이지로 바로 이동할 수 있다. 1번부터 n번까지 번호가 붙은 $n \geq 2$개의 웹페이지에, 모든 $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$에 대해 i번 웹페이지에서 $i+1$번 웹페이지로 가는 링크가 주어져 있다.

이때, 적절하게 $3(n-1)\log_2(\log_2 n)$ 이하의 개수만큼 링크를 추가하면, 임의의 두 정수 $1 \leq i < j \leq n$에 대하여, i번 웹페이지에서 시작해서 항상 숫자가 커지는 방향으로 링크 3개 이하를 사용하여 j번 웹페이지에 도달할 수 있도록 할 수 있음을 보여라.

$*$ 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점 $*$

제 23회 한국수학올림피아드 최종시험

2010년 3월 28일 - 제 2 일

4. 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴 $ABCD$의 네 꼭지점 A, B, C, D가 시계방향으로 놓여져 있다. 점 A를 중심으로 하고 B를 지나는 원을 Γ_1, 점 C를 중심으로 하고 D를 지나는 원을 Γ_2라 하자. 직선 BD가 Γ_1과 (B, D와 다른 점) P에서 만난다. 선분 PD를 지름으로 하는 원을 Γ라 하고, Γ와 Γ_1이 (P와 다른 점) X에서 만난다. Γ와 Γ_2의 (D와 다른) 교점을 Y라 하자. 삼각형 XBY의 외접원과 Γ_2의 교점을 Q라 할 때, B, D, Q는 일직선 위에 있음을 보여라.

5. 원형의 테이블에 $2n$명의 사람들이 일정한 간격으로 둘러 앉아 있다. 이 사람들에게 총 m개의 과자가 주어져 있고, 이 사람들은 다음과 같은 규칙으로 과자를 옆으로 전달한다.

- 오직 이웃한 사람에게만 과자를 전달할 수 있다.
- 본인이 과자 하나를 먹어야만 이웃한 사람 중 한 명에게 과자 하나를 전달할 수 있다.

테이블에 앉아 있는 사람들 중 특정한 한 사람을 A라 하자. 처음에 과자가 어떻게 분포하는지에 무관하게, A가 과자 하나 이상을 갖도록 과자를 전달할 수 있는 전략이 존재할 최소의 m 값을 구하여라.

6. 임의로 주어진 소수 p가 있다. 다음 조건들을 모두 만족하는 양의 정수열 $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$가, $k = 1$일 때에는 존재하지 않지만, 2 이상의 어떤 양의 정수 k 하나에 대해서라도 존재하면, 소수 p를 *참한* 소수라고 부르자:

조건 1. 모든 $i = 1, 2, \cdots, k$에 대하여 $n_i \geq \frac{p+1}{2}$.

조건 2. 모든 $i = 1, 2, \cdots, k$에 대하여 $p^{n_i} - 1$은 n_{i+1}의 배수이고, $\frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}}$과 n_{i+1}은 서로소이다. 단, $n_{k+1} = n_1$이다.

2는 참한 소수가 아니지만 그 외의 모든 소수는 참한 소수임을 보여라.

$*$ 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 $*$

제25회 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2011년 5월 14일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 삼각형 ABC에 대하여 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$라 하자. $a=c$이고 $a^2=b^2+ba$일 때 $\angle B=x^\circ$이다. x의 값을 구하여라.

2. 빨간색 카드가 7장, 파란색 카드가 10장, 노란색 카드가 15장 있다. 빨간색 카드에는 $1,2,\ldots,7$, 파란색 카드에는 $1,2,\ldots,10$, 노란색 카드에는 $1,2,\ldots,15$ 중 하나의 숫자가 적혀 있고, 같은 색 카드에 적혀 있는 숫자는 서로 다르다. 빨간색, 파란색, 노란색의 카드를 각각 한 장씩 고를 때 세 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 11의 배수가 되도록 하는 방법의 수를 구하여라.

3. $\angle A=60^\circ$, $\angle B=30^\circ$이고 $AB=8$인 삼각형 ABC의 내부의 점 P에서 세 변 BC,CA,AB에 내린 수선의 발을 각각 D,E,F라 하자. $PD^2+PE^2+PF^2$의 최솟값을 구하여라.

4. 양의 정수 $n=2^{30}3^{15}$에 대하여, n^2의 양의 약수 중 n보다 작고 n의 약수가 아닌 것의 개수를 구하여라.

5. 삼각형 ABC에서 $BC:CA:AB=3:5:4$이다. AB 위의 점 E와 AC 위의 점 F가 $AE:AF=3:2$를 만족시킨다. BC의 중점을 M이라 하고 AM과 EF의 교점을 Q라 할 때

$$120\times\frac{QE}{QF}$$

의 값을 구하여라.

6. 다음 조건을 모두 만족하는 정수들로 이루어진 순서쌍 $(a_1,a_2,\ldots,a_9)$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(1) $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_9\le 9$

(2) $a_5=5$

(3) $a_9-a_1\le 7$

7. 남학생 $a_1,a_2,\ldots,a_{10}$과 여학생 $b_1,b_2,\ldots,b_{10}$이 있다. 각 학생들에게 다음 조건을 모두 만족하도록 서로 다른 양의 정수를 하나씩 번호로 부여한다.

(1) $i\ne j$이면 a_i와 b_j의 번호는 3 이상 차이나게 한다.

(2) 같은 성별의 두 학생의 번호는 2 이상 차이나게 한다.

(3) b_{10}에게 가장 큰 번호를 부여한다.

이때, b_{10}에게 번호로 부여할 수 있는 수의 최솟값을 구하여라.

8. 양의 정수의 순서쌍 (n,k) $(n,k\le 100)$에 대하여, 집합 $\{n,n+1,n+2,\ldots,n+k\}$에 속하는 수들의 합으로 나타낼 수 있는 정수 전체의 집합을 $X(n,k)$라 하자. 예를 들어, $n=9,k=2$인 경우

$$19=9+10,\ 28=9+9+10,\ 44=11+11+11+11$$

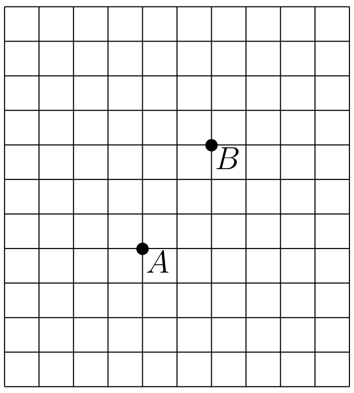
이므로 19, 28, 44는 모두 $X(9,2)$에 속한다. $2n$ 이상의 정수 중 $X(n,k)$에 속하지 않는 것이 1개가 되게 하는 순서쌍 (n,k)의 개수를 구하여라.

(뒷면에 계속)

9. 2^{10} 보다 작은 양의 정수 n 중 $n^{32}-1$ 이 2^{10} 의 배수가 되게 하는 것의 개수를 구하여라.

10. 사각형 $ABCD$ 가 지름이 BC 인 원에 내접한다. $AB = 15\sqrt{2}$, $CD = 5$ 이고 $\angle B + \angle C = 135^\circ$ 일 때, $(AD)^2$ 의 값을 구하여라.

11. 주어진 그림에서 각 변의 길이는 1 이다. 변을 따라 점 A 에서 시작하여 점 B 에서 끝나는 경로 중 길이가 11 인 것의 개수를 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라. 단 격자점에서만 방향을 바꿀 수 있으며, 각 변이나 각 격자점 (A, B 포함) 을 두 번 이상 지나는 것도 가능하다.



12. 양의 정수 m, n $(m > n)$ 에 대하여

$$\frac{m^2 - n^2}{2n}$$

이 1000 보다 작은 소수가 될 때, $m-n$ 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

13. 삼각형 ABC 의 외심을 O, 내심을 I 이라 하고 $\angle A$ 의 이등분선이 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 D $(\neq A)$, BC 와 만나는 점을 E 라 하자. AE 의 수직이등분선과 OA 의 교점을 K 라 할 때, $OK = 3$ 이고 $DE \times IE = 90$ 이다. 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 구하여라.

14. 세 자리 이하의 양의 정수 중 어느 자리에도 1 이 나타나지 않는 것들의 평균값을 기약분수 $\frac{n}{m}$ 으로 표현했을 때 $m+n$ 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

15. 28 이하의 서로 다른 양의 정수 7개로 이루어진 집합 $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_7\}$ 에 대하여 A 의 원소 중 n 보다 작거나 같은 것의 개수를 a_n 이라 하자. 등식

$$\frac{a_1}{1\cdot 2} + \frac{a_2}{2\cdot 3} + \frac{a_3}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{a_{27}}{27\cdot 28} + \frac{a_{28}}{28\cdot 29} = \frac{175}{116}$$

이 성립할 때, $\frac{28}{x_1} + \frac{28}{x_2} + \cdots + \frac{28}{x_7}$ 의 값을 구하여라.

16. 양수 a, b 가 $ab(a+b+1) = 25$ 를 만족할 때

$$(a+b)(b+1)$$

의 최솟값을 구하여라.

17. 다음 식의 값보다 작은 정수 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{2011}{21^2} + \frac{2011}{23^2} + \frac{2011}{25^2} + \cdots + \frac{2011}{79^2}$$

18. 중심이 O 이고 지름이 BC 인 원 위의 점 A $(\neq B, C)$ 가 $AB < AC$ 를 만족한다. 점 A 에서 원에 접하는 직선을 ℓ 이라 하고, 점 C 에서 직선 ℓ 에 내린 수선의 발을 D, CD 와 원의 교점을 E $(\neq C)$, 점 E 를 지나고 BD 에 평행인 직선이 OA 와 만나는 점을 F, BF 와 원의 교점을 J $(\neq B)$, CJ 와 AD 의 교점을 K 라 하자. $DK = 4$, $CE = 10$ 일 때, $(BC)^2$ 의 값을 구하여라.

19. 양의 정수 a, m, n $(101 \leq a \leq 199)$ 은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(1) $m+n$ 은 a 의 배수

(2) $mn = a(a+1)$

이 때, $m+n$ 의 값을 구하여라.

20. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 a, b, c, n 으로 이루어진 순서쌍 (a, b, c, n) 의 개수를 구하여라.

(1) $n^a + 2n^b = n^c$

(2) $a + b + c \leq 500$

(끝)

제25회 한국수학올림피아드 중등부 1차시험 정답

문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	036	006
2	097	450
3	006	036
4	450	097
5	225	225
6	675	029
7	029	675
8	049	049
9	064	998
10	625	230
11	230	625
12	998	064
13	015	049
14	083	010
15	049	015
16	010	083
17	037	507
18	356	331
19	507	037
20	331	356

대 한 수 학 회

중등부

제 25 회 2 차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2011 년 8 월 21 일 (오전); 제한시간 2 시간 30 분; 문항당 7 점

1. 실수 a, b, c(단 $a, b, c \neq 1$)가 다음 두 조건을 모두 만족한다고 하자.

(1) $abc = 1$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 8(a+b+c) - 8(ab+bc+ca)$

이때 $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1}$ 의 값으로 가능한 수를 모두 구하여라.

2. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$가 있다. 점 A에서의 원 O의 접선과 직선 BC의 교점을 S, 점 B에서의 원 O의 접선과 직선 CD의 교점을 T라 하자. 중심이 S이고 점 A를 지나는 원이 변 BC와 만나는 점을 E, AE의 연장선이 원 O와 만나는 점을 $F(\neq A)$라 하자. 중심이 T이고 점 B를 지나는 원이 변 CD와 만나는 점을 K, BK와 AC의 교점을 P라 할 때, 점 P, F, D가 일직선 위에 있을 필요충분조건은 $AB = AP$임을 보여라.

3. 서로소인 두 양의 정수 x, y에 대하여, $x + 3y^2$ 이 완전제곱수이면 $x^2 + 9y^4$ 이 완전제곱수가 아님을 보여라.

4. 양의 정수 $n(\geq 2)$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 좌표평면 위의 $2n+1$개의 점 $P_0, P_1, \ldots, P_{2n}$ 으로 이루어진 집합의 개수를 구하여라.

(1) $P_0 = (0,0)$, $P_{2n} = (n,n)$.

(2) 모든 $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$에 대하여 선분 P_iP_{i+1}은 x축이나 y축에 평행하며 길이가 1이다.

(3) 선분 $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{2n-1}P_{2n}$ 중에서 $y \leq x$인 영역에 포함되는 것은 정확히 4개이다.

중등부

제 25 회 2 차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2011년 8월 21일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

5. 삼각형 $ABC(AB \neq AC)$의 수심을 H, 외심을 O, 변 BC의 중점을 M이라 하자. 직선 HM과 직선 AO가 만나는 점을 D라 하고, AB, CD, AC, BD의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 직선 PQ와 직선 RS의 교점을 X라 할 때 $\dfrac{AH}{OX}$를 구하여라.

6. 양의 정수 n에 대하여 집합 S_n을

$$S_n = \{(a,b) | a\text{와 } b\text{는 양의 정수이고 } a\text{와 } b\text{의 최소공배수는 } n\text{이다}\}$$

라 하고, S_n의 각 원소 (a,b)에 대하여 $\phi(a)\phi(b)$의 값을 구한 후 이 값을 모두 합한 것을 $f(n)$이라 하자. (단, $\phi(n)$은 n과 서로소이며 n보다 작거나 같은 양의 정수의 개수이다.)

n과 서로소인 소수 p가 $f(n)$의 약수이면, n의 소인수 q 중에는 q^2-1이 p의 배수가 되게 하는 것이 존재함을 보여라.

7. 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$이 각각 $0 \le x_i \le 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 2011)$을 만족할 때,

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2011}^3 - (x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{2011}x_1x_2)$$

의 최댓값을 구하여라.

8. 서로 다른 nr개의 양의 정수를 학생 n명에게 각각 r개씩 나누어 주었다. 이 때 다음 조건을 만족시키도록 학생들을 $4r$개 이하의 반으로 편성할 수 있음을 증명하여라. (단 n, r은 양의 정수)

> 임의의 학생 A가 양의 정수 m을 가지고 있으면, A가 아닌 학생 중 $(m-1)!$ 보다 크고 $(m+1)!+1$ 보다 작은 양의 정수를 가진 학생은 A와 같은 반이 될 수 없다.

제 25 회 한국수학올림피아드
수행평가
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2011 년 6 월 25 일 ; 제한시간 4 시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다음 등식을 만족시키는 복소수 순서쌍 (z, w) 는 모두 몇 개인가?

$$z^2 + w^2 = z^4 + w^4 = z^8 + w^8$$

2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

모든 일대일함수

$$f : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 8\}$$

에 대해, f 를 n 번 합성한 함수는 항등함수이다.

3. 다음 조건 (i), (ii) 를 모두 만족하는 정수 k 전체의 집합을 A 라 하자.

(i) $1 \le k < 449$

(ii) $k^{224} + 448$ 은 449 의 배수

A 의 모든 원소의 합을 1000 으로 나눈 나머지는 얼마인가?

4. 출제취소

5. 회원이 25 명인 바둑 동호회에서 각 회원이 정확히 k 명과 일대일로 대국하도록 대진표를 만들고자 한다. 이러한 대진표를 만들 수 있는 양의 정수 k 를 모두 더하면 얼마인가?

6. 양의 정수 전체의 집합 $\mathbb{N}$ 에서 정의된 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 가 다음 조건 (i), (ii) 를 모두 만족한다.

(i) $f(11) = 2$

(ii) m, n 이 서로 소이면 $f(mn) = f(m) + d(m)f(n)$
(단, $d(m)$ 은 m 의 양의 약수의 개수)

이때 $f(900)$ 은 얼마인가?

7. 상수 c_k $(k = 0, 1, \ldots, 24)$ 가 모든 x $(x \neq 0)$ 에 대하여

$$\left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{24} c_k x^{k-12}$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{k=0}^{24} (-1)^k c_k^2$ 의 값을 구하여라.

8. 사각형 $ABCD$ 의 한 꼭짓점 D 를 지나고 BC 에 평행한 직선이 변 AB 와 점 E 에서 만난다. $AE = 10$, $BE = 20$, $CD = CE = 5\sqrt{2}$, $\angle BAD = 2\angle CED$ 일 때, BD 의 값을 구하여라.

9. 각 자리수가 1 또는 2 로 이루어진 7 자리 양의 정수 전체의 집합을 A 라 하자. 다음 조건을 만족하는 A 의 부분집합 S 중 원소가 가장 많은 것은 몇 개의 원소를 가지고 있는가?

임의의 서로 다른 두 원소 $m \in S, n \in S$ 에 대하여 $m + n$ 의 7 개의 자리수 중 숫자 3 이 세 개 이상이다.

(뒷면에 계속)

10. 양수 a, b, c, d 에 대한 식

$$\frac{ab + 4bc + cd}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

의 최댓값을 M 이라 할 때, $64(M-1)^6$ 의 값은 얼마인가?

11. 각 B 가 둔각이고 $AC = 9$ 인 삼각형 ABC 의 중심을 G 라 하자. 꼭지점 A 에서 직선 BC 에 내린 수선의 발을 D, 선분 AD 의 중점을 E, 직선 AG 가 삼각형 ABC 의 외접원과 만나는 점을 F $(F \neq A)$ 라 할 때, EG 와 DF 가 평행하다. 선분 AD 와 삼각형 ABC 의 외접원의 교점 P $(P \neq A)$ 에 대하여 $BP = 2$ 라 하자. 삼각형 ABC 의 외접원의 지름의 길이를 d 라 할 때, d^2 의 값을 구하여라.

12. 다음 조건 (i), (ii), (iii) 을 동시에 만족하는 양의 정수 k 가 모두 332 개 있다.

(i) $k \leq p - 2$

(ii) $m^2 - k$ 가 p 의 배수가 되는 정수 m 이 존재한다.

(iii) $n^2 - k - 1$ 이 p 의 배수가 되는 정수 n 은 존재하지 않는다.

이때 p 를 1000 으로 나눈 나머지는 얼마인가?

13. 각 C 가 $60°$ 이고 $AC = 48$, $BC = 30$ 인 삼각형 ABC 의 내심을 I, 외심을 O 라 하자. 직선 IO 와 변 AC 의 교점을 D 라 할 때, DI^2 의 값을 구하여라.

14. 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ 의 최대공약수를 $G(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ 이라 하자. 다음 조건 (i), (ii) 를 모두 만족하는 정수 a_1, $a_2, \ldots, a_{20}$ 에 대하여 $G(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ 의 최댓값을 구하여라.

(i) $1000 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}$

(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 105840$

15. 집합 X, Y 에 대해 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ 라 하자. $\{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합이면서 다음 조건을 만족하는 집합 A 중 공집합이 아닌 것은 모두 몇 개인가?

$(a_1, b_1) \in A$, $(a_2, b_2) \in A$ 이면
$|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| \neq 1$

16. 정수 n 에 대하여 $a_n = (6n+1)\dfrac{\pi}{18}$ 라 하자. 이때

$$\left(\sum_{n=1}^{60} n \cos a_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{60} n \sin a_n\right)^2$$

의 값을 1000 으로 나눈 나머지는 얼마인가?

17. 양의 정수 전체의 집합 $\mathbb{N}$ 에서 정의된 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 가 다음 조건 (i), (ii), (iii) 을 모두 만족한다.

(i) $f(1) \neq 2$

(ii) $m \leq n$ 이면 $f(m) \leq f(n)$

(iii) 모든 양의 정수 n 에 대하여 $f(f(n)) = 5n$

이때 $f(2011)$ 을 1000 으로 나눈 나머지는 얼마인가?

18. 일대일대응 $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 중

$$f(1) \neq 1,$$
$$f(f(1)) \neq 1,$$
$$f(f(f(1))) \neq 1,$$
$$f(f(f(f(1)))) \neq 1$$

을 모두 만족하는 일대일대응 f 전체의 집합을 A 라 하자. 이때 A 의 원소로 이루어진 순서쌍 (g, h) 중 $g \circ h$ 가 A 에 속하는 것은 모두 몇 개인가? (단, $g \circ h$ 는 g 와 h 의 합성함수를 뜻한다.)

19. 양의 정수 x, y, z 가 등식

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 6$$

을 만족하고 x 와 z 는 서로 소일 때, $x + y + z$ 의 최댓값을 구하여라.

20. 출제취소

(끝)

2011년 한국수학올림피아드 고등부 수행평가 정답

문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	017	840
2	840	017
3	288	전원정답
4	전원정답	288
5	156	052
6	052	156
7	924	030
8	030	924
9	016	125
10	125	016
11	085	327
12	327	085
13	189	420
14	420	189
15	576	600
16	600	576
17	805	192
18	192	805
19	025	전원정답
20	전원정답	025

대 한 수 학 회

고등부

제 25 회 2차 시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2011 년 8 월 21 일 (오전); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

1. 반지름의 길이가 같은 두 원 O, O' 이 서로 다른 두 점 A, B 에서만 만난다고 하자. 원 O 위의 점 $P(\neq A, B)$, 원 O' 위의 점 $Q(\neq A, B)$ 에 대하여 $R(\neq B)$ 을 $PAQR$ 이 평행사변형이 되도록 택하자. 네 점 B, R, P, Q 가 한 원 위에 있으면 $PQ = OO'$ 임을 보여라.

2. 서로소인 두 양의 정수 x, y 에 대하여, $x + 3y^2$ 이 완전제곱수이면 $x^2 + 9y^4$ 이 완전제곱수가 아님을 보여라.

3. 실수 a, b, c, d 가 두 조건 $a+b+c+d = 19$ 와 $a^2+b^2+c^2+d^2 = 91$ 을 만족할 때,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

의 최댓값을 구하여라.

4. 양의 정수 k 와 n 에 대해, 원 위에 kn 개의 서로 다른 점 $P_1, P_2, \ldots, P_{kn}$ 이 시계방향으로 배열되어 있다. 각 점에 k 개의 색 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 중 하나를 칠할 때, 다음 조건을 모두 만족시키도록 칠하는 방법의 수를 구하여라.

(1) 각각의 색으로 칠할 점의 개수는 n 이다.

(2) 임의의 $i \neq j$ 에 대하여, 점 P_a 와 P_b 에 c_i 를 칠하고 점 P_c 와 P_d 에 c_j 를 칠한다면 선분 P_aP_b 와 P_cP_d 는 서로 만나지 않는다.

고등부

제 25 회 2차 시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2011년 8월 21일 (오후); 제한시간 2시간 30분; 문항당 7점

5. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중에서 3^8 보다 작은 것의 개수를 구하여라.

> 양의 정수 $k(1 \le k \le \frac{n}{3})$ 중에서 $\dfrac{n!}{(n-3k)!\,k!\,3^{k+1}}$ 이 정수가 되지 않도록 하는 k의 개수가 216 이다.

6. 삼각형 ABC의 내접원이 세 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 ABC의 내접원 위에 있고 삼각형 AEF의 내부에 있는 점 P에 대하여, 선분 PB와 선분 DF의 교점을 X, 선분 PC와 선분DE의 교점을 Y라 하고 선분 EX와 선분 FY의 교점을 Q라 할 때, 두 점 A와 Q는 동시에 직선 DP위에 있거나 직선 DP를 중심으로 서로 반대편에 있음을 보여라.

7. 서로 다른 nr개의 양의 정수를 학생 n명에게 각각 r개씩 나누어 주었다. 이 때 다음 조건을 만족시키도록 학생들을 $4r$개 이하의 반으로 편성할 수 있음을 증명하여라. (단 n, r은 양의 정수)

> 임의의 학생 A가 양의 정수 m을 가지고 있으면, A가 아닌 학생 중 $(m-1)!$ 보다 크고 $(m+1)!+1$ 보다 작은 양의 정수를 가진 학생은 A와 같은 반이 될 수 없다.

8. 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$이 각각 $0 \le x_i \le i$ $(i = 1, 2, \ldots, 25)$을 만족할 때,

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{25}^3 - (x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{25}x_1x_2)$$

의 최댓값을 구하여라.

제 24회 한국수학올림피아드 최종시험

2011년 3월 26일 - 제 1 일

1. 방정식
$$x^2y^4 - x^4y^2 + 4x^2y^2z^2 + x^2z^4 - y^2z^4 = 0$$
을 만족하는 양의 정수 x, y, z는 존재하지 않음을 보여라.

2. 예각삼각형 ABC의 변 BC 위에 점 $P\,(\neq B, C)$가 있다. 삼각형 ABC의 수심 H에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 D라 하고, 삼각형 ABD와 ACD의 외접원을 각각 Γ_1, Γ_2라 하자. 점 D를 지나고 변 BC에 평행한 직선이 Γ_1, Γ_2와 만나는 점 중 D가 아닌 점을 각각 X, Y라 하고, AB, AC와 만나는 점을 각각 E, F라 하자. 두 직선 XB와 YC의 교점을 Z라 할 때, $BP = CP$일 필요충분조건은 $ZE = ZF$임을 보여라.

3. 남학생 $a_1, a_2, \ldots, a_n$과 여학생 $b_1, b_2, \ldots, b_n$이 있다. 남학생끼리는 악수를 하지 않았고, 여학생끼리도 악수를 하지 않았으며, 모든 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$에 대하여, a_i와 b_i는 악수를 하지 않았다. 이 학생 전체를 다음 조건을 만족하는 소그룹들로 나누고자 한다.

1. 소그룹 안의 남학생 수와 여학생 수는 같다.
2. 소그룹 안에서는 서로 악수를 한 학생이 없다.

서로 악수를 한 남학생, 여학생의 쌍 (a_i, b_j)의 개수가 m일 때, 소그룹의 개수를 2 또는 $\frac{2m}{n} + 1$ 이하가 되도록 만들 수 있음을 증명하여라.

$*$ 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 $*$

제 24회 한국수학올림피아드 최종시험

2011년 3월 27일 - 제 2 일

4. 음이 아닌 실수 a, b, c가 $a+b+c=1$을 만족할 때,

$$\frac{1}{a^2-4a+9}+\frac{1}{b^2-4b+9}+\frac{1}{c^2-4c+9}$$

의 최댓값을 구하여라.

5. 조건 $AC < AB < BC$를 만족하는 삼각형 ABC에 대하여 $AC = AD$가 되는 변 AB 위의 점을 D라 하자. 삼각형 ABC의 외접원이 각 A의 이등분선과 만나는 점을 E $(\neq A)$ 라 하고, 삼각형 ABC의 외접원이 CD와 만나는 점을 F $(\neq C)$라 하자. BC와 DE의 교점을 K라 할 때, $DK \cdot EF = AC \cdot DF$일 필요충분조건은 $CK = AC$임을 보여라.

6. 가로로 m칸, 세로로 n칸, 총 mn칸이 있는 직사각형 모양의 바둑판을 생각하자. 바둑판의 각 칸에 정수를 하나씩 써넣는다. 하나 이상의 칸으로 이루어진 직사각형 R에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 정수 h가 존재하면, R을 '선반'이라 하자. (단, 직사각형 R의 내부에 빠진 칸은 없다.)

1. 직사각형 R에 속한 모든 칸에 적힌 수는 h보다 크다.
2. 직사각형 R의 외부의 칸 중에서, R에 속한 칸과 꼭지점이나 변을 공유하는 모든 칸에 적힌 수는 h 이하이다.

선반의 개수가 최대가 되도록 정수를 써넣는다면, 그때 선반의 개수는 모두 몇 개인가?

$*$ 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점 $*$

제26회 1차시험 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2012년 5월 19일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1∼4번은 각 4점, 문제 17∼20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 어떤 양의 정수를 2진법으로 표현하면 마지막 세 자리가 011이고, 5진법으로 표현하면 마지막 세 자리가 101이다. 이 수를 10진법으로 표현할 때 마지막 세 자리를 구하여라.

2. 다항식 x^4-9x+n이 두 개의 정수 계수 이차다항식의 곱이 되게 하는 정수 n의 개수를 구하여라.

3. 삼각형의 각 변에 꼭짓점이 아닌 점이 네 개씩 주어져 있다. 이 12개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 갖는 볼록사각형의 개수를 구하여라.

4. 각 B와 각 C가 모두 예각인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 각 B의 이등분선이 변 AD, AC와 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\overline{AE} : \overline{ED} = 3 : 2$이고 $\overline{AE} = \overline{AF}$일 때, $\dfrac{S(ABC)}{S(CEF)}$의 값을 구하여라. 단, $S(ABC)$는 삼각형 ABC의 넓이이다.

5. 숫자 9를 자릿수로 가지는 세 자리 양의 정수 중 3의 배수의 개수를 구하여라.

6. 양의 실수 x, y가 $4x^2+9y^2 = 36x^2y^2$을 만족할 때 $\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{by}$의 최댓값이 1이 되는 양의 실수 a, b에 대하여 ab의 최솟값을 구하여라.

7. 두 자리 양의 정수 중에서 양의 약수의 개수가 2의 거듭제곱인 수는 모두 몇 개인가?

8. 선분 AB가 지름인 원에 사각형 $ABCD$가 내접한다. 선분 AB 위의 점 P에서 변 CD에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, $\overline{PA} = \overline{PQ}$이다. $\angle BCD = 145°$, $\angle ADC = 110°$, $\angle PQA = M°$일 때, $10M$의 값을 구하여라.

9. 숫자 1, 2, 3을 각각 네 번씩 사용하여 만든 12자리 양의 정수 중, 213321231321과 같이 어떠한 두 개의 1 사이에도 2와 3이 모두 있는 것의 개수를 구하여라.

10. 방정식 $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]+\left[\dfrac{x}{6}\right] = x-2$의 양수해 중 1000을 넘지 않는 것의 개수를 구하여라. 단 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.

11. 중심이 G이고 수심이 H인 예각삼각형 ABC의 외심 O에서 변 BC의 중점까지 거리가 6이다. 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고, 직선 DG가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 직선 BC를 기준으로 G와 같은 쪽에 있는 점을 E라 할 때, $\overline{HD} = 36$, $\overline{AE} = 36$이다. 선분 DG의 길이를 구하여라.

(뒷면에 계속)

12. 양의 실수 x, y에 대하여

$$\frac{100xy}{4x+(x+y-1)^2}$$

의 최댓값을 구하여라.

13. 각 자릿수가 1 또는 2인 10자리 양의 정수 중, 1211212212와 같이 2 바로 다음에 1이 나오는 경우가 정확히 세 번인 것의 개수를 구하여라.

14. 반지름이 12인 원 O 위의 한 점 A에 대하여, 선분 OA의 중점 M을 지나고 OA에 수직인 직선 l이 원 O와 만나는 점 중 하나를 B라 하자. 점 C는 호 AB 위의 점으로 직선 CM이 원 O와 만나는 점 $D\,(D \neq C)$에 대해 $\overline{CD} = 21$이다. 직선 AD와 직선 l이 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{CP}^2$을 구하여라.

15. 양의 정수 M에 대하여 M^5의 약수 중 1보다 크고 $\sqrt{M^5}$보다 작은 것의 개수가 2012라 하자. 이러한 M 중 가장 작은 수를 P라 할 때, P의 양의 약수 중 32의 배수이고 $\sqrt{P}$보다 작은 것의 개수를 구하여라.

16. $f(x) = x^2 - 2kx + 2k^2$이라 하자. $0 \le a, b, c \le 4$인 임의의 실수 a, b, c에 대하여 $f(a), f(b), f(c)$가 삼각형의 세 변을 이루도록 하는 양의 정수 k 중 가장 작은 것을 구하여라.

17. 양의 정수 n을 두 개 이상의 연속한 양의 정수의 합으로 나타내는 방법을 생각하자. 예를 들어 15의 경우에는 $7+8$, $4+5+6$, $1+2+3+4+5$의 세 가지 방법이 있다. 999를 이와 같이 나타내는 방법의 수를 구하여라.

18. 정수 x 중 $x^4+x^3+x^2+x+1$이 완전제곱수가 되게 하는 것들의 합을 구하여라.

19. 삼각형 ABC의 내심 I를 지나고 직선 AI에 수직인 직선이 직선 BC와 점 D에서 만난다. $\overline{AB} = 30$, $\overline{CA} = 60$, $\overline{CD} = 50$일 때 선분 BC의 길이를 구하여라.

20. 원 위에 서로 다른 n개의 점 $P_1, P_2, \ldots, P_n$이 있다. 이 중 두 점을 잇는 선분들을 모두 그릴 때, 어떠한 세 선분도 원 내부의 한 점에서 만나지 않는다. 다음 조건을 만족하는 삼각형의 개수를 T_n이라 하자.

> 삼각형의 각 변은 어떤 선분 P_iP_j에 포함된다.

예를 들어 $T_3 = 1$, $T_4 = 8$ 이다. T_7을 구하여라.

제26회 한국수학올림피아드 중등부 1차시험 정답

문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	651	003
2	003	651
3	396	005
4	005	396
5	084	012
6	012	084
7	061	275
8	275	061
9	372	166
10	166	372
11	020	025
12	025	020
13	330	276
14	276	330
15	010	005
16	005	010
17	007	002
18	002	007
19	045	287
20	287	045

대 한 수 학 회

중등부

제 26 회 2 차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012 년 8 월 19 일 (오전) ; 제한시간 2 시간 30 분 ; 문항당 7 점

1. 양의 실수 a, b, c 가 $ab + bc + ca = 1$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{a+b}{\sqrt{ab(1-ab)}} + \frac{b+c}{\sqrt{bc(1-bc)}} + \frac{c+a}{\sqrt{ca(1-ca)}} \le \frac{\sqrt{2}}{abc}$$

2. 원 O 에 내접하는 오각형 $ABCDE$ 가 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = \overline{CD}$ 를 만족한다. 변 AE 위의 점 $F(\neq A, E)$ 에 대하여 직선 BF 가 원 O 와 만나는 점을 $J(\neq B)$, 직선 CE 와 직선 DJ 가 만나는 점을 K, 직선 BD 와 직선 FK 가 만나는 점을 L 이라 하자. 네 점 B, L, E, F 가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 등식 $5^l(43)^m + 1 = n^3$ 을 만족하는 양의 정수 l, m, n 을 모두 구하여라.

4. 어떤 모임에서 학생 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 이 서로 악수를 하였다. 학생 A_i 가 악수한 횟수를 $d_i\,(1 \le i \le n)$ 이라 할 때 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n > 0$ 이다. 다음 조건을 모두 만족하는 $i, j\,(1 \le i < j \le n)$ 이 존재함을 보여라.

(1) 학생 A_i 와 학생 A_j 는 악수를 하였다.

(2) $\dfrac{(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^2}{n^2} \le d_i d_j$

중등부

제 26 회 2 차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012 년 8 월 19 일 (오후) ; 제한시간 2 시간 30 분 ; 문항당 7 점

5. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD(\overline{AB} > \overline{AD})$의 변 AB 위에 $\overline{AE} = \overline{AD}$가 되도록 점 E를 택하고 직선 AC와 DE의 교점을 F, 직선 DE와 원 O의 교점을 $K(\neq D)$라 하자. 점 C, F, E를 지나는 원의 점 E에서의 접선과 직선 AK가 점 L에서 만난다고 할 때, $\overline{AL} = \overline{AD}$일 필요충분조건이 $\angle KCE = \angle ALE$임을 보여라.

6. 3보다 큰 소수 p가 다음 조건을 만족한다.

$2^x - 1$이 p의 배수가 되는 양의 정수 x 중 가장 작은 것이 $p-1$이다.

$p = 2k+3$이라 할 때 수열 $\{a_n\}$을 식

$$a_i = a_{k+i} = 2^i \quad (1 \le i \le k), \qquad a_{j+2k} = a_j a_{j+k} \quad (j \ge 1)$$

에 따라 귀납적으로 정의하자. 수열 $\{a_n\}$에는 p로 나눈 나머지가 모두 다른 $2k$개의 연속한 항이 존재함을 보여라.

7. 모든 $x_k\,(k = 1, 2, 3, 4, 5)$가 양수이고 $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$일 때,

$$\frac{\left(\sqrt{s_1x_1} + \sqrt{s_2x_2} + \sqrt{s_3x_3} + \sqrt{s_4x_4} + \sqrt{s_5x_5}\right)^2}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5}$$

의 최댓값을 구하여라. (단, $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$)

8. 1 번부터 n 번까지 n 명의 학생이 있다. 1에서 n까지의 정수가 각각 하나씩 적혀있는 n장의 카드가 들어 있는 통에서 각자 카드를 한 장씩 뽑기로 한다. 두 사람이 서로 상대방의 번호가 적힌 카드를 뽑으면 그 두 사람을 짝이라고 하자. 짝이 하나도 생기지 않을 확률을 p_n이라고 할 때 다음이 성립함을 보여라.

$$p_n - p_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \text{은 홀수} \\ \frac{1}{(-2)^k\,k!}, & n = 2k \end{cases}$$

제26회 고등부 수행평가
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2012년 6월 23일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ~ 4번은 각 4점, 문제 17 ~ 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 집합 $\{1, 2, \ldots, 23\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 11이고 원소의 합이 194인 것의 개수를 구하여라.

2. 방정식 $4x^3 - 5x^2y + 10xy^2 + 12y^3 - 108x - 81y = 0$을 만족하고 각각의 절댓값이 1000 이하인 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

3. 양의 정수 n 중 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \{1, 2, \ldots, 20\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$가 존재하게 하는 가장 작은 정수를 구하여라.

$$f(k+1) < \frac{f(k) + f(k+2)}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, 18$$

4. 원 O에 내접하는 삼각형 $ABCD$가 다음 조건을 만족한다.

$$\overline{AB} = 24, \quad \overline{AD} = 16, \quad \angle BAC = \angle DAC$$

또 직선 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, $\overline{BE} = 18$이다. 점 D를 지나고 AC에 수직인 직선이 원 O와 만나는 점을 $F(\neq D)$, 직선 FC와 AB의 교점을 K, AC와 DF의 교점을 L이라 할 때, 선분 KL의 길이를 구하여라.

5. 일대일함수 $f : \{1, 2, \ldots, 8\} \to \{1, 2, \ldots, 8\}$ 중에서 $f(i) > f(i+1)$을 만족하는 양의 정수 i $(1 \leq i \leq 7)$가 정확히 한 개인 함수의 개수를 구하여라.

6. 수열 $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ 중에 1이 4개, 2가 3개, 3이 3개 있다. $z_1 = x_1$이고

$$z_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{z_n x_{n+1}}{z_n + x_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, 9$$

일 때, z_{10}의 값이 될 수 있는 수 중에서 가장 큰 것을 $\frac{p}{q}$ (p, q는 서로 소인 양의 정수)라 하자. $p+q$의 값을 구하여라.

7. 집합 $X = \{1, 2, \ldots, 13\}$이고, 함수 $g : X \to X$는 다음과 같이 정의된다.

$$g(x) = 14 - x, \quad x \in X$$

함수 $f : X \to X$ 중 f를 합성한 함수 $f \circ f \circ f$가 g가 되는 f의 개수를 구하여라.

8. 원 O 위의 점 A, B, C가 다음 조건을 만족한다.

$$\overline{AB} = 18, \quad \angle ABC = 59^\circ, \quad \angle CAB = 3^\circ$$

점 A에서 원 O에 접하는 직선 위에 점 D, E가

$$\angle DAC < 90^\circ, \quad \overline{DA} = 12, \quad \overline{AE} = 18, \quad \overline{DE} = 30$$

가 되도록 놓여 있다. 원 O와 직선 BD, CE의 교점을 각각 K, L이라 하고, 직선 KL과 DE의 교점을 P라 할 때, P는 E를 중심으로 A의 반대편에 놓인다. 선분 AP의 길이를 구하여라.

9. 실수 x를 넘지 않는 최대 정수를 $[x]$라 하고, $\{x\} = x-[x]$라 하자. 2012 이하이고 2012와 서로 소인 모든 양의 정수 $t_1, \ldots, t_{1004}$에 대해 $\sum_{i=1}^{1004} \left\{\frac{523t_i}{2012}\right\}$의 값을 구하여라.

10. $f(x) = x^2 - 10x + \frac{p}{2}$라 할 때, $f \circ f \circ f(x) = f(x)$를 만족하는 서로 다른 실수 x의 개수가 정확히 4개가 되도록 하는 양의 정수 p를 구하여라.

11. 삼각형 ABC의 외접원 O가 점 A에서 원 O'에 내접한다. 직선 AB와 원 O'의 교점 $D(\neq A)$에 대하여, 직선 BC와 원 O'의 교점 중 직선 AD를 기준으로 C의 반대편에 있는 점을 E, C와 같은 쪽에 있는 점을 F라 하자. 또, 점 B에서의 원 O의 접선이 선분 DF와 점 K에서 만나고, 직선 CD와 원 O'은 점 $L(\neq D)$에서 만난다. $\angle CFA = 38°$, $\angle DKB = 47°$, $\angle CLA = 60°$, $\angle CAB = x°$일 때, x를 구하여라.

12. 양의 정수 k에 대하여

$$a_k = \frac{361984!}{k!(361984-k)!}$$

라 할 때, $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{361983}$의 최대공약수를 구하여라.

13. 학생 16명이 문제가 30개인 시험을 치뤘다. 모든 학생이 각각 15개 이하의 문제를 맞혔고, 각 문제를 맞힌 학생은 8명 이상이다. 어떤 두 학생 A와 B를 뽑더라도, A도 맞히고 B도 맞힌 문제의 수는 항상 n으로 일정하였다고 한다. n을 구하여라.

14. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족한다.

$$\angle ABC < 90°, \quad \overline{AB} = 15, \quad \overline{BC} = 27$$

변 AC의 중점 M을 지나고 BC에 수직인 직선 ℓ이 점 A가 중심이고 M을 지나는 원과 만나는 점을 $P(\neq M)$라 하자. 직선 BC로부터의 거리가 3인 점 O가 중심이고 두 점 B와 M을 지나는 원이 ℓ과 BC를 기준으로 P의 반대편에 있는 점 Q에서 만난다. $\overline{PQ} = 30$일 때, 삼각형 OPM의 넓이를 구하여라.

15. 다음 수가 정수가 되는 가장 작은 양의 정수 m을 구하여라.

$$180!\left(\frac{1}{181} + \frac{(-1)^m m!}{m+181}\right) + \frac{1}{181} + \frac{1}{m+181}$$

16. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음을 만족하는 양의 정수 k가 존재한다.

$$a_{n+k} = a_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$b_n = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n$이라 할 때

$$b_{n+1} = \frac{1+b_n^2}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

을 만족한다. $\sum_{n=1}^{60} a_n$의 값을 구하여라.

17. 양의 정수 a, b, c가 식

$$\frac{a^3}{(b+3)(c+3)} + \frac{b^3}{(c+3)(a+3)} + \frac{c^3}{(a+3)(b+3)} = 7$$

을 만족할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

18. 다음 조건을 만족하는 일대일함수 $f : \{1, 2, \ldots, 7\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ 의 개수를 구하여라.

$1 \le i < j \le 7$이면 $f(i)$ 와 $f(j)+1$ 이 서로 다르다.

19. 중심이 O인 원 ω의 외부의 점 P에 대하여 직선 PO와 원 ω의 교점 중 P에서 먼 점을 A라 할 때, $\overline{AP} = 200$이다. 점 P를 지나는 직선 중 점 O를 지나지 않는 직선 ℓ이 원 ω와 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 P에서 가까운 점을 B, 먼 점을 C라 하자. 직선 ℓ이 삼각형 ABO의 외접원과 만나는 점을 $D(\neq B)$라 하고 삼각형 ACO의 외접원과 만나는 점을 $E(\neq C)$라 할 때, E는 B와 C 사이에 있고 $\overline{AD} = 250$, $\overline{AE} = 90$이다. 원 ω의 반지름의 길이를 구하여라.

20. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 a 중 가장 큰 것을 구하여라.

$a^{b+2a} = b^{4a}$를 만족하는 양의 정수 b가 존재한다.

2012년 한국수학올림피아드 고등부 수행평가 정답

< 가형 >

문제번호	정답	문제번호	정답
1	005	11	025
2	503	12	512
3	046	13	007
4	015	14	042
5	247	15	010
6	309	16	060
7	801	17	012
8	036	18	187
9	502	19	075
10	059	20	081

< 나형 >

문제번호	정답	문제번호	정답
1	503	11	512
2	005	12	025
3	015	13	042
4	046	14	007
5	247	15	060
6	309	16	010
7	036	17	187
8	801	18	012
9	502	19	081
10	059	20	075

제 26 회 2 차 시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2012 년 8 월 19 일 (오전) ; 제한시간 2 시간 30 분 ; 문항당 7 점

1. 삼각형 ABC 의 외접원 O 의 지름의 길이가 2 이고 꼭지각 A 는 둔각이다. 점 D 는 변 AB 위의 점으로 $\overline{AD} = \overline{AC}$ 를 만족하는 점이고, 점 K 는 원 O 위의 점으로 선분 AK 가 원 O 의 지름이 되게 하는 점이다. 선분 AK 와 선분 CD 가 점 L 에서 만나고, 점 D, K, L 을 지나는 원과 원 O 가 점 $P(\neq K)$ 에서 만난다고 하자. $\angle BCD = \angle BAP = 10^\circ$ 이면 $\overline{DP} = \sin \dfrac{\angle BAC}{2}$ 임을 보여라.

2. 어떤 모임에서 학생 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 이 서로 악수를 하였다. 학생 A_i 가 악수한 횟수를 $d_i\,(1 \leq i \leq n)$ 이라 할 때 $d_1 + d_2 + \cdots + d_n > 0$ 이다. 다음 조건을 모두 만족하는 $i, j\,(1 \leq i < j \leq n)$ 이 존재함을 보여라.

(1) 학생 A_i 와 학생 A_j 는 악수를 하였다.

(2) $\dfrac{(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^2}{n^2} \leq d_i d_j$

3. 등식 $2^m p^2 + 1 = q^5$ 을 만족하는 양의 정수 m 과 소수 p, q 를 모두 구하여라.

4. 등식 $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc + 1$ 을 만족하는 양의 실수 a, b, c 에 대하여

$$(a - 2bc)(b - 2ca)(c - 2ab)$$

의 최댓값을 구하여라.

제 26 회 2차 시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012 년 8 월 19 일 (오후) ; 제한시간 2 시간 30 분 ; 문항당 7 점

5. 3 보다 큰 소수 p 가 다음 조건을 만족한다.

$2^x - 1$ 이 p 의 배수가 되는 양의 정수 x 중 가장 작은 것이 $p-1$ 이다.

$p = 2k+3$ 이라 할 때 수열 $\{a_n\}$ 을 식

$$a_i = a_{k+i} = 2^i \quad (1 \le i \le k), \qquad a_{j+2k} = a_j a_{j+k} \quad (j \ge 1)$$

에 따라 귀납적으로 정의하자. 수열 $\{a_n\}$ 에는 p 로 나눈 나머지가 모두 다른 $2k$ 개의 연속한 항이 존재함을 보여라.

6. 삼각형 ABC 의 내접원 O 가 변 BC, CA 와 각각 점 D, E 에서 접한다. 점 B 를 지나고 직선 DE 와 평행한 직선이 원 O 와 두 점에서 만난다고 하자. 이 두 점 중 B 와 가까운 점을 F, 다른 점을 G, 직선 CG 와 원 O 의 교점을 $H(\neq G)$ 라 하자. 점 G 를 지나고 직선 EH 와 평행한 직선과 직선 AC 의 교점을 I 라 할 때 직선 IF 와 원 O 가 서로 다른 두 점 J, F 에서 만난다고 하자. 직선 CJ 와 직선 EG 의 교점을 K, 점 K 를 지나고 직선 JD 와 평행한 직선을 ℓ 이라 할 때, 세 직선 ℓ, IF, ED 는 한 점에서 만남을 보여라.

7. $\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\} = \{1, 2, \cdots, 10\}$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(na_n^2 - n^2 a_n)$ 의 최댓값을 구하여라.

8. 4 로 나눈 나머지가 3 인 소수 p 에 대하여

$$T = \{\, (i,j) \,|\, i, j \in \{0, 1, \ldots, p-1\} \,\} - \{(0,0)\}$$

이라 하자. T 의 임의의 부분집합 $S(\neq \emptyset)$ 에 대하여, S 의 부분집합 중 다음 조건을 모두 만족하는 집합 A 가 존재함을 보여라.

(1) $(x_i, y_i) \in A \ (1 \le i \le 3)$ 이면 $x_1 + x_2 - y_3$ 과 $y_1 + y_2 + x_3$ 중 적어도 하나는 p 의 배수가 아니다.

(2) $8n(A) > n(S)$ (단, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

제 25 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012년 3월 24일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

1. 임의의 양의 실수 x, y, z에 대해 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

$$\frac{2x^2+xy}{(y+\sqrt{zx}+z)^2}+\frac{2y^2+yz}{(z+\sqrt{xy}+x)^2}+\frac{2z^2+zx}{(x+\sqrt{yz}+y)^2}\geq 1$$

2. 각 B가 직각이 아니고 $AB\neq AC$인 삼각형 ABC의 내심 I에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 직선 AB와 DI의 교점을 S, 직선 DF에 수직이고 F를 지나는 직선이 직선 DE와 만나는 점을 T, 직선 ST가 직선 EF와 만나는 점을 R이라 하자. 이 때, 선분 IR을 지름으로 하는 원이 삼각형 ABC의 내접원과 만나는 두 점 중 직선 IR에 대해 A와 다른 쪽에 있는 점을 P_{ABC}라 하자. $XZ=YZ>XY$인 이등변삼각형 XYZ의 변 YZ 위에 $WY<XY$인 점 W가 있다. $K=P_{YXW}$, $L=P_{ZXW}$라 할 때 $2KL\leq XY$임을 보여라.

3. n개의 집합 $A_1,A_2,\ldots,A_n$이 주어져있다. 집합 $\{1,2,\ldots,n\}$의 부분집합 X에 대해

$$N(X)=\{i\in\{1,2,\ldots,n\}-X : \text{모든 } j\in X \text{ 에 대해 } A_i\cap A_j\neq\emptyset\}$$

이라 하자. 이때 m이 $3\leq m\leq n-2$인 정수이면, $|X|=m$이고 $|N(X)|\neq 1$인 $\{1,2,\ldots,n\}$의 부분집합 X가 반드시 존재함을 증명하여라.

제 25 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2012년 3월 25일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

4. 예각삼각형 ABC에 대하여 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. D, E는 각각 변 AB, AC의 내부에 있는 점으로서, D와 E에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 F와 G라 할 때, 두 선분 DG와 EF의 교점이 선분 AH 위에 있다 하자. 점 E에서 직선 DH에 내린 수선의 발을 P라 할 때, $\angle APE = \angle CPE$임을 보여라.

5. 주어진 양의 정수 n에 대하여, $nx^2 + y^3 = z^4$을 만족하는 정수 x, y, z 중 어떤 두 수도 서로소인 해 (x, y, z)가 무한히 많이 존재함을 보여라.

6. 3보다 큰 소수를 약수로 갖지 않는 양의 정수의 집합을 M이라 하자. 집합 M의 임의의 부분집합들 A_1, A_2, A_3, $\ldots$에 대해, 다음 조건을 만족하는 서로 다른 양의 정수 i와 j가 반드시 존재함을 증명하여라.

집합 A_i의 각 원소 x에 대해 집합 A_j는 x의 어떤 약수를 갖는다.

제27회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2013년 6월 1일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 삼각형 ABC에 대하여, 각 C의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하고 직선 CD와 평행하고 점 B를 지나는 직선이 직선 AC와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AD}=4$, $\overline{BD}=6$, $\overline{BE}=15$일 때, $(\overline{BC})^2$의 값을 구하여라.

2. 각 자리의 수가 0 또는 1이고, 14의 배수인 양의 정수 중 가장 작은 것을 999로 나눈 나머지를 구하여라.

3. 집합 $A=\{1,2,3,\dots,30\}$의 부분집합 중 임의의 두 원소의 차이가 모두 3 이상이며, 10개의 원소를 가지는 것의 개수를 구하여라.

4. 식 $|x+y+1|+|x+1|+|y+3|=3$을 만족하는 실수의 순서쌍 (x,y)에 대하여 x^2+y^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M+2m$의 값을 구하여라.

5. 양의 정수 n의 모든 자리의 수의 합을 $a(n)$이라 하자. 모든 자리의 수가 홀수인 세자리 양의 정수 n 중, $a(n)=a(2n)$을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

6. 식 $a^2+200ab+10000=0$을 만족하는 실수 a,b에 대하여 $\dfrac{a+100}{b+1}$의 최댓값을 구하여라. (단 b는 -1이 아니다.)

7. 예각삼각형 ABC에 대하여 B와 C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D와 E라 하자. 삼각형 ABC의 외부에 있는 점 O를 중심으로 하고 삼각형 ABC의 수심 H와 점 A를 지나는 원이 직선 AC와 점 P에서 만난다. 선분 AH의 중점 M에 대하여 $\angle MED=\angle APO$이고 $\overline{AB}=200$, $\overline{AD}=40$, $\overline{AP}=96\sqrt{6}$일 때, 선분 OP의 길이를 구하여라.

8. 문자 A, B, C, D를 사용하여 만든 8자리 문자열 중, DABABDAB 또는 DDCCDCCD의 예와 같이 A가 나타나면 바로 다음에는 항상 B가 나타나고, B가 나타나면 바로 이전에는 항상 A가 나타나는 것의 개수를 구하여라.

9. 다음 조건을 만족하는 집합 A,B가 존재하도록 하는 양의 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

> A,B는 각각 k개의 정수로 이루어져 있고, A의 한 원소와 B의 한 원소의 합으로 표현되는 정수의 집합이 $\{0,1,2,\dots,100\}$이다.

10. $n=3\times 7^7$일 때, 7^n-1과 7^n+4949의 최대공약수를 구하여라.

11. 예각삼각형 ABC의 한 변 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 변 AB위의 한 점 P를 지나고 AB에 수직인 직선이 변 AC와 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 APQ의 넓이의 4배이고 $\overline{AP} = 10$이다. 점 A를 지나는 직선이 점 T에서 원 O에 접할 때, 선분 AT의 길이를 구하여라.

12. 식 $ab + bc + ca = 7(a + b + c) - 30$을 만족하는 실수 a, b, c에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2$의 최솟값을 구하여라.

13. 평면 위의 볼록오각형 $A_1A_2A_3A_4A_5$의 내부의 점 O에 대하여, O에서 각 변에 내린 수선이 모두 오각형 내부에 있고

$$\begin{aligned} \angle A_1A_2O &= \angle OA_3A_4, \quad \angle A_2A_3O = \angle OA_4A_5, \\ \angle A_3A_4O &= \angle OA_5A_1, \quad \angle A_4A_5O = \angle OA_1A_2, \\ \angle A_5A_1O &= \angle OA_2A_3 \end{aligned}$$

이다. 점 O에서 변 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1에 각각 내린 수선의 발 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5에 대하여,

$$\overline{B_1B_2} = 8, \quad \overline{B_2B_3} + \overline{B_3B_4} + \overline{B_4B_5} + \overline{B_5B_1} = 30$$

이다. 삼각형 OB_1B_2의 넓이가 20일 때, 오각형 $B_1B_2B_3B_4B_5$의 넓이를 구하여라.

14. 식 $a^2 + b^2 = (ab + 1)(a + b - 1)$을 만족하는 양수의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $\dfrac{2ab}{a + b - 1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $M^2 + m^2$의 값을 구하여라.

15. 집합 $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$의 부분집합 중 다음 조건을 만족하도록 서로 다른 두 집합을 선택하는 방법의 수를 구하여라.

> 두 집합의 합집합이 A이고, 교집합의 원소가 2개 이상이다.

16. 양의 정수 n 중에서

$$p = \left[\frac{n^2}{7}\right]$$

가 300 이하의 소수가 되는 것의 개수를 구하여라. 단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.

17. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 $\overline{AB} = 21$, $\overline{BC} = 42$, $\overline{CA} = 35$이다. 점 B에서 직선 CA에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 E, 직선 BD와 CE의 교점을 F라 하자. 삼각형 ABC의 내심을 지나고 BC와 수직인 직선과 $\angle BFC$의 이등분선의 교점을 G라 하고, G에서 직선 BF에 내린 수선의 발을 H라 할 때 $(\overline{FH})^2$의 값을 구하여라.

18. 볼록7각형 $A_1A_2 \cdots A_7$에 대각선 4개를 내부에서 교차하지 않도록 그어 5개의 삼각형으로 나누는 방법 중, 각 삼각형이 이 볼록7각형과 적어도 하나의 변을 공유하게 하는 방법의 수를 구하여라.

19. 양의 정수 k에 대하여

$$a_k = \frac{(2^k)^{30} - 1}{31}$$

이라 하자. $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$이라 할 때, S를 31로 나눈 나머지를 구하여라.

20. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 최솟값을 구하여라.

> 10보다 크고 2013보다 작은 서로 다른 실수 n개로 이루어진 임의의 집합 A에 대하여
>
> $$|(a - b)(ab - 100)| < 10ab$$
>
> 를 만족하는 A의 서로 다른 두 원소 a, b가 반드시 존재한다.

(끝)

제27회 한국수학올림피아드 중등부 1차시험 정답

문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	090	020
2	020	090
3	066	014
4	014	066
5	010	025
6	025	010
7	120	985
8	985	120
9	062	018
10	018	062
11	020	012
12	012	020
13	095	007
14	007	095
15	236	236
16	009	009
17	056	020
18	028	200
19	020	028
20	200	056

대 한 수 학 회

중등부

제 27 회 2차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 11월 10일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 다음 세 수의 크기를 비교하여라.

$$\sqrt[3]{\frac{25}{3}}, \quad \sqrt[3]{\frac{1148}{135}}, \quad \frac{\sqrt[3]{25}}{3} + \sqrt[3]{\frac{6}{5}}$$

2. 원 O에 내접하는 오각형 $ABCDE$가 다음 조건을 모두 만족한다.

(i) $AB = BC$, $AE = DE$

(ii) 점 E에서 직선 DE에 접하고 점 A를 지나는 원이 선분 EC와 점 F에서 만나고 직선 BF와는 점 $G(\neq F)$ 에서 만난다.

직선 DG와 원 O의 교점을 $H(\neq D)$라 할 때, 점 E에서의 원 O의 접선이 직선 HA와 직교함을 보여라.

3. 양의 정수로 이루어진 수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots$이 식 $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ $(i \geq 1)$ 을 항상 만족할 때, 모든 양의 정수 n에 대하여 다음의 값이 양의 정수임을 보여라.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{4n-2}}{a_{2n+1}}$$

4. 다음 조건을 만족하는 소수 p가 존재함을 보여라.

$2^n - 1$이 p의 배수가 되는 양의 정수 n 중 가장 작은 것은 3^{2013}이다.

중등부

제 27 회 2차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 11월 10일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

5. 예각삼각형 ABC의 각 A가 각 B보다 크다. 변 AB의 중점을 D라 하고, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E, 점 B 에서 변 CA 에 내린 수선의 발을 F라 하자. 삼각형 DEF의 외심을 O라 할 때, 선분 BE 위의 점 J가 $\angle ODC = \angle EAJ$ 를 만족한다. 두 선분 AJ와 DC의 교점이 삼각형 BDE의 외접원 위에 있음을 보여라.

6. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 모두 구하여라.

임의의 양의 정수 m, n에 대하여 $f(mn) = \mathrm{lcm}(m, n) \cdot \gcd(f(m), f(n))$이다.

(단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이고, $\mathrm{lcm}(m, n)$과 $\gcd(m, n)$은 각각 m, n의 최소공배수와 최대공약수이다.)

7. 함수 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$이 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 다음 두 조건

(i) $f(n+1) > f(n)$

(ii) $f(f(n)) = 2n + 2$

를 만족할 때 $f(2013)$을 구하여라. (단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이다.)

8. 정2013각형에서 모든 대각선들을 그었을 때, 정2013각형은 내부가 서로 만나지 않는 여러 가지 다각형 모양의 영역들로 나뉘어진다. 이 영역들 중 2013각형은 오직 하나 존재함을 보여라.

제27회 고등부 수행평가 한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2013년 6월 1일; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 원탁에 앉아 있는 20명 중에서 8명을 선택하려고 한다. 선택된 어느 두 사람도 서로 이웃하지 않게 하는 방법의 수를 구하여라.

2. 정수 a, b, c, n이 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $7a + 13b + 97c$ 의 값을 구하여라.

(i) $3^{1024} - 2^{1024} = 7^a \times 13^b \times 97^c \times n$

(ii) $7 \times 13 \times 97$ 과 n은 서로 소이다.

3. 식 $x^2+y^2+z^2 = 1$을 만족하는 실수의 순서쌍 (x, y, z)에 대하여 $(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)$의 최댓값을 M이라 할 때, $\dfrac{1}{M^2}$의 값을 구하여라.

4. 삼각형 ABC의 외심 O에 대하여 $\angle AOB = \angle BOC = 20^\circ$이다. 선분 OA, OB, OC의 중점을 각각 P, Q, R라 하고 직선 AB와 OC의 교점을 D라 하자. $\overline{OD} = 4$이고 오각형 $ADRQP$의 넓이를 x라 할 때, x^2의 값을 구하여라.

5. 다음 식의 값을 155로 나눈 나머지를 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{154}\sum_{k=1}^{1000} n^k$$

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하여라.

$\{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$을 만족하고, 각각 k개의 정수로 이루어진 집합 A와 B가 존재한다.

7. 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C의 내각의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하고 직선 CD와 평행하고 점 B를 지나는 직선이 직선 AC와 만나는 점을 E라 할 때, $\overline{AD} = 4$, $\overline{BD} = 6$, $\overline{BE} = 15$이다. 직선 BE가 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 외각의 이등분선과 만나는 점을 P라 할 때, $(\overline{PB} - \overline{AB})^2$의 값을 구하여라.

8. 음이 아닌 실수 a, b, c, d가 다음 식을 모두 만족할 때, b의 최댓값을 구하여라.

$$\begin{cases} a + b - d = -2(c - 3) \\ a^2 + c^2 + 2a(c - 3) + bd - 12c = 0 \end{cases}$$

9. 각 B의 크기가 70°인 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 A, B, C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 점 E에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AE의 중점 M과 점 D를 지나는 직선이 직선 EH와 만나는 점을 K, 점 H를 지나고 직선 AB에 수직인 직선이 직선 EF와 만나는 점을 L이라 하자. $\angle KLH = 80^\circ$이고 $\overline{DK} = 50$일 때, 선분 LH의 길이를 구하여라.

(뒷면에 계속)

10. 원 S와 S위의 점 $P(a,b)$가 다음 조건을 모두 만족한다.

(i) S의 P에서의 접선이 원점을 지난다.

(ii) S의 중심은 x축에 있거나 4사분면에 있다.

(iii) S는 점 $(1,0)$과 $(9,0)$을 지난다.

(iv) $b \geq \frac{9}{5}$이다.

이러한 점 $P(a,b)$에 대하여

$$\frac{6a^2+5b^2}{a^3b+b^3a}$$

이 가질 수 있는 최댓값을 M, 최솟값을 m라 할 때 $36M+27m^2$의 값을 구하여라.

11. 양의 정수 k에 대하여

$$a_k = \frac{(2^k)^{40}-1}{41}$$

이라 하자. $S = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$이라 할 때, S를 41로 나눈 나머지를 구하여라.

12. 각 자리의 수가 1 이상 4 이하인 다섯 자리 양의 정수 중 이웃한 어떤 두 자리의 수의 차도 1이 아닌 것의 개수를 구하여라.

13. 원 O 위의 두 점 A, B에 대하여 원 O의 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선이 점 C에서 만난다. 선분 CA를 A의 바깥쪽으로 연장한 반직선 위에 점 D를 $\overline{AD} = 30$이 되도록 잡고 선분 BC를 C의 바깥쪽으로 연장한 반직선 위에 $\overline{BE} = 60$이 되도록 점 E를 잡자. 직선 BA가 선분 DE와 점 P에서 만난다. $\overline{DE} = 66$일 때, 선분 DP의 길이를 구하여라.

14. 볼록7각형 $A_1A_2\cdots A_7$에 대각선 4개를 내부에서 교차하지 않도록 그어 5개의 삼각형으로 나누는 방법 중, 각 삼각형이 이 볼록7각형과 적어도 하나의 변을 공유하게 하는 방법의 수를 구하여라.

15. 식 $(a^2-a+1)(b^2-b+1) = a^2b^2$을 만족하는 양수의 순서쌍 (a,b)에 대하여 $\dfrac{2ab}{a+b-1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 M^2+m^2의 값을 구하여라.

16. 양의 정수 n중에서

$$p = \left[\frac{n^2}{7}\right]$$

가 300 이하의 소수가 되는 것의 개수를 구하여라. 단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.

17. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 최솟값을 구하여라.

1 보다 크고 2013보다 작은 서로 다른 실수 n개로 이루어진 임의의 집합 A에 대하여

$$|(a-b)(ab-100)| < 10ab$$

를 만족하는 A의 서로 다른 두 원소 a, b가 반드시 존재한다.

18. 양의 정수 x, y가 $y^2 = (x^2-48^2)(x^2-55^2)$을 만족할 때 $x+y$의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

19. 이등변삼각형 AB_1B_2에서 $\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = 8$이다. 점 A를 지나는 직선 l_i $(i=1,2)$가 중심이 B_i이고 반지름이 6인 원과 두 점 P_i, Q_i에서 만난다. 삼각형 AP_1P_2의 외접원의 반지름이 2이고 $\overline{AQ_1} = 9$, $\overline{AQ_2} = 11$일 때, $(\overline{Q_1Q_2})^2$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

20. 다음 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$의 개수를 구하여라.

(i) $0 < a_1 < a_3 < a_5 < a_7 < 9$

(ii) $0 < a_2 < a_4 < a_6 < a_8 < 9$

(iii) $a_{2i-1} < a_{2i}$ $(i = 1,2,3,4)$

제27회 한국수학올림피아드 고등부 수행평가 정답

문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	825	110
2	110	825
3	108	012
4	012	108
5	145	145
6	062	250
7	250	062
8	006	025
9	025	006
10	087	035
11	035	087
12	178	022
13	022	178
14	028	028
15	007	009
16	009	007
17	200	713
18	713	200
19	200	200
20	490	490

대 한 수 학 회

고등부

제 27 회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 11월 10일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 삼각형 ABC에서 변 BC 위의 점 P를 지나고 AB, AC와 평행한 직선이 AC, AB와 만나는 점을 각각 Q, R이라 하고, 삼각형 ABC, BPR, PCQ의 외심을 각각 O, O_1, O_2라 하자. 삼각형 BPR의 외접원과 삼각형 PCQ의 외접원이 만나는 점을 $K(\neq P)$라 할 때, $OO_1 = KO_2$임을 보여라.

2. 식 $ab + bc + ca = 3$을 만족하는 양의 실수 a, b, c에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{(a+b)^3}{\sqrt[3]{2(a+b)(a^2+b^2)}} + \frac{(b+c)^3}{\sqrt[3]{2(b+c)(b^2+c^2)}} + \frac{(c+a)^3}{\sqrt[3]{2(c+a)(c^2+a^2)}} \geq 12$$

3. 최고차항의 계수가 1인 정수계수 6차 다항식 중 다음 조건을 모두 만족하는 다항식 $f(x)$가 존재함을 보여라.

(i) 모든 정수 m에 대하여, $f(m) \neq 0$이다.

(ii) 홀수인 양의 정수 n이 주어졌을 때, $f(k)$가 n의 배수가 되는 양의 정수 k가 존재한다.

4. 양의 정수로 이루어진 수열 $\{a_i\}$가 점화식 $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ $(i \geq 1)$ 을 만족할 때, 양의 정수 n에 대하여

$$b_n = \frac{1}{a_{2n+1}} \sum_{i=1}^{4n-2} a_i$$

라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양의 정수임을 보이고, 이 수열의 일반항을 구하여라.

고등부

제 27 회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 11월 10일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$를 모두 구하여라.

임의의 양의 정수 m, n에 대하여 $f(mn) = \mathrm{lcm}(m, n) \cdot \gcd(f(m), f(n))$이다.

(단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이고, $\mathrm{lcm}(m, n)$과 $\gcd(m, n)$은 각각 m, n의 최소공배수와 최대공약수이다.)

6. 외심이 O인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 P에 대하여, P를 지나고 B에서 AB에 접하는 원과 P를 지나고 C 에서 AC에 접하는 원이 점 $Q(\neq P)$에서 만난다. Q에서 직선 AB와 AC에 내린 수선의 발을 각각 D와 E라고 할 때, DE와 BC의 교점을 R이라 하자. 세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있으면 세 점 A, R, Q도 한 직선 위에 있음을 보여라.

7. 양의 정수 k에 대하여, 정수로 이루어진 수열 $\{b_n\}$과 $\{c_n\}$이 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} &b_1 = 1, \quad && b_{2n} = kb_{2n-1} + (k-1)c_{2n-1}, \quad && b_{2n+1} = b_{2n} + (k-1)c_{2n}, \\ &c_1 = 1, \quad && c_{2n} = b_{2n-1} + c_{2n-1}, \quad && c_{2n+1} = b_{2n} + kc_{2n} \qquad (n \geq 1) \end{aligned}$$

양의 정수 k에 대하여 얻어진 b_{2014}를 a_k라 할때

$$\sum_{k=1}^{100} \left(a_k - \sqrt{a_k^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2014}}$$

를 구하여라.

8. 양의 정수 a, b, c, d에 대하여, 평면 위에 $a+b+c+d$개의 점으로 이루어진 집합 X가 있다. X의 어떠한 세 점도 한 직선 위에 있지 않다면 다음 조건을 모두 만족하는 두 직선 ℓ_1, ℓ_2가 존재함을 보여라.

(i) 두 직선 ℓ_1, ℓ_2는 서로 평행하지 않다.

(ii) 두 직선 ℓ_1, ℓ_2는 집합 X의 어느 점도 지나지 않는다.

(iii) 두 직선 ℓ_1과 ℓ_2로 평면을 나누었을 때 만들어지는 네 영역이 X의 원소를 각각 a, b, c, d개 포함한다.

제 26 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013년 3월 23일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 삼각형 ABC가 $\angle B > \angle C$를 만족하고, 변 AC 위의 점 D는 $\angle ABD = \angle C$를 만족한다. 삼각형 ABC의 내심을 I라고 할 때, 삼각형 CDI의 외접원과 직선 AI의 교점 $E(\neq I)$를 지나고 AB에 평행한 직선이 직선 BD와 만나는 점을 P라 하자. 삼각형 ABD의 내심을 J, A의 I에 대한 대칭점을 A'이라 하고 직선 JP와 직선 $A'C$가 점 Q에서 만날 때, $QJ = QA'$임을 보여라.

2. 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를 모두 구하여라.

(i) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이다.

(ii) 식 $ab+bc+cd=0$을 만족하는 실수 a, b, c, d에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(a-b)+f(c-d)=f(a)+f(b+c)+f(d)$$

3. 양의 정수 $n(\geq 2)$에 대하여, $1 \leq i < j \leq n$이고, i가 j의 약수인 모든 정수의 순서쌍 (i, j)들의 집합을 T라 하자. 음 아닌 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$이 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$을 만족할 때 다음 식의 최댓값을 n에 대한 함수로 나타내어라.

$$\sum_{(i,j)\in T} x_i x_j$$

제 26 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2013 년 3 월 24 일 (오전) ; 제한시간 4 시간 30 분 ; 문항당 7 점

4. 삼각형 ABC 의 꼭지점 B, C 에 마주 보는 방심을 각각 B_1, C_1 이라 하자. 직선 B_1C_1 이 삼각형 ABC 의 외접원과 $D(\neq A)$ 에서 만난다고 하자. B_1 에서 CA 에 내린 수선과 C_1 에서 AB 에 내린 수선의 교점을 E 라 하자. 삼각형 ADE 의 외접원 w 의 점 D 에서의 접선과 직선 AE 가 점 F 에서 만난다고 하자. D 에서 AE 에 내린 수선의 발을 G, 이 수선이 w 와 만나는 점을 $H(\neq D)$ 라 하자. 삼각형 HGF 의 외접원과 w 의 교점을 $I(\neq H)$ 라 하고, D 에서 직선 AH 에 내린 수선의 발을 J 라 할 때, AI 가 선분 DJ 의 중점을 지남을 보여라.

5. 서로 소인 양의 정수 a, b 가 주어져 있다. 정수 수열 (a_n) 과 (b_n) 은

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

를 만족하는 수열이라고 하자. 다음 조건을 만족하는 소수 p 를 모두 구하여라 :

(조건) : 정수 b_n 이 p 의 배수가 되는 p 이하의 양의 정수 n 이 존재한다.

6. 임의의 일대일대응 $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ (n 은 양의 정수) 에 대하여, 네 집합 A, B, C, D 를 다음과 같이 정의하자.

$$A = \{i \mid i > f(i)\}$$

$$B = \{(i, j) \mid i < j \le f(j) < f(i) \text{ 또는 } f(j) < f(i) < i < j\}$$

$$C = \{(i, j) \mid i < j \le f(i) < f(j) \text{ 또는 } f(i) < f(j) < i < j\}$$

$$D = \{(i, j) \mid i < j \text{ 그리고 } f(i) > f(j)\}$$

다음 등식이 성립함을 보여라. (단, $|X|$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

$$|A| + 2|B| + |C| = |D|$$

제28회 중등부 1차 시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2014년 5월 24일. 제한시간 4시간

- 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
  예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
- 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 숫자 $1, 2, 3, 4, 5, 6$이 하나씩 적혀 있는 카드 여섯 장이 있다. 이 중 다섯 장의 카드를 나열하여 만들 수 있는 다섯 자리 수 중 6의 배수의 개수를 구하여라.

2. 소수 p와 정수 x, y가 $4xy = p(p + 2x + 2y)$를 만족할 때, $p^2 + x^2 + y^2$의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

3. 실수 a, b, c가 다음 부등식을 만족할 때, $\frac{1}{abc}$의 값을 구하여라.

$$a^2 + 2b^2 + 2c^2 + b^2c^2 + 1 \le 2(abc + b + c)$$

4. 각 C가 $90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB 위의 점 M을 중심으로 하고 두 변 AC, BC와 모두 접하는 원의 반지름이 12이다. 변 AB의 B 쪽으로의 연장선 위의 점 N을 중심으로 하고 점 B를 지나며 직선 AC와 접하는 원이 직선 AB와 만나는 점을 D $(\neq B)$라 하자. $\overline{AM} = 15$일 때, 선분 BD의 길이를 구하여라.

5. 집합 $\{1, 2, 3, \ldots, 7\}$의 부분집합 중에서 연속한 4개의 수를 포함한 것의 개수를 구하여라.

6. 양의 정수 a, b, c가 $a + b + c + 9 = ab + bc + ca$를 만족할 때, abc의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

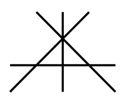
7. 다음 등식을 만족하는 정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

$$(a^2 + b^4 + c^6)(a^4 + b^6 + c^2)(a^6 + b^2 + c^4) = 27a^4b^4c^4$$

8. 볼록사각형 $ABCD$가 $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 16$, $\overline{CD} = 17$, $\overline{DA} = 18$을 만족한다. 삼각형 ABC, BCD, CDA, DAB의 무게중심을 각각 I, J, K, L이라 할 때, 사각형 $IJKL$의 둘레의 길이를 구하여라.

9. 삼각형 ABC의 각 B는 둔각이고 $\overline{BC} = 90$이다. 변 AC의 중점을 M이라 할 때, 선분 BM을 지름으로 하는 원이 직선 AB, BC와 각각 점 K $(\neq B)$, L $(\neq B)$에서 만난다. $\overline{BL} = 30$, $\overline{ML} = 20$일 때, 선분 AK의 길이를 구하여라. (단, L은 선분 BC 위에 있다.)

10. 평면 위에 평행한 서로 다른 10개의 직선이 주어져 있다. 10개의 직선을 더 그려서 만들 수 있는 삼각형의 최대 개수를 구하여라. (예를 들어, 아래 그림에서 삼각형의 갯수는 3이다.)



(뒷면에 계속)

11. 다음 정수를 107로 나눈 나머지를 구하여라.

$$106! \times \left(\frac{1}{3\times 104} + \frac{1}{4\times 103} + \frac{1}{5\times 102} + \cdots + \frac{1}{102\times 5} + \frac{1}{103\times 4} + \frac{1}{104\times 3}\right)$$

(단, $106! = 1\times 2\times 3\times \cdots \times 106$)

12. 총 합이 80인 10개의 실수 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중 5보다 큰 수들의 합이 60일 때

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + 10a_{10}$$

의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

13. 내심이 I인 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, AC와 접하는 점을 각각 D, E라 하고, 삼각형 IBC와 IAC의 외심을 각각 U, V라 하자. 점 D가 선분 UV 위에 있고 선분 BV와 변 AC가 점 K에서 만난다. $\overline{BD} = 32$, $\overline{KE} = 18$일 때, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름을 구하여라.

14. 갑과 을이 게임을 반복해서 한다. 어느 한 사람의 이긴 횟수가 진 횟수보다 3만큼 크면 그 사람이 우승하고 더 이상 게임을 하지 않는다. 예를 들어 을이 4승 2패인 상태에서 을이 다음 게임을 이기면 을이 우승한다. 0승 0패에서 게임을 시작하여 7승 4패로 을이 우승하는 경우의 수를 구하여라. 단, 각 게임에서 비기는 경우는 없다.

15. 양의 정수 m, n에 대하여 $2m^2 + mn + 3n^2$이 1017의 배수일 때, $m+n$의 값이 될 수 있는 수 중 가장 작은 것을 구하여라.

16. 실수 x, y, z가 $0 \le x, y, z \le 30$을 만족할 때,

$$xy - 3y^2 - xz + 5yz - 2z^2$$

의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

17. 정수 $(m+4\times 41)(m^2+4^2\times 41^2)$이 어떤 정수의 제곱이 되도록 하는 양의 홀수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

18. 실수 a, b, c가 $a+b+c=0$, $abc \neq 0$을 만족할 때,

$$-8abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^3$$

의 값이 될 수 있는 수 중 가장 작은 것을 구하여라.

19. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 만들 수 있는 7자리 양의 정수 중 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$에 대해 왼쪽에서 i번째 자리의 숫자는 $i+1$ 이하이면서, 숫자 1은 항상 짝수 개씩 연이어 나타나는 것의 개수를 구하여라. 예를 들어 2323232, 2111133, 1111211은 세지만, 6543222, 2111113, 1113114는 세지 않는다.

20. 삼각형 ABC에서 변 BC의 점 B쪽으로의 연장선 위에 점 D를 $\overline{AB} = \overline{BD}$가 되도록 잡자. 각 C의 외각의 이등분선이 직선 AD와 점 K에서 만나고, $\overline{AK} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$이다. 변 AC의 점 C쪽으로의 연장선 위에 점 E를 $\overline{BC} = \overline{CE}$가 되도록 잡자. 직선 AD와 삼각형 ABC의 외접원의 교점을 $L(\neq A)$이라 할 때, 세 점 B, E, L이 일직선 위에 있다. $\angle CAB = x^\circ$ $(0 < x < 180)$라 할 때, x를 넘지 않는 가장 큰 정수를 구하여라.

제28회 한국수학올림피아드 중등부 1차시험 정답

문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	120	017
2	017	120
3	016	280
4	280	016
5	020	012
6	012	020
7	009	022
8	022	009
9	052	570
10	570	052
11	051	720
12	720	051
13	024	081
14	081	024
15	565	075
16	075	565
17	205	054
18	054	205
19	065	025
20	025	065

대 한 수 학 회

제28회 2차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2014년 11월 2일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고, 직선 AI가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ABD의 내심 E와 D를 지나는 직선이 삼각형 BCE의 외접원과 만나는 점을 $P(\neq E)$라 하자. 또, 삼각형 ACD의 내심 F와 D를 지나는 직선이 삼각형 BCF의 외접원과 만나는 점을 $Q(\neq F)$라 하자. 변 BC의 중점이 삼각형 DPQ의 외접원 위에 있음을 보여라.

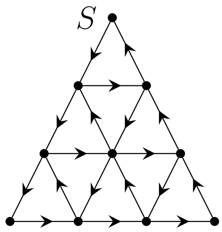
2. 주어진 짝수 개의 양의 실수 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}$에 대하여

$$s = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$$
$$t = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n}$$
$$x_k = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n)$$

이라 하자. 여기서 $a_{2n+1} = a_1$, $a_{2n+2} = a_2$, $\ldots$, $a_{3n-1} = a_{n-1}$이다. 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{s}{x_1} + \frac{t}{x_2} + \frac{s}{x_3} + \frac{t}{x_4} + \cdots + \frac{s}{x_{2n-1}} + \frac{t}{x_{2n}} > \frac{2n^2}{n+1}$$

3. 꼭짓점 10개로 이루어진 아래 그림에서 한 꼭지점으로부터 이웃한 꼭짓점으로 화살표 방향을 따라 움직이는 것을 한 번 이동한 것으로 보자. 꼭짓점 S에서 출발하여 총 n번 이동하는 방법의 수를 구하여라. 단, 지나갔던 꼭짓점이나 선분을 다시 지나가는 것도 허용한다.



4. 세 양의 정수 p, q, r을 모두 나누는 양의 정수가 1밖에 없다면, p와 $q + ar$이 서로소가 되도록 하는 정수 a가 존재함을 보여라.

제 28 회 2차시험 (중등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2014년 11월 2일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

5. 양의 정수 x, y에 대하여 x^2y+x가 xy^2+7의 배수가 되는 정수쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

6. 실수 p를 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}$라 하자. 등식

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=27$$

을 만족하는 음이 아닌 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^p+y^p+z^p$의 최댓값을 구하여라.

7. 평행사변형 $ABCD(AB < BC)$가 있다. 삼각형 ABC의 내접원이 점 P와 Q에서 각각 변 BC와 AC에 접하고, 삼각형 ACD의 내접원이 점 R에서 변 CD에 접한다. 점 S는 직선 PQ와 AD의 교점이고, 점 T는 선분 BC 위의 점으로 $AB = BT$를 만족하는 점이며, 점 U는 직선 AR과 CS의 교점일 때 세 직선 AT, BU, PQ가 한 점에서 만남을 보여라.

8. 학생 n명과 동아리 m개가 있는 어느 중학교에서 아래 조건을 만족하도록 학생들이 동아리에 가입하였다고 한다.

> 임의의 학생 x에 대하여, 동아리들을 적당히 잘 선택하면 그 동아리들에 모두 가입한 회원은 x밖에 없다.

각 학생이 가입한 동아리의 수를 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이라 할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$a_1!(m-a_1)!+a_2!(m-a_2)!+\cdots+a_n!(m-a_n)! \leq m!$$

한국수학올림피아드

제 28 회 고등부 수행평가

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2014년 5월 24일. 제한시간 4시간

- 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
  예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
- 문제 1∼4 번은 각 4 점, 문제 17∼20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다항식 $f(x)$와 실수 a, b, c에 대하여

$$f(x)(x-1)^{20} = (x^2+ax+1)^{30} + (x^2+bx+c)^{10}$$

일 때, $f(1)+a^2+b^2+c^2$ 의 값을 구하여라.

2. 아래와 같은 2×6 격자의 각 칸에 1 또는 2 중 하나를 써 넣으려고 한다. 각 $i=1,2,3,4,5,6$에 대하여 i 번째 열의 두 수의 곱을 c_i라 할 때, $c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6$ 이 짝수가 되도록 하는 방법의 수를 구하여라.

3. 양의 정수 중 6 의 배수가 아니고 2014 이하인 수들의 곱을 a라 하자. $\frac{a}{5^k}$가 정수가 되도록 하는 양의 정수 k 중 가장 큰 것을 구하여라.

4. 선분 AB 위에 $\overline{AS}=3$, $\overline{SB}=4$ 인 점 S가 있다. $\angle XBS = \angle AXS$를 만족하는 점 X에서 직선 AB까지 거리를 d라 할 때, d^2 의 최댓값을 구하여라.

5. 집합 $\{1,2,3,\ldots,8\}$ 의 부분집합 중에서 연속한 4 개의 수를 포함한 것의 개수를 구하여라.

6. 최고차항의 계수가 1 인 4차 다항식 $f(x)$가

$$f(2^n+1) = 8^n+1 \qquad (n=1,2,3,4)$$

을 만족할 때, $f(1)$ 의 값을 구하여라.

7. 삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$, $\overline{CA}=8$이다. 직선 AB 까지의 거리가 3 이고 직선 BC 까지의 거리가 2 인 점이 여러 개 있다. 이러한 점들에서 직선 CA까지 거리의 총합을 x라 할 때, x^2 의 값을 구하여라.

8. 다음 조건을 만족하는 정수 n중 가장 큰 것을 구하여라.

> n은 정수의 세제곱이 아니며, n^2 은 $([\sqrt[3]{n}])^5$ 의 배수이다.

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

9. 내심이 I 인 삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, CA, AB 와 각각 점 D, E, F에서 접할 때, 직선 EF와 BC가 점 J에서 만나고 $\overline{BJ}=100$, $\overline{CJ}=60$이다. 삼각형 ABC의 한 방접원이 변 BC와 점 K에서 접하고, 직선 IK가 변 CA를 $5:3$으로 내분하는 점 L을 지난다. 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름을 r이라 할 때, r^2 의 값을 구하여라.

10. 한 변의 길이가 1 인 정20각형 $P_1P_2\cdots P_{20}$ 의 꼭짓점 다섯 개로 이루어진 오각형 중 모든 변의 길이가 2 보다 큰 것의 개수를 구하여라. (단, 두 오각형을 이루는 꼭짓점이 하나라도 다르면 다른 것으로 본다.)

11. 정수 $(m+164)(m^2+164^2)$ 이 어떤 정수의 제곱이 되도록 하는 양의 홀수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

12. 모든 실수 $x>1$ 에 대하여 부등식

$$x^{100}-ax^{51}+ax^{49}\geq 1$$

이 항상 성립하게 하는 실수 a 중 가장 큰 것을 구하여라.

13. 변의 길이가 모두 양의 정수이며 다음 조건을 모두 만족하는 육각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

(i) 내각의 크기가 모두 같다.

(ii) 두 변이 평행하면 그 길이가 같다.

(iii) 이웃한 두 변의 길이는 다르다.

(iv) 넓이는 $12\sqrt{3}$ 이하이다.

14. $f(m)=6^m$ 일 때, 분수식

$$\sum_{n=1}^{20}\frac{x^{f(n)}\left(1-x^{f(20n)}\right)}{1-x^{f(n)}}\qquad(x\neq\pm1)$$

을 간단히 하면 정수 계수 다항식을 얻는다. 이 다항식에서 $x^{1\times2\times3\times\cdots\times20}$ 의 계수를 구하여라.

15. 모든 $m,n,k\geq 0$ 에 대하여

$$0<a_{m+n+k}\leq 3\max\{a_m,a_n,a_k\}$$

를 만족하는 임의의 수열 $a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$ 에 대하여

$$\frac{a_{i_1+\cdots+i_{201}}}{\max\{a_{i_1},\ldots,a_{i_{201}}\}}$$

이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.
(단, $\max\{x_1,\ldots,x_\ell\}$ 은 $x_1,\ldots,x_\ell$ 중 가장 큰 수이다.)

16. 양의 정수 m, n $(m<n)$ 에 대하여 m 이상 n 이하인 정수의 집합을 $[m,n]$ 이라 하자. 8 이하인 양의 정수 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 을 고를 때, $a_1<a_2<a_3$ 을 만족하고, $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$ 중 어느 것도 다른 것의 부분집합이 아닌 경우의 수를 구하여라. (단, $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$)

17. 모든 $-1\leq x\leq 1$ 에 대하여 $0\leq f(x)\leq 1$ 인 6차 다항식 $f(x)$ 에서 x^6 의 계수가 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

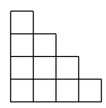
18. 각 A 가 예각인 삼각형 ABC 에 대하여 각 B 의 이등분선이 변 AC 와 만나는 점을 D, 각 C 의 이등분선이 변 AB 와 만나는 점을 E 라 하자. 선분 DE 의 중점 F 에서 직선 AB 와 BC 에 내린 수선의 발을 각각 J 와 K 라 하면, $\overline{AD}=30$, $\overline{FJ}=12$, $\overline{FK}=20$ 이다. $\overline{DE}=x$ 일 때, x^2 의 값을 구하여라.

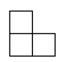
19. 수열 $\{a_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{1}{2[a_n]-a_n+1}\qquad(n\geq1)$$

$a_{2014}=\dfrac{q}{p}$ $(p,\ q$ 는 서로소인 양의 정수$)$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

20. 두 종류의 타일 □과 □□을 겹치지 않게 배치하여 아래 모양을 만드는 방법의 수를 구하여라.



예를 들어,  모양은 세 가지 방법으로 만들 수 있다.

(끝)

제28회 한국수학올림피아드 고등부 수행평가 정답

문제번호	문제유형	
	가형	나형
1	010	080
2	080	010
3	419	021
4	021	419
5	048	025
6	025	048
7	300	972
8	972	300
9	125	504
10	504	125
11	205	050
12	050	205
13	020	007
14	007	020
15	243	490
16	490	243
17	016	580
18	580	016
19	064	140
20	140	064

대 한 수 학 회

제28회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2014년 11월 2일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

1. 정수 x, y에 대하여 x^2-4y+1이 $(x-2y)(1-2y)$의 배수일 때, $|x-2y|$가 완전제곱수임을 보여라.

2. 다음 조건을 만족하는 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을 모두 구하여라. 단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.

모든 실수 x, y에 대하여 $f(xf(x)+f(x)f(y)+y-1)=f(xf(x)+xy)+y-1$ 이다.

3. 원 O의 지름이 아닌 현 AB가 있다. 점 A와 B에서의 원 O의 접선의 교점을 C라 하고 선분 AC와 BC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 점 C를 지나고 원 O와 외접하는 원이 직선 MN과 두 점 P, Q에서 만날 때, $\angle PCQ = \angle CAB$임을 보여라.

4. 총 n개의 지하철역의 위치가 정n각형을 이루고 있는 도시가 있다. 지하철 1호선은 이 정n각형에서 이웃하지 않은 두 지하철역 A와 B만을 직선으로 연결한 노선이다. 지하철 2호선은 정n각형 형태로 이 도시의 지하철역을 모두 지나는 순환형 노선이다. 지하철은 각 노선에서 양방향으로 모두 운행되며, A와 B는 다른 노선으로 갈아탈 수 있는 역이다. 지하철 각 노선에서 이웃한 두 지하철역 사이를 하나의 지하철 구간이라 하자. 각 지하철역의 역장은 1명이며 여자가 역장인 지하철역도 있고 남자가 역장인 지하철역도 있다고 하자.
이때 n이 홀수이면, 모든 정수 k $(0<k<n)$에 대하여, 정확히 k개의 지하철 구간을 이용하여 남자가 역장인 어느 지하철역에서 여자가 역장인 지하철역으로 같은 역을 두 번 들르지 않고 이동할 수 있음을 보여라.

제28회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2014년 11월 2일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7점

5. 볼록사각형 $ABCD$에서 $\angle A = \angle D$이다. 두 대각선의 교점을 E라 하고 변 AB, CD, DA의 중점을 각각 L, M, N이라 하자. 점 A에서 직선 AD에 접하고 점 E를 지나는 원이 직선 EN과 점 $F(\neq E)$에서 만난다고 할 때, $\angle NFL = \angle MFN$임을 보여라.

6. 다음 조건을 모두 만족하는 일대일함수 $f : \{1, 2, \ldots, 9\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$의 개수를 구하여라.

(i) $f(1) > f(2)$이고 $f(9) < 9$이다.

(ii) $f(1), f(2), \ldots, f(i-1)$이 모두 $f(i)$보다 작으면, $f(i+1)$도 $f(i)$보다 작다. (단, $i = 3, 4, \ldots, 8$)

7. 다음 조건을 모두 만족하는 실수 x, y, z에 대하여 $x^4 + y^4 + z^4$의 최솟값을 구하여라.

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 8, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

8. 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$이 존재함을 보여라. 단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이다.

(i) $\{f(n)\colon n \in \mathbb{N}\}$은 유한집합이다.

(ii) 0이 아닌 정수 $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$이 $f(|x_1|) = f(|x_2|) = \cdots = f(|x_{1000}|)$을 만족하면

$$x_1 + 2x_2 + 2^2x_3 + 2^3x_4 + 2^4x_5 + \cdots + 2^{999}x_{1000} \neq 0$$

이다.

제 27 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2014년 3월 22일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

1. 양의 실수 x, y, z 가 식 $x + y + z = 1$ 을 만족할 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{(1+xy+yz+zx)(1+3x^3+3y^3+3z^3)}{9(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \left(\frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{3+9x^2}} + \frac{y\sqrt{1+y}}{\sqrt[4]{3+9y^2}} + \frac{z\sqrt{1+z}}{\sqrt[4]{3+9z^2}} \right)^2$$

2. 삼각형 ABC 가 $AC = BC > AB$ 를 만족한다. 변 AC, AB 의 중점을 각각 E, F 라 하고, 변 AC 의 수직이등분선 ℓ 이 AB 와 만나는 점을 K, 점 B 를 지나고 KC 에 평행인 직선이 AC 와 만나는 점을 L, 직선 FL 과 ℓ 이 만나는 점을 W 라 하자. 선분 BF 위의 점 P 에 대하여 삼각형 ACP 의 수심을 H 라 하면, 선분 BH 와 선분 CP 가 점 J 에서 만나고 직선 FJ 와 ℓ 이 점 M 에서 만난다. 이 때, $AW = PW$ 가 삼각형 EFM 의 외접원 위에 점 B 가 있을 필요충분조건임을 보여라.

3. 서로 다른 이름의 n 명의 학생들이 원형으로 서있다. 이들로부터 이름표를 수거하여 무작위로 하나씩 나누어 주고 다음 시행을 반복하자.

(시행) 가지고 있는 이름표를 확인하여 자신의 이름표를 가진 학생은 퇴장하고, 남은 학생은 가지고 있던 이름표를 시계방향으로 다음 학생에게 전달한다.

4 번 시행한 이후에도 퇴장하지 못한 학생이 있도록 이름표를 처음에 나누어주는 방법의 수를 구하여라.

제 27 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2014년 3월 23일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분; 문항당 7점

4. 두 변 AC와 BC의 길이가 같은 이등변 삼각형 ABC에 대하여, 선분 BA를 점 A쪽으로 연장한 연장선 위에 점 D를 잡고, 삼각형 DAC의 외접원 O_1이 직선 BC와 만나는 점을 E라 하자. 점 D에서 원 O_1에 대한 접선이 직선 BC와 만나는 점을 F라 하고, $\triangle DBF$의 외접원 O_2와 O_1의 교점을 G라 하자. 삼각형 BEG의 외심을 O라 하자. 직선 FG가 삼각형 BEG의 외접원에 접할 필요충분조건이 직선 DG와 직선 FO가 직교하는 것임을 보여라.

5. 소수 p가 5보다 크다. k^2+5가 p의 배수인 정수 k가 존재할 때, $p^2 = m^2 + 5n^2$을 만족하는 양의 정수 m, n이 존재함을 보여라.

6. 어떤 섬에 n개의 성이 있고, 각 성은 A, B 나라 중 하나에 속한다고 하자. 각 성에는 그 나라의 장수가 1명씩 있다. 어느 두 성 사이에 다른 성을 지나지 않고 이동할 수 있는 길이 있으면 그 두 성이 이웃한다고 하자. 다음 두 명제가 필요충분조건임을 보여라.

1. B나라의 장수들 중 일부가 각각 이웃한 A성 중 하나를 무작위로 골라 동시에 공격하더라도, A나라 장수들 중 일부를 이웃한 성들로 동시에 잘 움직여 방어를 하게 하면, A나라 각 성에 대하여, 그 성을 공격하는 B나라 장수의 수보다 그 성을 방어하는 A나라 장수의 수가 많거나 같게 할 수 있다.
2. A나라 성들로 이루어진 임의의 집합 X에 대해, X에 속하거나 X 중 적어도 하나에 이웃한 A나라 성의 개수가, X중 적어도 하나에 이웃한 B나라 성의 개수보다 많거나 같다.

제 29 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2015년 5월 16일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다. 예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ～ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ～ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 포물선 $y = x^2$ 위의 세 점 A, B, C 의 x좌표를 각각 a, b, c $(a < b < c)$라 하자. 선분 BC, CA의 중점을 각각 D, E라 할 때, 직선 AD가 x축과 평행하고 직선 BE는 y축과 평행하다. $\overline{AD} = \overline{BE}$일 때 $16(a^2 + b^2 + c^2)$의 값을 구하여라.

2. 다음 세 조건을 모두 만족하는 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$의 개수를 구하여라.

(i) $a_i \in \{1, 2, 3\} \quad (i = 1, 2, \ldots, 10)$

(ii) $i = 1, 3, 5, 7, 9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$

(iii) $i = 2, 4, 6, 8$ 이면 $a_i \geq a_{i+1}$

3. 삼각형 ABC에서 $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\overline{AB} = \sqrt{3}+1$이다. 반지름이 1인 원 O_1이 변 AB와 변 AC에 모두 접하고 원 O_2가 변 AB, 변 BC, 원 O_1에 모두 접한다. 원 O_2의 반지름을 r이라 할 때 $300r$의 값을 구하여라.

4. $5^{(2^k)}$을 2^{1000}으로 나눈 나머지가 1이 되도록 하는 양의 정수 k중 가장 작은 것을 구하여라.

5. 다음 두 조건을 모두 만족하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

(i) $a + b = 1$

(ii) $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3)(a^4 + b^4) = a^5 + b^5 - 3a^2b^2$

6. 아흔 아홉 명의 사람 p_1, p_2,..., p_{99}가 서로 악수를 할 때 $i = 1, 2, \ldots, 98$에 대하여 p_i와 악수를 한 사람이 정확히 i명이다. p_{99}와 악수한 사람의 수를 구하여라.

7. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 18$, $\overline{BC} = 12$이다. 변 BC의 삼등분점을 D와 E라 하면 $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 3\overline{DE}^2$이다. 삼각형 ADE의 외접원의 반지름을 r이라 할 때 r^2의 값을 구하여라.

8. 양의 정수 m, n이

$$\left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right] = 421$$

을 만족할 때, m과 n의 최대공약수로 가능한 수 중 가장 큰 것을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

9. 팔각형 $A_1A_2 \cdots A_8$의 꼭짓점에 다음 세 조건을 모두 만족하도록 8개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 배치하는 방법의 수를 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) 각 꼭짓점에 서로 다른 수를 하나씩 배치한다.

(ii) 홀수와 이웃한 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다.

(iii) 짝수와 이웃한 두 수 중 적어도 하나는 짝수이다.

(뒷면에 계속)

10. 실수 a, b, c, d가 $a^2+c^2=4$와 $b^2+d^2=5$를 만족할 때 $ab+cd+2(ad-bc)$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

11. 외접원의 반지름의 길이가 10인 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=12$이고 $\overline{AC}:\overline{BC}=7:5$이다. 각 C의 이등분선이 변 AB와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ABC의 외부에 있는 원 O가 점 D에서 변 AB에 접하고 삼각형 ABC의 외접원에 내접한다. 원 O의 반지름의 길이를 r이라 할 때 $36r$의 값을 구하여라. (단, 각 C는 예각)

12. 양의 정수 a, b, c가 $a^2=4(b+c)$를 만족할 때

$$\frac{a^4-b^4-c^4}{abc}$$

의 값이 될 수 있는 양수 중 가장 작은 것을 k라 하자. $240k$의 값을 구하여라.

13. 세 실수 x, y, z가 다음 두 조건을 모두 만족할 때 $16(x^7+y^7+z^7)$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $xyz=1$

(ii) $yz^2(x^4+2y^2)=zx^2(y^4+2z^2)=xy^2(z^4+2x^2)$

14. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 a_1, a_2, a_3, a_4의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)의 개수를 구하여라.

(i) $0 \le a_i \le 5 \quad (i=1,2,3,4)$

(ii) $a_i - a_{i+1} \le i \quad (i=1,2,3)$

15. 각 B가 예각인 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=3\overline{AB}$이다. 삼각형 ABC의 외접원과 점 A에서 접하는 직선이 선분 BC의 수직이등분선과 점 D에서 만나고 $\overline{AD}=6$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때 $7r^2$의 값을 구하여라.

16. 소수 p와 양의 정수 m이

$$157p=m^4+2m^3+m^2+3$$

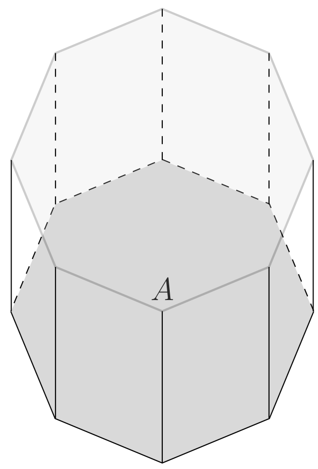
을 만족할 때 $p+m$의 값을 구하여라.

17. 양의 실수 a, b, c가

$$\frac{\sqrt{a+6b+1}+\sqrt{2b+5c+3}+\sqrt{3c+7a+5}}{a+b+c}=4$$

를 만족할 때 $100(a+b+c)$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

18. 팔각기둥의 한 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 이동하면서 다른 모든 꼭짓점을 한 번씩 지나 다시 A로 돌아오는 경로의 개수를 구하여라.



19. 삼각형 ABC의 내심을 I, 직선 CI와 삼각형 ABC의 외접원 O가 만나는 점을 $D(\neq C)$라 하자. 직선 BD가 삼각형 ABI의 외접원과 점 $E(\neq B)$에서 만나고 직선 AE가 원 O와 점 $F(\neq A)$에서 만난다. 원 O의 지름이 10이고 삼각형 ABI의 외접원의 반지름은 4이다. 원 O의 중심과 삼각형 EBF의 외심 사이의 거리를 x라 할 때 $21x^2$의 값을 구하여라.

20. 양의 정수 m에 대하여 2015를 m번 반복하여 써서 얻은 $4m$ 자릿수 $20152015\cdots2015$를 a_m이라 하자. 1000보다 작은 양의 정수 k 중 어떤 a_m의 약수가 될 수 있는 것의 개수를 구하여라.

(끝)

제29회 한국수학올림피아드 중등부 1차시험 정답

중등부 가형

문제번호	정답	문제번호	정답
1	075	11	035
2	243	12	830
3	100	13	521
4	998	14	648
5	004	15	162
6	049	16	224
7	069	17	225
8	002	18	020
9	912	19	100
10	010	20	480

중등부 나형

문제번호	정답	문제번호	정답
1	243	11	830
2	075	12	035
3	998	13	648
4	100	14	521
5	049	15	224
6	004	16	162
7	002	17	020
8	069	18	225
9	912	19	480
10	010	20	100

대 한 수 학 회

제 29 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2015년 11월 1일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

1. 이등변 삼각형이 아닌 예각 삼각형 ABC의 외심을 O, 변 AC의 중점을 M이라 하고, 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 삼각형 OAM의 외접원과 직선 DM의 교점을 $P(\neq M)$라 하자. 세 점 B, O, P는 한 직선 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수 m에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수가 0 또는 짝수임을 보여라.

(i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$

(ii) $2y \leq x - 1$

3. 음이 아닌 모든 정수 i에 대하여 숫자 2^i이 적힌 카드가 각각 7장씩 있다. 양의 정수 n에 대하여 카드에 적힌 수의 합이 n이 되도록 카드를 선택하는 방법의 개수를 구하여라. (단, 방법의 개수를 구할 때 같은 숫자가 적힌 카드는 구별하지 않는다.)

4. 실수 a, b, c, x, y가 $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 = 1$을 만족할 때,

$$(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$$

의 최댓값을 구하여라.

제 29 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2015년 11월 1일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

5. 예각 삼각형 ABC의 내심과 내접원을 각각 I, Γ라 하자. 삼각형 IBC의 외접원과 원 Γ의 두 교점 중 B와 가까운 점을 D, C와 가까운 점을 E 라 하자. 원 Γ와 직선 BE의 교점을 $K(\neq E)$라 하고, 직선 CD와 선분 BI, 원 Γ의 교점을 각각 T, $L(\neq D)$이라 하자. 점 T를 지나고 선분 BI와 수직인 직선이 원 Γ와 만나는 두 점 중 삼각형 IBC 내부의 점을 P라 하자. 점 P에서의 원 Γ의 접선, 직선 KL, 직선 BI가 한 점에서 만남을 보여라.

6. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

(i) 서로 다른 실수 x, y에 대하여 $f(x) \neq f(y)$

(ii) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x + f(f(-y))) = f(x) + f(f(y))$

7. 차수가 일차 이상이며, 계수가 정수인 다항식 $f(x)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 소수 p가 무한히 많음을 보여라.

(조건) $f(n) \neq 0$이고 $|f(n)|$이 p의 배수가 되는 정수 n이 존재한다.

8. 양의 정수 n이 주어져 있다. 다음 세 조건을 모두 만족하는 m개의 집합 $F_1, F_2, \dots, F_m$이 존재하면 $m \leq n$ 임을 보여라. (단, 집합 A, B에 대하여 $|A|$는 A의 원소의 개수이고, $A - B$는 A의 원소 중 B의 원소가 아닌 것의 집합이다.)

(i) 모든 $1 \leq i \leq m$에 대하여 $F_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

(ii) $|F_1| \leq |F_2| \leq \cdots \leq |F_m|$

(iii) 모든 $1 \leq i < j \leq m$에 대하여 $|F_i - F_j| = 1$

kmo 한국수학올림피아드

2015년 고등부 수행평가

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

유형 가

2015년 5월 16일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 실계수 5차 다항식 $f(x)$의 모든 계수가 0 이상이다. $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족할 때 $\frac{f(3)}{f(2)}$에 가장 가까운 정수를 구하여라.

(i) $x \neq 0$인 모든 x에 대하여 $f(x) = x^6 f\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $f(2) = 10f(1)$

2. 다음 세 조건을 모두 만족하는 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$의 개수를 구하여라.

(i) $a_i \in \{1,2,3\} \quad (i = 1,2,\ldots,10)$

(ii) $i = 1,3,5,7,9$ 이면 $a_i < a_{i+1}$

(iii) $i = 2,4,6,8$ 이면 $a_i > a_{i+1}$

3. 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 C를 잡고, 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 어떤 원이 선분 BC와 점 M에서 접하고, 호 BC와 점 D에서 접한다. 선분 AD와 BC의 교점을 E라 하자. $\overline{AB} = 20$, $\overline{AC} = 5$일 때 $\overline{CE}^2$의 값을 구하여라.

4. 양의 정수 m, n이 다음 조건을 만족할 때 $m+n$의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

$k^3 - mk^2 - nk + 2015 = 0$을 만족하는 양의 정수 k가 존재한다.

5. 다음 조건을 만족하는 모든 소수 p의 합을 구하여라.

$p^4 + 119$의 양의 약수의 개수가 20 이하이다.

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$\sum_{k=2}^{2015}(-1)^k\ {}_{2015}C_k\ (n \cdot k^{2015} - 1)$ 을 소수 2017로 나눈 나머지가 1이다.

7. 다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수를 구하여라.

(i) $x_1 = x_5$

(ii) $x_i \neq x_{i+1} \quad (i = 1,2,3,4)$

(iii) $x_i + x_{i+1} \leq 6 \quad (i = 1,2,3,4)$

8. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{CA} = 13$이다. 점 P가 평면 위를 움직일 때

$$5\overline{PA}\cdot\overline{PB} + 12\overline{PB}\cdot\overline{PC} + 13\overline{PC}\cdot\overline{PA}$$

의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

9. 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_7$ 이 $\sum_{i=1}^{7} x_i = 0$ 과 $\sum_{i=1}^{7} |x_i| = 1$을 만족할 때

$$\sum_{i=1}^{7} x_i |x_i|$$

의 값 중 가장 큰 것을 $\frac{q}{p}$ (단, p, q는 서로소인 양의 정수)라 하자. $p+q$의 값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

10. 함수 $f: \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

$$f(k+1) \le f(k)+1 \qquad (k=1,2,3,4)$$

11. 삼각형 ABC의 내접원 O와 방접원이 변 BC에 각각 점 D와 E에서 접한다. 선분 AE가 원 O와 두 점 P, Q $(\overline{AP} < \overline{AQ})$에서 만나고 $\overline{PQ} = 40$, $\overline{EQ} = 5$이다. $\overline{DQ}^2$의 값을 구하여라.

12. 양의 정수 n을 서로 다른 2개의 양의 정수를 각각 한 번 이상 사용하여 합으로 나타내는 방법의 수를 $q(n)$이라고 하자. 이 때 더하는 순서는 고려하지 않는다. 예를 들어 5는

$$4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1$$

으로 나타낼 수 있으므로 $q(5) = 5$이다. 100 이하의 양의 정수 n 중 다음 두 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(i) n을 4로 나눈 나머지는 3이다.

(ii) $q(n)$은 짝수이다.

13. 실수 a, b, c가 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 6abc$를 만족한다. $0 \le a \le 1$일 때 $4bc - a^2 - b - c$의 값 중 가장 큰 것을 m이라 하자. $32m$ 이하의 정수 중 가장 큰 것을 구하여라.

14. 십각형 $A_1A_2\cdots A_{10}$의 꼭짓점에 다음 두 조건을 모두 만족하도록 10개의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10을 배치하는 방법의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) 각 꼭짓점에 서로 다른 수를 하나씩 배치한다.

(ii) 이웃한 두 꼭짓점에 배치된 두 수는 서로소이다.

15. 각 B가 둔각인 삼각형 ABC의 수심과 외심을 각각 H와 O라 할 때, $\overline{AO} = 8$, $\overline{AH} = 12$이다. 점 C에서 변 AB의 연장선 위에 내린 수선의 발을 D, 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 세 점 D, E, O가 일직선 위에 있다. 선분 AE 위의 점 P가 $\overline{EP} = \overline{EO}$를 만족할 때 $\overline{HP}^2$의 값을 구하여라.

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$n^4 + 1$이 274의 배수이다.

17. 수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

(ii) $a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2} = 4^n \qquad (n \ge 4)$

이 때

$$\frac{a_{2016} + 4a_{2014}}{a_{2015}}$$

의 값을 구하여라.

18. 정수를 원소로 하는 집합 S에 대하여 $S+1$을 집합 $\{k+1 \mid k \in S\}$라 하자. 집합 $\{1,2,3,\ldots,10\}$의 공집합이 아닌 부분집합 K 중 $K = S \cup (S+1)$을 만족하는 집합 S가 존재하는 것의 개수를 구하여라.

19. 삼각형 ABC (단, $\angle B < \angle C$)의 변 AC의 삼등분점 중 점 C에 가까운 것을 D, 점 A에 가까운 것을 E라 하자. 삼각형 BCE의 외접원과 변 AB의 교점을 $F(\ne B)$라 하면 $\overline{AF} = 2$이다. 직선 EF와 직선 BC의 교점을 K, 직선 AK와 직선 BE의 교점을 L, 직선 DL과 직선 BC의 교점을 M이라 하면 $\overline{CM} = 1$이다. 직선 DK가 변 AB의 중점을 지날 때 $\overline{AK}^2$의 값을 구하여라.

20. 다섯 개 이상의 양의 약수를 갖는 모든 양의 정수들의 집합을 S라 하자. 집합 S의 원소 n 중 다음 두 조건을 모두 만족하는 것들의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $n < 2015$

(ii) n의 양의 약수 중 가장 작은 다섯 개를 1, a, b, c, d (단, $1 < a < b < c < d$)라고 할 때, $n = 12ac + 7d^2$이다.

(끝)

제29회 한국수학올림피아드 고등부 수행평가 정답

고등부 가형

문제번호	정답	문제번호	정답
1	005	11	200
2	144	12	009
3	015	13	008
4	036	14	760
5	010	15	080
6	673	16	041
7	064	17	261
8	780	18	199
9	029	19	118
10	728	20	768

고등부 나형

문제번호	정답	문제번호	정답
1	144	11	009
2	005	12	200
3	036	13	760
4	015	14	080
5	010	15	008
6	064	16	041
7	673	17	199
8	780	18	261
9	728	19	768
10	029	20	118

대 한 수 학 회

제 29 회 고등부 본선

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2015년 11월 1일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

1. 양의 정수 m에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수가 0 또는 짝수임을 보여라.

(i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$

(ii) $2y \le x - 1$

2. 삼각형 ABC의 외접원을 ω라 하자. 점 D는 선분 BC 위에 있고, 점 E는 선분 AD 위에 있다. 반직선 AD와 원 ω의 교점을 F라 하자. 원 ω 위의 점 M은 호 AF를 이등분하는 점으로서, 선분 AF에 대하여 C의 반대쪽에 있다. 반직선 ME와 원 ω의 교점을 G, 반직선 GD와 원 ω의 교점을 H, 반직선 MH와 반직선 AD의 교점을 K라 할 때, 네 점 B, E, C, K가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 실수 a, b, c, x, y가 $a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 = 1$을 만족할 때,

$$(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$$

의 최댓값을 구하여라.

4. 양의 정수 n, k, ℓ에 대하여, 다음 네 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$의 개수를 $Q(n, k, \ell)$라고 하자.

(i) $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell$

(ii) $a_1 > a_2 > \cdots > a_\ell > 0$

(iii) a_ℓ은 홀수

(iv) a_i 중 홀수의 개수가 정확히 k개

예를 들어, $9 = 8 + 1 = 6 + 3 = 6 + 2 + 1$이므로 $Q(9, 1, 1) = 1$, $Q(9, 1, 2) = 2$, $Q(9, 1, 3) = 1$이다. $n > k^2$이면 $\sum_{\ell=1}^{n} Q(n, k, \ell)$가 0 또는 짝수임을 보여라.

제 29 회 고등부 본선

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2015년 11월 1일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

5. 모든 실수 x, y, z에 대하여 다음 식을 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

$$(f(x)+1)(f(y)+f(z)) = f(xy+z) + f(xz-y)$$

6. 원 ω에 내접하는 등변사다리꼴 $ABCD$가 $AB = CD$, $AD < BC$, $AD < CD$를 만족한다. 중심이 D이고 점 A를 지나는 원이 선분 BD, 선분 CD, 원 ω와 각각 점 E, 점 F, 점 $P(\neq A)$에서 만난다고 하자. 직선 AP와 직선 EF의 교점을 Q라 하고, 원 ω가 직선 CQ, 삼각형 BEQ의 외접원과 만나는 점을 각각 $R(\neq C)$, $S(\neq B)$라 하자. $\angle BER = \angle FSC$임을 보여라.

7. 양의 정수 n이 주어져 있다. 다음 두 조건을 모두 만족하는 m개의 집합 $F_1, F_2, \ldots, F_m$이 존재하면 $m \le n$ 임을 보여라. (단, 집합 A, B에 대하여 $|A|$는 A의 원소의 개수이고, $A - B$는 A의 원소 중 B의 원소가 아닌 것의 집합이다. 실수 x, y에 대하여 $\min(x, y)$는 x와 y 중 크지 않은 값이다.)

(i) 모든 $1 \le i \le m$에 대하여 $F_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

(ii) 모든 $1 \le i < j \le m$에 대하여 $\min(|F_i - F_j|, |F_j - F_i|) = 1$

8. 양의 정수 n에 대하여, $a_1, a_2, \ldots, a_k$는 n이하의 양의 정수 중 n과 서로소인 수를 모두 한 번씩 나열한 것이다. $k > 8$ 일 때, 다음을 보여라.

$$\sum_{i=1}^{k} \left| a_i - \frac{n}{2} \right| < \frac{n(k-4)}{2}$$

제 28 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2015 년 3 월 21 일 (오후) ; 제한시간 4 시간 30 분 ; 문항당 7 점

1. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

$$\text{모든 실수 } x, y \text{에 대하여 } f(x^{2015} + f(y)^{2015}) = f(x)^{2015} + y^{2015} \text{이다.}$$

2. 내심이 I 인 삼각형 ABC 의 내접원이 변 BC, CA, AB 와 각각 점 D, E, F 에서 접한다. 삼각형 IAB, IAC 의 외심을 각각 O_1, O_2 라 하고, 삼각형 ABC 의 외접원과 직선 EF 의 두 교점을 P, Q 라 하자. 삼각형 DPQ 의 외심이 직선 O_1O_2 위에 있음을 보여라.

3. 지하철역이 3 개 이상인 도시가 있다. 이 도시에서 같은 지하철역을 두 번 이상 지나지 않고도 총 $L+1$ 개 이상의 지하철역을 지나는 경로가 있다면 다음 중 하나는 반드시 성립함을 보여라. (단, 지하철은 양방향으로 모두 운행한다.)

(i) 서로 다른 세 개의 지하철역 A, B, C 가 존재하여 C 를 지나지 않고 A 에서 B 로 가는 경로가 없다.

(ii) 적당한 지하철역에서 출발하여 같은 지하철역을 두 번 이상 지나지 않고 출발했던 지하철역으로 되돌아오는 방법 중 지하철역 $\lceil \sqrt{2L} \rceil$ 개 이상을 지나는 방법이 있다. 단, $\lceil x \rceil$ 는 x 보다 작지 않은 정수 중 가장 작은 것이다.

제 28 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2015 년 3 월 22 일 (오전) ; 제한시간 4 시간 30 분 ; 문항당 7 점

4. 예각삼각형 ABC 의 수심 H 와 꼭짓점 A, B 를 모두 지나는 원 ω 가 변 BC 와 점 $D\ (\neq B)$ 에서 만난다고 하자. 직선 DH 와 변 AC 의 교점을 P 라 하고, 삼각형 ADP 의 외심을 Q 라 할 때, 원 ω 의 중심이 삼각형 BDQ 의 외접원 위에 있음을 보여라.

5. 주어진 양의 정수 k 에 대하여 다음 조건을 만족하는 두 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 있다.

$$a_1 = k, \qquad a_2 = k, \qquad a_{n+2} = a_n a_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = k, \qquad b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^3 + 1}{b_n} \quad (n \geq 1)$$

모든 양의 정수 n 에 대하여 $a_{2n}b_{n+3}$ 은 정수임을 보여라.

6. 반지름은 1 이고 중심이 서로 다른 원 2015 개가 평면에 있다. 이 중 27 개의 원을 뽑아 다음 조건을 만족하는 모임 C 를 만들 수 있음을 보여라.

> C 의 임의의 두 원은 서로 만나거나 C 의 어떤 두 원도 서로 만나지 않는다.

제 30 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

가형

2016년 5월 28일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다음 두 조건을 모두 만족하도록 좌표 평면의 제 1 사분면에 있는 각 정수격자점에 수를 하나씩 쓸 때, $(2016, 1050)$ 의 위치에 쓰는 수를 구하여라. (단, 정수격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점)

(i) 점 (x, x) 의 위치에는 x 를 쓴다.

(ii) 점 (x, y), (y, x), $(x, x+y)$ 에는 모두 같은 수를 쓴다.

2. 열 개의 수 $0, 1, 2, \ldots, 9$ 중 다섯 개를 사용하여 5자리 수 A 를 만들고, 나머지 다섯 개를 사용하여 5자리 수 B 를 만든다고 하자. $|A-B|$ 가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

3. 2부터 9까지의 정수 중 서로 다른 여섯 개를 선택하여 만들 수 있는 6자리 수 중 99 의 배수인 것의 개수를 구하여라.

4. 원 O 에 내접하는 사각형 $ABCD$ 가 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\overline{BC} = \overline{CD}, \quad \overline{AB} = \overline{AC}, \quad \angle BCD = 120^\circ$$

점 A 에서 BD 에 내린 수선의 발을 E 라 하면, $\overline{DE} = 6\sqrt{3} - 6$ 이다. 원 O 의 반지름의 길이를 구하여라.

5. 다음 식을 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{2016}$$

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 의 개수를 구하여라.

n 은 k 자리 수이고, n 의 각 자리의 수의 합이 $12(k-1)$ 이다.

7. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수를 구하여라.

(i) $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 11$

(ii) $a_{k+1} - a_k \le 3 \quad (k = 1, 2, 3)$

8. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\angle ABC > \angle CAB$ 이다. 점 B 에서 삼각형 ABC 의 외접원에 접하는 직선이 직선 AC 와 점 D 에서 만난다. 선분 AC 위의 점 E 는 $\angle DBC = \angle CBE$ 를 만족하는 점이다. $\overline{BE} = 40$, $\overline{CD} = 50$ 일 때, $\overline{AE}$ 의 값을 구하여라.

9. 양의 정수 k 에 대하여

$$a_k = (1+\sqrt{k})(1+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})$$

라 하자. 양의 정수 m, n 이

$$10\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{10}}\right) = m - \sqrt{n}$$

을 만족할 때 $m+n$ 의 값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

10. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 큰 것을 구하여라.

> $m^2 = p^n + 3600$ 인 소수 p와 양의 정수 n이 존재한다.

11. 좌표평면에서 $(-3,3)$, $(3,3)$, $(3,-3)$, $(-3,-3)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부 또는 변 위에 있고 x좌표, y좌표가 모두 정수인 49개의 점을 생각하자. 이 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 모든 삼각형 중에서 무게중심이 원점인 것의 개수를 구하여라.

12. 출제취소

13. 다음 식의 값이 정수의 세제곱이 되도록 하는 가장 작은 양의 정수 n을 구하여라.

$$6n^2 - 192n + 1538$$

14. 양의 정수 n을 100으로 나눈 몫을 q, 나머지를 r이라 하자. $q^2 + r + 1$을 74로 나눈 몫이 $r + 1$이고 나머지는 q일 때, n을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

15. 다음 세 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$의 개수를 구하여라.

(i) $4 \le a_1 \le 6$이고, $1 \le a_k \le 6 \quad (k = 2,3,4,5,6)$

(ii) $a_1, a_2, \ldots, a_6$이 모두 다르다.

(iii) $a_1 > a_2,\ \ a_2 < a_3,\ \ a_3 > a_4,\ \ a_4 < a_5,\ \ a_5 > a_6$

16. 삼각형 ABC는 각 A의 크기가 $50°$이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이다. 변 BC의 중점 D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E, 점 A와 선분 DE의 중점을 지나는 직선이 변 BC와 만나는 점을 F, 선분 CE와 AD의 교점을 G라 하자. $\angle FGD = x°$일 때, x의 값을 구하여라.

17. 2016보다 작은 양의 정수 n 중에서

$$\frac{(2016-n)! \times (n!)^2}{6^n}$$

의 값을 가장 작게 만드는 n을 구하여라.
(단, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$)

18. 양의 정수 n이

$$\left[\frac{n}{10}\right] + \left[\frac{n}{100}\right] + \left[\frac{n}{1000}\right] + \left[\frac{n}{10000}\right] = 2016$$

을 만족하고 n의 각 자리의 수의 합이 20일 때, n을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

19. 25개의 수

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots,\ \frac{1}{25}$$

중 짝수개(2개 이상)의 서로 다른 수를 선택하는 경우의 수를 N이라 하자. 각 경우마다 선택한 수를 모두 곱한다. 이렇게 하여 얻은 N개의 수를 모두 더한 값을 구하여라.

20. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 변 BC의 중점을 M이라 하자. $\overline{MD} = 30$이고 $\angle BAM = \angle CAD = 15°$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라. (단, $\angle A > 30°$)

(끝)

한국수학올림피아드

제 30 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

답안

2016년 5월 28일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

가형 답

1. 042
2. 247
3. 144
4. 012
5. 072
6. 018
7. 108
8. 032
9. 017
10. 068
11. 192
12. 모두 정답 처리
13. 015
14. 371
15. 046
16. 065
17. 107
18. 164
19. 012
20. 600

나형 답

1. 042
2. 247
3. 144
4. 012
5. 018
6. 072
7. 032
8. 108
9. 068
10. 017
11. 모두 정답 처리
12. 192
13. 371
14. 015
15. 065
16. 046
17. 164
18. 107
19. 600
20. 012

(뒷면에 계속)

제 30 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2016년 11월 12일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

1. 양의 실수 $a_1, a_2, \ldots$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_{n+1} = {a_1}^2 \times \cdots \times {a_n}^2 - 3$

(ii) $\frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_2 - 1}\right)$은 양의 정수

모든 양의 정수 n에 대하여 $\frac{1}{2}\left(a_1 \times \cdots \times a_n + \sqrt{a_{n+1} - 1}\right)$은 양의 정수임을 보여라.

2. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하고, 내심을 I라 하자. 직선 AD와 내접원의 교점을 $G(\neq D)$라 하고, 점 G에서의 내접원의 접선이 변 AC와 만나는 점을 H라 하고, 직선 IH와 AD의 교점을 K라 하자. 점 I에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 L이라 할 때, $\overline{IE} \cdot \overline{IK} = \overline{IC} \cdot \overline{IL}$임을 보여라.

3. 총 n명의 선수가 참가한 대회에서, 각각의 선수가 다른 모든 선수와 정확히 한 번씩 경기를 하여 무승부없이 승패를 결정하였다. 어떤 $k(\leq n)$명의 선수에 대하여 각 선수가 자기보다 뒤쪽에 있는 모든 선수에게 이긴 경우가 되도록 한 줄로 세울 수 있으면 그 k명의 선수의 집합을 **서열이 정해진 집합**이라 부르자. 대회에 참가한 각 선수에 대하여 그 선수에게 진 선수들의 집합이 모두 서열이 정해진 집합이라 하자. 이때, 선수 전체의 집합을 서열이 정해진 집합 3개 이하로 나눌 수 있음을 보여라.

4. 다음 식의 값이 정수가 되는 모든 양의 정수 n을 구하여라.

$$\frac{n(n+2016)(n+2\cdot 2016)(n+3\cdot 2016)\cdots(n+2015\cdot 2016)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 2016}$$

제 30 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2016년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

5. 양의 정수 n에 대하여, 다음 식을 n에 대한 다항식으로 표현할 수 있음을 보여라.

$$\left[2\sqrt{1}\right] + \left[2\sqrt{2}\right] + \left[2\sqrt{3}\right] + \cdots + \left[2\sqrt{n^2}\right]$$

(단, 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

6. 원 O_1이 삼각형 ABC의 변 AC, BC와 각각 점 D, E 에서 접하고, 원 O_1을 포함하는 원 O_2가 변 BC, AB와 각각 점 E, F 에서 접한다. 직선 DE와 원 O_2의 교점 $P(\neq E)$에서의 원 O_2의 접선이 직선 AB와 만나는 점을 Q라 하자. 점 O_1을 지나고 직선 BO_2와 평행한 직선이 직선 BC와 만나는 점을 G, 직선 EQ와 AC의 교점을 K, 직선 KG와 EF의 교점을 L, 직선 EO_2와 원 O_2의 교점을 $N(\neq E)$, 직선 LO_2와 FN의 교점을 M이라 하자. 점 N이 선분 FM의 중점일 때, $\overline{BG} = 2\overline{EG}$임을 보여라.

7. 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_9$가 $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 90$을 만족할 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$\frac{1^{a_1}\, 2^{a_2}\, \cdots\, 9^{a_9}}{a_1!\, a_2!\, \cdots\, a_9!}$$

(단, $n! = 1 \times \cdots \times n$)

8. 좌표평면에서 한 움직이는 점이 오른쪽 또는 위로 1씩 움직일 수 있다고 할 때, 이 점이 좌표$(0,0)$에서 출발하여 $(1,0)$, $(2,1), \ldots, (n, n-1)$ 어느 점도 거치지 않고 $2n$번 움직여서 좌표 (n,n)에 이르는 모든 경로의 개수를 N이라 하자. 이러한 N개의 경로 중 k번째에는 오른쪽으로 움직이고 $k+1$번째에는 위로 움직인 경로의 개수를 a_k라 할 때,

$$\frac{1}{N}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n-1}\right)$$

의 값을 구하여라.

한국수학올림피아드

제 30 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

가형

2016년 5월 28일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다. 예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 삼차 방정식 $x^3 - 6x^2 + (\sqrt{2}+8)x - 2\sqrt{2} = 0$의 세 실근을 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\gamma$의 값을 구하여라.

2. 다음 수가 정수가 되도록 하는 양의 정수 k 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{1000^{2016} - 271^{2016}}{3^k}$$

3. 다음과 같이 좌표평면의 점으로 이루어진 집합 P, Q를 생각하자.

$$P = \{(1,1),(2,1),(4,1),(8,1),(16,1)\}$$
$$Q = \{(1,0),(2,0),(4,0),(8,0),(16,0)\}$$

P와 Q를 일대일대응 시키고, 대응된 두 점을 선분으로 모두 연결한다. 이 5개의 선분들의 교점의 개수가 정확히 3개가 되도록 하는 일대일대응의 개수를 구하여라.

4. 삼각형 ABC의 세 변의 길이는 각각 $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 17$, $\overline{CA} = 13$이다. 변 BC 위에 점 D, E를 $\overline{BD} = 5$, $\overline{DE} = 5$, $\overline{EC} = 7$이 되도록 잡고 삼각형 ABE, ADC의 내접원을 각각 O_1, O_2 라 하자. 원 O_1과 O_2의 교점 중 BC에 가까운 점을 X, 직선 BC가 원 O_1, O_2와 접하는 점을 각각 Y, Z라 하자. 삼각형 XYZ의 외접원의 반지름이 R일 때, $(R^2+10)^2$ 의 값을 구하여라.

5. 네 정수 a, b, c, d가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

(i) $10 \le a, b, c, d \le 20$

(ii) $ab - cd = 58$

(iii) $ad - bc = 110$

6. $n = 2^{2016} + 73$일 때, $2^n + 1$을 $16^{1025} + 1$로 나눈 나머지를 구하여라.

7. 50개의 수

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{50}$$

중 짝수개(2개 이상)의 서로 다른 수를 선택하는 경우의 수를 N이라 하자. 각 경우마다 선택한 수를 모두 곱한다. 이렇게 하여 얻은 N개의 수를 모두 더한 값을 구하여라.

8. 각 A의 크기가 30°이고 변 BC의 길이가 60인 삼각형 ABC의 변 BC 위에 $\overline{BP} = 10$, $\overline{BQ} = 11$인 점 P와 Q가 있다. 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하고, 점 P를 지나고 B와 C에서 원 O에 각각 내접하는 두 원의 교점을 $P'(\neq P)$이라 하고, 점 Q를 지나고 B와 C에서 원 O에 각각 내접하는 두 원의 교점을 $Q'(\neq Q)$이라 하고, 직선 PP'과 QQ'의 교점을 T라 하자. 삼각형 PQT의 넓이가 x일 때, x^2의 값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

9. 양의 정수 n의 각 자리의 수의 합이

$$\frac{1}{22}\left(-n^2+123n-2016\right)$$

이다. n을 구하여라.

10. 다음을 만족하는 소수 p를 모두 더한 값을 구하여라.

p가 $181^{2p}+181^p+13$의 약수이다.

11. 집합 $X = \{1,2,\ldots,12\}$에서 정의된 일대일대응 $f\colon X \to X$ 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

$f(k)$와 k는 서로소이다. $(k=1,2,\ldots,12)$

12. 사각형 $ABCD$는 이 사각형의 외부에 있는 점 O를 중심으로 하는 원에 내접하고, $\angle AOB = 144°$, $\angle CBD = 27°$이다. 두 대각선 AC와 BD의 교점에서 점 O까지 거리가 20이고, AC의 중점과 BD의 중점 사이의 거리가 x일 때, x^2의 값을 구하여라.

13. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}\cdot\overline{BC}$이고 $\angle ACB = 20°$이다. 꼭짓각 $\angle BAC$의 크기를 $x°$라 할 때, x를 구하여라.

14. 좌표평면에서 점 $P(x,y)$는

$$A(0,0),\ B(63,0),\ C(63,56),\ D(0,56)$$

를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 내부에 있다. 다음 조건을 만족하는 점 P에 대하여 $\overline{PA}$의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

x, y는 모두 정수이고, $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$도 모두 정수이다.

15. 모든 k에 대하여, a_k는 $0 \le a_k \le 6$인 정수이다. 다음 식을 만족하는 순서쌍 $(a_0,\ldots,a_{100})$의 개수를 구하여라.

$$2016\times 5^{96} = a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 + \cdots + a_{100}5^{100}$$

16. 정육각형 $ABCDEF$에 대하여 점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원을 O_1, 점 D를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원을 O_2, 점 E를 중심으로 하고 AD와 BF의 교점을 지나는 원을 O_3라 하자. O_1과 O_3의 두 교점을 G, H라 하고 O_2와 O_3의 두 교점을 J, K라 하자. $\overline{GH}=10$일 때, $\overline{JK}^2$의 값을 구하여라.

17. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$(x^2+3xy+9y^2)^n = 3^{400}(xy)^{398}$을 만족하는 양의 정수 x, y가 존재한다.

18. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 p 중 1000을 넘지 않는 가장 큰 것을 구하여라.

삼차방정식 $x^3-px^2+qx-(p^2-4q+4)=0$의 세 근이 모두 양의 정수가 되는 양의 정수 q가 존재한다.

19. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합의 순서쌍 $(S_1,S_2,\ldots,S_8)$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $S_k \subseteq \{1,2,\ldots,20\}$ $(k=1,2,\ldots,8)$

(ii) $S_k \cap S_{k+1} = \varnothing$ $(k=1,2,\ldots,7)$

20. 사각형 $ABCD$가 중심이 O인 원에 내접하고, 두 직선 AB와 CD가 점 E에서 만난다. 선분 CD의 중점을 M이라 하고, 삼각형 BEC의 외접원과 삼각형 OEM의 외접원이 점 $F(\ne E)$에서 만난다고 하자. $\angle OAE = 75°$, $\angle OFD = 25°$, $\angle FDA = 20°$이다. $\angle FEC = x°$, $\angle DAC = y°$라 할 때, $x-y$의 값을 구하여라.

(끝)

제 30 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

답안

2016년 5월 28일 ; 제한시간 4시간

> **1.** 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
>
> **2.** 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
>
> **3.** 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
> 예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
>
> **4.** 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
>
> **5.** 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

가형 답

1. 020
2. 008
3. 015
4. 200
5. 054
6. 513
7. 662
8. 075
9. 020
10. 021
11. 504
12. 200
13. 100
14. 025
15. 776
16. 300
17. 394
18. 963
19. 625
20. 055

나형 답

1. 008
2. 020
3. 200
4. 015
5. 513
6. 054
7. 075
8. 662
9. 021
10. 020
11. 200
12. 504
13. 025
14. 100
15. 300
16. 776
17. 963
18. 394
19. 055
20. 625

(끝)

제 30 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2016년 11월 12일 (오전) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

1. 양의 정수 n에 대하여 방정식

$$x^2 + 2016y^2 = 2017^n$$

을 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

2. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하고, 내심을 I라 하자. 직선 AD와 내접원의 교점을 $G(\neq D)$라 하고, 점 G에서의 내접원의 접선이 변 AC와 만나는 점을 H라 하고, 직선 IH와 AD의 교점을 K라 하자. 점 I에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 L이라 할 때, $\overline{IE} \cdot \overline{IK} = \overline{IC} \cdot \overline{IL}$임을 보여라.

3. 넓이가 S이고 둘레의 길이가 L인 예각삼각형 ABC 내부의 점 P에서 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 길이가 각각 1, 1.5, 2라 하자. 변 BC와 직선 AP가 만나는 점을 D, 변 CA와 직선 BP가 만나는 점을 E, 변 AB와 직선 CP가 만나는 점을 F라 하고, 삼각형 DEF의 넓이를 T라 하자. 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\left(\frac{\overline{AD} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{CF}}{T}\right)^2 > 4L^2 + \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}{24S}\right)^2$$

4. 양의 정수 n에 대하여 집합 S_n은 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$의 집합이다.

(i) $a_1 = 1$

(ii) 모든 $i = 1, 2, \ldots, n-1$에 대하여 $a_{i+1} \leq a_i + 1$

양의 정수 $k(\leq n)$에 대하여 집합 S_n의 원소 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 중 $a_k = 1$, $a_{k+1} = 2$인 것의 개수를 N_k라 할 때, $N_1 + N_2 + \cdots + N_{n-1}$의 값을 구하여라.

제 30 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2016년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 2시간 30분 ; 문항당 7 점

5. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고, 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 직선 EF가 삼각형 CEI의 외접원과 만나는 점을 $P(\neq E)$라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABP의 넓이의 2배임을 보여라.

6. 양의 정수 n에 대하여 n개의 양의 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n$이 $a_1 \geq \cdots \geq a_n$을 만족한다. 임의의 n개의 양의 실수 $b_1, b_2, \dots, b_n$에 대하여 다음 부등식이 항상 성립함을 보여라.

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq \max\left\{\frac{b_1}{1}, \frac{b_1+b_2}{2}, \dots, \frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right\}$$

(단, $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$은 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 중 가장 큰 값)

7. 서로 다른 홀수인 소수 p_1, $p_2, \dots, p_k$와 음이 아닌 정수 a, b_1, $b_2, \dots, b_k$에 대하여 $N = 2^a p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$라 하자. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 개수는 $(b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_k+1)$임을 보여라.

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq N\text{이고, } \left(N - \frac{n(n+1)}{2}\right)\text{은 } n\text{의 배수이다.}$$

8. 집합 $\{0, 1, 2, \dots, 2000\}$의 부분집합 S가 401개의 원소를 가지면 다음 성질을 만족함을 보여라.

x와 $x+n$이 모두 S에 속하는 x가 70개 이상 존재하는 양의 정수 n이 있다.

제 29 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2016년 3월 19일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC의 꼭짓점 B와 C에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 D와 E라 하고, 변 AC와 BC에 대한 점 E의 대칭점을 각각 S와 T라 하자. 삼각형 CST의 외접원이 직선 AC와 점 $X(\neq C)$에서 만난다. 삼각형 CST의 외심을 O라 할 때, 직선 XO와 DE는 서로 수직임을 보여라.

2. 두 정수 n, k가 $n \geq 2$와 $k \geq \frac{5}{2}n - 1$을 만족한다. 좌표평면에서 x좌표, y좌표가 모두 1 이상 n 이하의 정수가 되는 서로 다른 k개의 점을 어떻게 선택하더라도, 이 중 네 개 이상의 점을 지나는 원이 존재함을 보여라.

3. 어떤 두 유리수 x, y도 $x - \dfrac{1}{x} + y - \dfrac{1}{y} = 4$를 만족하지 않음을 보여라.

제 29 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2016년 3월 20일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 실수 x, y, z가 $x^2+y^2+z^2=1$을 만족할 때,

$$(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$$

의 최댓값을 구하여라.

5. 내심이 I인 예각삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 각각 점 D, E, F에서 접한다. 직선 BI, CI, BC, DI가 직선 EF와 각각 점 K, L, M, Q에서 만나고 선분 CL의 중점과 점 M을 지나는 직선이 선분 CK와 점 P에서 만날 때,

$$PQ=\frac{AB\cdot KQ}{BI}$$

임을 보여라.

6. 삼각형 m개의 집합을 U라 하자. 이때, 아래 두 조건을 동시에 만족하는 U의 부분집합 W가 반드시 존재함을 보여라.

(i) W에 속한 삼각형의 개수는 $0.45m^{\frac{4}{5}}$ 이상이다.

(ii) 6개의 삼각형 ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB가 모두 W에 속하게 되는 서로 다른 6 개의 점 A, B, C, D, E, F는 없다.

유형 가

제31회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 5월 20일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1～4번은 각 4점, 문제 17～20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

모든 양의 정수 n에 대하여 $m^2 \geq \frac{14m}{n} + \frac{7}{n^2}$ 이다.

2. 8명의 학생을 2개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상인 경우의 수를 구하여라.

3. 원에 내접하는 칠각형 $ABCDEFG$의 변 CD와 변 AG가 평행하고, 변 EF와 변 AB가 평행하다. $\angle AFB = 50^\circ$, $\angle AEG = 15^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$, $\angle EDF = 13^\circ$, $\angle DGE = x^\circ$일 때, x의 값을 구하여라. (단, $0 < x < 180$)

4. 다음 세 조건을 모두 만족하는 세 자리 양의 정수를 큰 것부터 차례로 나열하였을 때, 여섯 번째 수를 구하여라.

(i) 어떤 자리의 수도 0이 아니다.

(ii) 12의 배수이다.

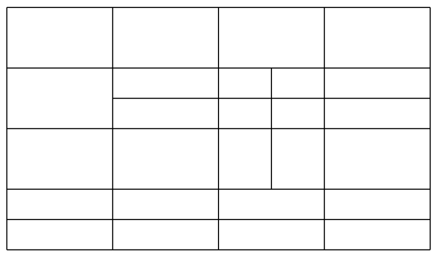
(iii) 십의 자리의 수와 백의 자리의 수를 서로 바꾸어도 12의 배수이다.

5. 음 아닌 정수 $a_1, \ldots, a_{10}$이 다음을 만족한다.

$$a_1 + 2(a_1 + a_2) + 3(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + 10(a_1 + \cdots + a_{10}) = 63$$

이때 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10}$의 값을 구하여라.

6. 서로 수직 혹은 평행인 선분으로 구성된 다음 도형에 있는 직사각형의 개수를 구하여라.



7. 예각삼각형 ABC의 수심 H에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 선분 DH를 지름으로 하는 원과 직선 BH, CH의 교점을 각각 $P(\neq H)$, $Q(\neq H)$라 하자. 직선 DH와 PQ의 교점을 E라 하면, $\overline{HE} : \overline{ED} = 2 : 3$이고 삼각형 EHQ의 넓이가 200이다. 직선 PQ와 변 AB의 교점을 R이라 할 때, 삼각형 DQR의 넓이를 구하여라.

8. 다음 연립방정식을 만족하는 실수해 x, y, z의 합을 구하여라.

$$x^2 + y - 2z + 12 = 0$$
$$y^2 - 2z - 2x + 3 = 0$$
$$z^2 - 2x + 9y + 4 = 0$$

(뒷면에 계속)

9. x에 대한 이차방정식 $x^2+24x-n^2=0$이 정수해를 갖도록 하는 양의 정수 n을 모두 더한 값을 구하여라.

10. 다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수를 구하여라.

$$a \geq b \geq c, \quad b \geq d, \quad a+2b+2c+d=19$$

11. 등변사다리꼴 $ABCD$의 마주보는 변 AD와 BC가 평행하고 $\overline{AD}=6$, $\overline{BC}=12$, $\overline{AB}=5$이다. 삼각형 ABD의 내접원과 삼각형 BCD의 내접원이 대각선 BD와 접하는 점을 각각 E, F라 하자. 삼각형 AEF의 넓이를 S라 할 때, $97S^2$을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

12. 다음 조건을 만족하는 소수 p를 모두 더한 값을 구하여라.

$41pm-42p^2=m^3$을 만족하는 양의 정수 m이 존재한다.

13. 두 이차식

$$(2x-3)(3x-7)=a, \quad (2x-5)(3x-10)=\frac{1050}{a}$$

을 모두 만족하는 실수 x가 존재하도록 하는 0이 아닌 실수 a를 모두 더한 것을 구하여라.

14. 14 이하의 양의 정수 중 서로 다른 3개를 뽑을 때, 뽑힌 어느 두 수도 서로소인 경우의 수를 구하여라. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

15. 10보다 작은 서로 다른 음 아닌 정수 a, b, c, d가 다음 계산식을 만족한다. 이러한 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수를 구하여라.

$$\begin{array}{rcccc} & & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{a} \\ \times & & & \boxed{c} & \boxed{c} \\ \hline & \boxed{d} & \boxed{d} & \boxed{d} & \boxed{d} \end{array}$$

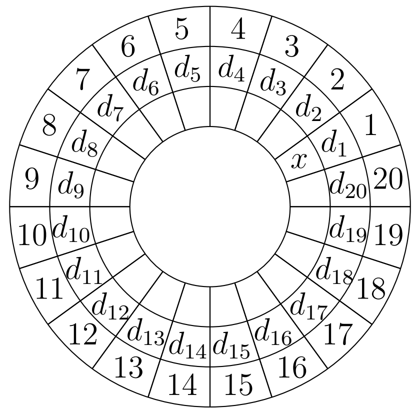
(예를 들어, $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{9}$은 519을 의미한다.)

16. 정십이각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$의 꼭짓점 A_1, A_2를 지나는 직선과 꼭짓점 A_5, A_{11}을 지나는 직선의 교점을 X라 하자. $\overline{XA_2}\cdot\overline{A_1A_2}=10$일 때, 이 정십이각형의 넓이를 구하여라.

17. 다음 두 식을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a,b,c,d,e)의 개수를 구하여라.

$$a+b+c=de, \quad abc=d+e$$

18. 60개의 칸이 있는 다음 그림에서 가장 바깥쪽 칸에 반시계방향으로 1부터 20까지 수가 적혀 있다.



가장 안쪽 원을 이루는 20개 칸에 1부터 20까지 수를 시계방향으로 차례대로 적고, 가운데 칸 $d_1, d_2, \ldots, d_{20}$에는 이웃한 바깥쪽 칸과 안쪽 칸에 있는 두 수의 차를 적는다. 이때 다음 조건을 만족하도록 그림의 칸 x에 적을 수 있는 수의 합을 구하여라.

칸 d_i와 칸 d_{i+10}에 적힌 수는 같다 $(i=1,2,\ldots,10)$.

19. 각 C가 직각이고 $\overline{AB}>400$인 직각삼각형 ABC의 외접원을 O_1이라 하자. 반지름이 100인 원 O_2가 원 O_1에 점 A에서 내접한다. 변 AC와 O_2가 만나는 점을 $D(\neq A)$라 하고, 점 D와 원 O_1의 중심을 지나는 직선이 직선 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{BC}:\overline{BE}=5:4$일 때, 변 AB의 길이를 구하여라.

20. 다음 세 수의 최대공약수를 구하여라.

$$5^{2000}-24\times999-25,$$
$$5^{2002}-24\times1000-25,$$
$$5^{2004}-24\times1001-25$$

(끝)

유형 나

제 31 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 5월 20일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 8명의 학생을 2개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상인 경우의 수를 구하여라.

2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 작은 것을 구하여라.

모든 양의 정수 n에 대하여 $m^2 \geq \frac{14m}{n} + \frac{7}{n^2}$ 이다.

3. 다음 세 조건을 모두 만족하는 세 자리 양의 정수를 큰 것부터 차례로 나열하였을 때, 여섯 번째 수를 구하여라.

(i) 어떤 자리의 수도 0이 아니다.

(ii) 12 의 배수이다.

(iii) 십의 자리의 수와 백의 자리의 수를 서로 바꾸어도 12 의 배수이다.

4. 원에 내접하는 칠각형 $ABCDEFG$ 의 변 CD 와 변 AG 가 평행하고, 변 EF 와 변 AB 가 평행하다. $\angle AFB = 50^\circ$, $\angle AEG = 15^\circ$, $\angle CBD = 30^\circ$, $\angle EDF = 13^\circ$, $\angle DGE = x^\circ$ 일 때, x 의 값을 구하여라. (단, $0 < x < 180$)

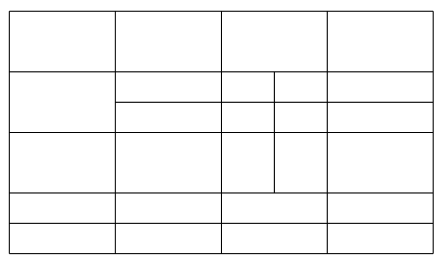
5. 음 아닌 정수 $a_1, \ldots, a_{10}$ 이 다음을 만족한다.

$$a_1 + 2(a_1 + a_2) + 3(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + 10(a_1 + \cdots + a_{10}) = 63$$

이때 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 10a_{10}$ 의 값을 구하여라.

6. 예각삼각형 ABC 의 수심 H 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 D 라 하고 선분 DH 를 지름으로 하는 원과 직선 BH, CH 의 교점을 각각 $P(\neq H)$, $Q(\neq H)$ 라 하자. 직선 DH 와 PQ 의 교점을 E 라 하면, $\overline{HE} : \overline{ED} = 2 : 3$ 이고 삼각형 EHQ 의 넓이가 200 이다. 직선 PQ 와 변 AB 의 교점을 R 이라 할 때, 삼각형 DQR 의 넓이를 구하여라.

7. 서로 수직 혹은 평행인 선분으로 구성된 다음 도형에 있는 직사각형의 개수를 구하여라.



8. 다음 연립방정식을 만족하는 실수해 x, y, z 의 합을 구하여라.

$$x^2 + y - 2z + 12 = 0$$
$$y^2 - 2z - 2x + 3 = 0$$
$$z^2 - 2x + 9y + 4 = 0$$

9. 다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하여라.

$$a \ge b \ge c, \quad b \ge d, \quad a + 2b + 2c + d = 19$$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 24x - n^2 = 0$이 정수해를 갖도록 하는 양의 정수 n을 모두 더한 값을 구하여라.

11. 다음 조건을 만족하는 소수 p를 모두 더한 값을 구하여라.

$41pm - 42p^2 = m^3$을 만족하는 양의 정수 m이 존재한다.

12. 등변사다리꼴 $ABCD$의 마주보는 변 AD와 BC가 평행하고 $\overline{AD} = 6$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AB} = 5$이다. 삼각형 ABD의 내접원과 삼각형 BCD의 내접원이 대각선 BD와 접하는 점을 각각 E, F라 하자. 삼각형 AEF의 넓이를 S라 할 때, $97S^2$을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

13. 14 이하의 양의 정수 중 서로 다른 3개를 뽑을 때, 뽑힌 어느 두 수도 서로소인 경우의 수를 구하여라. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

14. 두 이차식

$$(2x - 3)(3x - 7) = a, \quad (2x - 5)(3x - 10) = \frac{1050}{a}$$

을 모두 만족하는 실수 x가 존재하도록 하는 0이 아닌 실수 a를 모두 더한 것을 구하여라.

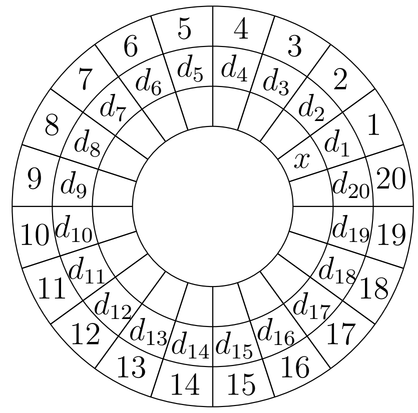
15. 10보다 작은 서로 다른 음 아닌 정수 a, b, c, d가 다음 계산식을 만족한다. 이러한 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하여라.

$$\begin{array}{rcccc} & & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{a} \\ \times & & & \boxed{c} & \boxed{c} \\ \hline & \boxed{d} & \boxed{d} & \boxed{d} & \boxed{d} \end{array}$$

(예를 들어, $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{9}$은 519을 의미한다.)

16. 정십이각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$의 꼭짓점 A_1, A_2를 지나는 직선과 꼭짓점 A_5, A_{11}을 지나는 직선의 교점을 X라 하자. $\overline{XA_2} \cdot \overline{A_1A_2} = 10$일 때, 이 정십이각형의 넓이를 구하여라.

17. 60개의 칸이 있는 다음 그림에서 가장 바깥쪽 칸에 반시계방향으로 1부터 20까지 수가 적혀 있다.



가장 안쪽 원을 이루는 20개 칸에 1부터 20까지 수를 시계방향으로 차례대로 적고, 가운데 칸 $d_1, d_2, \ldots, d_{20}$에는 이웃한 바깥쪽 칸과 안쪽 칸에 있는 두 수의 차를 적는다. 이때 다음 조건을 만족하도록 그림의 칸 x에 적을 수 있는 수의 합을 구하여라.

칸 d_i와 칸 d_{i+10}에 적힌 수는 같다 $(i = 1, 2, \ldots, 10)$.

18. 다음 두 식을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하여라.

$$a + b + c = de, \quad abc = d + e$$

19. 다음 세 수의 최대공약수를 구하여라.

$$5^{2000} - 24 \times 999 - 25,$$
$$5^{2002} - 24 \times 1000 - 25,$$
$$5^{2004} - 24 \times 1001 - 25$$

20. 각 C가 직각이고 $\overline{AB} > 400$인 직각삼각형 ABC의 외접원을 O_1이라 하자. 반지름이 100인 원 O_2가 원 O_1에 점 A에서 내접한다. 변 AC와 O_2가 만나는 점을 $D(\neq A)$라 하고, 점 D와 원 O_1의 중심을 지나는 직선이 직선 BC와 만나는 점을 E라 하자. $\overline{BC} : \overline{BE} = 5 : 4$일 때, 변 AB의 길이를 구하여라.

(끝)

정답		
번호	중등부	
	가	나
1	015	119
2	119	015
3	011	864
4	864	011
5	026	026
6	213	750
7	750	213
8	003	003
9	065	024
10	024	065
11	304	008
12	008	304
13	071	138
14	138	071
15	004	004
16	015	015
17	018	030
18	030	018
19	650	576
20	576	650

제 31 회 2차시험 (중등부)

중등부

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 11월 12일 (오전) ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

1. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n과 음이 아닌 정수 $a_1, \ldots, a_n$을 모두 구하여라.

각 $i = 1, \ldots, n$에 대하여 $a_1, \ldots, a_n$ 중 i의 배수는 정확히 a_i개 있다.

단, 0은 모든 정수의 배수이다.

2. 이등변 삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. 변 BC의 수직이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 두 점 중 직선 BC에 대하여 점 A와 같은 쪽에 있는 점을 P, 다른 쪽에 있는 점을 Q라 하자. 점 D를 지나고 직선 AQ와 평행한 직선이 직선 EF와 만나는 점을 R, 직선 PQ와 만나는 점을 T라 하자. 네 점 B, R, C, T가 한 원 위에 있음을 보여라.

3. 다음 세 조건을 모두 만족하는 1보다 큰 정수 n과 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$을 모두 구하여라.

(i) $2 < a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$

(ii) $a_1, a_2, \ldots, a_n$은 모두 $15^{25}+1$의 약수이다.

(iii) $2 - \dfrac{2}{15^{25}+1} = \left(1 - \dfrac{2}{a_1}\right) + \left(1 - \dfrac{2}{a_2}\right) + \cdots + \left(1 - \dfrac{2}{a_n}\right)$

4. 양의 실수 $a \ge b \ge c \ge d > 0$에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{b^3}{a} + \frac{c^3}{b} + \frac{d^3}{c} + \frac{a^3}{d} + 3(ab+bc+cd+da) \ge 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

제 31 회 2차시험 (중등부)

중등부

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

5. 양의 정수 $n \geq 2$이 주어졌을 때, 다음 조건을 만족하는 정수 a, b가 존재함을 보여라.

모든 정수 m에 대하여 $m^3 + am + b$는 n의 배수가 아니다.

6. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 세 점 D, E, F를 지나는 원을 O_1이라 하고, 그 중심을 N이라 하자. 삼각형 BCN의 외접원을 O_2라 하고, 원 O_1과 O_2의 두 교점을 P, Q라 하자. 원 O_2가 직선 AB와 점 $K(\neq B)$에서 만나고 직선 AC와 점 $L(\neq C)$에서 만난다. 세 직선 EF, PQ, KL이 한 점에서 만남을 보여라.

7. 다음을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$이 존재하지 않음을 보여라.

$$\text{음이 아닌 모든 실수 } x,\ y\text{에 대하여 } f(x+y^2) \geq f(x) + y$$

(단, $\mathbb{R}_{\geq 0}$은 음이 아닌 실수 전체의 집합이며, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.)

8. 양의 정수 n에 대하여, 총 n명의 학생이 있는 학교가 있다. 이 학교 학생들로 이루어진 집합 X에 대하여, X에 속한 임의의 서로 다른 두 학생이 서로 아는 사이이면 그 집합 X를 잘 짜인 집합이라 부르자. 잘 짜인 집합의 학생 수의 최댓값이 k이면, 이 학교에서 만들 수 있는 잘 짜인 집합의 개수는 $3^{(n+k)/3}$ 이하임을 보여라. 단, 공집합이나 학생 1명의 집합 역시 잘 짜인 집합이다.

오일러

kmo
한국수학올림피아드

제 31 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 5월 20일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여

$$(n+2)a_na_{n+1} + na_{n+1}a_{n+2} = 2(n+1)a_na_{n+2}$$

를 만족한다. $a_1 = 100$, $a_3 = 228$일 때, a_{28}의 값을 구하여라.

2. 8명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상 4명 이하인 경우의 수를 구하여라.

3. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\angle BDC = 15°$, $\angle CBD = 45°$이다. 직선 AB와 CD의 교점을 E, 직선 AD와 BC의 교점을 F라 하자. $\overline{BE} \cdot \overline{DF} = 675$일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 세 자리 양의 정수 N을 큰 것부터 차례로 나열하였을 때, 두 번째 수를 구하여라.

> 10보다 작은 양의 정수 a, b, c에 대하여 $N = 100a+10b+c$일 때, 세 정수 N, $10a+b$, $10b+c$는 모두 소수이다.

5. 다음 수들의 최대공약수를 구하여라.

$$2^{17}-2,\ 3^{17}-3,\ 4^{17}-4,\ \ldots,\ 31^{17}-31$$

6. 양의 정수 n에 대하여 정의된 다항식 $f_n(x)$는 다음 성질을 만족한다.

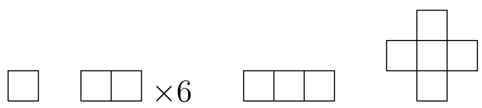
> n의 모든 양의 약수를 $d_1, \ldots, d_m$이라 하면
> $$f_{d_1}(x) \times \cdots \times f_{d_m}(x) = x^n - 1$$
> 이다.

서로 다른 양의 정수 $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell$에 대하여

$$\frac{f_3(x)f_4(x)f_6(x)f_{12}(x)f_{49}(x)}{f_2(x)f_5(x)f_{10}(x)f_{18}(x)} = \frac{(x^{a_1}-1)\cdots(x^{a_k}-1)}{(x^{b_1}-1)\cdots(x^{b_\ell}-1)}$$

가 성립할 때, $a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_\ell$의 값을 구하여라.

7. 다음 그림과 같은 1×1 정사각형 모양의 타일 1개, 1×2 직사각형 모양의 타일 6개, 1×3 직사각형 모양의 타일 1개, 그리고 십자(+) 모양의 타일 1개가 있다.



3×7 직사각형 모양의 벽에 이 9개의 타일을 모두 빈틈없이 붙이는 경우의 수를 구하여라. (단, 타일을 90° 회전하여 사용할 수 있다.)

8. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $\overline{AB} = 125$, $\overline{AC} = 150$, $\overline{AD} = 100$이다. 점 D에서 삼각형 ABD의 외접원의 접선이 삼각형 ACD의 외접원과 만나는 점을 $E(\neq D)$라 하자. 선분 CD 위의 점 X에 대하여 삼각형 ADX의 외접원이 선분 DE와 점 $Y(\neq D)$에서 만난다고 하자. $\overline{CX} = 30$일 때, 선분 EY의 길이를 구하여라.

(뒷면에 계속)

9. 다음 두 식을 모두 만족하는 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

(i) $x+y+z=2$

(ii) $2xy+yz+zx=-7$

10. 빨간 공 9개와 파란 공 9개에 9 이하의 양의 정수가 하나씩 적혀 있으며 같은 색의 공에 적힌 수는 서로 다르다. 다음 세 조건을 모두 만족하도록 빨간 공 2개, 파란 공 2개를 동시에 뽑는 경우의 수를 구하여라.

(i) 뽑힌 공에 적힌 수는 서로 다르다.

(ii) 뽑힌 빨간 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.

(iii) 뽑힌 파란 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.

11. 예각삼각형 ABC의 외접원의 반지름이 5이고 변 AB의 길이는 8이다. 삼각형 ABC의 내심 I에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 A에서 직선 BI에 내린 수선의 발을 E, 삼각형 ACI의 외심에서 변 AC에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\overline{DE}=1$이고, $\overline{EF}=a$일 때, $100a^2$의 값을 구하여라.

12. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$111\times 10^k < n^2 < 112\times 10^k$을 만족하는 양의 정수 k가 존재한다.

13. 함수 $f\colon \{1,2,\ldots,12\}\to\{1,2,3,4,5\}$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $\{f(1),f(2),\ldots,f(12)\}=\{1,2,3,4,5\}$

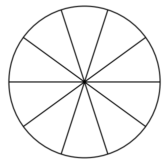
(ii) 모든 $i=1,2,\ldots,12$에 대하여 $f(f(f(i)))=f(f(i))$

다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

$$60\sum_{i=1}^{12}\frac{f(f(i))}{f(i)}$$

14. 볼록사각형 $ABCD$가 중심이 O인 원에 외접한다. 점 C에서 직선 BO에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 직선 AO에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\angle A=110^\circ$, $\angle B=130^\circ$, $\angle EFO=31^\circ$, $\angle C=x^\circ$일 때, x의 값을 구하여라. (단, $0<x<180$)

15. 다음 그림과 같이 10등분된 회전판이 있다. 각 칸에 빨강색 또는 파랑색을 칠하여 만들 수 있는 모든 회전판의 개수를 구하여라. 단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.



16. 식 $n^4-17n^3+98n^2-229n+187$의 값이 소수가 되도록 하는 모든 양의 정수 n의 합을 구하여라.

17. 수열 $\{x_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여

$$(4+x_1+\cdots+x_n)(x_1+\cdots+x_{n+1})=1$$

을 만족하고, $x_1=1$이다. $\left[\frac{x_{100}}{x_{101}}\right]^2$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

18. 집합 $\{1,2,3,4\}$의 서로 다른 부분집합 4개로 이루어진 집합 S가 다음 조건을 만족한다.

$\{A,B\}\subset S$이면 $\{A\cup B, A\cap B\}\subset S$

이러한 S의 개수를 구하여라.

19. 삼각형 ABC에서 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\overline{BC}=12$이다. 삼각형 ABC의 외심을 O라 하고 삼각형 OAB, OBC, OCA의 외심을 각각 O_1, O_2, O_3라 하자. 삼각형 $O_1O_2O_3$의 넓이를 S라 할 때, $(S-54)^2$의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

20. 다음 조건을 만족하는 소수 p, q의 순서쌍 (p,q)의 개수를 구하여라.

p^2+q^2+42의 양의 약수는 9개이다.

(끝)

가우스

제31회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 5월 20일 ; 서한시간 4시간

1. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문서유형**을 반드시 기입하십시오.

2. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

3. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 “7”일 경우 “007”이라고 기입하여야 합니다.

4. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

5. 문제 1～4 번은 각 4 점, 문제 17～20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 식 $(ax-1)^8-(x-b)^8=(x^2-px+q)^4$이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 양의 실수 a, b, p, q에 대하여, 다음 식의 값을 구하여라.

$$(a^7-p)^{12}+(b^2+q)^{12}$$

2. 8명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 2명 이상 4명 이하인 경우의 수를 구하여라.

3. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\angle BDC=15^\circ$, $\angle CBD=45^\circ$이다. 직선 AB와 CD의 교점을 E, 직선 AD와 BC의 교점을 F라 하자. $\overline{BE}\cdot\overline{DF}=675$일 때, 원 O의 반지름의 길이를 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 소수 p를 구하여라.

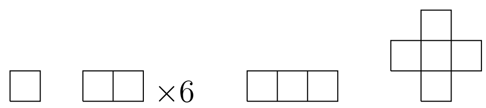
$n^4+n^2+1=211p$를 만족하는 정수 n이 존재한다.

5. 다음 두 식을 모두 만족하는 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^2+y^2+z^2$이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

(i) $x+y+z=2$

(ii) $2xy+yz+zx=-7$

6. 다음 그림과 같은 1×1 정사각형 모양의 타일 1개, 1×2 직사각형 모양의 타일 6개, 1×3 직사각형 모양의 타일 1개, 그리고 십자(+) 모양의 타일 1개가 있다.



3×7 직사각형 모양의 벽에 이 9개의 타일을 모두 빈틈없이 붙이는 경우의 수를 구하여라. (단, 타일을 90° 회전하여 사용할 수 있다.)

7. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 할 때, $\overline{AB}=125$, $\overline{AC}=150$, $\overline{AD}=100$이다. 점 D에서 삼각형 ABD의 외접원의 접선이 삼각형 ACD의 외접원과 만나는 점을 $E(\neq D)$라 하자. 선분 CD 위의 점 X에 대하여 삼각형 ADX의 외접원이 선분 DE와 점 $Y(\neq D)$에서 만난다고 하자. $\overline{CX}=30$일 때, 선분 EY의 길이를 구하여라.

8. 빨간 공 9개와 파란 공 9개에 9 이하의 양의 정수가 하나씩 적혀 있으며 같은 색의 공에 적힌 수는 서로 다르다. 다음 세 조건을 모두 만족하도록 빨간 공 2개, 파란 공 2개를 동시에 뽑는 경우의 수를 구하여라.

(i) 뽑힌 공에 적힌 수는 서로 다르다.

(ii) 뽑힌 빨간 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.

(iii) 뽑힌 파란 공 2개에 적힌 수의 차가 2 이상이다.

(뒷면에 계속)

9. 다음 수들의 최대공약수를 구하여라.

$$2^{17}-2,\ 3^{17}-3,\ 4^{17}-4,\ \ldots,\ 31^{17}-31$$

10. 함수 $f\colon \{1,2,\ldots,12\} \to \{1,2,3,4,5\}$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $\{f(1), f(2), \ldots, f(12)\} = \{1,2,3,4,5\}$

(ii) 모든 $i = 1,2,\ldots,12$에 대하여 $f(f(f(i))) = f(f(i))$

다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

$$60\sum_{i=1}^{12}\frac{f(f(i))}{f(i)}$$

11. 예각삼각형 ABC의 외접원의 반지름이 5이고 변 AB의 길이는 8이다. 삼각형 ABC의 내심 I에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 A에서 직선 BI에 내린 수선의 발을 E, 삼각형 ACI의 외심에서 변 AC에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\overline{DE}=1$이고, $\overline{EF}=a$일 때, $100a^2$의 값을 구하여라.

12. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 것을 구하여라.

$111\times 10^k < n^2 < 112\times 10^k$을 만족하는 양의 정수 k가 존재한다.

13. 수열 $\{x_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여

$$(4+x_1+\cdots+x_n)(x_1+\cdots+x_{n+1})=1$$

을 만족하고, $x_1 = 1$이다. $\left[\frac{x_{100}}{x_{101}}\right]^2$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

14. 사각형 $ABCD$가 지름이 AC인 원에 내접한다. 변 AD의 중점을 E, 직선 AB와 삼각형 ACE의 외접원의 교점을 $F(\neq A)$라 하고 직선 EF와 삼각형 CDE의 외접원의 교점을 $J(\neq E)$라 하자. $\overline{CJ}=60$이고 $\overline{BC}:\overline{AF}=1:4$, $\overline{CD}:\overline{AD}=1:6$일 때, 선분 EF의 길이를 구하여라.

15. 음이 아닌 정수 n, k에 대하여 $a(n,k)$를 다음과 같이 정의하자.

(i) $nk=0$이면, $a(n,k)=1$

(ii) $nk\neq 0$이면,

$$a(n,k)=a(n-1,k)+a(n,k-1)+a(n-1,k-1)$$

이때 $a(2017,2017)$을 2017로 나눈 나머지를 구하여라.

16. 다음 조건을 만족하는 소수 p, q의 순서쌍 (p,q)의 개수를 구하여라.

p^2+q^2+42의 양의 약수는 9개이다.

17. 방정식 $x^2-428x-1=0$의 양의 근을 r이라 하자. $a_1=1$이고 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_{n+1}=[ra_n]$이라 할 때, a_{100}을 428로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

18. 양의 정수 1, 2, …, 20을 다음 세 조건을 모두 만족하도록 두 집합 $\{a_1,a_2,\ldots,a_{10}\}$, $\{b_1,b_2,\ldots,b_{10}\}$으로 나누는 방법의 수를 구하여라.

(i) $\{a_1,\ldots,a_{10}\}\cup\{b_1,\ldots,b_{10}\}=\{1,2,\ldots,20\}$

(ii) $a_1<a_2<\cdots<a_{10}$이고 $b_1<b_2<\cdots<b_{10}$

(iii) 각 $n=1,2,\ldots,10$에 대하여 a_n-b_n은 2 또는 3

19. 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 D에 대하여, 변 BC와 평행한 어떤 직선이 삼각형 ACD의 외접원과 삼각형 ABC의 내부의 점 P와 외부의 점 Q에서 만난다고 하자. 직선 AP와 변 BC의 교점을 R, 직선 BQ와 삼각형 ACD의 외접원과의 교점을 $S(\neq Q)$, 직선 BQ와 PD의 교점을 T라 하자. $\angle BAQ=145^\circ$, $\angle DAS=16^\circ$, $\angle CAQ+\angle SRB=136^\circ$, $\angle PTQ=x^\circ$일 때, x의 값을 구하여라. (단, $0<x<180$)

20. $\left(19+6\sqrt{10}\right)^{400}+\left(19-6\sqrt{10}\right)^{400}$을 $3^2\times 13^2$으로 나눈 나머지를 구하여라.

(끝)

정답		
번호	고등부	
	오일러	가우스
1	532	512
2	630	630
3	015	015
4	797	241
5	510	010
6	117	018
7	018	024
8	024	462
9	010	510
10	462	384
11	125	125
12	334	334
13	384	324
14	058	420
15	108	003
16	012	002
17	324	379
18	139	069
19	888	111
20	002	389

제 31 회 2차시험 (고등부)

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2017년 11월 12일 (오전) ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

1. 정팔각형 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$의 대각선 20개의 집합을 U라고 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합 S의 개수를 구하여라.

(i) S는 U의 부분집합이다.

(ii) $\overline{P_iP_j},\ \overline{P_jP_k} \in S$이고 $i \neq k$이면, $\overline{P_iP_k} \in S$이다.

2. 다음 식을 만족하는 정수 n과 양의 정수 k, m이 존재하도록 하는 소수 p를 모두 구하여라.

$$\frac{(mk^2+2)p-(m^2+2k^2)}{mp+2} = n^2$$

3. 이등변 삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. 변 BC의 수직이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 두 점 중 직선 BC에 대하여 점 A와 같은 쪽에 있는 점을 P, 다른 쪽에 있는 점을 Q라 하자. 점 D를 지나고 직선 AQ와 평행한 직선이 직선 EF와 만나는 점을 R이라 하자. 직선 EF와 직선 PQ의 교점이 삼각형 BCR의 외접원 위에 있음을 보여라.

4. 다음과 같이 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & (x > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ \dfrac{x}{1-x} & (x < 1) \end{cases}$$

양의 무리수 x_1이 어떤 정수 계수 이차방정식의 해라고 하자. 모든 양의 정수 n에 대하여 $x_{n+1} = f(x_n)$으로 정의하자. 이 때, $x_k = x_\ell$을 만족하는 서로 다른 두 양의 정수 k, ℓ이 존재함을 보여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.)

제 31 회 2차시험 (고등부)

고등부

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 11월 12일 (오후) ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

5. 소수 p가 주어졌을 때, 다음 조건을 만족하는 정수 a, b가 존재함을 보여라.

모든 정수 m에 대하여 $m^3 + 2017am + b$는 p의 배수가 아니다.

6. 사각형 $ABCD$에서 $\angle ACB = \angle ADB = 90°$이며, $\overline{CD} < \overline{BC}$이다. AC와 BD의 교점을 E라 하고, 선분 BD의 수직이등분선이 BC와 만나는 점을 F라 하자. 점 F를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원은 선분 AB와 점 $P(\neq B)$에서 만나고, 선분 AC와 점 Q에서 만난다. 선분 EP의 중점을 M이라 하자. 삼각형 EPQ의 외접원이 AB에 접할 필요충분조건이 세 점 B, M, Q가 한 직선 위에 있는 것임을 보여라.

7. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$이 존재하도록 하는 실수 c를 모두 구하여라.

$$\text{음이 아닌 모든 실수 } x, y\text{에 대하여 } f(x + y^2) \geq cf(x) + y$$

(단, $\mathbb{R}_{\geq 0}$은 음이 아닌 실수 전체의 집합이며, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.)

8. 양의 정수 n에 대하여, 총 $2n$명의 학생이 있는 학교가 있다. 이 학교 학생들로 이루어진 집합 X에 대하여, X에 속한 임의의 서로 다른 두 학생이 서로 아는 사이이면 그 집합 X를 <u>잘 짜인 집합</u>이라 부르자. 잘 짜인 집합의 학생 수의 최댓값이 n 이하일 때, 이 학교에서 만들 수 있는 잘 짜인 집합의 개수의 최댓값을 구하여라. 단, 공집합이나 학생 1명의 집합 역시 잘 짜인 집합이다.

제 30 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 3월 25일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC의 외심을 O라 하자. 삼각형 OAB의 외접원 O_1과 삼각형 OAC의 외접원 O_2가 변 BC와 각각 점 $D(\neq B)$와 $E(\neq C)$에서 만나고, 변 BC의 수직이등분선이 변 AC와 점 $F(\neq A)$에서 만난다고 하자. 삼각형 ADE의 외심이 직선 AC 위에 놓이는 것이 O_1과 O_2의 중심을 지나는 직선 위에 점 F가 있을 필요충분조건임을 보여라.

2. 양의 정수 n에 대하여 $n+1$개의 정수로 이루어진 순서쌍 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$이 있다. 모든 $k = 0, 1, \ldots, n$에 대하여, $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$에서의 k의 개수를 b_k라 하고, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$에서의 k의 개수를 c_k라고 하자. 이때 $a_0 = c_0$, $a_1 = c_1$, $\ldots$, $a_n = c_n$이 되는 순서쌍 $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$을 모두 구하여라.

3. 양의 정수 n에 대하여 $c_n = 2017^n$이라 하자. 함수 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$이 다음 두 조건

(i) 모든 양의 정수 m, n에 대하여 $f(m+n) \leq 2017 \cdot f(m) \cdot f(n+325)$,

(ii) 모든 양의 정수 n에 대하여 $0 < f(c_{n+1}) < f(c_n)^{2017}$

을 모두 만족한다. 이때, 다음을 만족하는 수열 a_1, a_2, $\ldots$이 존재함을 보여라.

부등식 $a_k < n$을 만족하는 모든 양의 정수 n, k에 대하여 $f(n)^{c_k} < f(c_k)^n$이다.

단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합이며, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.

제 30 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2017년 3월 26일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 정수 $n \geq 2$에 대하여 $a_1, a_2, \ldots, a_n$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_1 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3},$$
$$a_k = \frac{(n+k-1)(n-k+1)}{2(k-1)(2k+1)} a_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

(a) a_1, a_2, …, a_n은 모두 정수임을 보여라.

(b) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 중 $2n-1$의 배수가 아닌 것이 하나 뿐이고, $2n+1$의 배수가 아닌 것도 하나 뿐인 것이 $2n-1$과 $2n+1$이 모두 소수일 필요충분조건임을 보여라.

5. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 두 변 AB와 CD의 중점을 각각 L과 M이라 하고, 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E라 하자. 반직선 AB와 DC가 점 F에서 만나며, 선분 LM이 선분 DE와 점 P에서 만난다고 하자. 점 P에서 선분 EM에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 삼각형 FLM의 수심이 E일 때, 다음 등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{EP^2}{EQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{BD^2}{DF} - \frac{BC^2}{CF}\right)$$

6. 총 2017개의 상자가 원형으로 놓여 있는 방이 있다. 어떤 상자의 집합이 어울린다는 말은 그 집합에 속한 상자의 수가 2개 이상이며 그 집합에 속한 각 상자에서 시계 방향으로 이동할 때 그 집합에 속한 다음 상자를 처음으로 만날 때까지 넘어야 하는 상자의 개수가 0 또는 홀수임을 뜻한다. 30명의 학생이 차례로 그 방에 입장하여 자기가 고른 상자들의 집합이 어울리도록 여러 상자를 고른 후, 고른 상자마다 자기 이름이 적힌 쪽지를 하나씩 넣는다. 들어있는 쪽지의 개수가 30개인 상자 전체의 집합이 어울리지 않는 경우 다음 두 성질을 모두 만족하는 학생 A, B와 상자 a, b가 존재함을 보여라.

(i) A는 a를 고르고 b를 고르지 않았으며 B는 b를 고르고 a를 고르지 않았다.

(ii) a에서 시계 방향으로 b까지 이동하는 사이에 넘게 되는 a, b가 아닌 상자의 개수는 홀수가 아니며, 이러한 각 상자는 A와 B 중 누구도 고른 적이 없다.

유형 가

제 32 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1～4 번은 각 4 점, 문제 17～20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 A와 B에 대하여 $A+16B$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $A-2B=-7$

(ii) $A+4B<30$

2. 십의 자리의 수가 3인 네 자리 양의 정수 중 9의 배수의 개수를 구하여라.

3. 삼각형 ABC가 $\angle BAC > 90°$, $\overline{AB}=12$, $\overline{CA}=20$을 만족한다. 변 BC의 중점을 M, 변 CA의 중점을 N이라 하자. 두 점 A와 N을 지나고 직선 AM에 접하는 원을 O라 하고, 직선 AB와 원 O가 만나는 점을 $P(\neq A)$라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 x, 삼각형 ANP의 넓이를 y라 할 때, $\frac{x}{y}\times 200$의 값을 구하여라.

4. $2p-1$, $10p-1$이 모두 소수가 되도록 하는 소수 p를 모두 더한 값을 구하여라.

5. 한 자리 양의 정수 A, B, C, D가 다음 계산식을 만족할 때, $A+B+C+D$의 값을 구하여라.

$$\begin{array}{r} \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C} \\ \times \quad \boxed{B}\ \boxed{C} \\ \hline \boxed{D}\ \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C} \end{array}$$

(예를 들어, $\boxed{5}\boxed{1}\boxed{2}$는 512를 의미한다.)

6. 8명의 학생을 각 모둠의 인원이 2명 이상인 3개의 모둠으로 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 단 하나의 모둠에만 속한다.)

7. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=6$이다. 삼각형 ABC의 수심을 H, 외심을 O라 하고 직선 AO와 직선 BH, CH의 교점을 각각 X, Y라고 하자. $\frac{\overline{XY}}{\overline{HX}}\times 120$의 값을 구하여라.

8. 양의 정수 a, b가 다음 조건을 만족할 때, $a+b$가 가질 수 있는 가장 작은 값을 구하여라.

$$\frac{339}{47}<\frac{b}{a}<\frac{239}{33}$$

9. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 A, B, C에 대하여 $A+B+C$가 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

(i) $A>B>C$

(ii) $12B>13C>11A$

10. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합 A, B, C의 순서쌍 (A,B,C)의 개수를 구하여라.

(i) 집합 A, B, C는 집합 $\{1,2,3,4,5\}$의 서로 다른 세 부분집합이다.

(ii) 집합 A, B, C, $A\cap B$, $B\cap C$, $C\cap A$의 원소의 개수는 모두 짝수이다. (단, 0은 짝수)

(뒷면에 계속)

제 32회 중등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

11. 이등변삼각형 ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$)의 변 BC의 중점을 M이라 하자. 점 P, Q, R, S가 각각 선분 AC, CM, BM, AB 위에 있는 점으로 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\angle CPQ = \angle QRS = 90^\circ, \qquad \overline{CP} = 9,$$
$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS}, \qquad \overline{BS} = 11$$

직선 PR과 QS의 교점을 X라 할 때, $\overline{MX} = x$이다. $(x+1)^2$의 값을 구하여라.

12. 양의 정수 a, b가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(i) $a^2 + b^2 + \gcd(a, b) = 582$

(ii) $ab + \operatorname{lcm}(a, b) = 432$

(단, $\gcd(x, y)$는 x, y의 최대공약수, $\operatorname{lcm}(x, y)$는 x, y의 최소공배수)

13. 음이 아닌 정수에 대하여 정의된 함수 f가 $f(0) = 0$이고, 각 양의 정수 n에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(3n-2) = 4f(n-1) + 3$

(ii) $f(3n-1) = 4f(n-1) + 2$

(iii) $f(3n) = 2f(n) + 1$

$f(n) = 253$을 만족하는 정수 n을 모두 더한 값을 구하여라.

14. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하여라.

(i) $|m| \le 15$, $|n| \le 15$

(ii) $\max(|m|, |n|) \ne \max(|m-2|, |n|)$

(단, $\max(a, b)$는 a와 b중에서 작지 않은 값)

15. 삼각형 ABC의 외심을 O라 하고 삼각형 OAC와 OBC의 외심을 각각 O_1, O_2라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름이 10이고 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$일 때, $\overline{O_1O_2} = d$이다. $(d-5)^2$의 값을 구하여라.

16. 두 소수 p, q가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, p가 가질 수 있는 가장 큰 값을 구하여라.

(i) $5 < p < q < 2p + 100$

(ii) $p^2 + 5(q+2)p + 25$는 완전제곱수

17. 양의 실수 a, b, c가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

(i) $c > a$

(ii) $10c = 7a + 4b + 2024$

(iii) $\dfrac{(a+c)^2}{a} + \dfrac{(c-a)^2}{b} = 2024$

18. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-2, -1, 0, 1, 2\}$의 개수를 구하여라.

(i) 서로 다른 x, y에 대하여 $f(x) \ne f(y)$이다.

(ii) $f(x)^2 = x^2$인 x가 존재한다.

19. 예각삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D, 삼각형 ABC의 내심을 I, 삼각형 ABC의 방접원 중 변 BC에 접하는 것의 중심을 J라 하자. $\overline{AJ} = 90$, $\overline{DJ} = 60$일 때, 삼각형 BCI의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

20. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 값을 구하여라.

$n^3 + 7$과 $3n^2 + 3n + 1$이 서로소가 아니다.

(끝)

유형 나

제 32 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 십의 자리의 수가 3 인 네 자리 양의 정수 중 9 의 배수의 개수를 구하여라.

2. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 A와 B에 대하여 $A + 16B$의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $A - 2B = -7$

(ii) $A + 4B < 30$

3. $2p - 1$, $10p - 1$이 모두 소수가 되도록 하는 소수 p를 모두 더한 값을 구하여라.

4. 삼각형 ABC가 $\angle BAC > 90°$, $\overline{AB} = 12$, $\overline{CA} = 20$을 만족한다. 변 BC의 중점을 M, 변 CA의 중점을 N이라 하자. 두 점 A와 N을 지나고 직선 AM에 접하는 원을 O라 하고, 직선 AB와 원 O가 만나는 점을 $P(\neq A)$라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 x, 삼각형 ANP의 넓이를 y라 할 때, $\frac{x}{y} \times 200$의 값을 구하여라.

5. 8 명의 학생을 각 모둠의 인원이 2 명 이상인 3개의 모둠으로 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 단 하나의 모둠에만 속한다.)

6. 한 자리 양의 정수 A, B, C, D가 다음 계산식을 만족할 때, $A + B + C + D$의 값을 구하여라.

$$\begin{array}{rcccc} & & \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{C} \\ \times & & & \boxed{B} & \boxed{C} \\ \hline & \boxed{D} & \boxed{A} & \boxed{B} & \boxed{C} \end{array}$$

(예를 들어, $\boxed{5}\,\boxed{1}\,\boxed{2}$ 는 512를 의미한다.)

7. 양의 정수 a, b가 다음 조건을 만족할 때, $a + b$가 가질 수 있는 가장 작은 값을 구하여라.

$$\frac{339}{47} < \frac{b}{a} < \frac{239}{33}$$

8. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{CA} = 6$이다. 삼각형 ABC의 수심을 H, 외심을 O라 하고 직선 AO와 직선 BH, CH의 교점을 각각 X, Y라고 하자. $\frac{\overline{XY}}{\overline{HX}} \times 120$의 값을 구하여라.

9. 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합 A, B, C의 순서쌍 (A, B, C)의 개수를 구하여라.

(i) 집합 A, B, C는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 서로 다른 세 부분집합이다.

(ii) 집합 A, B, C, $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$의 원소의 개수는 모두 짝수이다. (단, 0은 짝수)

(뒷면에 계속)

kmo 한국수학올림피아드

제 32 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

10. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 A, B, C에 대하여 $A+B+C$가 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

(i) $A > B > C$

(ii) $12B > 13C > 11A$

11. 양의 정수 a, b가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $a+b$의 값을 구하여라.

(i) $a^2 + b^2 + \gcd(a, b) = 582$

(ii) $ab + \operatorname{lcm}(a, b) = 432$

(단, $\gcd(x, y)$는 x, y의 최대공약수, $\operatorname{lcm}(x, y)$는 x, y의 최소공배수)

12. 이등변삼각형 ABC ($\overline{AB} = \overline{AC}$)의 변 BC의 중점을 M이라 하자. 점 P, Q, R, S가 각각 선분 AC, CM, BM, AB 위에 있는 점으로 다음 조건을 모두 만족한다.

$$\angle CPQ = \angle QRS = 90^\circ, \qquad \overline{CP} = 9,$$
$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS}, \qquad \overline{BS} = 11$$

직선 PR과 QS의 교점을 X라 할 때, $\overline{MX} = x$이다. $(x+1)^2$의 값을 구하여라.

13. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하여라.

(i) $|m| \le 15$, $|n| \le 15$

(ii) $\max(|m|, |n|) \ne \max(|m-2|, |n|)$

(단, $\max(a, b)$는 a와 b중에서 작지 않은 값)

14. 음이 아닌 정수에 대하여 정의된 함수 f가 $f(0) = 0$이고, 각 양의 정수 n에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(3n-2) = 4f(n-1) + 3$

(ii) $f(3n-1) = 4f(n-1) + 2$

(iii) $f(3n) = 2f(n) + 1$

$f(n) = 253$을 만족하는 정수 n을 모두 더한 값을 구하여라.

15. 두 소수 p, q가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, p가 가질 수 있는 가장 큰 값을 구하여라.

(i) $5 < p < q < 2p + 100$

(ii) $p^2 + 5(q+2)p + 25$는 완전제곱수

16. 삼각형 ABC의 외심을 O라 하고 삼각형 OAC와 OBC의 외심을 각각 O_1, O_2라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름이 10이고 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$일 때, $\overline{O_1O_2} = d$이다. $(d-5)^2$의 값을 구하여라.

17. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \{-2, -1, 0, 1, 2\}$의 개수를 구하여라.

(i) 서로 다른 x, y에 대하여 $f(x) \ne f(y)$이다.

(ii) $f(x)^2 = x^2$인 x가 존재한다.

18. 양의 실수 a, b, c가 다음 세 조건을 모두 만족할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

(i) $c > a$

(ii) $10c = 7a + 4b + 2024$

(iii) $\dfrac{(a+c)^2}{a} + \dfrac{(c-a)^2}{b} = 2024$

19. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 작은 값을 구하여라.

$n^3 + 7$과 $3n^2 + 3n + 1$이 서로소가 아니다.

20. 예각삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D, 삼각형 ABC의 내심을 I, 삼각형 ABC의 방접원 중 변 BC에 접하는 것의 중심을 J라 하자. $\overline{AJ} = 90$, $\overline{DJ} = 60$일 때, 삼각형 BCI의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

(끝)

kmo1차 중등부 가형

문제	정답	문제	정답
1	101	11	010
2	100	12	034
3	288	13	459
4	005	14	510
5	011	15	075
6	490	16	109
7	150	17	644
8	074	18	104
9	056	19	036
10	360	20	320

나형

문제	정답	문제	정답
1	100	11	034
2	101	12	010
3	005	13	510
4	288	14	459
5	490	15	109
6	011	16	075
7	074	17	104
8	150	18	644
9	360	19	320
10	056	20	036

제 32 회 중등부 2차시험

중등부

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 11월 11일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족할 때, $\dfrac{f(8)-f(2)}{f(2)-f(1)}$의 값을 구하여라.

서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 $f(a) = f(b)$이면 $f(a^2 - 6b - 1) = f(b^2 + 8)$ 이다.

2. 약수의 개수가 4 이상인 양의 정수 N에 대하여, N의 약수 중 가장 작은 네 개를 각각 제곱하여 더한 값이 N과 같아지는 N을 모두 구하여라.

3. 이등변삼각형이 아닌 삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하고, 변 BC의 수직이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 P라 하자. 이때 A와 P는 변 BC에 대하여 같은 쪽에 있다. 삼각형 ABM과 AMC의 내심을 각각 I, J 라 하고, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$라 할 때, $\angle IPJ$를 구하여라.

4. 양의 정수 n에 대하여, $x + 2y + 2z + 3w = n$을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 $p(n)$이라 하고, 다음 세 조건을 모두 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 $q(n)$이라 하자.

(i) $a + b + c + d = n$

(ii) $a \geq b \geq d$

(iii) $a \geq c \geq d$

모든 n에 대하여 $p(n) = q(n)$임을 보여라.

제 32 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

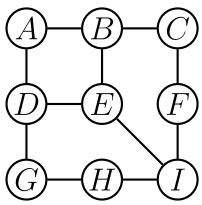
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2018년 11월 11일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 외심 O를 직선 AB, AC에 대하여 선대칭한 점을 각각 D, E라 하자. 삼각형 ADE의 외접원이 직선 AB, 직선 AC, 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 K, L, M이라 하자. 세 직선 BC, KL, AM이 한 점에서 만남을 보여라.

6. 아래 그림과 같이 9개의 작은 원판 $A, B, \ldots, I$와 11개의 선분으로 이루어진 도형이 있다. 모든 원판에 실수를 하나씩 쓰고, 각 선분에는 선분의 양 끝 원판에 적힌 두 실수의 차의 제곱을 적는다. 원판 A에는 0, 원판 I에는 1을 쓰자. 이때 모든 선분에 적힌 수의 합이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.



7. 등식 $7^m = 5^n + 24$를 만족하는 정수의 순서쌍 (m, n)을 모두 구하여라.

8. 서로 다른 n개의 정수로 이루어진 집합 S에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to S$가 항상 존재함을 보여라. (단, n은 3 이상인 정수이다.)

(i) 집합 $\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$는 S와 같다.

(ii) 모든 $1 \le i < j < k \le n$에 대하여, $2f(j) \ne f(i) + f(k)$이다.

오일러

제 32 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 최고차항의 계수가 1 인 4차 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\{x \mid x = f(x)\} = \{1, 3, 5, 7\}$$
$$\{x \mid x = g(x)\} = \{1, 5, 7, 9\}$$

이다. 집합 $\{x \mid f(x) = g(x)\}$의 모든 원소의 곱을 구하여라.

2. 두 학생 A와 B가 11 의 배수인 세 자리 양의 정수를 각각 하나씩 고른다. A가 고른 정수와 B가 고른 정수의 십의 자리의 수가 같도록 고르는 경우의 수를 구하여라.

3. 각 A가 직각인 직각 삼각형 ABC의 두 변 AB와 AC의 길이가 각각 3, 4이다. 각 B의 이등분선이 변 AC와 만나는 점을 D, 각 C의 이등분선이 변 AB와 만나는 점을 E라 하자. 점 A에서 직선 DE까지의 거리를 x라 할 때, $145x^2$의 값을 구하여라.

4. 다음과 같이 정의된 함수 $f(n)$에 대하여 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$의 값을 구하여라.

$$f(n) = \frac{1}{1+n} + \frac{2}{2+n} + \frac{3}{3+n} + \cdots + \frac{10}{10+n}$$

5. 다항식 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 식을 만족할 때, $f(99)$의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$f(f(x)) = f(x)^2 + x^2 + x + 2018$$

6. 두 학생 A와 B가 포함된 8 명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B가 같은 모둠에 속하지 않으면서, 각 모둠의 인원이 2 명 또는 3 명이 되도록 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)

7. 길이가 40 인 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 C라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 하자. 원 O_1은 반원 C에 접하고, 점 M에서 선분 AB에 접한다. 원 $O_2(\neq O_1)$는 원 O_1, 반원 C, 선분 AB에 모두 접한다. 삼각형 MO_1O_2의 넓이가 S일 때, $\sqrt{2}S$의 값을 구하여라. (단, 원 O_1, O_2의 중심은 각각 점 O_1, O_2이다.)

8. $p^2 + 87$의 양의 약수의 개수가 9가 되도록 하는 소수 p를 구하여라.

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $1 \le t < s$이면 $f(t) < f(s)$이다.

(ii) 모든 실수 t에 대하여 $f(2-t) = f(t)$이다.

다음 부등식을 만족하는 정수 a를 모두 더한 값을 구하여라.

$$f(-2a^2 + 16a - 17) < f(a^2 - 10a + 35)$$

(뒷면에 계속)

제 32 회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

10. 그림과 같이 36개의 칸으로 이루어진 판에 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 숫자가 적혀있다.

1					2
	3			4	
	5			6	
7					8

숫자가 적혀있지 않은 28개의 칸 중 6개에 검은 색으로 색칠한다. 색칠된 칸이 각 가로줄과 각 세로줄에 1개씩만 있도록 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

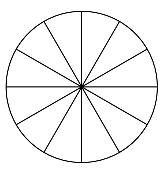
11. 넓이가 100인 볼록사각형 $ABCD$가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 3$이다. 점 P를 사각형 $ABPC$가 평행사변형이 되도록 잡고, 점 Q를 사각형 $ACQD$가 평행사변형이 되도록 잡았을 때, 삼각형 APQ의 넓이를 구하여라.

12. 양의 정수 a, b가 다음 조건을 만족할 때, ab의 값을 구하여라.

$$9a^2 - 12ab + 2b^2 + 36b - 162 = 0$$

13. 세 실수 x, y, z가 $x + y + 5z = 4$, $0 \le x \le y \le z$를 모두 만족한다. $x^2 + 2y^2 + z^2$이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 $\frac{p}{q}$라 할 때, $p + q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 양의 정수)

14. 그림과 같이 12등분된 원판이 있다. 각 칸을 빨간색 또는 파란색으로 칠하여 만들 수 있는 모든 원판의 개수를 구하여라. 단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.



15. 각 B가 예각이고 $\overline{AB} < \overline{AC}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 변 BC의 중점 E에서 변 AB에 내린 수선의 발을 F라 할 때, $\overline{AD} = 16$, $\overline{BD} = 12$, $\overline{AF} = 5$이다. $\overline{AC}^2$을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, 점 F는 선분 AB 위에 있다.)

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n을 구하여라.

$\sqrt{13^4 + 4n^3}$은 13의 배수가 아닌 정수

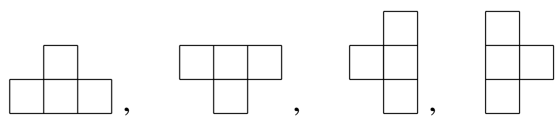
17. 예각삼각형 ABC가 $\angle ABC = 46°$, $\overline{AB} > \overline{AC}$를 만족한다. 삼각형 ABC의 외심을 O, 수심을 H라 할 때, $\angle BAC$의 이등분선이 선분 OH의 중점을 지난다. $\angle OAH = x°$라 할 때, x의 값을 구하여라. (단, $0 \le x < 180$ 이다.)

18. 방정식 $x^2(x - 5) + 2 = 0$의 가장 큰 해를 a라 할 때, $[a^4]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

19. 그림과 같이 80개의 정사각형 모양의 칸으로 이루어진 판 R에 1에서 80까지의 수가 적혀있다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

4개의 칸으로 만들어진 다음 네 종류의 타일을 생각하자.



이러한 타일 20개를 선택하여 판 R에 빈틈없이 붙이는 경우의 수를 구하여라.

20. 양의 정수 k와 3의 배수가 아닌 양의 정수 m이 다음 등식을 만족할 때, k의 값을 구하여라.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{53} - \frac{1}{54} + \frac{1}{55} = \frac{3^k \times m}{28 \times 29 \times \cdots \times 54 \times 55}$$

(끝)

가우스

제 32 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 5월 12일 ; 제한시간 4시간

1. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
2. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
3. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
   예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.
4. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
5. 문제 1 ∼ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ∼ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. 십의 자리의 수가 9 인 다섯 자리 양의 정수 중 11 의 배수의 개수를 구하여라.

2. 정수 $\sqrt{2(20^4+18^8+344^4)}$ 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

3. 두 변 AB와 AD의 길이가 각각 20과 8인 사각형 $ABCD$가 변 AB의 중점이 중심인 원에 내접한다. 이 원의 점 C에서의 접선과 점 D에서의 접선이 점 E에서 만난다고 할 때, 선분 DE의 길이는 5이다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 F라 할 때, $\overline{AF}^2$ 의 값을 구하여라.

4. 양의 정수 m, n이 다음 식을 만족할 때 $m+n$의 값을 구하여라.

$$4^m - 3^n = 11 \times 19 \times 47$$

5. 실수 a가 등식 $a^2+100a-1=0$을 만족한다. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 $2a$이고 x절편이 유리수인 직선이다. 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 정수 A, B, C에 대하여 $A-(B+C)$의 값을 구하여라.

$$f(f(x-1)) = Af(x) + Bx + C$$

6. 두 학생 A와 B가 포함된 8명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B가 같은 모둠에 속하지 않으면서, 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명이 되도록 나누는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)

7. 삼각형 ABC 가 $\angle B > \angle C$, $\angle A = 50°$를 만족한다. 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 점 B를 지나고 $\angle A$의 이등분선에 수직인 직선과 점 D에서 삼각형 DEF의 외접원에 접하는 직선이 만나는 점을 K라 하자. $\angle BKD = 5°$일 때, $\angle B = x°$이다. x의 값을 구하여라. (단, $0 \le x < 180$ 이다.)

8. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n을 모두 더한 값을 구하여라.

   n과 서로소인 양의 정수 중 n보다 작은 것의 합이 $4n$이다.

9. 세 실수 x, y, z가 $x+y+5z=4$, $0 \le x \le y \le z$를 모두 만족할 때, $x^2+2y^2+z^2$이 될 수 있는 값 중 가장 큰 것을 M, 가장 작은 것을 m이라 하자. $M-m=\frac{p}{q}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 양의 정수)

10. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m을 모두 더한 값을 구하여라.

   $m^2-10m+10$은 $4 \cdot 5^{m-1}$의 약수이다.

(뒷면에 계속)

11. 그림과 같이 36개의 칸으로 이루어진 판에 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 숫자가 적혀있다.

1					2
	3			4	
	5			6	
7					8

숫자가 적혀있지 않은 28개의 칸 중 6개에 검은 색으로 색칠한다. 색칠된 칸이 각 가로줄과 각 세로줄에 1개씩만 있도록 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

12. 직사각형 $ABCD$가 $\overline{AB} = 18$, $\overline{BC} = 10$을 만족한다. 변 AD의 점 A 쪽 연장선 위에 $\overline{AP} = 3$이 되도록 점 P를 잡자. 변 AB의 중점을 E라 하고, 직선 EP와 직선 BD의 교점을 Q라 하자. 변 CD의 중점을 F, 삼각형 PQF의 내심을 I라고 할 때, $36\,\overline{IE}$의 값을 구하여라.

13. 방정식 $x^2(x-5)+2 = 0$의 가장 큰 해를 a라 할 때, $[a^4]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

14. 정팔면체의 각 면을 빨간색 또는 파란색으로 칠하는 방법의 수를 구하여라. 단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.

15. 평행사변형 $ABCD$가 $\overline{AB} = 18$, $\overline{AD} = 27$을 만족한다. 삼각형 BCD의 외접원과 직선 CA의 교점을 $E(\neq C)$라 할 때, $\overline{DE} = 36$이다. 선분 BD의 중점을 M이라 할 때, $\overline{EM}^2 \times 100$의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n과 소수 p, q의 순서쌍 (n, p, q)에 대하여 npq를 모두 더한 값을 구하여라. (단, 0은 완전제곱수이다.)

$p^4 - 4q^n$이 완전제곱수가 된다.

17. 좌표평면에서 직사각형 모양의 영역

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 8,\ 0 \le y \le 5\}$$

이 있다. 한 변의 길이가 3인 정사각형 모양의 영역 $S_{i\,j}$를 다음과 같이 정의한다.

$$S_{i\,j} = \{(x, y) \mid i \le x \le i+3,\ j \le y \le j+3\}$$

영역 $S_{i\,j}$ (단, i, j는 모두 정수)를 6개 선택할 때, 이들의 합집합이 R을 포함하도록 선택하는 경우의 수를 구하여라.

18. 예각삼각형 ABC ($\angle A < \angle B$, $\angle A < \angle C$)의 외접원 Ω의 중심을 O라 하고, 점 C에서 직선 BC와 접하고 점 A를 지나는 원 Γ의 중심을 P라 하자. 직선 AO와 원 Γ의 교점을 $D\,(\neq A)$, 직선 AP와 원 Ω의 교점을 $E\,(\neq A)$라 하자. $\angle ACD = 43°$이고 $\angle AEC = 105°$일 때, $\angle OPD = x°$이다. x의 값을 구하여라. (단, $0 \le x < 180$ 이다.)

19. 다음 조건을 만족하는 정수 n을 모두 더한 값을 구하여라.

$(n^2-5n+7)(n^2-21n+49) = p^m$을 만족하는 소수 p와 정수 m이 존재한다.

20. 2차 다항식 $P(x)$와 4차 다항식 $Q(x)$가 다음 네 조건을 모두 만족한다.

(i) 임의의 실수 x에 대하여

$$P(x)Q(x+4) = P(x+8)Q(x)$$

(ii) $P(x) = 0$은 서로 다른 2개의 실수근을 가진다.

(iii) $Q(x) = 0$은 서로 다른 4개의 실수근을 가진다.

(iv) $P(x) = 0$의 두 근의 차가 $Q(x) = 0$의 네 근의 합보다 8만큼 크다.

$Q(x) = 0$의 네 근의 제곱의 합이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 a라 할 때, $10a$의 값을 구하여라.

(끝)

고등부 오일러

문제	정답	문제	정답
1	035	11	140
2	657	12	054
3	144	13	127
4	050	14	352
5	909	15	700
6	300	16	056
7	100	17	028
8	013	18	584
9	018	19	162
10	152	20	010

고등부 가우스

문제	정답	문제	정답
1	819	11	152
2	712	12	135
3	080	13	584
4	015	14	023
5	600	15	904
6	300	16	032
7	070	17	408
8	105	18	028
9	409	19	023
10	020	20	288

제 32 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2018년 11월 11일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC의 내심 I에서 변 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 점 A를 지나고 직선 BI에 수직인 직선과 직선 CI의 교점을 K라 하고, 점 A를 지나고 직선 CI에 수직인 직선과 점 C를 지나고 직선 BI에 수직인 직선의 교점을 L이라 하자. 세 점 E, K, L이 한 직선 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수 n에 대하여, $x + y + 2z + 3w = n - 1$을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 $p(n)$이라고 하고, 다음 세 조건을 모두 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 $q(n)$이라 하자.

(i) $a + b + c + d = n$

(ii) $a \geq b$이고 $c \geq d$이며 $a \geq d$이다.

(iii) $b < c$

모든 n에 대하여 $p(n) = q(n)$임을 보여라.

3. 다항식 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x + 4$에 대하여 다음을 만족하는 소수 p가 무한히 많음을 보여라.

어떠한 양의 정수 m에 대해서도 $f(m)$은 p의 배수가 아니다.

4. 실수의 수열 $\{a_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족한다고 하자.

(i) $0 < a_n < n^\alpha$

(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \sqrt{n}$

이때 $n > N$인 모든 n에 대하여 $a_1^{2018} + a_2^{2018} + \cdots + a_n^{2018} < \dfrac{n}{2018}$이 성립하는 양의 정수 N이 반드시 존재하게 되는 양수 α를 모두 구하여라.

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

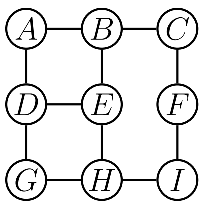
2018년 11월 11일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 볼록사각형 $ABCD$에서 각 A의 이등분선이 각 B의 이등분선, 각 D의 이등분선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 각 C의 이등분선이 각 D의 이등분선, 각 B의 이등분선과 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 이때 네 점 P, Q, R, S는 모두 다른 점이고, 두 선분 PR과 QS가 점 Z에서 수직으로 만난다. 각 A, B, C, D의 외각의 이등분선을 각각 ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D라 하고, ℓ_A와 ℓ_B의 교점을 E, ℓ_B와 ℓ_C의 교점을 F, ℓ_C와 ℓ_D의 교점을 G, ℓ_D와 ℓ_A의 교점을 H라 하자. 사각형 $EFGH$의 네 변 FG, GH, HE, EF의 중점을 각각 K, L, M, N이라 할 때, 사각형 $KLMN$의 넓이는 $\overline{ZM} \cdot \overline{ZK} + \overline{ZL} \cdot \overline{ZN}$임을 보여라.

6. 서로 다른 n개의 양의 정수로 이루어진 집합 S에 대하여, 다음 조건을 만족하는 일대일 대응 $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to S$가 항상 존재함을 보여라. (단, n은 3 이상인 정수이다.)

모든 $1 \le i < j < k \le n$에 대하여, $(f(j))^2 \ne f(i) \cdot f(k)$이다.

7. 아래 그림과 같이 9개의 작은 원판 $A, B, \ldots, I$와 11개의 선분으로 이루어진 도형이 있다. 모든 원판에 실수를 하나씩 쓰고, 각 선분에는 선분의 양 끝 원판에 적힌 두 실수의 차의 제곱을 적는다. 원판 A에는 0, 원판 I에는 1을 쓰자. 이때 모든 선분에 적힌 수의 합이 될 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.



8. 양의 정수 a, c에 대하여 b는 $ac-1$의 양의 약수이다. 1보다 작은 양의 유리수 r에 대하여, 집합 $A(r)$을 다음과 같이 정의하자.

$$A(r) = \{m(r - ac) + nab \mid \ m, n\text{은 정수}\}$$

이때 $A(r)$의 원소 중 가장 작은 양의 유리수가 $\dfrac{ab}{a+b}$ 이상이 되는 r을 모두 구하여라.

제 31 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 3월 24일 (오후) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 유리수 m, n이 각각 0이 아니고 $m^3 = (27n^2+1)(m+2n)$을 만족시킬 때 $\dfrac{m-6n}{m+2n}$이 가질 수 있는 정수값을 모두 구하여라.

2. 삼각형 ABC가 $\angle ABC < \angle BCA < \angle CAB < 90°$를 만족한다. 삼각형 ABC의 외심 O를 변 BC에 대하여 대칭시킨 점을 K라 하자. 점 K에서 직선 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. 직선 DE와 직선 BC가 점 P에서 만나고 선분 AK를 지름으로 하는 원과 삼각형 ABC의 외접원이 점 $Q(\neq A)$에서 만난다. 직선 PQ가 변 BC의 수직이등분선과 점 S에서 만난다면, S는 선분 AK를 지름으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

3. 지난 31년간 $n(\geq 7)$명의 테니스 선수들이 서로 경기를 한 결과를 분석하였더니, 임의의 두 선수 X, Y를 뽑더라도 그 두 선수를 모두 이긴 적이 있는 다른 선수가 있었다는 사실을 발견하였다. 만일 어떤 정수 k에 대하여 $2(2^{(2^k)}-1) \geq n$이면 다음 조건을 만족하는 서로 다른 테니스 선수들 A_1, A_2, $\ldots$, A_ℓ이 존재함을 보여라.

> $2 \leq \ell \leq 2k$이며 모든 $1 \leq i < \ell$에 대하여 A_i는 A_{i+1}을 이긴 적이 있고 A_ℓ은 A_1을 이긴 적이 있다.

(단, 어떤 두 선수 A, B는 서로 경기를 한 적이 없을 수도 있고 있을 수도 있다.)

제 31 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2018년 3월 25일 (오전) ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 각 C가 직각인 직각삼각형 ABC이 있다. 점 A, B를 지나는 원이 변 AC와 A, C가 아닌 점 G에서 만나고 변 BC와 B 아닌 점 D에서 만난다. 선분 AD와 선분 BG의 교점을 H, 선분 AD의 수직이등분선 ℓ과 선분 AB의 수직이등분선의 교점을 E라 하자. 점 D를 지나고 선분 DE와 수직인 직선이 직선 ℓ과 만나는 점을 F라 하자. 삼각형 CFH의 외접원이 직선 AC와 $P(\neq C)$, 직선 BC와 $Q(\neq C)$에서 만난다. 이때, 직선 PQ와 직선 FH가 서로 수직으로 만남을 보여라.

5. 임의의 실수 x에 대하여

$$P(Q(x)) - 3Q(P(x)) = 1$$

을 만족하는 차수가 2018 이상인 두 정수계수 다항식 $P(x)$와 $Q(x)$가 존재하는가?

6. 한 변의 길이가 1인 정이십면체의 각 면에 개미가 한 마리씩 살고 있다. 개미는 각 면의 모서리를 따라 반시계방향으로 돌아야 하며 어느 순간에도 속력이 1 이상이어야 한다. 꼭짓점이 아닌 점에서 두 개미가 만나는 것은 금지되어 있다. 다섯 마리의 개미가 한 꼭짓점에서 동시에 만나는 것을 **충돌**이라고 한다. 충돌이 일어나지 않도록 개미들이 움직이는 전략이 존재하는가?

유형 가

제 33 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 다음 식을 만족하는 모든 실수 x들의 합을 구하여라.

$$|x-3|-2=\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{3}x$$

2. 여섯자리 양의 정수 $m=\overline{abcdef}$, $n=\overline{fabcde}$에 대하여, $4m=n$을 만족하는 m 중에서 가장 큰 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.
(단, $0\le a,b,c,d,e,f\le 9$인 정수에 대하여, $\overline{abcdef}=10^5a+10^4b+10^3c+10^2d+10e+f$이다.)

3. 볼록사각형 $ABCD$가 있다. 삼각형 ABD와 BCD의 외접원을 각각 O_1과 O_2라 하자. 점 A에서 원 O_1의 접선과 점 C에서 원 O_2의 접선의 교점이 직선 BD 위에 있다. $\overline{AB}=35$, $\overline{AD}=20$, $\overline{CD}=40$일 때, $\overline{BC}$의 값을 구하여라.

4. 학생 A, B, C가 포함된 학생 10명을 2명씩 5개의 모둠으로 나눌 때, 학생 A, B, C가 모두 다른 모둠에 속하게 되는 경우의 수를 구하여라.

5. 양수 a, b, c에 대하여, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{a^2+8b^2+c^2}{ab+bc}$$

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m, n $(m<n)$의 순서쌍 (m,n)의 개수를 구하여라.

m 이상 n 이하의 모든 정수의 합이 1111이다.

7. 예각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=96$, $\overline{AC}=72$이다. 원 O는 점 B에서 직선 AB에 접하고 점 C를 지난다. 원 O와 직선 AC의 교점을 $D(\neq C)$라 하자. 점 D와 선분 AB의 중점을 지나는 직선이 원 O와 점 $E(\neq D)$에서 만난다. $\overline{AE}=60$일 때, $10\overline{DE}$의 값을 구하여라.

8. 일의 자리의 수가 5인 다섯자리 양의 정수 중 17의 배수인 것의 개수를 구하여라.

9. 주어진 양의 정수 n에 대하여 양의 정수 x와 y가 $x+2y=n$을 만족할 때, x^2+y^2이 가질 수 있는 가장 작은 값을 a_n이라 하자. 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{18}+a_{19}$$

10. 다음 식의 값이 정수가 되도록 하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{300}{2n+1}+\frac{935}{5n+1}$$

(뒷면에 계속)

11. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 180$와 $\overline{AC} = 132$이다. 점 D는 변 BC의 중점, 점 E와 F는 선분 AD를 삼등분하는 점($\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FD}$)이고 $\overline{CF} = \overline{CD}$이다. 직선 CF와 BE의 교점을 X라 할 때, $\overline{EX}$의 값을 구하여라.

12. 빨간색 공 4개가 들어있는 상자, 노란색 공 3개가 들어있는 상자, 파란색 공 1개가 들어있는 상자가 있다. 한번에 한 상자에서 같은 색의 공을 1개 이상 꺼낸다. 홀수번만에 세 상자에서 8개의 공을 모두 꺼내는 방법의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공들은 서로 구별하지 않는다.)

13. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$이 존재하는 3 이상 2019 이하의 정수 n의 개수를 구하여라.

(i) 모든 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $|x_i| = 1$

(ii) $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = \dfrac{n}{2}$

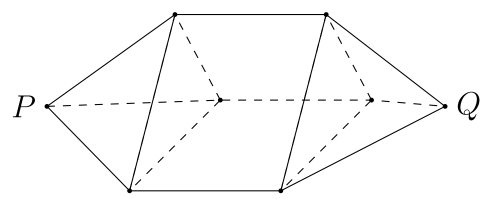
14. 60보다 작은 양의 정수 a, b, c, d, e에 대하여

$$\frac{11^7}{60^5} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \frac{d}{60^4} + \frac{e}{60^5}$$

가 성립할 때, $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라.

15. 각 A가 90° 보다 큰 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 점 B에서 원 O에 접하는 직선과 점 C에서 원 O에 접하는 직선이 점 D에서 만난다. 점 A에서 원 O에 접하는 직선과 평행하고 점 D를 지나는 직선이 직선 AB, AC와 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\overline{EC} = 4$, $\overline{BD} = 5$일 때, $\overline{CF}^2$의 값을 구하여라.

16. 다음과 같이 삼각기둥에 두 개의 정사면체를 붙여서 만든 입체가 있다. 이 입체의 꼭짓점 P에서 꼭짓점 Q로 모서리를 따라 이동할 때, 한번 지나간 꼭짓점은 다시 지나가지 않는다. 가능한 모든 경로의 수를 구하여라.

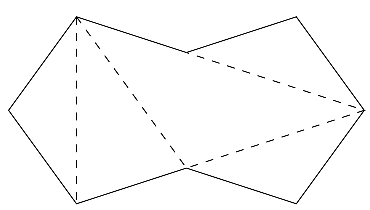


17. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2 = 200$을 만족할 때, 식 $2(x+y) - xy$가 가질 수 있는 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

18. 세자리 양의 정수 m, n에 대하여 $m+n+10$과 $mn-1$이 모두 1000의 배수일 때, $|n-m|$의 값을 구하여라.

19. 삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = 440$이다. 점 D는 변 AB 위의 점으로 $\overline{AD} = 1$이다. 삼각형 ABC의 내심을 I라 할 때, 직선 CI가 삼각형 ADI의 외접원에 접한다. 삼각형 ADI의 외접원이 변 AC와 점 $E(\neq A)$에서 만나고, 중심 I이고 점 E를 지나는 원이 변 AC와 점 $F(\neq E)$에서 만난다. $\overline{IE} = 20$일 때, $\overline{EF}$의 값을 구하여라.

20. 주어진 도형의 내부에 꼭짓점을 잇는 선분을 그어 도형을 몇 개의 영역으로 분할한다. 이때, 서로 다른 선분은 내부에서 만나지 않고 끝점에서만 만날 수 있다. 이렇게 나누어진 각각의 영역이 모두 삼각형이 되면 *삼각분할*이라 한다. 다음 그림은 합동인 정오각형 두 개를 붙인 도형의 삼각분할의 예이다.



이 도형의 삼각분할의 개수를 구하여라.

유형 나

제 33 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 여섯자리 양의 정수 $m = \overline{abcdef}$, $n = \overline{fabcde}$에 대하여, $4m = n$을 만족하는 m 중에서 가장 큰 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.
(단, $0 \le a, b, c, d, e, f \le 9$인 정수에 대하여, $\overline{abcdef} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f$이다.)

2. 다음 식을 만족하는 모든 실수 x들의 합을 구하여라.

$$|x-3| - 2 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x$$

3. 학생 A, B, C가 포함된 학생 10명을 2명씩 5개의 모둠으로 나눌 때, 학생 A, B, C가 모두 다른 모둠에 속하게 되는 경우의 수를 구하여라.

4. 볼록사각형 $ABCD$가 있다. 삼각형 ABD와 BCD의 외접원을 각각 O_1과 O_2라 하자. 점 A에서 원 O_1의 접선과 점 C에서 원 O_2의 접선의 교점이 직선 BD 위에 있다. $\overline{AB} = 35$, $\overline{AD} = 20$, $\overline{CD} = 40$일 때, $\overline{BC}$의 값을 구하여라.

5. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m, n $(m < n)$의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하여라.

m 이상 n 이하의 모든 정수의 합이 1111이다.

6. 양수 a, b, c에 대하여, 다음 식의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{a^2 + 8b^2 + c^2}{ab + bc}$$

7. 일의 자리의 수가 5인 다섯자리 양의 정수 중 17의 배수인 것의 개수를 구하여라.

8. 예각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 96$, $\overline{AC} = 72$이다. 원 O는 점 B에서 직선 AB에 접하고 점 C를 지난다. 원 O와 직선 AC의 교점을 $D(\neq C)$라 하자. 점 D와 선분 AB의 중점을 지나는 직선이 원 O와 점 $E(\neq D)$에서 만난다. $\overline{AE} = 60$일 때, $10\overline{DE}$의 값을 구하여라.

9. 다음 식의 값이 정수가 되도록 하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{300}{2n+1} + \frac{935}{5n+1}$$

10. 주어진 양의 정수 n에 대하여 양의 정수 x와 y가 $x+2y = n$을 만족할 때, $x^2 + y^2$이 가질 수 있는 가장 작은 값을 a_n이라 하자. 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{18} + a_{19}$$

(뒷면에 계속)

11. 빨간색 공 4개가 들어있는 상자, 노란색 공 3개가 들어있는 상자, 파란색 공 1개가 들어있는 상자가 있다. 한번에 한 상자에서 같은 색의 공을 1개 이상 꺼낸다. 홀수번 만에 세 상자에서 8개의 공을 모두 꺼내는 방법의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공들은 서로 구별하지 않는다.)

12. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 180$와 $\overline{AC} = 132$이다. 점 D는 변 BC의 중점, 점 E와 F는 선분 AD를 삼등분하는 점($\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FD}$)이고 $\overline{CF} = \overline{CD}$이다. 직선 CF와 BE의 교점을 X라 할 때, $\overline{EX}$의 값을 구하여라.

13. 60보다 작은 양의 정수 a, b, c, d, e에 대하여

$$\frac{11^7}{60^5} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \frac{d}{60^4} + \frac{e}{60^5}$$

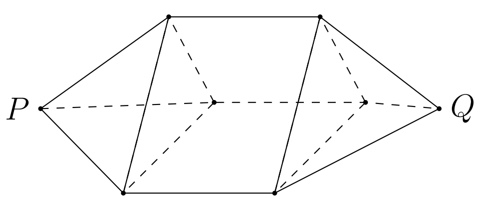
가 성립할 때, $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라.

14. 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$이 존재하는 3 이상 2019 이하의 정수 n의 개수를 구하여라.

(i) 모든 $i = 1, 2, \ldots, n$에 대하여 $|x_i| = 1$

(ii) $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = \dfrac{n}{2}$

15. 다음과 같이 삼각기둥에 두 개의 정사면체를 붙여서 만든 입체가 있다. 이 입체의 꼭짓점 P에서 꼭짓점 Q로 모서리를 따라 이동할 때, 한번 지나간 꼭짓점은 다시 지나가지 않는다. 가능한 모든 경로의 수를 구하여라.

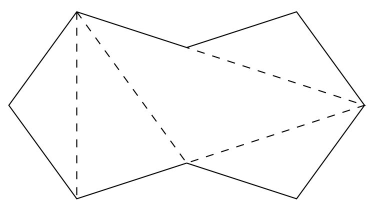


16. 각 A가 $90°$보다 큰 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 점 B에서 원 O에 접하는 직선과 점 C에서 원 O에 접하는 직선이 점 D에서 만난다. 점 A에서 원 O에 접하는 직선과 평행하고 점 D를 지나는 직선이 직선 AB, AC와 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\overline{EC} = 4$, $\overline{BD} = 5$일 때, $\overline{CF}^2$의 값을 구하여라.

17. 세자리 양의 정수 m, n에 대하여 $m+n+10$과 $mn-1$이 모두 1000의 배수일 때, $|n-m|$의 값을 구하여라.

18. 두 실수 x, y가 $x^2+y^2 = 200$을 만족할 때, 식 $2(x+y) - xy$가 가질 수 있는 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

19. 주어진 도형의 내부에 꼭짓점을 잇는 선분을 그어 도형을 몇 개의 영역으로 분할한다. 이때, 서로 다른 선분은 내부에서 만나지 않고 끝점에서만 만날 수 있다. 이렇게 나누어진 각각의 영역이 모두 삼각형이 되면 *삼각분할*이라 한다. 다음 그림은 합동인 정오각형 두 개를 붙인 도형의 삼각분할의 예이다.



이 도형의 삼각분할의 개수를 구하여라.

20. 삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = 440$이다. 점 D는 변 AB 위의 점으로 $\overline{AD} = 1$이다. 삼각형 ABC의 내심을 I라 할 때, 직선 CI가 삼각형 ADI의 외접원에 접한다. 삼각형 ADI의 외접원이 변 AC와 점 $E(\neq A)$에서 만나고, 중심 I이고 점 E를 지나는 원이 변 AC와 점 $F(\neq E)$에서 만난다. $\overline{IE} = 20$일 때, $\overline{EF}$의 값을 구하여라.

(끝)

kmo1차 중등부 가형

문제	정답	문제	정답
1	012	11	044
2	769	12	896
3	070	13	252
4	630	14	061
5	004	15	084
6	003	16	081
7	799	17	242
8	529	18	064
9	494	19	039
10	112	20	062

나형

문제	정답	문제	정답
1	769	11	896
2	012	12	044
3	630	13	061
4	070	14	252
5	003	15	081
6	004	16	084
7	529	17	064
8	799	18	242
9	112	19	062
10	494	20	039

제 33 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2019년 11월 16일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 좌표평면에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 각 격자점은 한 가지 색으로 색칠되어 있고, 사용된 색의 수는 5 이상이다. 두 격자점 (x, y)와 (z, w)에 대하여, $x - z$와 $y - w$가 모두 3의 배수이면 두 격자점은 같은 색이다. 서로 다른 다섯 개의 색을 임의로 골랐을 때, 이 중 정확히 세 개의 색의 격자점만을 지나는 직선이 존재함을 보여라.

2. 예각삼각형 ABC에서 변 AC 위의 점 D는 $\overline{AD} = \overline{BC}$와 $\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$를 만족하는 점이다. 꼭지각 C의 이등분선에 평행하고 점 D를 지나는 직선과 변 AB의 교점을 E라 하자. $\overline{AE} = \overline{CD}$이면 $\angle ADB = 3\angle BAC$임을 보여라.

3. 다음 조건을 만족하는 소수 p, q $(p \le q)$의 순서쌍 (p, q)를 모두 구하여라.

> (조건) $2^n + 3^n + 4^n + \cdots + (2pq - 1)^n$이 $2pq$의 배수가 되는 양의 정수 n이 존재한다.

4. 양의 정수의 수열 $\{a_1, a_2, \ldots\}$이 임의의 자연수 n에 대하여 다음을 만족한다.

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \le n^2 + 2019$$

이때, 모든 a_i들은 같은 수임을 보여라.

제 33 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2019년 11월 16일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 소수 p에 대하여 다음 조건을 만족하는 정수 $a,\ b,\ c,\ d$가 존재함을 보여라.

(조건) 모든 정수 n에 대하여 $n^4+1-(n^2+an+b)(n^2+cn+d)$는 p의 배수이다.

6. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

(1) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+f(x)+xy) = 2f(x)+xf(y)$ 이다.

(2) 모든 실수 z에 대하여 $f(x) = z$인 x가 존재한다.

7. 예각삼각형 ABC의 외심을 O, 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\angle ODC = 2\angle DAO$이다. 삼각형 ABD의 외접원이 선분 OA, 직선 OD와 각각 점 $E(\neq A, O)$, 점 $F(\neq D)$에서 만난다. 직선 DE와 선분 AC의 교점을 X라 하고, 각 BAF의 이등분선과 선분 BE의 교점을 Y라 할 때, $\dfrac{\overline{AY}}{\overline{BY}} = \dfrac{\overline{EX}}{\overline{EO}}$임을 보여라.

8. 두 개의 항공사 A, B와 4개 이상의 유한 개의 공항이 있다. 임의의 두 공항 간에는 A와 B 중 정확히 한 항공사의 항공기가 양 방향으로 다닌다고 하자. 각 항공사는 자사의 항공기만 이용하여 모든 공항을 정확히 한 번씩만 지나는 경로로 구성된 세계 여행 상품을 만들려고 한다. 이때 항공사 A, B가 만들 수 있는 세계 여행 상품의 종류의 개수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$는 4의 배수임을 보여라.

오일러

제 33 회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.
B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.
C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.
E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 두 이차다항식 $P(x)$와 $Q(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$P(Q(x)) = P(x)Q(x)$$

을 만족한다. $Q(2) = 200$일 때, $Q(5)$의 값을 구하여라.

2. 양의 정수 123456을 재배열하여 만든 여섯자리 정수 $\overline{abcdef}$ 중 다음 조건을 만족하는 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

> $\overline{ab}$는 2의 배수, $\overline{abc}$는 3의 배수, $\overline{abcd}$는 4의 배수, $\overline{abcde}$는 5의 배수, $\overline{abcdef}$는 6의 배수이다.

(예를 들어, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ 이다.)

3. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$가 있다. 두 직선 AB와 CD가 점 E에서 만나고 두 직선 BC와 AD가 점 F에서 만난다. $\overline{AD} = 84$, $\overline{BC} = 28$, $\overline{BE} = 42$, $\overline{CE} = 56$일 때, $\overline{EF}^2$을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

4. 학생 A와 B가 포함된 9명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B가 같은 모둠에 속하고 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명인 경우의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)

5. 함수 $y = x^2$의 그래프 위의 세 점 A, B, C가 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(i) $\angle BAC = 90°$

(ii) 선분 BC의 중점 M의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같다.

(iii) 선분 AM의 중점의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같다.

점 A와 B의 x좌표를 각각 a, b라 할 때, $144a^2b^2$의 값을 구하여라.

6. 다음 식의 값이 정수가 되도록 하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\frac{300}{2n+1} + \frac{935}{5n+1}$$

7. 사각형 $ABCD$에서 두 대각선의 교점을 O라 하면 $\angle AOB = 30°$, $\overline{AO} = 3$, $\overline{BO} = 5$, $\overline{CO} = 4$, $\overline{DO} = 3$이다. 두 점 A, C에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 A_1, C_1, 두 점 B, D에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 B_1, D_1이라 하고 두 점 A_1, C_1에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 각각 A_2, C_2, 두 점 B_1, D_1에서 직선 BD에 내린 수선의 발을 각각 B_2, D_2라 하자. 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S라 할 때, $64S$의 값을 구하여라.

8. 다음 식의 값을 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대 정수)

$$\frac{1}{11}\left(\left[\sqrt[3]{1}\right] + \left[\sqrt[3]{2}\right] + \cdots + \left[\sqrt[3]{1000}\right]\right)$$

9. 주어진 양의 정수 n에 대하여 서로 다른 양의 정수 x, y, z가 $x+y+z = n$을 만족할 때, $xy+yz+zx$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 a_n이라 하자. 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_7 + a_{10} + a_{13} + \cdots + a_{25} + a_{28}$$

10. 60보다 작은 양의 정수 a, b, c, d, e에 대하여

$$\frac{11^7}{60^5} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \frac{d}{60^4} + \frac{e}{60^5}$$

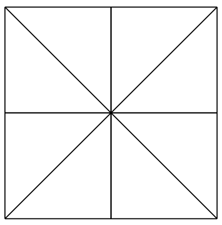
가 성립할 때, $a+b+c+d+e$의 값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

제 33회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

11. 평행사변형 $ABCD$에서 $\angle ABD = 43°$이다. 각 BAD의 이등분선과 직선 BC, CD와의 교점을 각각 E와 F라 하고 삼각형 CEF의 외심을 O라 하자. $\angle ECO = 31°$, $\angle EBO = x°$일 때, x의 값을 구하여라. (단, $0 \le x \le 180$이다.)

12. 다음과 같이 정사각형을 8등분한다. 각 칸을 빨간색 또는 파란색으로 칠한다. 이렇게 색칠된 정사각형의 개수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.)



13. 양의 정수 n에 대하여 방정식

$$\sum_{k=1}^{n} |x-k| = \left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + n - 1$$

의 해를 모두 더한 값을 a_n이라 할 때, 다음의 값을 구하여라.

$$2\,(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20})$$

14. 양의 정수 160401의 약수가 되는 모든 소수의 합을 구하여라.

15. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 11$, $\overline{CA} = 10$이다. 삼각형 ABC의 내접원 I가 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하고, 점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 직선 EF와 만나는 점을 P, 직선 PD가 원 I와 만나는 점을 $Q(\neq D)$라 하자. 삼각형 DEQ의 넓이를 S라 할 때, $\left(\frac{11}{8}S\right)^2$의 값을 구하여라.

16. 카드 9장에 2부터 10까지의 정수가 하나씩 적혀 있으며 각 카드에 적힌 수는 모두 다르다. 이 카드를 상자 A, B, C에 각각 2장, 3장, 4장씩 넣을 때, 상자 A에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 a, 상자 B에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 b, 상자 C에 있는 카드에 적힌 수의 곱을 c라 하자. a, b, c의 최대공약수가 1이 되도록 상자에 넣는 경우의 수를 구하여라.

17. 실수 x, y, z가 $x^2 + y^2 + z^2 = 147$을 만족할 때, 다음 식의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

$$x + y + z - xy - yz - zx$$

18. 사차방정식 $x^4 - 101^2x^2 + n^2 = 0$이 정수해를 가지도록 하는 양의 정수 n을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

19. 원 O에 내접하는 오각형 $ABCDE$가 다음 세 조건을 모두 만족한다.

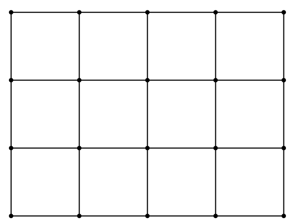
(i) 변 BC와 DE가 평행하다.

(ii) $\angle BAE = 2\angle CAD$ (단, $\angle CAD < 90°$)

(iii) 점 C와 D에서의 원 O의 접선이 점 J에서 만나고 $\angle ADB = \angle AJC$이다.

$\overline{BC} = 30$, $\overline{DE} = 50$일 때, $\overline{CD}$의 값을 구하여라.

20. 다음과 같이 1×1 정사각형 12개를 붙여서 직사각형을 만들었다. 이 도형의 20개의 꼭짓점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 가지는 평행사변형의 개수를 구하여라.



(끝)

가우스

kmo 한국수학올림피아드

제 33 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 5월 11일 ; 제한시간 4시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 세 개의 자리수를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 1000으로 나눈 나머지를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 – 4번은 각 4점, 문제 17 – 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. 수열 (a_n)이 $a_1 = \frac{1}{2}$이고 모든 양의 정수 n에 대해 다음을 만족한다.

$$a_{2n} = \frac{2}{n}a_n^2, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2}a_{2n} + \frac{1}{2^{2n+1}}$$

이때, $m \times a_{102}$가 정수가 되는 가장 작은 양의 정수 m을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

2. 다음 두 조건을 모두 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $a, b \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$

(ii) $a(a+b)(a+2b)$은 2019의 배수이다.

3. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 99$, $\overline{BC} = 44$, $\overline{CA} = 88$이다. 각 C의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 $D(\neq C)$라 하고 직선 BD와 AC의 교점을 E라 할 때, $\overline{CE}$의 값을 구하여라.

4. 학생 A, B, C가 포함된 9명의 학생을 몇 개의 모둠으로 나눌 때, A와 B는 같은 모둠에 속하고, A와 C는 다른 모둠에 속하고, 각 모둠의 인원이 2명 또는 3명인 경우의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.)

5. 주어진 양의 정수 n에 대하여 n이하의 양의 정수 k 중 다음 식의 값을 가장 작게 하는 것을 a_n이라 하자.

$$9k + \frac{16n^2}{n+k}$$

이때, 다음 식의 값을 구하여라.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{31}$$

6. 다음 식을 만족하는 소수 p와 정수 a의 순서쌍 (p, a)에 대하여 $p + a$의 최댓값을 구하여라.

$$14p^3 - ap^2 - ap + 2a - 14 = 16p^2$$

7. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 27$, $\overline{AC} = 36$이다. 점 D와 E는 각각 변 AB와 AC 위의 점으로 $\overline{AD} = 12$, $\overline{AE} = 18$이다. 점 F는 변 BC 위의 점으로 $\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = \frac{3}{2}$이다. 직선 AF와 DE의 교점을 G라 할 때, $120\frac{\overline{GF}}{\overline{GA}}$의 값을 구하여라.

8. 열 가지의 색이 주어져 있다. 정사면체의 각 면을 열 가지의 색 중 한 가지로 칠한다. 이렇게 색칠된 정사면체의 개수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.)

9. 양의 정수 n에 대하여 방정식

$$\sum_{k=1}^{n} |x - k| = \left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + n - 1$$

의 해를 모두 더한 값을 a_n이라 할 때, 다음의 값을 구하여라.

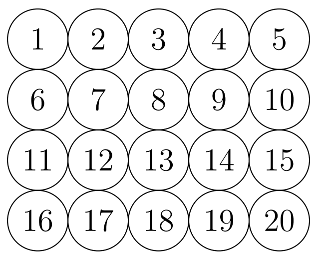
$$2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20})$$

10. 양의 정수 160401의 약수가 되는 모든 소수의 합을 구하여라.

(뒷면에 계속)

11. 예각삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = 7$ 이다. 점 D 는 변 AC 위의 점으로 $\overline{AD} = 8$, $\overline{BD} = 8$, $\overline{CD} = 4$ 이다. 삼각형 ABD 의 외접원이 직선 BC 와 만나는 점을 $E(\neq B)$ 라 하고 직선 AE 와 BD 의 교점을 F 라 할 때, $64\frac{\overline{BF}}{\overline{FD}}$ 의 값을 구하여라.

12. 다음과 같이 수가 적힌 20 개의 원이 배열되어 있다. 수 20 이 적힌 원을 포함하여 네 개의 원을 순서를 무시하고 고를 때, 골라진 네 개의 원 중 어느 두 개도 접하지 않게 되는 경우의 수를 구하여라.



13. 최고차항의 계수가 1 이고 차수가 1 이상인 두 정수계수 다항식 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$P(Q(x)) = P(x)Q(x)^2$$

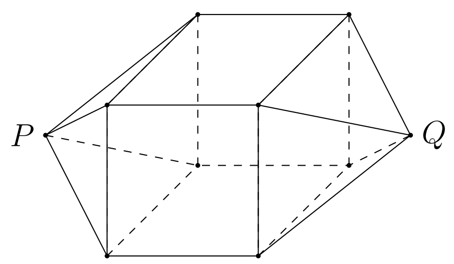
을 만족한다. 이때, 다음 식의 값이 될 수 있는 2019 이하의 모든 실수의 개수를 구하여라.

$$3P(1) - Q(2)$$

14. 방정식 $m^3 + n^3 + 18mn = 10125$ 를 만족하는 정수 m, n 에 대하여 $m^2 + n^2$ 의 값을 구하여라.

15. 사다리꼴 $ABCD$ 에서 $\overline{AC} = 70$, $\overline{CD} = 9$ 이고 변 AB 와 CD 가 평행하다. 사다리꼴 $ABCD$ 의 외부에 있는 점 P 에 대하여, 선분 PA 가 지름인 원과 선분 PC 가 지름인 원이 대각선 BD 위에서 만난다. $\overline{PA} = 40\sqrt{2}$, $\overline{PC} = 50$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 값을 구하여라.

16. 다음과 같이 정육면체에 두 개의 정사각뿔을 붙여서 만든 입체가 있다. 이 입체의 꼭짓점 P 에서 꼭짓점 Q 로 모서리를 따라 이동할 때, 한번 지나간 꼭짓점은 다시 지나가지 않는다. 가능한 모든 경로의 수를 구하여라.



17. 양의 실수 a, b, c, d 가 $a > b$ 와 $c > d$ 이고 다음 두 등식을 만족한다.

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 - cd = 1, \quad (ac - bd)^2 = a^2 - d^2$$

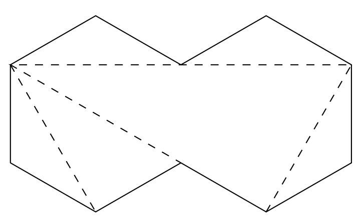
이때, $540a^2$ 의 값을 구하여라.

18. 다음 방정식을 만족하는 양의 정수 a, b 가 존재하도록 하는 소수 p 의 값을 구하여라.

$$5^6p^2(a + 5b + 1) = (5b + 1)^2(a - 5b - 1)$$

19. 길이가 20 인 선분 AB 가 지름인 원 Ω 와 점 A 를 중심으로 하고 반지름이 8 인 원 Γ 가 두 점 C, D 에서 만난다. 원 Γ 위의 점 X 는 원 Ω 의 내부에 있고, 점 C 와 X 는 직선 AB 에 대하여 서로 반대편에 있다. 직선 BX 가 원 Γ 와 만나는 점을 $P(\neq X)$, 직선 CX, DX 가 원 Ω 와 만나는 점을 각각 $Q(\neq C)$, $R(\neq D)$ 이라 하자. 직선 CP 와 원 Ω 의 교점을 S 라 하고 직선 SR 과 CQ 의 교점을 T 라 하자. $\overline{DP} = \overline{DQ}$ 일 때, $25\overline{RT}^2$ 을 1000 으로 나눈 나머지를 구하여라.

20. 주어진 도형의 내부에 꼭짓점을 잇는 선분을 그어 도형을 몇 개의 영역으로 분할한다. 이때, 서로 다른 선분은 내부에서 만나지 않고 끝점에서만 만날 수 있다. 이렇게 나누어진 각각의 영역이 모두 삼각형이 되면 *삼각분할*이라 한다. 다음 그림은 합동인 정육각형 두 개를 붙인 도형의 삼각분할의 예이다.



이 도형의 삼각분할의 개수를 구하여라.

(끝)

고등부 오일러

문제	정답	문제	정답
1	809	11	012
2	308	12	070
3	696	13	477
4	280	14	551
5	025	15	072
6	112	16	184
7	504	17	242
8	635	18	980
9	924	19	070
10	061	20	328

고등부 가우스

문제	정답	문제	정답
1	752	11	143
2	119	12	359
3	128	13	054
4	255	14	725
5	166	15	012
6	228	16	260
7	132	17	720
8	925	18	251
9	477	19	376
10	551	20	400

제 33 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2019년 11월 16일 (오전); 제한시간 3시간; 문항당 7점

1. 수열 $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2019}\}$가 다음 식을 만족한다.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2019a_n + 1 \ (1 \le n \le 2018)$$

실수 $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$ 중 $x_1 = a_{2019}$, $x_{2019} = a_1$일 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^{2018}(x_{k+1} - 2019x_k - 1)^2 \ge \sum_{k=1}^{2018}(a_{2019-k} - 2019a_{2020-k} - 1)^2$$

2. 세 변의 길이가 모두 다른 예각삼각형 ABC의 내심을 I라 하고 외접원을 Ω라 하자. 삼각형 ABC의 꼭지점 A에 대한 방심을 E라 하고 점 E를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원을 Γ라 하자. 두 원 Ω와 Γ의 교점을 $D(\neq A)$, 점 A를 지나고 BC와 수직인 직선이 원 Γ와 만나는 점을 $K(\neq A)$, 점 I에서 AC에 내린 수선의 발을 L이라 하자. 직선 AE와 DK의 교점을 F라 할 때, $\overline{BE} \cdot \overline{CI} = 2 \cdot \overline{CF} \cdot \overline{CL}$임을 보여라.

3. 양의 정수 k, m, n이 다음 두 등식을 모두 만족한다.

$$m^2 + 1 = 2n^2, \quad 2m^2 + 1 = 11k^2$$

이때 n을 17로 나눈 나머지를 구하여라.

4. 정수들의 순서쌍 19개를 각각 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_{19}, y_{19}, z_{19})$라 하자. 이 중 다음을 만족하는 서로 다른 i, j, k가 존재함을 보여라.

$x_i + x_j + x_k$, $y_i + y_j + y_k$, $z_i + z_j + z_k$는 모두 3의 배수

제 33 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2019년 11월 16일 (오후); 제한시간 3시간; 문항당 7점

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

(조건) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(f(x) - x + y^2) = yf(y)$ 이다.

6. 예각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} > \overline{AC}$이다. 삼각형 ABC의 내심을 I라 하고 외접원을 Ω라 하자. 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 직선 AI가 Ω와 만나는 점을 M $(\neq A)$, M을 지나고 AM에 수직인 직선이 직선 AD와 만나는 점을 E, I에서 AD에 내린 수선의 발을 F라 하자. 등식 $\overline{ID} \cdot \overline{AM} = \overline{IE} \cdot \overline{AF}$가 성립함을 보여라.

7. 소수 p는 7로 나누어 나머지가 1인 소수이다. 이때 $m^3 + m^2 - 2m - 1$이 p의 배수가 되는 양의 정수 m이 존재함을 보여라.

8. 두 나라 A, B가 있고 각 나라마다 n (≥ 2) 개의 공항이 있다. 두 나라 A, B의 공항들은 서로 다른 직항로로 연결되어 있고, 각 공항에는 정확히 3개의 직항로가 있다. 이때 두 공항 사이에 여러 개의 직항로도 있을 수 있고, 같은 나라의 두 공항 사이에는 직항로가 존재하지 않는다. 한 여행사에서 정확히 $2n$개의 직항로만을 이용하여 A, B 나라의 모든 공항을 정확히 한 번씩 지나고 처음의 공항으로 돌아오는 "이색 여행 상품"을 계획하려 한다. 이때 가능한 "이색 여행 상품"의 개수를 N이라 할 때, $\frac{N}{4n}$이 짝수임을 보여라. 단, 출발공항이 다르면 다른 여행상품으로 간주하고, 모든 직항로는 양방향으로 운항 가능하다.

제 32회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 3월 23일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 책상 위에 1부터 n까지 번호가 각각 하나씩 적힌 n장의 카드가 한 묶음으로 쌓여 있다. 최초에 카드에 적힌 번호는 위에서 아래로 증가한다. 맨 위의 한 장의 카드를 카드 묶음 가장 아래 쪽으로 옮기는 행동을 A, 맨 위의 한 장의 카드를 책상 밖으로 버리는 행동을 B라고 할 때, 책상 위에 마지막 한 장이 남을 때까지 다음 순서대로 행동을 반복한다.

$$\text{ABBABBABBABB}\cdots$$

이때 마지막 남은 한 장의 카드의 번호를 $L(n)$이라고 하자. $L(3k) = k$가 되는 양의 정수 k를 모두 구하여라.

2. 정사각형이 아닌 직사각형 $ABCD$에 대하여 대각선 BD의 수직이등분선 위에 있고 삼각형 BCD의 내부에 있는 점 O를 중심으로 하고 두 점 B, D를 지나는 원이 선분 AB, DA와 각각 점 $E(\neq B)$, $F(\neq D)$에서 만난다. 선분 BF와 DE의 교점 G에서 선분 AB, BD, DA에 내린 수선의 발을 각각 X, Y, Z라 하자. 점 O에서 선분 CD, BD, BC에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N이라 하자. 직선 XY와 ML의 교점을 P, 직선 YZ와 MN의 교점을 Q라 할 때, 직선 BP와 DQ가 평행함을 보여라.

3. 양의 정수 k에 대하여, 수열 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$x_0 = 1, \quad x_1 = k+2, \quad x_{n+2} - (k+1)x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n \geq 0)$$

수열의 모든 항이 1 또는 합성수가 되도록 하는 양의 정수 k가 무한히 많음을 보여라.

제32회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2019년 3월 24일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 수심을 H, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 O, 변 AB와 AC의 중점을 각각 K, L이라 하자. 변 BC 위의 점 $D(\neq O, B, C)$에 대하여 삼각형 ABD와 삼각형 ACD의 수심을 각각 E, F라 하고 선분 DE, DF의 중점을 각각 M, N이라 하자. 점 M을 지나고 직선 KH에 수직인 직선과 점 N을 지나고 직선 LH에 수직인 직선이 점 P에서 만난다. 선분 EF의 중점을 Q라 하고 삼각형 HPQ의 수심을 S라 하면, 점 D의 위치에 관계없이 $\frac{\overline{OS}}{\overline{OH}}$와 $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$의 값이 일정함을 보여라.

5. 다음 4차 방정식이 4개의 정수해를 갖도록 하는 p와 q의 순서쌍 (p,q)를 모두 구하여라. 단, 중근은 2개로, 삼중근은 3개로 센다.

$$x^4 + 2px^2 + qx + p^2 - 36 = 0$$

6. 수열 $\{x_n\} = x_0, x_1, x_2, \ldots$ 은 $x_0 = a$ (a는 실수, $1 \leq a \leq 2019$)이고, 음이 아닌 정수 n에 대하여 다음을 만족한다.

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 + 1009x_n & (x_n \leq 2) \\ 2021 - x_n & (2 < x_n \leq 1010) \\ 3031 - 2x_n & (1010 < x_n \leq 1011) \\ 2020 - x_n & (1011 < x_n) \end{cases}$$

$x_k = a$인 1보다 큰 양의 정수 k가 존재할 때, 그러한 k 중 가장 작은 수를 수열 $\{x_n\}$의 *기본주기*라고 하자. 수열 $\{x_n\}$의 기본주기가 될 수 있는 양의 정수를 모두 구하고, 가능한 기본주기 중 가장 작은 홀수(> 1)에 대하여 그 기본주기를 갖는 수열의 초항 a의 값을 모두 구하여라.

제 34 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 9월 12일 ; 제한시간 3시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 25개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 문제 1 ~ 7 번은 각 3 점, 문제 8 ~ 18 번은 각 4 점, 문제 19 ~ 25 번은 각 5 점입니다.

1. <정답. 10>

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이고 $\angle B = 40°$이다. 변 BC 위의 점 D를 $\angle ADC = 120°$가 되도록 잡고, 각 C의 이등분선과 변 AB의 교점을 E라 하자. $\angle DEC$는 몇 도인가?

2. <정답. 91>

등식 $x + 2y = 40$을 만족하는 양의 정수 x, y에 대하여, $|(x-33)(y-17)|$의 최댓값을 구하여라.

3. <정답. 20>

예각삼각형 ABC의 외심을 O, 각 A의 이등분선과 변 BC가 만나는 점을 D, 삼각형 ABD의 외접원과 선분 OA의 교점을 $E(\neq A)$라 하자. $\angle OCB = 14°$이고 $\angle OCA = 18°$일 때, $\angle DBE$는 몇 도인가?

4. <정답. 560>

정수 계수 이차다항식 $f(x)$ 중 다음 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

$$f(-5) = -5, \quad f(11) = 11, \quad f(18)\text{은 다섯자리 양의 정수}$$

5. <정답. 31>

다음은 봉사활동에 지원한 4명의 학생 A, B, C, D가 활동할 수 있는 요일을 O 기호로 표시한 것이다. 4명의 학생 중 3명을 선발하여 서로 다른 3개의 요일에 배치하는 경우의 수는? (단, 선발된 학생은 일주일 중에서 하루만 작업한다.)

	월	화	수	목	금	토	일
A	O		O				
B	O	O					
C				O		O	
D				O		O	O

6. <정답. 21>

이차함수 $y = f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$$f(f(-1)) = f(f(5)) = f(f(17))$$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x좌표로 가능한 수를 모두 더한 값을 구하여라.

7. <정답. 90>

직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$이다. 변 CD 위의 점 E를 $\overline{BA} = \overline{BE}$가 되도록 잡자. 삼각형 ABE의 내접원의 반지름을 $a + b\sqrt{10}$이라 할 때, $60(a+b)$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

8. <정답. 169>

다음 식의 값을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수)

$$\left[\frac{1^2}{12}\right] + \left[\frac{2^2}{12}\right] + \left[\frac{3^2}{12}\right] + \cdots + \left[\frac{99^2}{12}\right] + \left[\frac{100^2}{12}\right]$$

9. <정답. 93>

3의 배수인 세 자리수를 모두 나열했을 때 숫자 7은 몇 번 나타나는가?

10. <정답. 97>

양의 정수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{n^2-2}{n^2-3+2\sqrt{2}}$라 하자.

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{10} = \frac{p+q\sqrt{2}}{11-\sqrt{2}}$$

일 때, $p^2 + q^2$의 값을 구하여라. (단, p, q는 유리수)

(뒷면에 계속)

11. <정답. 15>

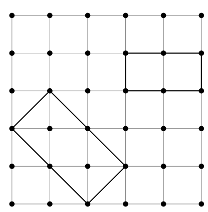
이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 60$, $\overline{BC} = 45$이다. 변 AC 위에 $\overline{CD} = 10$이 되도록 점 D를 잡자. 점 D와 변 BC의 중점을 연결한 직선이 직선 AB와 만나는 점을 E라 할 때, 선분 BE의 길이를 구하여라.

12. <정답. 201>

양의 정수 n에 대하여 1부터 n까지 더하기를 하는데 두 수를 제외하고 더하였더니 결과가 20000이었다. 가능한 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

13. <정답. 82>

다음 모눈종이에 네 꼭지점이 모두 가로줄과 세로줄이 만나는 점에 있도록 사각형을 만들 때, 이웃한 변의 길이의 비가 $1:2$인 직사각형의 개수를 구하여라.



14. <정답. 18>

조건 $x+y=10$을 만족하는 양의 실수 x, y에 대하여 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$의 최솟값을 m이라 할 때, m을 넘지 않는 최대 정수를 구하여라.

15. <정답. 160>

직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 12$이다. 변 AB, BC, AD의 중점을 각각 E, F, G라 하고, 선분 AG와 GD의 중점을 각각 J, K라 하자. 선분 DE와 선분 JF, KF의 교점을 각각 P, Q라 할 때, $\left(\frac{21}{8} \times \overline{PQ}\right)^2$ 의 값을 구하여라.

16. <정답. 9>

소수가 아닌 양의 정수 n 중 다음 두 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(1) $4 \leqslant n \leqslant 50$

(2) n의 모든 소인수 p에 대하여 $p-1$은 $n-1$의 약수이다.

17. <정답. 43>

칠판에 다음과 같이 1부터 9까지의 양의 정수가 적혀 있다.

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9$$

8개의 각 네모 상자에 $+$와 $-$ 중 하나를 골라서 적고 그 값을 계산할 때, 가능한 값의 가짓수를 구하여라.

18. <정답. 63>

세 정수 a, b, c가 $-5 \leqslant a < b < c \leqslant 5$를 만족한다. $ab+bc+ca$의 값 중 두 번째로 큰 값을 M, 가장 작은 값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하여라.

19. <정답. 80>

이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 20$, $\overline{BC} = 30$이다. 선분 AC의 A쪽 연장선 위에 $\overline{AD} = 60$이 되도록 점 D를 잡고, 선분 AB의 B쪽 연장선 위에 $\overline{BE} = 80$이 되도록 점 E를 잡자. 선분 AE의 중점 F와 삼각형 CDE의 무게중심 G를 연결한 직선 FG와 $\angle DAE$의 이등분선이 만나는 점을 K라 할 때, $6\overline{GK}$의 값 구하여라.

20. <정답. 600>

다음 조건을 만족하는 양의 정수 n 중 가장 큰 것과 가장 작은 것의 합을 구하여라.

(조건) $\sqrt{n^2 - 33^2}$이 양의 정수이다.

21. <정답. 81>

빨간색 공, 노란색 공, 파란색 공이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 공을 서로 다른 상자 A, B, C에 남김없이 넣을 때, 각 상자는 공을 하나도 포함하지 않거나, 적어도 두 개의 공을 포함하도록 넣는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색의 공들은 서로 구별하지 않는다.)

22. <정답. 28>

양의 실수 a, b, c, d가 $a \geqslant b \geqslant c$ 와 $4(a+b) \leqslant 9(c+d)$를 모두 만족할 때, $36\left(\frac{c}{a} + \frac{d}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

23. <정답. 25>

삼각형 ABC에서 $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\overline{BC} = 20$이다. 변 BC를 지름으로 하는 원이 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 $D(\neq B)$, $E(\neq C)$라 하고, 선분 BD, BE, CE, CD의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 사각형 $PQRS$의 넓이를 $a + b\sqrt{3}$이라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

24. <정답. 900>

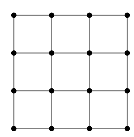
다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

(1) $1 \leqslant x \leqslant 1000$, $1 \leqslant y \leqslant 1000$

(2) $\dfrac{101x^2 - 5y^2}{2020}$은 정수이다.

25. <정답. 172>

그림과 같이 9개의 단위 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.



이 도형 위의 16개의 점 각각에 빨강, 주황, 노랑, 파랑 중 하나의 색을 칠할 때, 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여라.

(조건) 각각의 단위 정사각형의 네 꼭지점은 모두 다른색이거나, 모두 같은색이다.

(끝)

제 34 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2020년 11월 21일; 제한시간 4시간; 문항당 7점

1. 정수 n은 2000 이하의 서로 다른 양의 정수 짝수 개의 합으로 표현되는 수이다. $1+2+\cdots+2000$ 이하의 양의 정수 중 n의 값이 될 수 없는 것을 모두 구하여라.

2. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$)의 꼭짓각 A의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원 Ω와 만나는 점을 $D(\neq A)$라 하고, 점 D를 지나고 직선 BC와 수직인 직선이 원 Ω와 만나는 점을 $E(\neq D)$라 하자. 점 A가 중심이고 점 E를 지나는 원이 직선 DE와 만나는 점을 $F(\neq E)$라 하고 삼각형 ADF의 외접원의 중심을 K라 할 때, 직선 AK와 BC가 서로 수직임을 보여라.

3. 네 문자 A, B, C, D를 일렬로 나열하여 만든 문자열 σ에 대하여, $f_{\mathrm{AB}}(\sigma)$를 각 A마다 A의 오른쪽에 있는 B들의 개수의 합으로 정의하자. 같은 방법으로 $f_{\mathrm{BC}}(\sigma)$, $f_{\mathrm{CD}}(\sigma)$, $f_{\mathrm{DA}}(\sigma)$도 정의하자. 예를 들어, 문자열 $\sigma = \mathrm{ACBDBACDCBAD}$이면 $f_{\mathrm{AB}}(\sigma) = 3+1+0 = 4$이고, 같은 방법으로 $f_{\mathrm{BC}}(\sigma) = 4$, $f_{\mathrm{CD}}(\sigma) = 6$, $f_{\mathrm{DA}}(\sigma) = 3$이다. A, B, C, D를 각각 2020개씩 사용하여 만든 문자열 σ에 대하여 $f_{\mathrm{AB}}(\sigma) + f_{\mathrm{BC}}(\sigma) + f_{\mathrm{CD}}(\sigma) + f_{\mathrm{DA}}(\sigma)$의 최댓값을 구하여라.

4. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} > \overline{AC}$)의 꼭짓점 A, B, C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 점 P가 직선 EF와 BC의 교점이고, 점 Q는 선분 BD 위의 점 중에서 $\angle QFD = \angle EPC$를 만족하는 점이다. 삼각형 ABC의 외심을 O, 수심을 H라 할 때, 직선 OH와 AQ가 서로 수직이면 세 점 P, O, H가 한 직선 위에 있음을 보여라.

5. 실수 a, b, c, d, e가 다음 네 조건을 모두 만족한다.

$$a \le b \le c \le d \le e, \quad a+e=1, \quad b+c+d=3, \quad a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=14$$

이때 ae의 값이 될 수 있는 수 중 가장 큰 것을 구하여라.

6. 어떤 양의 정수 n의 경우에는 다음 두 조건을 모두 만족하는 n개의 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이 존재한다.

(1) $a_1 = 1$, $a_n = 2020$

(2) 2 이상 n 이하인 모든 정수 i에 대하여 $a_i - a_{i-1}$은 -2 또는 3이다.

이런 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

오일러

제 34 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 9월 12일 ; 제한시간 3시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 25개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 문제 1 ~ 7번은 각 3점, 문제 8 ~ 18번은 각 4점, 문제 19 ~ 25번은 각 5점입니다.

1. <정답. 10>

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이고 $\angle B = 40^\circ$이다. 변 BC 위의 점 D를 $\angle ADC = 120^\circ$가 되도록 잡고, 각 C의 이등분선과 변 AB의 교점을 E라 하자. $\angle DEC$는 몇 도인가?

2. <정답. 808>

계수가 모두 정수인 일차함수 $y = f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

$$(f \circ f)(0) = 4^2 - 1$$

$$(\overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{f\text{가 } 2020\text{개}})(0) = 4^{2020} - 1$$

이때 $|f(100)|$의 값으로 가능한 것 모두의 합을 구하여라.

3. <정답. 12>

삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하고, 변 BC의 수직이등분선과 변 AC의 교점을 D라 하자. $\overline{BD} : \overline{DA} = 1 : 3$, $\overline{MD} = \sqrt{2}$, $\overline{AB} = 2\sqrt{11}$일 때, $\overline{BC}^2$의 값을 구하여라.

4. <정답. 151>

양의 정수 n에 대하여 $\sqrt{n}$에 가장 가까운 정수를 a_n이라 하자. 다음 등식을 만족하는 양의 정수 m을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{m(m+1)} a_k = 101m(m+1)$$

5. <정답. 369>

다음 두 조건을 모두 만족하는 집합의 순서쌍 (A, B, C, D)의 개수를 구하여라.

(1) $A \subset B \subset C \subset D \subset \{1, 2, 3, 4\}$

(2) $B \neq C$

6. <정답. 158>

실수 계수 9차다항식 $P(x)$가 $k = 1, 2, \cdots, 10$ 에 대하여 $P(k) = \dfrac{(k+1)^2}{k}$를 만족할 때, $12P(12)$의 값을 구하여라.

7. <정답. 90>

직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$이다. 변 CD 위의 점 E를 $\overline{BA} = \overline{BE}$가 되도록 잡자. 삼각형 ABE의 내접원의 반지름을 $a + b\sqrt{10}$이라 할 때, $60(a + b)$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

8. <정답. 48>

다음을 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (m, n)에 대하여 mn의 최솟값을 구하여라.

$\dfrac{mn}{m+n}$ 과 $\dfrac{m^2+n^2+mn}{m+n}$ 은 서로 다른 홀수인 소수

9. <정답. 144>

한자리 수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 원형으로 배열할 때, 이웃한 두 수의 곱이 모두 짝수가 되도록 배열하는 경우의 수는?

10. <정답. 504>

방정식 $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b} + \dfrac{1}{x-c} = 0$이 서로 다른 2개의 해를 갖도록 하는 9 이하의 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

(뒷면에 계속)

11. <정답. 50>
한 변의 길이가 5인 정사각형 $ABCD$의 대각선 BD위에 $\overline{BE}=\overline{AB}$가 되도록 점 E를 잡자. 직선 AE에 수직이고 점 B를 지나는 직선과 직선 CE의 교점을 P라 할 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$의 값을 구하여라.

12. <정답. 374>
양의 정수 $x=10^{10}$과 $y=10^6$에 대하여, 2^x-2와 2^y-2의 최대공약수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

13. <정답. 324>
집합 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하여라.

(1) 모든 $n\in X$에 대하여, $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$은 짝수이다.

(2) $f(1)+f(2)+f(3)$과 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)$은 모두 3의 배수가 아니다.

14. <정답. 6>
다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (x,y)의 개수를 구하여라.

$$y\left(x^2+253\right)-x\left(y^2+253\right)=253,\quad x>y$$

15. <정답. 360>
삼각형 ABC의 점 A에서 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH 위의 점 X를 지나고 BC에 평행한 직선이 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 선분 DC가 AH, EH와 만나는 점을 각각 Y, Z라 하자. $\overline{AD}=10$, $\overline{DX}=6$, $\overline{BH}=9$, $\overline{XE}=3$이고 사각형 $XYZE$의 넓이를 S라 할 때 $70S$의 값을 구하여라.

16. <정답. 503>
양의 정수 x, y에 대하여

$$\sqrt{409^2-x^2}+\sqrt{y^2-15^2}$$

이 가질 수 있는 정수 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

17. <정답. 120>
서로 다른 숟가락 6개가 있다. 숟가락의 윗부분 3쌍을 짝지어 빨간색 끈으로 연결하고, 아랫부분 3쌍을 짝지어 파란색 끈으로 연결했더니 숟가락과 끈이 교대로 있는 하나의 연결된 모양이 되었다고 한다. 이렇게 되도록 끈으로 연결하는 경우의 수는?

18. <정답. 406>
양의 정수의 집합 $\mathbb{N}$에서 정의된 함수 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$이 모든 양의 정수 n에 대하여 $f(f(n))=n+2$를 만족한다. $f(201)$의 값이 될 수 있는 모든 양의 정수의 합을 구하여라.

(뒷면에 계속)

19. <정답. 80>

이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 20$, $\overline{BC} = 30$이다. 선분 AC의 A쪽 연장선 위에 $\overline{AD} = 60$이 되도록 점 D를 잡고, 선분 AB의 B쪽 연장선 위에 $\overline{BE} = 80$이 되도록 점 E를 잡자. 선분 AE의 중점 F와 삼각형 CDE의 무게중심 G를 연결한 직선 FG와 $\angle DAE$의 이등분선이 만나는 점을 K라 할 때, $6\overline{GK}$의 값 구하여라.

20. <정답. 154>

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 n을 모두 더한 값을 구하여라.

(1) $n = 2^k(p_1p_2\cdots p_m)$ (단, p_i는 서로 다른 홀수인 소수, $k \in \{0,1,2,3\}$, $m \geqslant 1$)

(2) n의 모든 약수의 합이 n의 배수

21. <정답. 144>

집합 $X = \{1,2,3\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수의 순서쌍 (f,g)의 개수를 구하여라.

(1) f와 g는 X에서 X로 가는 함수이다.

(2) $\{(f \circ g)(x) \mid x \in X\} = \{1,2\}$

22. <정답. 28>

양의 실수 a, b, c, d가 $a \geqslant b \geqslant c$와 $4(a+b) \leqslant 9(c+d)$를 모두 만족할 때, $36\left(\frac{c}{a}+\frac{d}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

23. <정답. 25>

삼각형 ABC에서 $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $\overline{BC} = 20$이다. 변 BC를 지름으로 하는 원이 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 $D(\neq B)$, $E(\neq C)$라 하고, 선분 BD, BE, CE, CD의 중점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 사각형 $PQRS$의 넓이를 $a + b\sqrt{3}$이라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

24. <정답. 900>

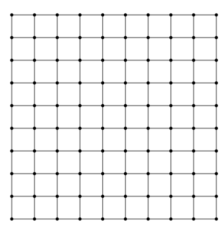
다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (x,y)의 개수를 구하여라.

(1) $1 \leqslant x \leqslant 1000$, $1 \leqslant y \leqslant 1000$

(2) $\dfrac{101x^2 - 5y^2}{2020}$은 정수이다.

25. <정답. 268>

그림과 같이 81개의 단위 정사각형으로 이루어진 도형이 있다.



이 도형 위의 100개의 점 각각에 빨강, 주황, 노랑, 파랑 중 하나의 색을 칠할 때, 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(조건) 각각의 단위 정사각형의 네 꼭지점은 모두 다른색이거나, 모두 같은색이다.

(끝)

가우스

kmo
한국수학올림피아드

제 34 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 9월 12일 ; 제한시간 3시간

A. 답안지에 수험번호와 성명, 문제유형을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 25개의 단답형 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 문제 1 ~ 7 번은 각 3 점, 문제 8 ~ 18 번은 각 4 점, 문제 19 ~ 25 번은 각 5 점입니다.

1. <정답. 10>

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$이고 $\angle B = 40^\circ$이다. 변 BC 위의 점 D를 $\angle ADC = 120^\circ$가 되도록 잡고, 각 C의 이등분선과 변 AB의 교점을 E라 하자. $\angle DEC$는 몇 도인가?

2. <정답. 158>

실수 계수 9차다항식 $P(x)$가 $k = 1, 2, \cdots, 10$ 에 대하여 $P(k) = \dfrac{(k+1)^2}{k}$를 만족할 때, $12P(12)$의 값을 구하여라.

3. <정답. 300>

직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 20$, $\overline{BC} = 10$이다. 점 P는 변 AB 위의 점으로 $\overline{PD} = 20$인 점이다. 선분 CP를 따라 사각형 $ABCD$를 접었더니 점 B와 이 사각형의 내부의 점 Q가 일치했다. 이때 $\overline{DQ}^2$의 값을 구하여라.

4. <정답. 151>

양의 정수 n에 대하여 $\sqrt{n}$에 가장 가까운 정수를 a_n이라 하자. 다음 등식을 만족하는 양의 정수 m을 구하여라.

$$\sum_{k=1}^{m(m+1)} a_k = 101m(m+1)$$

5. <정답. 144>

한자리 수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 원형으로 배열할 때, 이웃한 두 수의 곱이 모두 짝수가 되도록 배열하는 경우의 수는?

6. <정답. 21>

수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족한다.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+2} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

a_{96}을 43으로 나눈 나머지를 구하여라.

7. <정답. 90>

직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 3$이다. 변 CD 위의 점 E를 $\overline{BA} = \overline{BE}$가 되도록 잡자. 삼각형 ABE의 내접원의 반지름을 $a + b\sqrt{10}$이라 할 때, $60(a+b)$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수)

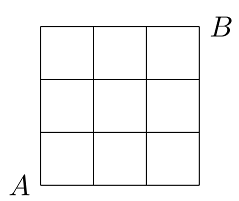
8. <정답. 48>

다음을 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (m, n)에 대하여 mn의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{mn}{m+n} \text{ 과 } \frac{m^2+n^2+mn}{m+n} \text{ 은 서로 다른 홀수인 소수}$$

9. <정답. 224>

다음 그림에서 갑은 A에서 출발해서 오른쪽 혹은 위쪽으로 1칸씩 이동하면서 B에 도착하고, 을은 B에서 출발해서 왼쪽 혹은 아래쪽으로 1칸씩 이동하면서 A에 도착한다. 갑과 을은 각각 등속력으로 움직이고, 갑의 속력은 을의 2배이다. 갑과 을이 동시에 출발해서 도착하는 총 400가지의 경우 중, 서로 만나지 않고 이동하는 경우의 수를 구하여라.



10. <정답. 20>

집합 $A = \{(x, y) \mid (x-1)(x-9) \leqslant y \leqslant 2x,\ x, y\text{는 실수}\}$에 속하는 점 $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, $R = (r_1, r_2)$에 대하여 $\dfrac{p_2 + q_2 + r_2}{p_1 + q_1 + r_1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M^2 + m^2$의 값을 구하여라.

11. <정답. 450>

원에 내접하는 사각형 $ABCD$의 대각선 AC와 BD가 점 E에서 만난다. $\angle ABD = 5^\circ$, $\angle AED = \angle BCD = 50^\circ$, $\overline{BD} = 30$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이를 구하여라.

12. <정답. 471>

식 $(2x-y)^3 + (2x+3y)^3$의 값이 소수 941의 배수가 되도록 하는 양의 정수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하여라.

13. <정답. 592>

집합 $X = \{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : X \to X$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(1) 모든 $n \in \{2,4,6\}$에 대하여 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$은 짝수이다.

(2) $f(1) + f(2) + f(3)$과 $f(1) + f(2) + \cdots + f(6)$은 모두 3의 배수가 아니다.

14. <정답. 4>

0이 아닌 실수 x, y, z가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

$$x^2 + 3y^2 + 3xy + yz + 2zx = 0$$
$$2x^2 + 3xy + 2yz + zx = 0$$

식 $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz}$의 값 중 가장 큰 것을 M, 가장 작은 것을 m이라 할 때, $M - m$의 값을 구하여라.

15. <정답. 84>

삼각형 ABC의 변 BC의 중점을 M이라 하자. M을 중심으로 하고 점 A를 지나는 원이 변 AC와 만나는 점을 $D(\neq A)$라 하자. $\overline{AM} = \overline{AD} = 5$, $\overline{CD} = 3$일 때, $\overline{AB}^2$의 값을 구하여라.

16. <정답. 138>

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

(1) $a \in \{1, 2, \cdots, 12\}$, $b \in \{1, 2, \cdots, 12\}$

(2) $an + b$와 $12n + 6$이 서로소가 아닌 양의 정수 n이 존재한다.

17. <정답. 37>

집합 $X = \{1,2,3,4,5\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응 $f : X \to X$의 개수를 구하여라.

(조건) $f(x) > x$인 x의 개수가 $f(x) < x$인 x의 개수보다 크다.

18. <정답. 406>

양의 정수의 집합 $\mathbb{N}$에서 정의된 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$이 모든 양의 정수 n에 대하여 $f(f(n)) = n + 2$를 만족한다. $f(201)$의 값이 될 수 있는 모든 양의 정수의 합을 구하여라.

kmo 한국수학올림피아드
제34회 고등부 1차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

19. <정답. 52>

삼각형 ABC의 외심 O와 점 A는 직선 BC에 대하여 대칭이다. 변 BC 위에 $\overline{BD}=2$, $\overline{CD}=4$인 점 D가 있다. 선분 DO의 연장선 위의 점으로 $\overline{OX}=4$인 점 X에 대하여 (O는 X와 D 사이에 있음) 삼각형 ADX의 외접원이 직선 BC와 만나는 점을 $Y(\neq D)$라 하자. $\overline{AY}^2$의 값을 구하여라.

20. <정답. 18>

양의 실수 x는 $x+\dfrac{1}{x}$이 정수가 되는 실수이다. 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_n=x^n+x^{-n}$으로 정의할 때,

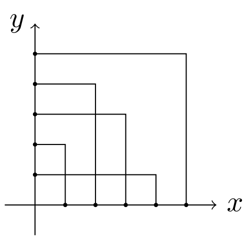
$$a_{13}+a_9=3\times 7\times 43\times 307$$

$$a_{13}-a_9=3\times 5\times 89\times 199$$

이다. a_3을 구하여라.

21. <정답. 15>

x축 위의 5개의 점 $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$, $(5,0)$과 y축 위의 5개의 점 $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,4)$, $(0,5)$을 ㄱ자 모양의 꺾은선 5개로 연결한 것을 ***맞대응***이라고 하자. 다음 그림은 이러한 맞대응의 예이고, 이 경우 꺾은선끼리 만나는 점의 개수는 4이다.



이때 총 120가지의 맞대응 중, 꺾은선끼리 만나는 점의 개수가 3인 것의 개수를 구하여라.

22. <정답. 28>

양의 실수 a, b, c, d가 $a\geqslant b\geqslant c$와 $4(a+b)\leqslant 9(c+d)$를 모두 만족할 때, $36\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

23. <정답. 405>

삼각형 ABC에서 $\angle A=90^\circ$이다. 변 AB를 지름으로 하는 원 Ω가 변 BC와 만나는 점을 D라 하고, D에서의 Ω의 접선과 변 AC의 교점을 E라 하자. $\overline{CD}=4$, $\overline{DE}=3$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 k라 하자. k^2의 값을 구하여라.

24. <정답. 201>

다음 등식을 만족하는 양의 정수 m 중 가장 작은 것을 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수)

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\left[\frac{m+k+2}{2k+1}\right]-\left[\frac{m+k+1}{2k+1}\right]\right)=9$$

25. <정답. 16>

양의 정수 a, b, c의 순서쌍 (a,b,c)에서 하나의 수가 다른 두 수의 곱으로 표현될 때, 이를 ***곱순서쌍***이라고 하자. 예를 들어, $(1,1,1)$, $(6,2,3)$, $(2,8,4)$, $(5,5,25)$는 모두 곱순서쌍이다. 집합 $X=\{1,2,\ldots,14\}$에 대하여 다음 조건을 만족하는 일대일대응 $f:X\to X$의 개수를 구하여라.

(조건) $a,b,c\in X$에 대하여, (a,b,c)가 곱순서쌍이면 $(f(a),f(b),f(c))$도 곱순서쌍이다.

(끝)

제 34 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2020년 11월 21일; 제한시간 4시간; 문항당 7점

1. 다음 조건을 만족하는 함수 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

모든 실수 x, y에 대하여 $x^2 f(x) + yf(y^2) = f(x+y)f(x^2 - xy + y^2)$

2. 예각삼각형 ABC의 수심을 H, 변 BC의 중점을 M이라 하자. 선분 AH를 지름으로 하는 원이 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 선분 AH와 DE의 교점을 P, 점 H를 지나고 직선 AH와 수직인 직선과 선분 DM의 교점을 Q라 할 때, 세 점 P, Q, B가 한 직선 위에 있음을 보여라.

3. 대한수학고등학교에는 남학생 n명과 여학생 m명이 있다. 남학생 B와 서로 알고 지내는 여학생의 수를 $d(B)$라고 하고, 여학생 G와 서로 알고 지내는 남학생의 수를 $d(G)$라고 하자. 각 여학생은 서로 알고 지내는 남학생이 적어도 1명 이상 있다고 한다. 이때 $\frac{d(B)}{d(G)} \ge \frac{m}{n}$이 되는 서로 알고 지내는 남학생 B와 여학생 G가 존재함을 보여라.

4. 다음 조건을 만족하는 서로소인 양의 정수의 순서쌍 (m,n) 중 $(41,12)$와 다른 것을 하나 찾아라.

$m^2 - 5n^2$과 $m^2 + 5n^2$은 모두 완전제곱수이다.

5. 어떤 양의 정수 n의 경우에는 다음 두 조건을 모두 만족하는 n개의 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$이 존재한다.

(1) $a_1 = 1$, $a_n = 2000$

(2) 2 이상 n 이하인 모든 정수 i에 대하여 $a_i - a_{i-1}$은 -3 또는 5이다.

이런 양의 정수 n 중 가장 큰 것을 구하여라.

6. 볼록오각형 $ABCDE$가 있다. 사각형 $ABDE$는 평행사변형이고 사각형 $BCDE$는 한 원에 내접한다. 점 C를 중심으로 하고 D를 지나는 원이 직선 BD, DE와 만나는 점 중 D가 아닌 점을 각각 F, G라 할 때, 세 점 A, F, G는 직선 ℓ 위에 있다. 직선 ℓ과 선분 BE의 교점을 H라 할 때, 다음 조건을 만족하는 원 Ω의 모임을 고려하자.

원 Ω는 두 점 A와 H를 지나고 변 AB, AE와 각각 점 A가 아닌 다른 점에서 만난다.

이러한 원 Ω와 변 AB, AE의 교점을 각각 $P(\neq A)$, $Q(\neq A)$라 할때, $\overline{AP} + \overline{AQ}$의 값이 일정함을 보여라.

제 33 회 최종시험 첫째 날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 7월 10일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 사각형 $ABCD$는 $AB \parallel CD$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$인 등변사다리꼴이다. 점 C를 지나고 변 BC에 수직인 직선 위에 $\overline{EC} = \overline{AC}$와 $\angle ACE < 90°$인 점 E를 잡자. 중심이 D이고 반지름이 DA인 원 Γ가 삼각형 AEB의 외접원 Ω와 만나는 점을 $F(\neq A)$라 하고, 원 Γ 위에 $\overline{BF} = \overline{BG}$인 점 $G(\neq F)$를 잡자. 두 직선 EG와 BD의 교점이 원 Ω 위에 있음을 보여라.

2. 남학생 1 명과 여학생 1 명으로 구성된 모둠이 2020 개 있다. 각 학생은 정확히 1 개의 모둠에만 포함된다. 다음 네 조건을 모두 만족하도록 2 명씩 악수하기로 하자.

(i) 동성 간에는 악수하지 않는다.

(ii) 같은 모둠의 이성 간에는 정확히 1 회 악수한다.

(iii) 같은 모둠이 아닌 이성 간에는 1 회만 악수하거나 악수하지 않는다.

(iv) 임의의 두 모둠에 속한 4 명의 학생 간에 악수한 총 횟수는 3 회 이상이다.

이때 서로 악수한 학생들끼리 이웃하면서 원형으로 배치할 수 있도록 4038 명을 뽑을 수 있음을 보여라.

3. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}$를 모두 구하여라. (단, $\mathbb{Q}_+$와 $\mathbb{R}$는 각각 양의 유리수와 모든 실수의 집합)

양의 유리수 x, y, z가 $x + y + z + 1 = 4xyz$를 만족하면

$$f(x) + f(y) + f(z) = 1$$

이다.

제 33 회 최종시험 둘째 날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2020년 7월 11일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 모든 양의 정수가 다음 수열에 정확히 한 번 등장하도록 하는 양의 실수의 순서쌍 (α, β)가 존재하는가? 존재한다면 순서쌍을 모두 구하고, 그렇지 않다면 순서쌍이 존재하지 않음을 보여라.

$$2020, [\alpha], [\beta], 4040, [2\alpha], [2\beta], 6060, [3\alpha], [3\beta], 8080, [4\alpha], [4\beta], \ldots$$

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

5. 예각삼각형 ABC가 $\overline{AB} = \overline{AC}$를 만족한다. 변 BC의 중점을 M이라 하고, 선분 AM과 AC의 중점을 각각 L, N이라 하자. 삼각형 AMC의 외접원 Ω와 선분 AB의 교점을 $P(\neq A)$, 원 Ω와 선분 BL의 교점을 Q라 하자. 삼각형 BQC의 외접원의 중심을 O라 하자. 두 직선 AC와 PQ가 점 X에서 만나고, 두 직선 OB와 LN이 점 Y에서 만나고, 두 직선 BQ와 CO가 점 Z에서 만날 때, 세 점 X, Y, Z가 한 직선 위에 있음을 보여라.

6. 양의 정수 n 중 $6(n^4 - 1)$의 값이 완전제곱수가 되는 것을 모두 구하여라.

중등부

제 35 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2021년 6월 12일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

1. 실수 a, b가 다음 두 식을 모두 만족한다. $18(a+b)^2$의 값을 구하여라.

$$5a^2+ab+8a=-2, \qquad 2b^2+ab+8b+2a=-8$$

답: 98

2. 다음 조건을 만족하는 정수 계수 이차다항식 $f(x)=x^2+ax+b$의 개수를 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수 n에 대하여 $0 \leqslant f(2n+1)-2f(n)-2f(n-1) \leqslant 4n+3$이다.

답: 8

3. 유리수 a는 0과 1 사이의 수로 다음 조건을 만족한다.

(조건) 등식 $[x]=ax$를 만족하는 양의 실수 x의 개수가 98이다.

이러한 a의 값 중 가장 큰 것을 분수로 나타내면 $\frac{q}{p}$ (p와 q는 서로소인 양의 정수)이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

답: 199

4. 선분 AB가 지름인 반원의 호 위에 점 C와 D가 있다. 선분 CD를 지름으로 하는 원이 점 E에서 선분 AB에 접한다. 선분 AB의 중점 O에서 E까지 거리는 1이다. $\overline{CD}=12$일 때, $(\overline{AB})^2$의 값을 구하여라.

답: 292

5. 사각형 $ABCD$가 지름이 AC인 원 Γ에 내접한다. 원 Γ의 현 XY는 직선 AC에 수직이고 변 BC, DA와 각각 점 Z, W에서 만난다. $\overline{BY}=5\overline{BX}$, $\overline{DX}=10\overline{DY}$, $\overline{ZW}=98$일 때, 선분 XY의 길이를 구하여라.

답: 132

6. 1000 이하의 양의 정수 중에서 1000과의 최대공약수가 5인 모든 수들의 합을 구하여라.

답: 40000

7. 음이 아닌 정수 a, b, c가 등식 $3^a\times 5^b+1=2^c$을 만족할 때, 식 $100a+10b+c$가 가질 수 있는 값을 모두 더한 것을 구하여라.

답: 217

(뒷면에 계속)

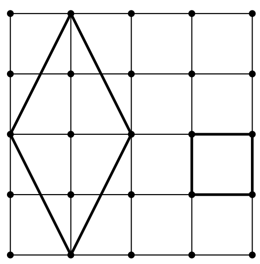
8. 54개의 구슬을 나이가 서로 다른 세 형제에게 남김없이 나누어 줄 때, 모든 형제가 1개 이상의 구슬을 받으면서 형이 동생보다 더 많은 구슬을 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. (단, 구슬들은 서로 구별하지 않는다.)

답: 217

9. 4의 배수인 네 자리수를 모두 나열했을 때 숫자 4는 몇 번 나타나는가?

답: 1195

10. 다음과 같이 1×1 정사각형 16개를 붙여서 정사각형을 만들었다. 이 도형의 25개의 꼭짓점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 가지는 마름모의 개수를 구하여라.



답: 66

11. 차수가 1 이상이고 계수가 모두 실수인 다항식 $p(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-32)p(2x) = 32(x-1)p(x)$$

를 만족한다. $\dfrac{24 \times p(24)}{p(0)}$ 의 값을 구하여라.

답: 330

12. 양의 정수에 대하여 정의된 함수 f가 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$이고, 각 양의 정수 n에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(3n) = f(n)$

(ii) $f(3n+2) = f(3n+1) = f(3n) + 1$

함숫값 $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(10000)$ 중 가장 큰 값을 구하여라.

답: 9

13. 선분 AB 위의 점 C가 $\overline{AC} = 10$, $\overline{CB} = 8$을 만족한다. 점 B를 지나고 직선 AB와 수직한 직선을 ℓ이라 하자. ℓ 위의 점 P 중 $\angle APC$의 크기가 가장 크게 되도록 하는 점을 P_0이라 할 때, $\overline{BP_0}$의 값을 구하여라.

답: 12

14. 평행사변형 $ABCD$에서 $\angle BAD = 120°$, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AD} = 3 + \sqrt{3}$이다. 점 E와 F는 각각 변 AB와 AD 위의 점으로 $\overline{AE} = \overline{AF} = \sqrt{3}$을 만족한다. 각 BCD의 이등분선이 선분 DE와 만나는 점을 P, 직선 FP와 BC의 교점을 Q라 할 때, $\left(\overline{PQ} + 3\right)^2$의 값을 구하여라.

답: 27

(뒷면에 계속)

15. 원에 내접하는 오각형 $ABCDE$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) 선분 AD와 CE의 교점을 F라 할 때, $\angle AFE = 90°$이고 $\overline{AF} : \overline{FD} = \overline{CF} : \overline{FE} = 2 : 1$이다.

(ii) 직선 BE는 선분 AF의 중점을 지난다.

$\overline{AB} = 3$일 때, $(\overline{BE})^2$의 값을 구하여라.

답: 72

16. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 a, b에 대하여, $a+b$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수 n에 대하여, $\dfrac{115n+a}{bn+2}$는 양의 정수이다.

답: 231

17. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m, n에 대하여, $m+n$의 값을 구하여라.

(조건) 실수 $\dfrac{\sqrt{m}-1}{\sqrt{m}+7}$은 이차방정식 $x^2-nx+25=0$의 해이다.

답: 109

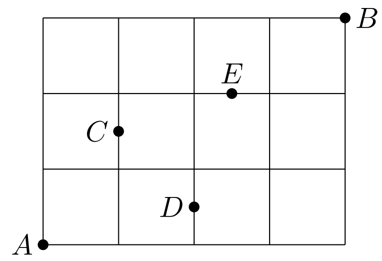
18. 다섯 개의 양의 정수 2, 3, 5, 7, 11 중에서 서로 다른 2개를 곱하여 얻을 수 있는 수를 모두 더한 값을 a라 하고, 서로 다른 4개를 곱하여 얻을 수 있는 수를 모두 더한 값을 b라 하자. $a+b$의 값을 구하여라.

답: 3215

19. 여덟 개의 양의 정수 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9를 원형으로 배열할 때, 이웃한 두 수의 최소공배수가 13 이상이 되도록 배열하는 경우의 수를 구하여라.

답: 6

20. 다음 그림에서 A에서 출발해서 오른쪽 혹은 위쪽으로 1 칸씩 이동하면서 B에 도착한다. 점 C, D, E 중 정확히 하나만 지나면서 A에서 B로 이동하는 경우의 수를 구하여라.



답: 14

제 35 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

1. 양의 정수 n, k, r에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(x_1, x_2, ..., x_k)$의 개수를 $A(n, k, r)$이라 하자.

(i) $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 0$

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$

(iii) $x_1 - x_k \leq r$

2 이상인 양의 정수 s, t에 대하여, 다음을 보여라.

$$A(st, s, t) = A(s(t-1), s, t) = A((s-1)t, s, t)$$

2. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$은 다음 세 조건을 모두 만족한다.

(i) $a_1 = 2021^{2021}$

(ii) 양의 정수 $k\,(k \geq 2)$에 대하여 $0 \leq a_k < k$ 이다.

(iii) 양의 정수 k에 대하여 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k+1} a_k$ 는 k의 배수이다.

수열 $\{a_n\}$의 2021^{2022}번째 항의 값을 구하여라.

3. 원 O에 내접하는 사각형 $ABCD$의 두 대각선 AC, BD의 교점을 X라 하자. 사각형 $AEFB$는 삼각형 ABX의 외접원에 내접하고, 직선 EF와 AB는 평행하다. 삼각형 CDX의 외접원과 직선 FX의 교점을 $G(\neq X)$, 직선 EX와 AB의 교점을 P, 직선 XG와 CD의 교점을 Q라 하자. 선분 EG의 수직이등분선과 원 O의 두 교점 중 B 보다 A에 가까운 점을 S라 할 때, 직선 PQ에 평행하고 점 S를 지나는 직선이 원 O에 접함을 보여라.

제 35 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

4. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$)의 꼭짓각 A의 이등분선과 변 BC의 수직이등분선의 교점을 D라 하자. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 직선 CP가 삼각형 ABP의 외접원과 점 $K(\neq P)$에서 만난다. 다음 두 명제가 동치임을 보여라.

(i) 점 B, D, K가 한 직선 위에 있다.

(ii) 선분 AD와 BC의 교점이 삼각형 APC의 외접원 위에 있다.

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

$$\text{모든 실수 } x, y\text{에 대하여 } f\left(f(x+y) - f(x-y)\right) = y^2 f(x)$$

6. 어떤 모임에 4042명이 모여있고 두 명씩 짝을 이루어 총 2021쌍의 짝이 있다. 이 모임에 속하는 서로 다른 두 사람 A, B에 대하여 A가 B를 알면 B도 A를 안다고 한다. n은 양의 정수로, 이 모임에 모인 각각의 사람은 다음 조건을 모두 만족하도록 $-n$ 이상 n 이하인 정수 중 하나를 선택하려고 한다. (여러 사람이 같은 수를 선택하는 것도 가능하다.)

(i) 0을 선택한 사람은 두 명 이하이고, 만약 정확히 두 명이면 그 두 사람은 짝이다.

(ii) 같은 수를 선택한 두 사람은 짝이거나 모르는 사이이다.

(iii) 선택한 수의 합이 0인 두 사람은 짝이거나 아는 사이이다.

이와 같은 선택이 항상 가능한 n의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

오일러

제35회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2021년 6월 12일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

1. 방정식 $x^3 - 8x^2 + 16x - 6 = 0$의 서로 다른 세 실근을 a, b, c라 할 때,

$$6\left(\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c}\right)$$

의 값을 구하여라.

답: 464

2. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $p(x)$가 $p(1) = 1$을 만족한다. 다음 식이 가질 수 있는 모든 값들의 합을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{101}\left((-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}\right)p(n)$$

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

답: 101

3. 함수 $f(x) = x^2 + x - q$ $(q > 1)$에 대하여 부등식

$$a < f(a) < f(f(a))$$

가 성립하지 않는 a의 값 중 가장 작은 것을 m, 가장 큰 것을 M이라 하자. $M - m = 11$일 때, q의 값을 구하여라.

답: 25

4. 좌표평면의 원점 O와 포물선 $y = x^2$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C가 다음 네 조건을 모두 만족할 때, 사각형 $OABC$의 넓이를 구하여라.

(i) 점 A의 x좌표는 0보다 작다.

(ii) $\angle OAB = 90°$

(iii) 직선 AC는 x축과 평행하다.

(iv) 선분 OB의 중점의 x좌표와 점 C의 x좌표는 같다.

답: 4

5. 삼각형 ABC에서 $\angle BAC = 60°$이다. 점 P는 변 BC 위의 점으로 삼각형 ABP의 외접원 O_1과 삼각형 ACP의 외접원 O_2의 반지름이 각각 48과 32이다. $\sin\angle ACB = \alpha$라 할 때, $560\alpha^2$의 값을 구하여라.

답: 540

6. 함수 $f(x)$가 0과 1을 제외한 모든 실수 x에 대하여 등식

$$2(x-1)^4 f\left(\frac{1}{1-x}\right) + 2x^4 f\left(1-\frac{1}{x}\right) = 5 + 3f(x)$$

를 만족한다. $f(2)$를 구하여라.

답: 35

7. 양의 정수 m에 대하여 3^k이 m의 약수가 되는 가장 큰 정수 k를 $v(m)$이라 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.

(i) $1 \leqslant a, b \leqslant 100$

(ii) $v(a^3 + b^3) - 3 = v(a + b) \geqslant 2$

답: 242

(뒷면에 계속)

8. 다음 세 조건을 모두 만족하는 집합의 순서쌍 (A, B, C, D)의 개수를 구하여라.

(i) $A \subset B \cap C$

(ii) $B \cup C \subset D \subset \{1, 2, 3, 4\}$

(iii) $C \neq \varnothing$

답: 1215

9. 1부터 100까지 양의 정수를 모두 더하는데 k개의 홀수를 제외하고 더하였더니 그 값이 3775가 나왔다. 가능한 양의 정수 k는 모두 몇 개인가?

답: 11

10. 세 문자 A, B, C를 사용하여 만든 6자리 문자열 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(조건) $x_i = A$, $x_j = B$, $x_k = C$를 만족하는 $1 \leqslant i < j < k \leqslant 6$인 양의 정수 i, j, k는 존재하지 않는다.

답: 496

11. 양의 정수 n에 대하여 $p_n(x) = \frac{n}{64}x^2 - \frac{n}{32}x + 2$이고 $T_n = \{x \mid p_n(p_n(x)) \leqslant 2,\ x\text{는 실수}\}$이다. 다음 조건을 만족하는 n의 개수를 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수 m에 대하여 $T_m \subset T_n$이다.

답: 128

12. 수열 $\{x_n\}$이 다음을 만족한다.

$$x_1 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{k} x_i x_j = 1 - 4\sum_{i=1}^{k+1} x_i \quad (k \geqslant 1)$$

모든 양의 정수 n에 대하여

$$N|x_{n+2}| \leqslant |x_{n+1}|$$

이 성립하는 양의 정수 N의 최댓값을 구하여라.

답: 17

13. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} > \overline{AC}$이다. 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D, 변 BC의 중점을 M, 점 C에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{MD} = 10$, $\overline{MH} = 20$일 때, $(\overline{AM})^2 - (\overline{AD})^2$의 값을 구하여라.

답: 700

14. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원이 직선 AB와 만나는 점을 $D(\neq B)$라 하자. 변 CA 위의 점 E에 대하여 직선 DE와 변 BC가 만나는 점을 F라 할 때, 삼각형 AED의 넓이와 삼각형 CEF의 넓이가 같다. 삼각형 BFE의 넓이를 a라 할 때, $32a^2$의 값을 구하여라.

답: 54

15. 원 O에 내접하는 육각형 $ABCDEF$가 있다. 선분 AD가 원 O의 지름이고 사각형 $BCEF$는 직사각형이다. $\overline{AC} = 5$, $\overline{CE} = 6$, $\overline{EA} = 4$일 때, 육각형 $ABCDEF$의 여섯 개의 변의 길이의 합을 K라 하자. $7K^2$의 값을 구하여라.

답: 2116

16. 서로소인 양의 정수 p, q에 대하여

$$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{12}}{7\sqrt[3]{-1+\sqrt[3]{2}}}$$

일 때, $p+q$를 구하여라.

답: 10

17. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

(i) $1 \leqslant a, b, c \leqslant 115$

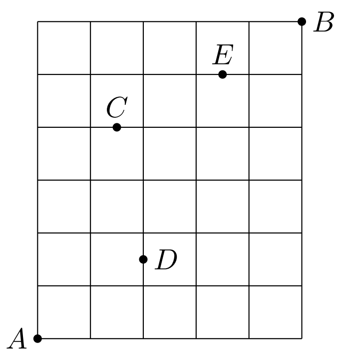
(ii) 모든 양의 정수 n에 대하여 $115^{115n+a}-1$은 $115^{bn+c}-1$의 배수이다.

답: 144

18. 실수가 아닌 복소수 p가 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ (a, b는 실수)의 해이다. $p^5 = 32$일 때, $(a+1)^2 + b^2$의 값을 구하여라.

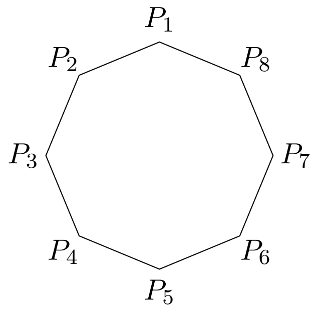
답: 21

19. 다음 그림에서 점 A에서 출발해서 오른쪽 혹은 위쪽으로 1칸씩 이동하면서 B에 도착한다. 점 C, D, E 중 정확히 하나만 지나면서 A에서 B로 이동하는 경우의 수를 구하여라.



답: 179

20. 정팔각형 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$이 있다.

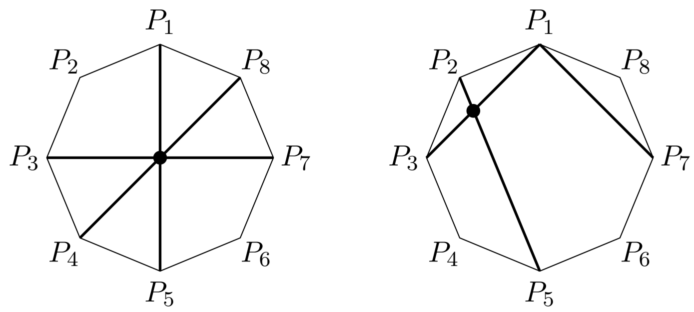


서로 다른 3개의 대각선을 선택하는 방법 중 다음 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(i) 3개의 대각선은 한점에서 만나지 않는다.

(ii) 3개의 대각선으로 만들어지는 교점 중, 정팔각형의 내부에 있는 것의 개수는 1이다.

예를 들어, 아래 왼쪽 그림은 조건(i)을 만족하지 않고 오른쪽 그림은 두 조건을 모두 만족한다.



답: 448

가우스

제35회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2021년 6월 12일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이단어져 있습니다.

1. 최고차항의 계수가 1인 이차다항식 $p(x)$가 $p(1) = 1$을 만족한다. 다음 식이 가질 수 있는 모든 값들의 합을 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{101} \left((-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]+1} \right) p(n)$$

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

답: 101

2. 함수 $f(x) = x^2 + x - q$ $(q > 1)$에 대하여 부등식

$$a < f(a) < f(f(a))$$

가 성립하지 않는 a의 값 중 가장 작은 것을 m, 가장 큰 것을 M이라 하자. $M - m = 11$일 때, q의 값을 구하여라.

답: 25

3. 양의 실수 a, b, c, d가 다음 등식을 모두 만족한다.

$$abcd = 7, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 20$$

식 $ab + bc + cd + da$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

답: 16

4. 삼각형 ABC에서 $\angle BAC = 60°$이다. 점 P는 변 BC 위의 점으로 삼각형 ABP의 외접원 O_1과 삼각형 ACP의 외접원 O_2의 반지름이 각각 48과 32이다. $\sin\angle ACB = \alpha$라 할 때, $560\alpha^2$의 값을 구하여라.

답: 540

5. 삼각형 ABC에서 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 직선 BM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 $D(\neq B)$라 하자. $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 4$일 때, $4\left(\overline{AM} + \overline{BD}\right)^2$의 값을 구하여라.

답: 490

6. 양의 정수 m에 대하여 3^k이 m의 약수가 되는 가장 큰 정수 k를 $v(m)$이라 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

(i) $1 \leqslant a, b \leqslant 100$

(ii) $v(a^3 + b^3) - 3 = v(a + b) \geqslant 2$

답: 242

7. 다음 조건을 만족하는 모든 양의 정수 n의 합을 구하여라.

(조건) n^2의 약수의 개수는 $\dfrac{n}{6}$이다.

답: 990

8. 1부터 100까지 양의 정수를 모두 더하는데 k개의 홀수를 제외하고 더하였더니 그 값이 3775가 나왔다. 가능한 양의 정수 k는 모두 몇 개인가?

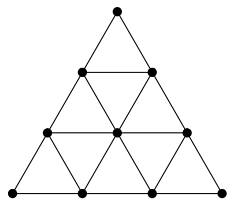
답: 11

9. 세 문자 A, B, C를 사용하여 만든 6자리 문자열 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

> **(조건)** $x_i = A$, $x_j = B$, $x_k = C$를 만족하는 $1 \leqslant i < j < k \leqslant 6$인 양의 정수 i, j, k는 존재하지 않는다.

답: 496

10. 아래 그림과 같이 한변의 길이가 1인 정삼각형 9개로 이루어진 도형이 있다.



이 도형 위의 10개의 점 각각에 $1, 2, 3, 4$ 중 하나의 숫자를 적을 때, 다음 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여라.

> **(조건)** 각각의 한변의 길이가 1인 정삼각형의 세 꼭짓점에 적힌 숫자의 합은 3의 배수이다.

답: 1090

11. 수열 $\{x_n\}$이 다음을 만족한다.

$$x_1 = 1, \qquad \sum_{i=1}^{k+1}\sum_{j=1}^{k} x_i x_j = 1 - 4\sum_{i=1}^{k+1} x_i \quad (k \geqslant 1)$$

모든 양의 정수 n에 대하여

$$N|x_{n+2}| \leqslant |x_{n+1}|$$

이 성립하는 양의 정수 N의 최댓값을 구하여라.

답: 17

12. $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{72}$을 넘지 않는 가장 큰 정수를 99로 나눈 나머지를 구하여라.

답: 1

13. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A를 중심으로 하고 점 B를 지나는 원이 직선 AB와 만나는 점을 $D(\neq B)$라 하자. 변 CA 위의 점 E에 대하여 직선 DE와 변 BC가 만나는 점을 F라 할 때, 삼각형 AED의 넓이와 삼각형 CEF의 넓이가 같다. 삼각형 BFE의 넓이를 a라 할 때, $32a^2$의 값을 구하여라. **답: 54**

14. 원 O에 내접하는 육각형 $ABCDEF$가 있다. 선분 AD가 원 O의 지름이고 사각형 $BCEF$는 직사각형이다. $\overline{AC} = 5$, $\overline{CE} = 6$, $\overline{EA} = 4$일 때, 육각형 $ABCDEF$의 여섯 개의 변의 길이의 합을 K라 하자. $7K^2$의 값을 구하여라. **답: 2116**

15. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} > \overline{AC}$이다. 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D, 변 BC의 중점을 M, 점 C에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{MD} = 10$, $\overline{MH} = 20$일 때, $\left(\overline{AM}\right)^2 - \left(\overline{AD}\right)^2$의 값을 구하여라. **답: 700**

16. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하여라.

(i) $1 \leqslant a, b, c \leqslant 115$

(ii) 모든 양의 정수 n에 대하여 $115^{115n+a} - 1$은 $115^{bn+c} - 1$의 배수이다.

답: 144

17. 실수가 아닌 복소수 p가 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ (a, b는 실수)의 해이다. $p^5 = 32$일 때, $(a+1)^2 + b^2$의 값을 구하여라.

답: 21

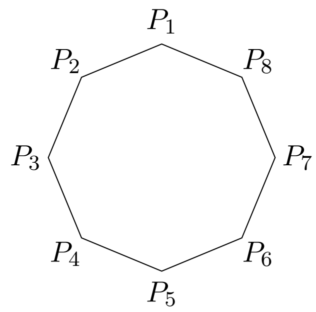
18. 양의 정수 $k\,(\geqslant 2)$에 대하여 $a^b = k$를 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (a, b)의 개수를 $f(k)$라 하자. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하여라.

(i) $2 \leqslant m, n \leqslant 100$이고 m과 n은 서로소이다.

(ii) $f(mn) = f(m) = f(n) \geqslant 2$

답: 24

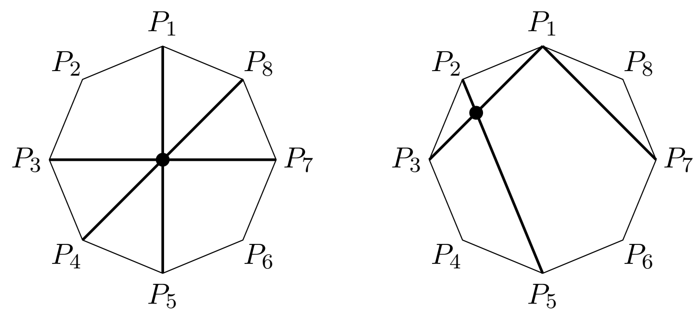
19. 정팔각형 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$이 있다.



서로 다른 3개의 대각선을 선택하는 방법 중 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 구하여라.

(조건) 3개의 대각선으로 만들어지는 교점 중, 정팔각형의 내부에 있는 것의 개수는 1이다.

예를 들어, 다음과 같이 대각선을 선택하면 조건을 만족한다.



답: 460

20. 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : \{1, 2, \ldots, 9\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$의 개수를 구하여라.

(i) $f(1) \leqslant f(2) \leqslant \cdots \leqslant f(9)$

(ii) 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수는 7이다.

답: 161

(끝)

제 35 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 원 O가 점 A에서 삼각형 ABC의 외접원에 내접하고 점 D에서 변 BC에 접한다. 원 O가 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 $E(\neq A)$, $F(\neq A)$라 하자. 점 E와 F에서 직선 AD에 내린 수선이 원 O와 만나는 점을 각각 $G(\neq E)$, $H(\neq F)$라 하자. 직선 AE와 GD가 점 P에서, 직선 EH와 GF가 점 Q에서, 직선 HD와 AF가 점 R에서 만난다고 할 때, $\frac{\overline{QF}}{\overline{QG}} = \frac{\overline{HR}}{\overline{PG}}$임을 보여라.

2. 양의 정수 n, k, r에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(x_1, x_2, ..., x_k)$의 개수를 $A(n, k, r)$이라 하자.

(i) $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k \geq 0$

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$

(iii) $x_1 - x_k \leq r$

모든 양의 정수 m, s, t에 대하여, 다음을 보여라.

$$A(m, s, t) = A(m, t, s)$$

3. 양의 정수 k와 한자리 양의 정수 a에 대하여 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n이 존재함을 보여라.

$2^n = a_0 + a_1 \times 10 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_i \times 10^i + \cdots$ (a_i는 0 이상 9 이하인 정수)일 때, $a_k = a$이다.

제 35 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2021년 11월 13일; 제한시간 2시간; 문항당 7점

4. n은 양의 정수로, 각각 n개의 공항이 있는 두 나라 A, B가 있고, 이 두 나라 사이를 운행하는 n^2-2n+2개의 항공사가 있다. A나라의 각 공항과 B나라의 각 공항 간에는 오직 한 항공사만 운행하고, 그 항공사는 양방향으로 운행한다. 또한 같은 나라의 두 공항 사이에는 항공기가 다니지 않는다. 서로 다른 두 공항 P, Q에 대하여 다음 조건을 만족하도록 공항을 나열한 $T_0, T_1, \ldots, T_s$를 "(P,Q)-여행경로"라고 하자.

(i) $T_0 = P$, $T_s = Q$

(ii) $T_0, T_1, \ldots, T_s$는 모두 다르다.

(iii) T_0와 T_1간, T_1와 T_2간, $\ldots$, T_{s-1}와 T_s간을 모두 운행하는 한 항공사가 존재한다.

각각의 항공사는 적어도 하나의 항공기를 운행한다고 할 때, (P,Q)-여행경로가 존재하지 않거나 정확히 하나인 두 공항 P, Q가 존재함을 보여라.

5. 실수 $a_1, \cdots, a_{2021}$이 다음 조건을 모두 만족한다.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{2\left(a_{n+1}\right)^2}{a_n + a_{n+1}} \quad (1 \le n \le 2019)$$

$a_1, \cdots, a_{2021}$ 중 가장 작은 수를 m, 가장 큰 수를 M이라 하자. 2021차 다항식

$$P(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_{2021})$$

에 대하여, 닫힌 구간 $[m, M]$에서 $|P(x)|$의 값이 최대가 되게 하는 x의 값을 α라 할 때, $1 < \alpha < 2$임을 보여라.

6. 둔각삼각형 $ABC(\angle A > \angle B > \angle C)$에서 변 BC의 중점을 M이라 하자. 삼각형 ABC의 외접원 위의 점 D는 직선 AB에 대하여 점 C의 반대쪽에 있는 점으로 다음 조건을 만족한다.

> 점 D에서 직선 BD에 접하고 점 A를 지나는 원과 삼각형 ABM의 외접원의 교점을 $E(\neq A)$라 할 때, $\overline{BD} = \overline{BE}$이다.

삼각형 ADE의 외접원 ω와 직선 EM의 교점을 $F(\neq E)$라 할 때, 직선 BD와 AE의 교점이 점 F에서의 원 ω의 접선 위에 있음을 보여라.

제 34 회 최종시험 오전
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2021년 5월 8일 ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

1. 예각 삼각형 ABC의 내심 I를 지나고 직선 AI에 수직인 직선이 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 점 D를 지나고 BI와 평행한 직선과 E를 지나고 CI와 평행한 직선의 교점을 F라 하자. 직선 FI와 삼각형 DEF의 외접원의 교점을 $P(\neq F)$라 할 때, 삼각형 DEF의 외접원의 중심, 삼각형 ABC의 외접원의 중심, 점 P가 일직선 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수 $k(\geq 8)$에 대하여 다음 조건을 만족하는 양의 정수 x, y가 존재하면 그런 양의 정수의 순서쌍 (x, y)가 무한히 많음을 보여라.

(1) $\frac{x^2-2}{y}$ 와 $\frac{y^2-3}{x}$ 은 양의 정수이다.

(2) $\gcd\left(3x+\frac{2(y^2-3)}{x},\ 2y+\frac{3(x^2-2)}{y}\right)=k$

3. 사람들의 모임 P가 있다. P에 속하는 서로 다른 두 사람 A, B에 대하여 A가 B를 알면 B도 A를 안다고 한다. P에 속하는 각 사람은 모임 P에 있는 사람 중 자기 자신을 제외하고 알고있는 사람의 수가 2 이하이다. P의 부분집합 중 k명으로 이루어진 집합 S에 대하여, S에 속하는 어떤 두 사람도 서로 모르면 S를 P의 'k-독립적인 집합'이라 하자. P의 부분집합 $X_1, X_2, \ldots, X_{4041}$은 2021-독립적인 집합으로 서로 다를 필요는 없다. 다음 조건을 만족하는 P의 2021-독립적인 집합 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2021}\}$이 존재함을 보여라.

어떤 정수 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{2021} \leq 4041$에 대하여
$v_1 \in X_{i_1},\ v_2 \in X_{i_2},\ \ldots,\ v_{2021} \in X_{i_{2021}}$이다.

제 34 회 최종시험 오후

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2021년 5월 8일 ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

4. 대한 고등학교에는 $n(\geq 2)$개의 동아리 $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 있다. 이때 다음 조건을 만족하는 $n-1$개의 모임 $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$이 존재함을 보여라.

(1) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{n-1}$이다.

(2) $1 \leq i < j \leq n-1$에 대하여 $B_i \cap B_j = \emptyset$이고 $-1 \leq |B_i| - |B_j| \leq 1$ 이다. (단, $|X|$는 집합 X의 원소의 개수)

(3) $1 \leq i \leq n-1$에 대하여 $B_i \subseteq A_k \cup A_l$인 $1 \leq k \leq l \leq n$이 존재한다.

5. 이등변 삼각형이 아닌 예각 삼각형 ABC의 내심은 I이고, 꼭지점 A에 대한 방접원 Ω의 중심은 O이다. 점 A, I에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. 직선 OE와 AD의 교점을 X, 삼각형 BCX의 외심을 P라 하자. 점 X가 삼각형 ABC의 내접원 위에 있으면 삼각형 BCP의 외접원이 원 Ω에 접함을 보여라.

6. 다음 조건을 만족하는 함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

모든 실수 x, y에 대하여, $f\left(x^2 - g(y)\right) = g(x)^2 - y$

제36회 중등부 1차시험 1교시

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

1. 실수 x, y에 대하여 다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라. [4점]

$$x^4y^2 + x^2y^2 + 12x^2y + 4x^2 + 2022$$

답: 2006

2. 함수 $f(x)$가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = ax + |x-1| + 3|x-2| + 5|x-3| + 7|x-4|$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geqslant f(2)$가 성립하도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라. [5점]

답: 7

3. 식 $a^2 + 2ab + 4b^2 = 30$을 만족하는 음이 아닌 실수 a, b에 대하여 $ab + \dfrac{1}{1+ab}$이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것과 가장 작은 것의 합을 M이라 하자. $24M$의 값을 구하여라. [5점]

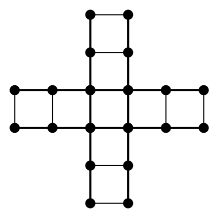
답: 148

4. 다음 그림의 네모 상자에 1 이상 12 이하의 서로 다른 정수를 하나씩 넣어서 네 개의 등식이 모두 성립할 때, 네모 상자에 넣은 네 수의 곱을 구하여라. [4점]

$$\begin{array}{ccccc}
\square & + & \square & = & 12 \\
\times & & + & & \\
\square & + & \square & = & 13 \\
\| & & \| & & \\
24 & & 11 & &
\end{array}$$

답: 240

5. 그림과 같이 9개의 단위 정사각형으로 이루어진 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 이 도형 위의 20개의 점 각각에 빨강, 파랑 중 하나의 색을 칠하는 방법의 수를 구하여라. [5점]



(조건) 각각의 단위 정사각형의 네 꼭짓점 중 빨강으로 색칠된 것의 개수는 1 또는 3이다.

답: 2048

6. 정12각형의 각 꼭짓점 중 5개는 빨간색, 나머지 7개는 파란색으로 색칠하려고 한다. 다음 조건을 만족하도록 색칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.) [6점]

(조건) 파란색으로 색칠된 세 점을 꼭짓점으로 가지는 정삼각형을 만들 수 없다.

답: 27

7. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 9$, $\overline{CA} = 10$이다. 점 D는 변 BC 위의 점으로 $\overline{BD} = 4$인 점이다. 변 AB와 AC의 중점을 각각 E, F라 할 때, 삼각형 DEF의 외접원과 선분 AD가 만나는 점을 K라 하자. $6(\overline{AK})^2$의 값을 구하여라. [5점]

답: 40

8. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 27$, $\overline{BC} = 30$이다. 변 BC의 중점을 M이라 할 때 선분 BC를 지름으로 하는 원과 선분 AM이 점 $D(\neq A)$에서 만난다. 직선 CD와 변 AB가 점 E에서 만나고, 직선 BD와 변 AC가 점 F에서 만난다. $\overline{EF} = 10$일 때, 선분 AC의 길이를 구하여라. [6점]

답: 39

(끝)

9. 양의 정수 m, n이 다음 조건을 만족할 때, $m+n$의 값을 구하여라. [5점]

(조건) m, n의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 할 때, $LG = 270000,\ L - G = m + 2n$이다.

답: 1050

10. 다음 두 조건을 모두 만족하는 소수 p, q의 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하여라. [5점]

(i) $p \leqslant q \leqslant 19$

(ii) $x(x+pq) = m^2$을 만족하는 양의 정수 x, m의 순서쌍 (x, m)은 유일하게 존재한다.

답: 7

중등부

제36회 중등부 1차시험 2교시

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

11. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라. [5점]

(i) $x + 2y \leqslant 12$

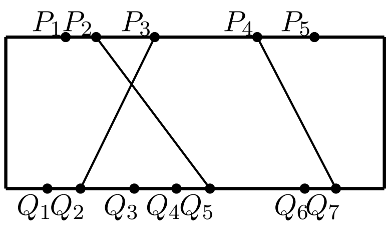
(ii) $xy \geqslant 10$

답: 11

12. 좌표평면 위의 점 (x, y)에 대하여, x가 $0, 1, 2, 3$ 중 하나이고 y가 $0, 1, 2$ 중 하나이면 그 점을 '좋은 점'이라 하자. 함수 $y = p(x)$의 그래프가 3개 이상의 좋은 점을 지나는 이차다항식 $p(x)$의 개수를 구하여라. [6점]

답: 74

13. 다음과 같이 서로 다른 5개의 점 $P_1, \ldots, P_5$와 서로 다른 7개의 점 $Q_1, \ldots, Q_7$이 직사각형의 마주보는 두 변 위에 있다. 각 변 위의 점 P_i와 Q_j를 잇는 35개의 선분 중 어떠한 세 선분도 직사각형 내부의 한 점에서 만나지 않는다. 35개의 선분들의 교점 중, 직사각형 내부에 있는 것의 개수를 구하여라. [5점]



답: 210

14. 두자리 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b) 중, 다음 두 조건을 모두 만족하는 것의 개수를 구하여라. [5점]

(i) $a + b$는 7의 배수

(ii) ab는 2의 배수

답: 867

15. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 11$, $\overline{CA} = 8$이다. 변 BC, CA, AB가 삼각형 ABC의 내접원에 각각 D, E, F에서 접한다. 변 AB와 AC의 중점을 연결한 직선이 직선 DE, DF와 각각 점 P, Q에서 만날 때, $6\overline{PQ}$의 값을 구하여라. [4점]

답: 9

16. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = 12$이다. 각 B의 이등분선과 변 AC의 교점을 D, 각 C의 이등분선과 변 AB의 교점을 E라 할 때, $\overline{BE} = 6$, $\overline{CD} = 8$이다. 삼각형 ABC의 넓이를 S라 할 때, $\frac{4}{\sqrt{7}}S$의 값을 구하여라. [5점]

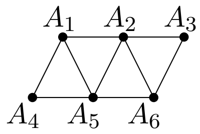
답: 135

17. 삼각형 ABC의 외접원 Γ 위의 점 A에서의 접선과 직선 BC가 점 D에서 만난다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 선분 BM이 원 Γ와 점 $E(\neq B)$에서 만난다. $\angle ACE = 25°$, $\angle CED = 84°$, $\angle ADE = x°$일 때, x의 값을 구하여라. [5점]

답: 17

18. 그림과 같이 삼각형 4개로 이루어진 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6에 $1, 2, 3, 4, 5, 6$을 하나씩 적는 경우의 수를 구하여라. [4점]

(조건) 각 삼각형마다 꼭짓점에 쓴 수의 제곱의 합을 3으로 나누어 얻은 4개의 나머지가 모두 같다.



답: 144

19. 다음 조건을 만족하는 소수가 아닌 세 자리 양의 정수 n 중에서 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

(조건) $n - 1$ 이하의 모든 양의 정수의 배수이지만 n의 배수가 아닌 양의 정수가 존재한다.

답: 961

(끝)

20. 양의 정수 $n = a_k \times 10^k + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$ 에 대하여

$$r(n) = a_0 \times 10^k + \cdots + a_{k-1} \times 10 + a_k$$

라 정의하자. (단, $a_0, \ldots, a_k$는 0 이상 9 이하인 정수, $a_k \neq 0$)
식 $5n + 7r(n) = 7401$을 만족하는 n을 구하여라. [6점]

답: 328

제 36 회 고등부 2차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2022년 10월 29일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 2,\ b_1 = 4,\ c_1 = 5$
- 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{c_n},\ b_{n+1} = c_n + \dfrac{1}{a_n},\ c_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{b_n}$ 이다.

모든 양의 정수 n에 대하여, a_n, b_n, c_n 중 $\sqrt{2n+13}$ 보다 큰 것이 존재함을 증명하여라.

2. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라 하고, 삼각형 ABD와 ADC의 외심을 각각 E, F라 하자. 삼각형 BDE의 외접원과 삼각형 DCF의 외접원의 교점 중 D가 아닌 점을 P, 삼각형 ABC, BDE, DCF의 외심을 각각 O, X, Y라 할 때, 직선 OP와 직선 XY가 평행함을 보여라.

3. 모든 항이 양의 정수인 수열 $\{a_n\}$은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $i \geq 2022$인 정수 i에 대하여 a_i는 $x + \displaystyle\sum_{k=i-2021}^{i-1} a_k$ 가 완전제곱수가 되는 양의 정수 x 중 가장 작은 것이다.
- $a_n = 4 \times 2022 - 3$ 을 만족하는 양의 정수 n은 무한히 많다.

다음 조건을 만족하는 양의 정수 N이 존재함을 보여라.

(조건) N 이상인 모든 정수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+2021} a_k$ 의 값은 항상 일정하다.

그리고 $\displaystyle\sum_{k=N}^{N+2021} a_k$ 의 값을 구하여라.

4. 양의 정수 $m, n\ (m > n)$에 대하여 $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m$은 다음을 만족하는 음이 아닌 정수이다.

$$2 > \frac{a_{n+1}}{n+1} \geq \frac{a_{n+2}}{n+2} \geq \cdots \geq \frac{a_m}{m}$$

이러한 순서쌍 $(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m)$의 개수를 구하여라.

제 36 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2022년 10월 29일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 내접원이 점 D, E, F에서 각각 변 BC, CA, AB에 접한다. 삼각형 ABC의 내심을 I, 직선 AI와 DF의 교점을 P, 직선 BI와 EF의 교점을 Q라 하자. 두 선분 PQ와 CD의 길이가 같음을 보여라.

6. 다음 세 조건을 모두 만족하도록 $n\,(\geq 4)$개의 섬이 다리로 연결되어있다.

- 각 다리는 오직 두 섬만을 연결하며, 다른 섬을 거치지 않는다.
- 임의의 서로 다른 두 섬을 연결하는 다리는 하나 이하이다.
- 다음을 만족하는 서로 다른 섬의 나열 $A_1, A_2, \dots, A_{2k}\,(k \geq 2)$는 없다.

  각각의 $i = 1, 2, \dots, 2k$마다 A_i와 A_{i+1}이 다리로 연결되어있다.
  (단, $A_{2k+1} = A_1$)

다리의 총 개수는 $\frac{3(n-1)}{2}$ 이하임을 보여라.

7. 모든 항이 양의 실수인 무한수열 $\{a_n\}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $i < j$를 만족하는 양의 정수 i, j에 대하여 $a_i \leq a_j$이다.
- 모든 양의 정수 $k(\geq 3)$에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{k-1} + a_k)(a_k + a_1) \leq (2^k + 2022)a_1 a_2 \cdots a_k$$

이때 모든 a_n은 같은 수임을 보여라.

8. 양의 정수 p는 8로 나눈 나머지가 3인 소수이다. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

$$p^2x^4 - 6px^2 + 1 = y^2$$

오일러

제 36 회 고등부 1차시험 1교시

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이단어져 있습니다.

1. x에 대한 방정식 $x^4 - 4x^3 - a^2x^2 + 16x + 4a^2 - 16 = 0$의 실수해 중 가장 큰 수와 두 번째로 큰 수의 합이 17이다. 양의 실수 a의 값을 구하여라. [4점]

답: 13

2. 실수 a, b, c는 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $a < b$

(ii) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2 + bx + c \geqslant 0$이다.

식 $\dfrac{11a + b + c}{b - a}$가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라. [5점]

답: 5

3. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n과 상수항이 528인 정수계수 다항식 $P(x)$가 있다.

(조건) 방정식 $P(x) = 2022$의 서로 다른 정수해의 개수가 n이다.

n이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [6점]

답: 6

4. 10명의 학생을 2개 이상의 모둠으로 나눌 때, 각 모둠의 인원이 4 이상인 경우의 수를 구하여라. (단, 각 학생은 오직 하나의 모둠에 속한다.) [4점]

답: 336

5. 서로 구별되지 않는 17개의 공을 서로 다른 상자 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5에 남김없이 넣을 때, 다음 두 조건을 모두 만족하도록 넣는 경우의 수를 구하여라. [5점]

(i) 각각의 상자에 적어도 한 개의 공을 넣는다.

(ii) 모든 $i = 1, 2, 3, 4, 5$에 대하여 상자 B_i에 들어 있는 공의 개수에 i를 더한 수는 짝수이다.

답: 126

6. 열 개의 수 -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5를 원형으로 배열할 때, 다음 두 조건을 모두 만족하도록 배열하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [5점]

(i) 이웃한 두 수의 곱은 음수이다.

(ii) 네 개의 수 -4, -2, 2, 4 중 어떤 두 수도 서로 이웃하지 않는다.

답: 144

7. 삼각형 ABC는 외접원의 반지름의 길이가 10인 삼각형으로 $\overline{AB} = 2\overline{AC}$, $\cos\angle BAC = -\frac{1}{3}$을 만족한다. 변 AB의 중점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 x라 하자. $3x^2$의 값을 구하여라. [5점]

답: 800

8. 포물선 $y = (x - 1)^2$ 위의 네 점 A, B, C, D가 꼭짓점인 사각형 $ABCD$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) 대각선 AC의 중점은 y-축 위에 있다.

(ii) 대각선 BD는 대각선 AC에 수직이다.

선분 BD의 중점의 x-좌표를 k라 할 때, $100k$의 값을 구하여라. [5점]

답: 125

9. 등식 $y^2 - 2xy + x^4 = 2368$을 만족하는 정수 x, y에 대하여, $x + y$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

답: 18

10. 다음 조건을 만족하는 세 자리 양의 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하여라. [6점]

(조건) m, n의 최대공약수를 G, 최소공배수를 L이라 할 때, $L - G = m + 2n$이다.

답: 366

(뒷면에 계속)

오일러

제36회 고등부 1차시험 2교시

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이단어져 있습니다.

11. 실수 x가 다음 식을 만족할 때, $72x$의 값을 구하여라. [5점]

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

답: 200

12. 실계수 6차 다항식 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(0)=2$

(ii) $n=1,2,3,4,5,6$에 대하여 $f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right)^3$이다.

$f(1)$의 값을 구하여라. [5점]

답: 721

13. 양의 정수 n에 대하여 $d(n)$을 n의 양의 약수 중 5 이하인 것의 개수라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. [5점]

$$d(1)+d(2)+\cdots+d(400)$$

답: 913

14. 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Y=\{1,2,3\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f:X\to Y$의 개수를 구하여라. [6점]

(i) 모든 $y\in Y$에 대하여 $(f\circ g)(y)=g(y)$를 만족하는 함수 $g:Y\to X$의 개수는 8이다.

(ii) 모든 $y\in Y$에 대하여 $(f\circ h)(y)=y$를 만족하는 함수 $h:Y\to X$의 개수는 8이다.

답: 18

15. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB}=30$, $\overline{BC}=50$, $\overline{CA}=40$이다. 점 X, Y, Z는 각각 삼각형 ABC의 변 AB, BC, CA 위에 있는 점으로 $\overline{AX}:\overline{BY}:\overline{CZ}=3:5:4$를 만족한다. 삼각형 XYZ의 넓이의 최솟값을 구하여라. [4점]

답: 150

16. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=30$, $\overline{AC}=40$, $\angle ACB=90°$이다. 변 AC를 지름으로 하는 원이 변 AB와 점 $D(\neq A)$에서 만난다. 변 AC의 중점을 M, 선분 CD와 BM의 교점을 E, 직선 AE와 변 BC의 교점을 F라 하자. $25\overline{FC}$의 값을 구하여라. [5점]

답: 480

17. 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 Ω_1이 선분 AC를 지름으로 하는 원 Ω_2에 내접한다. 또한 반지름이 1인 원 Ω_3이 원 Ω_1에 외접하고 원 Ω_2에 내접한다. 원 Ω_3의 중심을 O라 할 때, 직선 OB는 직선 BC에 수직이다. 선분 BC의 수직이등분선이 Ω_2와 만나는 점을 D라 할 때, $9\overline{CD}^2$의 값을 구하여라. [6점]

답: 80

18. 곡선 $y = x^4 - 35x^3 + 27x^2 + 34x - 11$과 직선 $y = 4x - 6$은 서로 다른 네 점에서 만난다. 이 네 점의 y 좌표의 합을 구하여라. [4점]

답: 116

19. 다항식 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(조건) $f(0) = 9,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = 24$

이러한 다항식 중 차수가 최소인 것을 $p(x)$라 할 때, $p(5)$를 구하여라. [5점]

답: 184

20. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 n의 개수를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수) [5점]

(i) $1 \leqslant n < 44484$

(ii) $\left[\frac{n}{1011}\right] = m\left[\frac{n}{2022}\right]$을 만족하는 정수 m이 존재한다.

답: 23252

가우스

제36회 고등부 1차시험 1교시

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

1. 실수 a, b, c는 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $a < b$

(ii) 모든 실수 x에 대하여 $ax^2 + bx + c \geqslant 0$이다.

식 $\dfrac{11a+b+c}{b-a}$가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라. [4점]

답: 5

2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n과 상수항이 528인 정수계수 다항식 $P(x)$가 있다.

(조건) 방정식 $P(x) = 2022$의 서로 다른 정수해의 개수가 n이다.

n이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

답: 6

3. 다음 조건을 만족하는 양의 실수 x의 개수를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수) [5점]

(조건) $\left[\dfrac{x^3}{900}\right] - x$의 값은 29 이하의 음이 아닌 정수이다.

답: 10

4. 일곱 개의 문자 A, A, A, B, B, C, C를 모두 일렬로 나열할 때, A가 두 번 이상 연속하여 나타나지 않는 경우의 수를 구하여라. [4점] **답: 60**

5. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$의 개수를 구하여라. [5점]

(조건) 양의 정수 i에 대하여 $i+1$이 f의 치역에 속하면 i도 f의 치역에 속한다.

답: 541

6. 정15각형의 각 꼭짓점 중 6개는 빨간색, 나머지 9개는 파란색으로 색칠하려고 한다. 다음 조건을 만족하도록 색칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 센다.) [5점]

(조건) 모든 꼭짓점이 파란색인 정다각형은 없다.

답: 65

7. 포물선 $y = (x-1)^2$ 위의 네 점 A, B, C, D가 꼭짓점인 사각형 $ABCD$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) 대각선 AC의 중점은 y-축 위에 있다.

(ii) 대각선 BD는 대각선 AC에 수직이다.

선분 BD의 중점의 x-좌표를 k라 할 때, $100k$의 값을 구하여라. [5점]

답: 125

8. 볼록사각형 $ABCD$에서 $\angle BAC = 23°$, $\angle DBC = 75°$, $\angle BCD = 30°$이다. $\angle BAC$의 이등분선과 $\angle BDC$의 이등분선의 교점이 변 BC위에 있을 때, $\angle CAD = x°$이다. x의 값을 구하여라. [6점]

답: 11

9. 등식 $y^2 - 2xy + x^4 = 2368$을 만족하는 정수 x, y에 대하여, $x+y$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라. [5점]

답: 18

10. 방정식 $29m^2 + 34mn + 10n^2 = 170$을 만족하는 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하여라. [6점]

답: 16

(뒷면에 계속)

가우스

제36회 고등부 1차시험 2교시

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 5월 28일 ; 제한시간 2시간 30분(1교시 1시간 15분, 2교시 1시간 15분)

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개(오전 10개, 오후 10개)의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

11. 실계수 6차 다항식 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(0) = 2$

(ii) $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$에 대하여
$f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right)^3$이다.

$f(1)$의 값을 구하여라. [5점]

답: 721

12. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 n의 개수를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수) [6점]

(i) $n \leqslant 900$

(ii) $1 \leqslant \sqrt{n+10} - [\sqrt{n}] \leqslant 3$

답: 274

13. 양의 정수 n에 대하여 $d(n)$을 n의 양의 약수 중 5 이하인 것의 개수라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. [5점]

$$d(1) + d(2) + \cdots + d(400)$$

답: 913

14. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하여라. [6점]

(i) 모든 $y \in Y$에 대하여 $(f \circ g)(y) = g(y)$를 만족하는 함수 $g : Y \to X$의 개수는 8이다.

(ii) 모든 $y \in Y$에 대하여 $(f \circ h)(y) = y$를 만족하는 함수 $h : Y \to X$의 개수는 12이다.

답: 132

15. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = 30$, $\overline{AC} = 40$, $\angle ACB = 90°$이다. 변 AC를 지름으로 하는 원이 변 AB와 점 $D(\neq A)$에서 만난다. 변 AC의 중점을 M, 선분 CD와 BM의 교점을 E, 직선 AE와 변 BC의 교점을 F라 하자. $25\overline{FC}$의 값을 구하여라. [4점]

답: 480

16. 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 Ω_1이 선분 AC를 지름으로 하는 원 Ω_2에 내접한다. 또한 반지름이 1인 원 Ω_3이 원 Ω_1에 외접하고 원 Ω_2에 내접한다. 원 Ω_3의 중심을 O라 할 때, 직선 OB는 직선 BC에 수직이다. 선분 BC의 수직이등분선이 Ω_2와 만나는 점을 D라 할 때, $9\overline{CD}^2$의 값을 구하여라. [5점]

답: 80

17. 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 9$이다. 변 AB의 중점을 D, 변 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과 삼각형 ADE의 외접원의 교점을 $F(\neq A)$라 할 때, $30\overline{AF}$의 값을 구하여라. [5점]

답: 115

18. 다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 n의 개수를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수) [4점]

(i) $1 \leqslant n < 44484$

(ii) $\left[\frac{n}{1011}\right] = m\left[\frac{n}{2022}\right]$을 만족하는 정수 m이 존재한다.

답: 23252

19. 다음 두 조건을 모두 만족하는 가장 작은 양의 정수 N을 구하여라. [5점]

(i) N의 양의 약수의 합은 짝수이지만 4의 배수는 아니다.

(ii) N의 서로 다른 소인수는 4개 이상이다.

답: 4410

(뒷면에 계속)

20. $21^{9508}+21^{5}+1$은 두 소수의 곱이다. 이 두 소수 중 작은 것을 구하여라. [5점]

답: 463

(끝)

제 36 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2022년 10월 29일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 내접원이 점 D, E에서 각각 변 AB, BC에 접한다. 삼각형 ABC의 내심을 I라 하면, 직선 AI와 DE의 교점이 변 AC를 지름으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수 $n\,(\geq 3)$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 의 개수를 구하여라.

- $1 \leq i \leq n$을 만족하는 양의 정수 i에 대하여 $1 \leq a_i \leq i$ 이다.
- $1 \leq i < j < k \leq n$을 만족하는 양의 정수 i, j, k에 대하여 $a_i = a_j$ 이면 $a_j \geq a_k$ 이다.

3. 홀수인 소수 p가 주어져있다. 양의 정수 n에 대하여 n의 약수이면서 p의 배수가 아닌 수 중 가장 큰 것을 p로 나눈 나머지를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $p = 5$이면 $f(6) = 1$, $f(35) = 2$, $f(75) = 3$ 이다. 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 1$
- 모든 양의 정수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + (-1)^{f(n)+1}$ 이다.

이때 $m = a_k$ 인 양의 정수 k가 무한히 많은 정수 m을 모두 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{N}$은 양의 정수 전체의 집합)

(조건) 각 양의 정수 x, y에 대하여 $\dfrac{f(x+y) - f(x)}{f(y)}$ 는 2022^{2022} 이하의 양의 정수이다.

2022년 10월 29일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 2$, $a_2 = 11$
- 모든 양의 정수 n에 대하여 $2a_{n+2} = 3a_n + \sqrt{5\left(a_n^2 + a_{n+1}^2\right)}$ 이다.

모든 양의 정수 n에 대하여 a_n은 유리수임을 보여라.

6. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이다. 점 $D\,(\neq A, C)$는 변 AC 위의 점이고 원 O는 점 E에서 직선 BD에 접하고 점 C에서 직선 AC에 접한다. 직선 AE와 원 O는 점 $F\,(\neq E)$에서 만나고, 직선 AC와 삼각형 ABF의 외접원은 점 $G\,(\neq A)$에서 만날 때, 네 점 D, E, F, G가 한 원 위에 있음을 보여라.

7. 카드 n장에 1부터 n까지의 정수가 하나씩 적혀 있으며 각 카드에 적힌 수는 모두 다르다. n개의 상자에 이 카드가 한 장씩 들어있는 상태에서 시작하여, 다음 시행을 반복하여 n장의 카드를 모두 한 상자에 넣으려고 한다. 이것이 가능한 양의 정수 n을 모두 구하여라.

> (시행) 상자에 들어있는 카드 중 원하는 정수 k가 적혀있는 카드를 선택하여, 상자에 들어있는 카드에 적힌 수의 합이 k의 배수가 되는 다른 상자로 옮긴다. (단, 빈 상자로는 옮기지 않는다.)

8. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

$$xy^2 = x^2 + 2x - 3$$

kmo
한국수학올림피아드

제 35 회 최종시험 오전

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 4월 23일 ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

1. 예각삼각형 $ABC\,(\overline{AB} < \overline{AC})$의 꼭짓점 A, B, C에서 마주보는 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 점 B에서의 접선과 점 C에서의 접선이 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 EF에 내린 수선과 직선 AD의 교점을 Q, 점 A에서 직선 EF에 내린 수선의 발을 R, 삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 직선 DR과 OQ가 평행함을 보여라.

2. 양의 정수 $n\,(\geq 3)$에 대하여 0개 이상의 돌이 들어 있는 상자 $A_1, A_2, \ldots, A_n$이 있다. 이 상자들의 모임 $\{A_1, \cdots, A_n\}$에 다음과 같은 시행을 하기로 하자.

> $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 중 하나를 선택하여 그 상자 안에 있는 돌을 모두 꺼낸 후, 꺼낸 돌을 n개의 상자에 추가하되, 임의의 두 상자에 추가하는 돌의 개수의 차이는 1 이하가 되도록 한다.

예를 들어, $n = 4$이고 A_1, A_2, A_3, A_4에 돌이 각각 $2, 6, 0, 4$개씩 들어있을 때, A_1에 있는 돌 2개를 모두 꺼내 A_1, A_2, A_3, A_4에 각각 $1, 0, 1, 0$개씩 추가하는 한 번의 시행을 통해 A_1, A_2, A_3, A_4에 들어있는 돌의 개수가 각각 $1, 6, 1, 4$가 되게 할 수 있다.
현재 상자 A_i에 들어있는 돌의 개수를 $a_i\,(\geq 0)$이라 하고 $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3n$이라 하자. 위의 시행을 반복하여 모든 돌을 하나의 상자에 넣으려고 할 때 필요한 시행의 횟수의 최솟값을 $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$이라 하자. $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값 M을 구하고, $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = M$을 만족하는 음이 아닌 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$을 모두 구하여라.

3. 치역이 유한집합인 함수 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 주어져 있다. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)

> 모든 실수 x, y에 대하여 $2f(x + g(y)) = f(2g(x) + y) + f(x + 3g(y))$

제 35 회 최종시험 오후

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2022년 4월 23일 ; 제한시간 3시간 ; 문항당 7점

4. 이등변 삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 내접원 ω가 변 AB, AC와 각각 점 D, E에서 접한다. 점 A에서 변 BC에 내린 수선과 원 ω의 두 교점 중 점 A에 가까운 점을 L이라 하자. 삼각형 ABC의 내심을 I, 삼각형 ABC의 외접원과 직선 AI와 만나는 점을 $M\,(\neq A)$, 삼각형 BDE의 외심 O가 중심이고 점 L을 지나는 원이 직선 AL과 만나는 점을 $N\,(\neq L)$이라 하자. 두 직선 LD와 MB의 교점이 삼각형 LNE의 외접원 위에 있음을 보여라.

5. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m을 모두 구하여라.

$x^2 + 11y^2 + 2022$를 m의 배수가 되도록 하는 정수 x, y가 존재한다.

6. 다음 세 조건을 모두 만족하는 집합 X를 '좋은 집합'이라 하자.

(i) X의 원소의 개수는 2022이다.

(ii) X의 각 원소는 구간 $[0, 1]$에 포함되는 닫힌 구간이다.

(iii) 임의의 실수 $r\,(0 \leq r \leq 1)$에 대하여 X의 원소 중 r을 포함하는 것은 최대 1011 개이다.

두 개의 좋은 집합 A, B에 대하여 $I \cap J \neq \emptyset$을 만족하는 $I \in A$, $J \in B$의 순서쌍 (I, J)의 개수를 $n(A, B)$라 하자. $n(A, B)$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

유형 가

제 37 회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2023년 5월 13일 ; 제한시간 2시간 30분

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 10]

부등식 $2x^2 - 6x + 4 \leqslant 3x$ 를 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하여라.

2. [정답. 6]

정사각형의 각 변을 빨간색 또는 파란색으로 칠한다. 이렇게 색칠된 정사각형의 개수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한가지로 센다.)

3. [정답. 15]

다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(조건) n의 제곱은 100보다 작은 세 개의 연속된 양의 정수들의 합으로 나타낼 수 있다.

4. [정답. 6]

정육각형 $ABCDEF$의 넓이가 12 일 때, 삼각형 ACE의 넓이를 구하여라.

5. [정답. 14]

등식 $[x]^2 + 4 = 2x + 2[x]$ 를 만족하는 모든 실수 x의 합을 S라고 할 때, $2S$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

6. [정답. 12]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

(i) $ab = 300$

(ii) $\dfrac{b}{5}$ 는 정수이다.

7. [정답. 10]

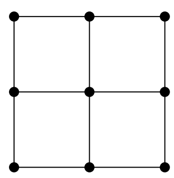
카드 6장에 1 부터 6 까지의 정수가 하나씩 적혀 있다. 이 중 카드에 적힌 숫자의 곱이 12 의 배수가 되도록 3 장의 카드를 뽑는 방법의 수를 구하여라.

8. [정답. 196]

삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이가 각각 7, 8, 9 이다. 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 점 A와 G를 지나는 서로 다른 두 원이 각각 점 D와 E에서 직선 BC에 접한다. $3(\overline{DE})^2$의 값을 구하여라.

9. [정답. 20]

다음과 같이 1×1 정사각형 4개를 붙여서 큰 정사각형을 만들었다. 이 도형의 9개의 점 중에서 5개의 점을 꼭짓점으로 갖는 오각형의 개수를 구하여라. (단, 오각형의 모든 내각의 크기는 $180°$ 미만이고 9개의 점은 모두 다른 것으로 간주한다.)



(뒷면에 계속)

10. [정답. 437]

다음 조건을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 n의 개수를 구하여라.

> **(조건)** $n = a^2 - 4b^2$ 을 만족하는 정수 a, b가 존재한다.

11. [정답. 25]

양의 실수 a, b가 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$ 과 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10$ 을 모두 만족할 때, $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

12. [정답. 66]

평행사변형 $ABCD$에서 두 변 AB와 BC의 길이는 각각 5와 7이고 대각선 AC의 길이는 6이다. 원 O가 점 A와 C를 지나고 점 C에서 직선 BC에 접한다. 직선 AD와 원 O가 만나는 점을 $E(\neq A)$라 할 때 $42\overline{DE}$의 값을 구하여라.

13. [정답. 55]

함수 $f(x)$가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = \frac{2}{5}(x-a)^2 - b$$

함숫값 $f(0), f(1), \ldots, f(10)$ 중 음수의 개수가 홀수가 되는 정수 a와 5 이하인 양의 정수 b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

14. [정답. 12]

다음 등식을 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

$$x^2 + xy + y^2 = 10(x + 5y)$$

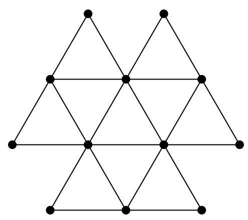
15. [정답. 160]

삼각형 ABC에서 $\angle BAC = 90°$, $\overline{AB} = 120$ 이다. 변 AB, BC의 중점을 각각 M, N이라 하고 삼각형 ABC의 내심을 I라 하자. 네 점 M, B, N, I가 한 원 위에 있을 때 변 CA의 길이를 구하여라.

16. [정답. 128]

단위 정삼각형 10개를 붙여서 만든 아래 그림과 같은 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 이 도형의 12개의 각 점에 빨간색 또는 파란색으로 칠하는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한가지로 센다.)

> **(조건)** 세 꼭짓점이 모두 같은 색으로 색칠된 단위 정삼각형은 없다.



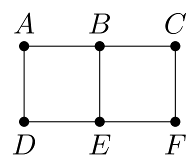
17. [정답. 75]

내심이 I인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA의 길이의 비가 $4:5:6$이다. 직선 AI와 BI가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 각각 $D(\neq A)$, $E(\neq B)$라 하고 직선 DE와 변 AC의 교점을 K라 하자. $\overline{IK} = 30$일 때, 변 BC의 길이를 구하여라.

18. [정답. 588]

다음과 같이 7개의 변과 6개의 꼭짓점 A, B, C, D, E, F로 이루어진 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 각 꼭짓점에 $1, 2, 3, 4$ 중 하나의 수를 적는 경우의 수를 구하여라.

> **(조건)** 각 변의 양 끝점에 적힌 숫자의 합은 5가 아니다.



19. [정답. 552]

각각의 양의 정수 $2023, 2024, \ldots, 4046$ 의 가장 큰 홀수인 약수들의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

20. [정답. 112]

양의 실수 a, b, c가 등식 $a^4 + b^4 + c^4 = 24$를 만족할 때, $3a^4 + 16abc$ 의 최댓값을 구하여라.

(뒷면에 계속)

제 37 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2023년 11월 4일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 다음 등식을 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)를 모두 구하여라.

$$y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

2. 원에 내접하는 사각형 $ABCD\,(\overline{AD} < \overline{BC})$의 변 AB 위에 점 $H\,(\neq A, B)$가 있다. 삼각형 BCH의 외접원이 선분 BD와 만나는 점을 $E\,(\neq B)$, 직선 HE와 직선 AD의 교점을 F라 하자. 점 C를 지나고 점 E에서 직선 BD에 접하는 원이 선분 EF와 점 $G\,(\neq E, F)$에서 만날 때, $\angle DFG = \angle FCG$임을 보여라.

3. 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_{2023}$은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 5$, $a_2 = 25$
- 양의 정수 $n = 1, 2, \ldots, 2021$에 대하여 $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 6$이다.

이때 $a_{2023} = x^2 + y^2$을 만족하는 정수 x, y가 존재함을 보여라.

4. 테니스 대회에 2023명의 선수가 참가했고, 대회에 참가한 임의의 두 선수는 정확히 한 번의 경기를 치렀다. 어떤 경기에서도 무승부는 발생하지 않았고, 다른 모든 선수를 이긴 선수는 나오지 않았다. 어떤 선수 A가 다음 조건을 만족하면 A를 "실력자"라고 하자.

(조건) A를 이긴 각각의 선수 B에 대하여, B를 이기고 A에게 진 선수 C가 존재한다.

이 대회에서 실력자는 정확히 $N\,(\geq 0)$명 나왔다고 한다. 가능한 N의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

중등부

제 37 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

2023년 11월 4일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 양의 정수 $n\,(\geq 5)$에 대하여 n개의 흰 돌과 n개의 검은 돌, 총 $2n$개의 돌이 일렬로 나열되어 있는데, 아래 그림과 같이 왼쪽에서 처음 n개는 흰돌, 그 다음 n개는 검은돌이다.

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc}_{n}\ \underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet\bullet}_{n}$$

다음 시행을 반복하여 돌의 위치를 바꿀 수 있다.

> (시행) 양의 정수 $k\,(\leq 2n-5)$를 선택하여 왼쪽에서 k-번째 돌과 $(k+5)$-번째 돌을 서로 바꾼다.

유한번의 시행으로 왼쪽에서 처음 n개는 검은 돌, 그 다음 n개는 흰 돌이 놓여있게 하려고 한다. 가능한 양의 정수 n을 모두 구하여라.

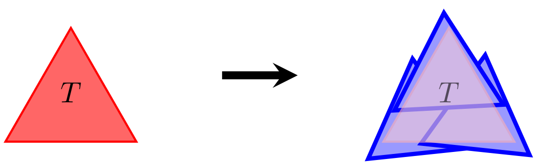
6. 다음 조건을 만족하는 가장 큰 실수 A를 구하여라.

> (조건) 모든 양의 정수 x, y에 대하여, $3x^2+y^2+1 \geq A(x^2+xy+x)$이다.

7. 다음 세 조건을 모두 만족하는 서로 다른 집합 A, B가 존재하지 않는 가장 작은 양의 정수 N을 구하여라. (단, N은 2의 거듭제곱꼴이 아니다. 즉, $N \neq 1, 2^1, 2^2, \ldots$이다.)

- $A, B \subseteq \{1, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2023}\} \cup \{N\}$
- A와 B는 공집합이 아니며, A와 B의 원소의 개수는 같다.
- A의 모든 원소의 합과 B의 모든 원소의 합이 같다.

8. 한 변의 길이가 1인 빨간색 정삼각형 T가 평면 위에 그려져 있다. 양의 실수 c에 대하여, 한 변의 길이가 c인 정삼각형 모양의 파란색 색종이 세 장을 평면 위에 올려놓아 T를 완전히 덮으려고 한다. 가능한 c의 값 중 가장 작은 것을 구하여라. (아래 그림과 같이 파란색 색종이들은 서로 겹치거나 T를 빠져나와도 상관없다. 단, 색종이를 접거나 찢는 것은 허용하지 않는다.)



유형 가

제37회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2023년 5월 13일 ; 제한시간 2시간 30분

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 ~ 4번은 각 4점, 문제 17 ~ 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. [정답. 384]
다음 조건을 만족하는 집합 $\{1, 2, \ldots, 10\}$의 부분집합 S의 개수를 구하여라.

(조건) 집합 $\{1, 2, 3\} \cap S$ 의 원소의 개수는 1이다.

2. [정답. 24]
양의 정수 x, y, z는 등식 $x^2 + y^2 + z^2 = 224$를 만족한다. $x + y + z$ 의 값을 구하여라.

3. [정답. 135]
마름모 $ABCD$에서 변 BC의 중점 M에 대하여 $\overline{AM} = 3$, $\overline{BM} = 2$이다. 마름모 $ABCD$의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하여라.

4. [정답. 23]
곡선 $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 15$와 직선 $y = a$가 서로 다른 세 점 P, Q, R에서 만난다. $\overline{PQ} = \overline{QR}$일 때, 실수 a의 값을 구하여라.

5. [정답. 160]
집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 중 원소의 곱이 12의 배수인 것의 개수를 구하여라.

6. [정답. 399]
반지름이 10인 원에 내접하는 오각형 $ABCDE$가 있다. $\overline{AB} = 1$, $\angle BAC = \angle ACE = \angle CED = 30°$일 때, $(\overline{DE})^2$의 값을 구하여라.

7. [정답. 90]
다항식 $(x^2 - 1)^5(x^2 - x + 1)^5$을 전개하였을 때, x^9의 계수를 구하여라.

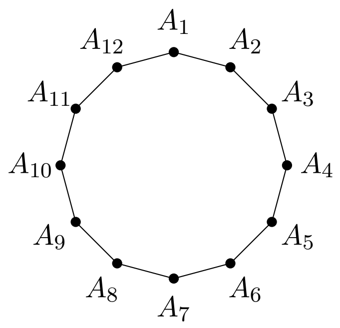
8. [정답. 113]
정수 $\dfrac{2^{84} - 1}{(2^7 - 1)(2^8 + 2^4 + 1)}$ 을 2^7으로 나눈 나머지를 구하여라.

9. [정답. 23]
다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$의 값을 구하여라.

(i) $f(0) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(f'(x))^2}{f(x)f''(x)} = \dfrac{23}{22}$

10. [정답. 135]
정12각형 $A_1A_2 \cdots A_{12}$의 꼭짓점 중에서 4개의 점을 꼭짓점으로 가지는 사다리꼴의 개수를 구하여라.



(뒷면에 계속)

11. [정답. 144]

점 B는 선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점이다. 선분 AC를 지름으로 하는 반원을 O라 하고 선분 AB와 BC를 지름으로 하는 반원 중 선분 AC에 대하여 O와 같은 쪽에 있는 반원을 각각 O_1, O_2라 하자. 점 B를 지나고 선분 AC에 수직인 직선 ℓ과 O의 교점을 P라 하고, 반원 O_1, O_2의 ℓ이 아닌 공통외접선이 O_1, O_2와 접하는 점을 각각 Q, R이라 하자. 삼각형 PQR과 삼각형 PAC의 넓이를 각각 X, Y라 할 때, $\frac{600X}{Y}$의 값을 구하여라.

12. [정답. 11]

다음 등식을 만족하는 정수 x, y의 순서쌍 (x,y)의 개수를 구하여라.

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+11y}=11$$

13. [정답. 384]

삼각형 ABC의 내접원 O_1은 반지름이 12이고, 변 AB, BC와 각각 점 D, E에서 접한다. 삼각형 DBE의 내접원 O_2는 변 AB, BC와 각각 점 F, G에서 접한다. 두 원 O_1과 O_2의 두 교점을 P, Q라 하고 원 O_2의 반지름을 r이라 하자. 사각형 $PFGQ$가 직사각형일 때, $6r^2$의 값을 구하여라.

14. [정답. 42]

다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$, $g:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$의 순서쌍 (f,g)의 개수를 구하여라.

(i) 함수 f는 일대일대응이다.

(ii) 모든 $n=1,2,3$에 대하여 $f(g(n))=g(f(n))$이다.

15. [정답. 25]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(0)=0$

(ii) 모든 양의 실수 x에 대하여

$$f(x)=1+3f\left(\left[\frac{x}{2}\right]\right)-2f\left(\left[\frac{x}{4}\right]\right)$$

함숫값 $f(2^{100}+2^{99}+2^{98})$을 31로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

16. [정답. 320]

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) $0\leqslant a,b,c,d\leqslant 10$

(ii) a^2-b^2-cd-1은 11의 배수이다.

17. [정답. 16]

삼각형 ABC의 내심을 P라 하자. 점 D는 선분 BC의 C쪽 연장선 위의 점이고 삼각형 ACD의 내심을 Q라 하자. $6\overline{CA}=5\overline{BC}$, $\overline{AB}=10$, $\overline{AD}=6$이고 네 점 B, D, Q, P가 한 원 위에 있을 때, $\frac{60\overline{CD}}{\overline{BC}}$의 값을 구하여라.

18. [정답. 1]

다음 등식이 항등식인 정수 계수 다항식 $P(x)$와 정수 a, b, c에 대하여 $3b-c$를 23으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$x^{2023}=(x^3-x-1)P(x)+ax^2+bx+c$$

19. [정답. 214]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 x, y, z, a에 대하여 $x+y+z+a$가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

(i) $x>y>z$

(ii) $(150x-za)(150y-a)<0$

20. [정답. 330]

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(a_1,a_2,\ldots,a_7)$의 개수를 구하여라.

(i) $i=1,2,3,4,5,6$에 대하여 $0\leqslant a_i+a_{i+1}\leqslant 4$

(ii) $0\leqslant a_1\leqslant 4$ 이고 $a_7\leqslant -8$

(끝)

제 37 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2023년 11월 4일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 양의 실수의 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의된다.

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 3, \qquad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n} \quad (n \geq 0)$$

모든 음이 아닌 정수 n에 대하여 a_n은 양의 정수임을 보여라.

2. 집합 $A_0, A_1, \ldots, A_{2023}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $A_0 = \{3\}$
- $n = 1, 2, \ldots, 2023$에 대하여 $A_n = \{x+2 \,|\, x \in A_{n-1}\} \cup \left\{ \dfrac{x(x+1)}{2} \,\middle|\, x \in A_{n-1} \right\}$이다.

집합 A_{2023}의 원소의 개수를 구하여라.

3. 주어진 양의 정수 $n\,(\geq 2)$에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 n차 정수계수 다항식 $P(x)$가 존재하는 가장 큰 양의 정수 A를 구하여라.

- $P(1), P(2), \ldots, P(A)$가 모두 A의 배수이다.
- $P(0) = 0$이고 $P(x)$의 1차 항의 계수가 1이다. 즉, $P(x)$는 다음과 같은 꼴이다.

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + x \quad (c_n \neq 0)$$

4. 오각형 $ABCDE$가 원 Ω에 내접한다. 점 F는 두 선분 AD와 CE의 교점이고, 점 $P\,(\neq E, F)$는 선분 EF 위의 점이다. 삼각형 AFP의 외접원이 원 Ω, 선분 AC와 각각 점 $Q\,(\neq A)$, $R\,(\neq A)$에서 만난다. 두 선분 AD와 BQ가 점 S에서 만나고, 삼각형 DES의 외접원이 직선 BQ, BD와 각각 점 $T\,(\neq S)$, $U\,(\neq D)$에서 만난다. 네 점 F, P, T, S가 한 원 위에 있으면 네 점 P, T, R, U도 한 원 위에 있음을 보여라.

제 37 회 고등부 2차시험
한국수학올림피아드
KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2023년 11월 4일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 양의 정수 n에 대하여 $f(n)$을 n 이하의 양의 정수 중 n과 서로소인 것의 개수, $g(n)$을 n의 양의 약수들의 합이라 하자. 예를 들어, $n = 10$이면 n과 서로소인 10 이하의 양의 정수는 $1, 3, 7, 9$이므로 $f(10) = 4$이고 10의 양의 약수는 $1, 2, 5, 10$이므로 $g(n) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$이다. 다음 등식을 만족하는 양의 정수 n을 모두 구하여라.

$$f(n) + g(n) - 2n = 8$$

6. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$)의 외접원을 Ω, 외심을 O라 하자. 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D, 원 Ω와 다시 만나는 점을 $E\,(\neq A)$라 하자. 점 D를 지나고 AB에 수직인 직선이 직선 AC와 만나는 점을 P, 점 D를 지나고 AC에 수직인 직선이 직선 AB와 만나는 점을 Q라 하자. 점 A와 E에서 원 Ω의 접선이 직선 BC와 만나는 점을 각각 X, Y라 하자. 네 점 X, Y, P, Q가 한 원 위에 있음을 보여라.

7. 양의 실수의 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족한다.

- $a_{n+1}b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$
- $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n b_n$
- $a_n \geq b_n$

부등식 $\dfrac{a_n}{b_n} > 2023^{2023}$ 을 만족하는 양의 정수 n이 존재함을 보여라.

8. 양의 정수 n에 대하여, n이 서로 다른 두 소수의 곱이고 n을 3으로 나눈 나머지가 2이면, n을 "특별한 수"라고 하자. 예를 들어, 50 이하의 양의 정수 중에 특별한 수는 14, 26, 35, 38뿐이다. 특별한 수로 구성된 임의의 유한집합 S에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 서로소인 두 집합 A, B가 존재함을 보여라.

- $A \cup B = S$
- $|n(A) - n(B)| \leq 1$
- 임의의 소수 p에 대하여, A의 원소 중 p의 배수의 개수와 B의 원소 중 p의 배수의 개수의 차이는 1 이하이다.

제 36 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2023년 3월 25일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$)의 변 AB 위에 점 $D\,(\neq A, B)$가 있고, 변 AC 위에 점 $E\,(\neq A, C)$가 있다. 점 P는 $\overline{PB} = \overline{PD}$, $\overline{PC} = \overline{PE}$를 만족하는 점이다. 삼각형 ABC의 외접원의 호 AC 중 점 B를 포함하지 않는 호 위에 점 $X\,(\neq A, C)$를 잡자. 삼각형 ADE의 외접원과 직선 XA가 점 $Y\,(\neq A)$에서 만날 때, $\overline{PX} = \overline{PY}$임을 보여라.

2. 함수 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$는 다음 조건을 만족한다.

> (조건) 각각의 양의 실수 x에 대하여 $(x + f(y))(y + f(x)) \leq 4$를 만족하는 양의 실수 y가 존재하며, 이러한 y의 개수는 유한하다.

임의의 양의 실수 x, y에 대하여 $x < y$이면 $f(x) > f(y)$임을 증명하여라. (단, $\mathbb{R}^+$는 양의 실수 전체의 집합)

3. 홀수인 소수 p가 주어져 있다. 양의 정수 n에 대하여 $A(n)$을 집합 $\{1, 2, \ldots, n\}$의 부분집합 중 원소의 합이 p의 배수인 것의 개수라고 하자. $2^{p-1} - 1$이 p^2의 배수가 아닐 때, 각각의 정수 k에 대하여 다음 조건을 만족하는 양의 정수 m이 무한히 많이 존재함을 증명하여라. (단, 공집합의 원소의 합은 0이다.)

> (조건) $\dfrac{A(m) - k}{p}$는 정수이다.

제 36 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2023년 3월 26일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n을 모두 구하여라.

(조건) $2^n - 1$은 7보다 큰 소인수를 갖지 않는다.

5. 주어진 양의 정수 n에 대하여 n개의 상자 $B_1, \ldots, B_n$이 있다. 다음과 같은 시행을 반복하여 상자에 공을 추가할 수 있다.

(시행) $1 \le i \le j \le n$을 만족하는 양의 정수 i, j를 선택하여 $i \le k \le j$를 만족하는 각 k에 대하여 상자 B_k에 공을 하나씩 추가한다.

양의 정수 $x_1, \ldots, x_n$에 대하여 $f(x_1, \ldots, x_n)$을 상자 B_i에 x_i개의 공이 들어있는 상태에서 시작하여 ($i = 1, \ldots, n$), 각 상자에 들어있는 공의 개수를 모두 3의 배수로 만들기 위해 필요한 시행의 횟수의 최솟값이라 하자. 이때 $f(x_1, \ldots, x_n)$이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 구하여라. (단, $x_1, \ldots, x_n$이 모두 3의 배수이면 $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$)

6. 양의 정수 $n \ge 3$과 실수 $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{i+3}) \le \frac{3n}{8} \sum_{i=1}^{n} \left((a_i - a_{i+1})^2 + (b_i - b_{i+1})^2 \right)$$

(단, $a_{n+1} = a_1$이고 $i = 1, 2, 3$에 대하여 $b_{n+i} = b_i$)

유형 나

제38회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 5월 18일 ; 제한시간 2시간 30분

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 72]

이등변삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$, $\overline{BC} = 6$이다. 점 D와 E는 선분 AC 위의 점으로 $\overline{AD} = 1$, $\overline{EC} = 2$이다. 삼각형 BDE의 넓이를 S라 할 때, $15S$의 값을 구하여라.

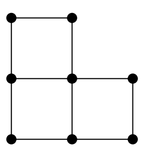
2. [정답. 405]

다음 식의 값을 구하여라.

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2023}\right)\left(1+\frac{1}{2024}\right)$$

3. [정답. 51]

다음과 같이 1×1 정사각형 3개를 붙여서 만든 도형이 있다. 이 도형의 8개의 점 중에서 3개를 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 개수를 구하여라.



4. [정답. 49]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하여라.

(i) $m < n$

(ii) $2m$ 이상 $2n$ 이하의 짝수의 합은 $2m$ 이상 $2n$ 이하의 홀수의 합보다 100 크다.

5. [정답. 40]

다음 조건을 만족하는 모든 양의 정수 n의 합을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(조건) $\dfrac{\sqrt{n}}{2} + \dfrac{30}{\sqrt{n}}$의 값이 정수이다.

6. [정답. 199]

다음 식을 만족하는 $\frac{1}{100}$ 이상 100 이하의 실수 x의 개수를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$x - \frac{1}{x} = [x] - \left[\frac{1}{x}\right]$$

7. [정답. 864]

직선 위에 네 개의 점 A, B, C, D가 순서대로 놓여 있고, $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{4} = \sqrt{5}$이다. 선분 AC를 지름으로 하는 원과 선분 BD를 지름으로 하는 원의 두 교점을 E, F라 하자. 사각형 $EAFD$의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하여라.

8. [정답. 294]

다음 두 조건을 모두 만족하는 네 자리 양의 정수 n의 개수를 구하여라.

(i) n의 각 자리의 수는 6 이하이다.

(ii) n은 3의 배수이지만, 6의 배수는 아니다.

9. [정답. 11]

1000 이하인 양의 정수 중에서 완전제곱수인 약수의 개수가 정확히 6인 것의 개수를 구하여라.

10. [정답. 16]

다음 조건을 만족하도록 정삼각형의 각 꼭짓점에 1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수를 적는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 세며, 같은 수를 여러 번 적을 수 있다.)

(조건) 정삼각형의 각 변의 양 끝점에 적힌 두 수의 곱은 짝수이다.

(뒷면에 계속)

11. [정답. 820]

정사각형 $ABCD$에서 변 AB 위의 점 P와 변 AD 위의 점 Q는 $\overline{AP} = \overline{AQ} = \frac{\overline{AB}}{5}$를 만족한다. 점 A에서 선분 PD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 APH의 넓이가 20일 때, 삼각형 HCQ의 넓이를 구하여라.

12. [정답. 25]

실수 x, y에 대하여 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$\frac{-x^2 - y^2 - 2xy + 30x + 30y + 75}{3x^2 - 12xy + 12y^2 + 12}$$

13. [정답. 982]

다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 개수를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수)

(**조건**) $n = \left[\frac{m^3}{2024}\right]$을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 m이 존재한다.

14. [정답. 996]

다음 두 조건을 모두 만족하는 0이 아닌 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$이 존재하는 1000 이하의 양의 정수 x의 개수를 구하여라.

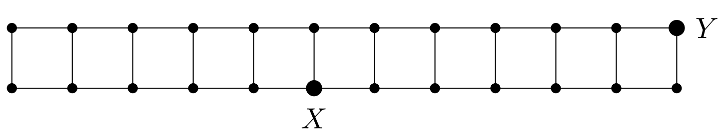
(i) $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = x$

(ii) 4 이상 20 이하의 양의 정수 n에 대하여

$$a_n = a_{n-3} + \frac{(-2)^n}{a_{n-1}a_{n-2}}$$

15. [정답. 224]

다음 그림에서 점 X에서 출발해서 선분을 따라 1칸씩 이동하면서 점 Y에 도착한다. 한 번 지나간 점은 다시 지나지 않을 때 X에서 Y로 이동하는 경우의 수를 구하여라. (단, 출발점 X는 지나간 것으로 간주한다.)



16. [정답. 300]

등변사다리꼴 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 60$, $\overline{BC} = \overline{DA} = 36$, $\overline{CD} = 108$이다. 선분 AB의 중점 M에 대하여 선분 AM 위의 점 P는 $\overline{AP} = 10$을 만족한다. 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E, 두 대각선 AC와 BD의 교점을 F라 하자. 점 X는 $\overline{MX} = \overline{ME}$인 선분 AF 위의 점일 때, $\overline{AX} \cdot \overline{AF}$의 값을 구하여라.

17. [정답. 22]

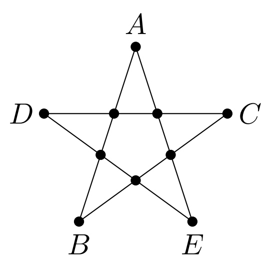
다음 조건을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 n의 개수를 구하여라.

(**조건**) 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz = 2n$의 정수해 (x, y, z)의 개수는 4의 배수가 아니다.

18. [정답. 14]

다음 그림과 같이 5개의 선분 AB, BC, CD, DE, EA와 이 5개 선분의 교점 10개로 구성된 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 10개의 교점 각각에 1 또는 2를 적는 방법의 수를 구하여라.

(**조건**) 각 선분 AB, BC, CD, DE, EA 위에 적힌 네 개의 수들의 합이 모두 같다.



19. [정답. 95]

다음 세 조건을 모두 만족하는 정수 $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$에 대하여 $a_5 - 2a_{40} + 3a_{60} - 4a_{95}$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $a_0 = a_{100} = 0$

(ii) 모든 $i = 0, 1, \ldots, 99$에 대하여 $|a_{i+1} - a_i| \leqslant 1$

(iii) $a_{10} = a_{90}$

20. [정답. 512]

각 C가 직각인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 36$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 호 BC 중 A를 포함하지 않는 호 위의 점 D가 $2\angle CAD = \angle BAD$를 만족한다. 선분 AD와 BC의 교점 E에 대하여 $\overline{AE} = 20$일 때, $(\overline{BD})^2$의 값을 구하여라.

(끝)

제 38 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2024년 11월 9일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 중심이 O인 원 위에 서로 다른 세 점 A, B, X가 있고 세 점 A, B, O는 한 직선 위에 있지 않다. 삼각형 ABO의 외접원을 Ω라 할 때, 선분 AX, BX는 원 Ω와 각각 점 $C(\neq A)$, $D(\neq B)$에서 만난다. 점 O가 삼각형 CXD의 수심임을 보여라.

2. 양의 정수의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $x_1 = 2$이고 각각의 양의 정수 n에 대하여 $x_{n+1} - x_n \in \{0, 3\}$이면 $\{x_n\}$을 '개구리 수열'이라 하자. 다음 조건을 만족하는 실수 d를 모두 구하여라.

> (조건) 두 개구리 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여, $a_n = 1000\, b_n$인 양의 정수 n이 존재하면 $a_m = d \cdot b_m$인 양의 정수 m이 존재한다.

3. 집합 S는 평면 상의 2024개의 점들로 구성되어 있고, 이 점들 중 어떤 세 점도 한 직선 위에 있지 않다. 집합 S에 속하는 두 점을 지나는 직선 ℓ이 다음 조건을 만족하면 ℓ을 '약한 균등 직선'이라 하자.

> (조건) 직선 ℓ이 평면을 두 개의 부분으로 나눌 때, 한 부분은 S의 원소 중 정확히 1010개의 점을 포함하고 다른 부분은 정확히 1012개를 포함한다. (단, 각 부분은 ℓ 위의 어떤 점도 포함하지 않는다고 하자.)

집합 S의 두 점을 지나는 직선들 중 약한 균등 직선의 개수를 $w(S)$라 하자. $w(S)$가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 최고차항의 계수가 1인 k차 정수 계수 다항식 $f(x)$가 존재하는 가장 작은 양의 정수 $k(\geq 2)$를 구하여라.

> (조건) 임의의 두 정수 m, n에 대하여, $f(m) - f(n)$이 31의 배수이면 $m - n$은 31의 배수이다.

고등부

제 38 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 11월 9일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 임의의 양의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} < M$$

을 만족하는 가장 작은 실수 M을 구하여라. (단, $a_{100} = a_1, a_{101} = a_2$)

6. 양의 정수 n에 대하여 $f(n)$을 n 이하의 양의 정수 중 n과 서로소인 것의 개수라 하자. 예를 들어, 10과 서로소인 10 이하의 양의 정수는 $1, 3, 7, 9$ 이므로 $f(10) = 4$이다. 양의 정수 n에 대하여 $g(n) = \left[\frac{2024}{n}\right]$라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수)

$$\sum_{n=1}^{2024} \left(1 - (-1)^{g(n)}\right) f(n)$$

7. 예각삼각형 ABC의 수심을 지나고 점 A를 지나지 않는 직선 ℓ이 직선 BC와 점 $P\,(\neq B, C)$에서 만나고, 점 A를 지나고 ℓ과 수직인 직선이 삼각형 ABC의 외접원과 점 $R\,(\neq A)$에서 만난다. 점 A, B에서 ℓ에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하고, 점 A'을 지나고 직선 BC와 수직인 직선을 ℓ_1, 점 B'을 지나고 직선 CA와 수직인 직선을 ℓ_2라 하자. 두 직선 ℓ_1과 ℓ_2의 교점을 ℓ에 대하여 대칭시킨 점을 Q라 할 때, $\angle PQR = 90°$임을 보여라.

8. 칠판에 10개의 수 $1, 2, \ldots, 10$ 이 적혀있고, 나현이는 다음과 같은 시행을 반복한다.

> (시행) 칠판에 적혀있는 10개의 수 중 서로 약수와 배수의 관계가 아닌 두 수를 골라 지우고 이 두 수의 최대공약수와 최소공배수를 칠판에 적는다.

칠판에 적혀있는 10개의 수 중 임의의 두 수가 약수와 배수의 관계를 이루면 이 시행은 그만둔다. 나현이는 위의 시행을 최대 몇 번 할 수 있겠는가?

유형 가

제 38 회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 5월 18일 ; 제한시간 2시간 30분

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 72]
예각삼각형 ABC에서 점 D, E는 각각 변 AB, BC 위의 점이다. 선분 AE와 CD의 교점을 F라 할 때, 네 점 B, E, F, D는 한 원 위에 있고, $\angle AFC = 126°$이다. $\angle BAE + \angle BCD = a°$일 때, a의 값을 구하여라.

2. [정답. 256]
다음 세 조건을 모두 만족하는 집합 S의 개수를 구하여라.

(i) $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\}$

(ii) $|S \cap \{1, 2\}| = 1$

(iii) S의 모든 원소의 합은 짝수이다.

3. [정답. 400]
다음 조건을 만족하는 1000 이하의 양의 정수 n의 개수를 구하여라.

(**조건**) 두 등식 $2x + y = n^2$과 $x + 3y = n$을 모두 만족하는 정수 x, y가 존재한다.

4. [정답. 125]
다음 두 등식을 모두 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x^2 + y^2$의 값을 구하여라.

$$x^2 + 10y = 50, \quad y^2 + 20x = -175$$

5. [정답. 27]
외접원이 Ω_1인 삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \overline{BC} = 8$이고 $\angle C = 120°$이다. 원 Ω_2는 점 A에서 원 Ω_1과 외접하고 직선 BC와 점 D에서 접한다. 직선 AB와 원 Ω_2의 교점을 $E(\neq A)$라 하고, 삼각형 BDE의 넓이를 S라 할 때, $\left(\frac{S}{12} - 5\right)^2$의 값을 구하여라.

6. [정답. 401]
다음 정수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$\left[\left(10 + 3\sqrt{11}\right)^{2024}\right]$$

7. [정답. 787]
다음 등식을 만족하는 12 이하의 양의 실수 x의 개수를 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$x^3 + 16x - 8x^2 = \left[x^3 + 16x\right] - \left[8x^2\right]$$

8. [정답. 51]
다음 조건을 만족하도록 정사각형의 각 꼭짓점에 1, 2, 3, 4, 5 중 하나의 수를 적는 경우의 수를 구하여라. (단, 회전하여 같은 것은 한 가지로 세며, 같은 수를 여러 번 적을 수 있다.)

(**조건**) 정사각형의 각 변의 양 끝점에 적힌 두 수의 곱은 짝수이다.

9. [정답. 90]
반지름이 $10\sqrt{7}$인 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 각 B가 둔각이고, $\overline{AD} = 50$이다. 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H, 직선 BD와 CH의 교점을 E라 하자. $\overline{EH} = \overline{CH}$일 때, $840\left(\frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}\right)^2$의 값을 구하여라.

10. [정답. 8]
다음 조건을 만족하는 실계수 다항식 $P(x)$에서 x^7의 계수를 a라 할 때, $12a$의 값을 구하여라.

(**조건**) 모든 양의 정수 n에 대하여

$$P(n) = 1^8 + 2^8 + \cdots + n^8$$

(뒷면에 계속)

11. [정답. 450]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$에 대하여 a_{100}의 값을 구하여라.

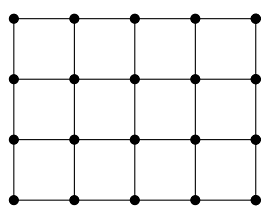
(i) $a_1 = \frac{9}{2}$, $a_2 = \frac{5}{3}$, $a_3 = \frac{4}{5}$

(ii) 4 이상 100 이하의 양의 정수 n에 대하여

$$a_n = a_{n-3} + \frac{3(n-1)(n-2)}{a_{n-1}a_{n-2}}$$

12. [정답. 93]

다음과 같이 1×1 정사각형 12개를 붙여서 만든 도형이 있다. 이 도형의 20개의 꼭짓점 중에서 2개 이상을 지나는 직선의 개수를 구하여라.



13. [정답. 32]

사각형 $ABCD$가 중심이 I인 내접원을 갖는다. $\overline{AI} = 8$, $\overline{BI} = 16$, $\overline{CI} = 12$, $\overline{DI} = 6$일 때, $18 \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$의 값을 구하여라.

14. [정답. 125]

복소수 $z(\neq 1)$은 $z^5 = 1$을 만족한다. 다항식

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

에 대하여 $p(z)p(z^2)p(z^3)p(z^4)$의 값을 구하여라.

15. [정답. 506]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2023 + \frac{2024}{x}$에 대하여

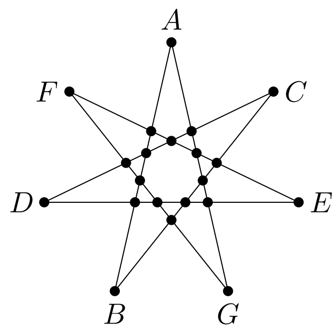
$$(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 }2024\text{개}})(x) = \frac{cx+d}{ax+b}$$

일 때, $\dfrac{d - 2024^2 a}{4(a-d)}$의 값을 구하여라. (단, a, b, c, d는 실수)

16. [정답. 932]

다음 그림과 같이 7개의 선분 AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA와 이 7개 선분의 교점 21개로 구성된 도형이 있다. 다음 조건을 만족하도록 21개의 교점 각각에 1 또는 2를 적는 방법의 수를 구하여라.

(조건) 각 선분 AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA 위에 적힌 여섯 개의 수들의 합이 모두 같다.



17. [정답. 936]

실수 $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$가 다음 두 조건을 모두 만족할 때, $[1000 - a_{2024}]$의 값을 구하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

(i) $a_1 = 1$

(ii) 모든 $n = 1, 2, \ldots, 2023$에 대하여 $a_n(a_{n+1} - a_n) = 1$

18. [정답. 440]

다음 식을 만족하는 15 이하의 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_{15})$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

$$|a_1^2 - a_2^2| + |a_2^2 - a_3^2| + \cdots + |a_{15}^2 - a_1^2| = 458$$

19. [정답. 625]

다음 조건을 만족하는 가장 작은 양의 정수 n을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(조건) $2024n$의 각 자리의 수는 0 또는 1이다.

20. [정답. 256]

예각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{CA} = 14$이다. 점 D, E는 각각 변 AB, AC 위의 점으로 선분 CD와 BE는 서로 수직이다. 직선 DE와 BC는 점 F에서 만나고 선분 CD와 BE는 점 G에서 만난다. 사각형 $AGCF$가 원 O에 내접하고, 직선 AB와 원 O의 교점을 $P(\neq A)$라 할 때, $(\overline{BP})^2$의 값을 구하여라.

제 38 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2024년 11월 9일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 다음 등식을 만족하는 서로 다른 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)를 모두 구하여라.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

2. 원 O 위에 서로 다른 99개의 점 $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$가 있다. 각각의 점 P_i에 대하여 P_i에서 시작하여 원을 따라 시계 방향으로 돌 때 P_i의 대척점까지 이동하는 동안 만나는 점 $P_j(\neq P_i)$의 개수를 n_i라 하자. 다음 부등식을 증명하여라.

$$n_1+n_2+\cdots+n_{99} \leq \frac{99 \cdot 98}{2}+49=4900$$

(단, 원 O에서 점 P_i의 대척점이란, P_i를 포함하는 지름의 다른 끝점을 의미하고, 이 점이 P_j일 경우 만나는 점에 포함된다.)

3. 예각삼각형 ABC에서 $\angle A > \angle C$이다. 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하고, 선분 AF 위의 점 $P(\neq F)$를 잡자. 각 ABC의 이등분선과 삼각형 PEF의 외접원 O가 만나는 두 점 중 B에서 가까운 점부터 L, R이라 하자. 원 O가 직선 DF, DR과 각각 점 $Q(\neq F, L)$, $S(\neq R)$에서 만나고, 직선 PS와 선분 BC가 점 T에서 만날 때, 세 점 T, Q, L이 한 직선 위에 있음을 보여라.

4. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 최댓값을 구하여라.

(조건) $\dfrac{a^n+b^n}{n!}$이 100 이하의 정수가 되는 양의 정수 a, b가 존재한다.

(단, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$)

중등부

제 38 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 11월 9일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 삼각형 ABC는 각 C가 직각인 직각삼각형이다. 점 X는 $\overline{CA} = \overline{AX}$를 만족하는 삼각형 ABC 내부의 점이다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D, 직선 DX와 삼각형 ABX의 외접원의 교점을 $Y(\neq X)$라 할 때, $\overline{AX} = \overline{AY}$임을 보여라.

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n과 소수 p의 순서쌍 (n, p)를 모두 구하여라.

(조건) $2n-1$은 $p-1$의 약수이고 p는 $4n^2+7$의 약수이다.

7. 양의 정수 $k(\leq 50)$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 $2k$개의 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_{2k})$의 개수를 A_k라 하자.

- $a_1, a_2, \ldots, a_{2k} \leq 2 \times 50$
- $2k-1$ 이하인 양의 홀수 i에 대하여 $a_i > a_{i+1}$ 이다.
- $2k-2$ 이하인 양의 짝수 i에 대하여 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

이때 $A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_{49}$임을 보여라.

8. 양의 정수에 대하여 정의되고 정수를 함숫값으로 갖는 함수 f가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $f(1) = 1,\ f(2) = -1$
- 각 양의 정수 n에 대하여, $f(n) + f(n+1) + f(n+2) = f\left(\left[\frac{n+2}{3}\right]\right)$

이때 $f(3) + f(6) + f(9) + \cdots + f(3(k-1)) + f(3k) = 5$를 만족하는 1000 이하의 양의 정수 k의 개수를 구하여라.(단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수)

제 37 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 3월 23일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 양의 홀수 a, b, c, d에 대하여, 이 중 어느 두 개를 골라도 서로소라고 하자. 양의 정수 n에 대하여

$$f(n) = \left[\frac{n}{a}\right] + \left[\frac{n}{b}\right] + \left[\frac{n}{c}\right] + \left[\frac{n}{d}\right]$$

이라 할 때, 다음 등식을 증명하여라. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수)

$$\sum_{n=1}^{abcd} (-1)^{f(n)} = 1$$

2. 양의 정수 $n\,(\geq 2)$에 대하여 $2n$개의 사탕이 있다. 갑은 이 $2n$개의 사탕 모두를 $4n$개의 상자 $B_1, B_2, \ldots, B_{4n}$에 나누어 넣는다. 을은 갑이 각 상자에 넣은 사탕의 개수를 확인한 후에, 다음 조건을 만족하도록 $4n$개의 상자 중 정확히 $2n$개의 상자 $B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_{2n}}$을 골라 그 안에 있는 사탕을 모두 가져간다.

(조건) 각 $i = 1, 2, \ldots, 2n$에 대하여 $k_i - k_{i-1}$은 1 또는 3이며, $k_{2n} = 4n$이다. (단, $k_0 = 0$)

갑은 을이 선택하지 않은 $2n$개의 상자에 들어있는 사탕을 모두 가져간다. 갑과 을이 각자 최대한 많은 사탕을 가져가기 위하여 모두 최선의 전략을 사용한다면, 갑은 몇 개의 사탕을 가져갈 수 있겠는가?

3. 다음 조건을 만족하는 가장 작은 양의 실수 $p\,(\leq 1)$을 구하여라.

(조건) 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$, $y_1, y_2, \ldots, y_{2024}$에 대하여

- $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2024} \leq 1$,
- $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{2024} \leq 1$,
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{2024} x_i = \sum_{i=1}^{2024} y_i = 2024p$ 이면

부등식 $\displaystyle\sum_{i=1}^{2024} x_i(y_{2025-i} - y_{2024-i}) \geq 1 - p$가 성립한다. (단, $y_0 = 0$)

제 37 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 3월 24일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하고, 선분 BA의 A쪽 연장선 위에 점 $D\,(\neq A)$를 잡자. 점 E, F는 원 O 위의 서로 다른 두 점으로 두 직선 DE, DF는 모두 원 O에 접하며 선분 EF는 변 CA와 점 $T\,(\neq C)$에서 만난다. 원 O의 호 BC 중 A를 포함하지 않는 호 위에 점 $P\,(\neq B, C)$를 잡고, 직선 DP와 원 O가 만나는 점을 $Q\,(\neq P)$라 하자. 직선 BQ와 DT가 Q가 아닌 점 X에서 만나며, 직선 PT와 원 O의 교점을 $Y\,(\neq P)$라 할 때, 세 점 C, X, Y가 일직선상에 있음을 보여라.

5. 양의 정수 $n\,(\geq 4)$에 대하여 $a_1, a_2, \ldots, a_n$은 n 이하의 서로 다른 양의 정수들이다. 다음 식이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}|$$

(단, $i = 1, 2, 3$에 대하여 $a_{n+i} = a_i$)

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 K가 존재함을 보여라.

(조건) 소수 p가 K보다 크면, $a^{p-1} - 1$이 p^2의 배수가 되는 p 이하의 양의 정수 a의 개수는 $\dfrac{p}{2^{2024}}$ 이하이다.

유형 가

제39회 중등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2025년 5월 17일 ; 제한시간 2시간 30분

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
E. 문제 1 ~ 4번은 각 4점, 문제 17 ~ 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. [정답. 4]

다음 조건을 만족하는 6 이하의 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

(**조건**) 세 정수 $a^2 - b^2$, $8(a-b)$, $4b$가 이등변삼각형의 세 변의 길이가 된다.

2. [정답. 78]

볼록사각형 $ABCD$의 네 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{CD} = 13$, $\overline{DA} = 4$이다. $\angle ABC = 90^\circ$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이를 구하여라.

3. [정답. 78]

100 이하의 양의 정수 a, b가 다음 등식을 만족할 때, 가능한 a 중 가장 큰 값을 구하여라.

$$a^2 - a = 13(b^2 - b)$$

4. [정답. 48]

다음 조건을 만족하도록 숫자 $1, 2, 3, 4, 5, 6$를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하여라.

(**조건**) 연속한 세 수의 합이 3의 배수이다.

5. [정답. 24]

식 $x^2 + y^2 = 1$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $-x^2 + 10xy + 23y^2$의 최댓값을 구하여라.

6. [정답. 254]

$N = 2025 \times 2023 \times 2021 \times \cdots \times 3 \times 1$이라 하자. 5^m이 N을 나누는 가장 큰 정수 m을 구하여라.

7. [정답. 728]

다음 조건을 만족하는 5 이하의 양의 정수 a, b, c, d, e의 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하여라.

(**조건**) $a + 1 \leqslant b + 2 \leqslant c + 3 \leqslant d + 4 \leqslant e + 5$

8. [정답. 512]

중심이 O인 원 ω 외부의 한 점 P에서 원 ω에 그은 두 접선이 원과 접하는 점을 각각 A, B라 하자. 점 B에서 직선 AO에 내린 수선의 발을 H라 하자. 직선 OP와 AB가 점 C에서 만나고, $\overline{OA} = 10$, $\overline{OC} = 6$이다. 삼각형 AHP의 넓이를 S라 할 때, $6S$의 값을 구하여라.

9. [정답. 32]

다음 두 조건을 모두 만족하는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하여라.

(i) $2b = a + c$ 이고, $2c = b + d$ 이다.

(ii) a, b, c, d 중 1 이상이고 5 이하인 것은 정확히 두 개이다.

10. [정답. 723]

세 자리 양의 정수 n의 일의 자릿수를 a, 십의 자릿수를 b, 백의 자릿수를 c라 하자. a, b, c가 모두 양의 정수이고, $n = (a-1)! + (b-1)! + (c-1)!$을 만족할 때, 가능한 n 중 가장 큰 값을 구하여라. (단, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$이고, $0! = 1$이다.)

(뒷면에 계속)

11. [정답. 34]

서로 다른 2 이상의 양의 정수 a, b, c, d, e, f가 $2025^4 = a^b \times c^d \times e^f$를 만족할 때, $a+b+c+d+e+f$의 최솟값을 구하여라.

12. [정답. 24]

삼각형 ABC의 내심을 I라 하자. I를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원이 변 BC와 두 점 X, Y에서 만난다. (변 BC상에 네 점 B, X, Y, C가 순서대로 위치한다.) $\overline{AB} = 30$, $\overline{BC} = 42$, $\overline{CA} = 36$일 때, $\overline{XY}$의 값을 구하여라.

13. [정답. 511]

서로 다른 5 이하의 양의 정수 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5에 대하여, 다음 식의 최댓값을 S라 하자. $60S$의 값을 구하여라.

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \frac{a_4}{a_5} + \frac{a_5}{a_1}$$

14. [정답. 51]

다음 두 조건을 모두 만족하는 양의 정수 x, y, z에 대하여, $x + y + z$의 최솟값을 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수)

(i) $y + z > x > y > z$

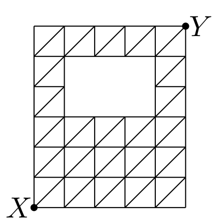
(ii) $\dfrac{7^x}{64} - \left[\dfrac{7^x}{64}\right] = \dfrac{7^y}{64} - \left[\dfrac{7^y}{64}\right] = \dfrac{7^z}{64} - \left[\dfrac{7^z}{64}\right]$

15. [정답. 96]

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하자. 점 G를 지나는 직선이 변 AC, BC와 각각 점 P, Q에서 만나고, 직선 AB와 점 R에서 만난다. $\overline{AR} > \overline{BR}$이고, $\overline{PG} = 20$, $\overline{GQ} = 24$일 때, $\overline{RQ}$의 값을 구하여라.

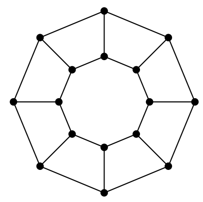
16. [정답. 106]

다음 그림에서 점 X에서 출발해서 선분을 따라 오른쪽으로 한 칸, 또는 위로 한 칸, 또는 오른쪽 위 방향의 대각선으로 한 칸 이동하는 것을 반복하여 점 Y에 도착한다. X에서 Y로 이동하는 경우의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.



17. [정답. 649]

다음 그림의 각 점에 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$ 중 하나를 적는데, 8개의 사각형 각각의 네 꼭짓점에 적힌 숫자의 합이 모두 4의 배수가 되도록 적는다. 이러한 방법의 수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.



18. [정답. 22]

다음 조건을 만족하는 8 이하인 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_8$의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$의 개수를 구하여라.

(조건) $\dfrac{a_1}{1} + \dfrac{a_2}{2} + \cdots + \dfrac{a_8}{8}$ 이 정수이다.

19. [정답. 640]

선분 AB 위에 점 P가 있다. (단, $\overline{PB} < \overline{PA}$이다.) 점 P에서 직선 AB에 수직인 직선이 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 점 Q에서 만난다. 선분 PQ의 Q 쪽 연장선 위에 점 R을 잡자. $\overline{PQ} = 16$, $\overline{QR} = 18$이고, 호 AQ의 중점을 M이라 할 때, 직선 MR이 이 반원에 접한다고 한다. $720 \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$의 값을 구하여라.

20. [정답. 192]

실수 $x_1, x_2, \ldots, x_6$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 6$

(ii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 18$

$x_1x_2x_3x_4x_5x_6$의 최댓값을 M이라 할 때, $12M$의 값을 구하여라.

유형 가

kmo 한국수학올림피아드

제39회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2025년 5월 17일 ; 제한시간 2시간 30분

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 ~ 4 번은 각 4 점, 문제 17 ~ 20 번은 각 6 점, 나머지는 각 5 점입니다.

1. [정답. 34]

삼각형 ABC의 변 BC위에 점 D, 변 AC위에 점 F가 있다. 직선 AD와 BF가 점 E에서 만난다. $\overline{BD} = 2\overline{DC}$이고, $\overline{AE} = \overline{ED}$일 때, $6\left(\frac{\overline{BE}}{\overline{EF}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}\right)$의 값을 구하여라.

2. [정답. 608]

다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수들의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) 각 i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$에 대하여, $a_i + a_{i+1}$은 짝수이다.

(ii) 각 i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$에 대하여, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$는 3의 배수이다.

(iii) 각 i $(1 \leqslant i \leqslant 8)$에 대하여, $a_i \leqslant 12$이다.

3. [정답. 13]

$1! + 2! + \cdots + 99! + 100!$을 100으로 나눈 나머지를 구하여라.

4. [정답. 18]

다음 조건을 만족하는 절대값이 10 이하인 정수 n의 개수를 구하여라.

(**조건**) 부등식 $8nx + 16 \leqslant 16x^2 + n^2 \leqslant 2n^2$을 만족하는 실수 x가 존재한다.

5. [정답. 500]

원 ω의 외부에 있는 한 점 A에서 원 ω에 그은 두 접선이 원과 접하는 점을 각각 점 P, Q라 하자. P를 지나고 직선 AQ와 평행한 직선이 원 ω와 만나는 점을 $R(\neq P)$이라 하고, 직선 AR이 원 ω와 만나는 점을 $S(\neq R)$라 하자. $\overline{AP} : \overline{PR} = 2 : 3$이고, 삼각형 ASQ의 넓이가 50일 때, 사각형 $APRQ$의 넓이를 구하여라.

6. [정답. 688]

양의 정수 $N = {}_{250}C_1 \times {}_{250}C_2 \times \cdots \times {}_{250}C_{248} \times {}_{250}C_{249}$에 대하여, 5^m이 N을 나누는 가장 큰 정수 m을 구하여라. (단, $r < n$인 양의 정수 n, r에 대하여, ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$)

7. [정답. 907]

집합 $A = \{3, 4, \ldots, 24\}$와 $B = \{1, 2, 3\}$에 대하여, 다음 조건을 만족하는 함수 $f : A \to B$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(**조건**) $x^2 + xy \in A$, $y^2 + xy \in A$인 임의의 양의 정수 x, y에 대하여, $f(x^2 + xy) + f(y^2 + xy) = 4$이다.

8. [정답. 28]

집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하여라.

(i) 모든 $x \in X$에 대하여 $g(x) = 2f(x) - x$를 만족하는 함수 $g : X \to X$가 존재한다.

(ii) $f(-2) + f(0) + f(2) = 0$

9. [정답. 400]

직사각형 $ABCD$의 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 선분 AC위의 점 P가 $\overline{AP} : \overline{PC} = 1 : 2$를 만족한다. 직선 BC와 PM의 교점을 Q라 하자. 삼각형 AMP의 넓이가 100일 때, 삼각형 PQN의 넓이를 구하여라.

10. [정답. 540]

다음 조건을 만족하는 36 이하인 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

(**조건**) $(a + b)^{36} - a^{36} - b^{36}$은 36의 배수이다.

(뒷면에 계속)

11. [정답. 27]

다음 두 조건을 모두 만족하는 0이 아닌 서로 다른 실수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)들에 대하여, $6(3x+2y+z)$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $2x + 2y + 2z = 3$

(ii) $\dfrac{1}{xz} + \dfrac{x-y}{y-z} = \dfrac{1}{yz} + \dfrac{y-z}{z-x} = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{z-x}{x-y}$

12. [정답. 224]

다음 조건을 만족하는 함수 $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$의 개수를 구하여라. (단, 양의 정수 k에 대하여 $f^{(k)}(x)$는 $f(x)$를 k번 합성한 함수, 즉 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 } k\text{개}})(x))$

(조건) 모든 $x \in \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여, $f^{(2025)}(x) = f^{(25)}(x)$이다.

13. [정답. 12]

양의 정수 p, q에 대하여, 반지름이 각각 $\sqrt{p}, 1, \sqrt{q}$인 서로 만나지 않는 세 원 O_1, O_2, O_3가 있다. 세 원 O_1, O_2, O_3 의 중심을 각각 점 A, B, C라 하면, A, B, C는 일직선상에 순서대로 놓여 있고, $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 6$이다. 다음 두 조건을 모두 만족하는 점 S가 존재하는 양의 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하여라.

(i) 점 S는 세 원 O_1, O_2, O_3 모두의 바깥에 위치한다.

(ii) 점 S에서 세 원 O_1, O_2, O_3에 그은 접선의 길이가 모두 같다.

14. [정답. 13]

다음 조건을 만족하는 2 이상의 양의 정수 n의 개수를 구하여라.

(조건) $p_1, p_2, \ldots, p_k$가 n의 서로 다른 모든 소인수라 할 때, $(p_1 + 4)(p_2 + 4) \cdots (p_k + 4)$가 n의 배수이다.

15. [정답. 128]

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

(조건) 모든 양의 정수 n에 대하여, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(a_n^2 - 50\right)$

이때, $a_8 = a_1$을 만족하는 실수 a_1의 개수를 구하여라.

(뒷면에 계속)

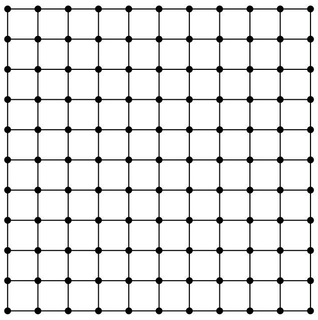
16. [정답. 776]

집합 $\{1,2,3,\ldots,10\}$의 부분집합 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5의 순서쌍 $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ 중에서, 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $\varnothing$은 공집합)

> **(조건)** 임의의 정수 i, j, k $(1 \leqslant i < j < k \leqslant 5)$에 대하여 $A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$이다.

17. [정답. 608]

다음과 같이 1×1 정사각형 100개를 붙여서 만든 도형이 있다. 이 도형의 121개의 점 중 세 점을 꼭짓점으로 가지는 삼각형들 중에서, 넓이가 10인 직각삼각형의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.



18. [정답. 50]

다음 조건을 만족하는 양의 정수 k를 모두 더한 값을 구하여라.

> **(조건)** $k^2 = a^{2b} + (2b)^4$을 만족하는 홀수인 양의 정수 a, b가 존재한다.

19. [정답. 228]

삼각형 ABC에서 $\angle A = 66^\circ$, $\angle B = \angle C = 57^\circ$이다. 변 AB의 점 B 쪽 연장선 위에 점 D가 있다. (즉, $\overline{AD} > \overline{AB}$이다.) 선분 CD의 중점을 M이라 하고, 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 직선 BM과 만나는 점을 P라 하며, 삼각형 ADC의 내심을 I라 하자. $\angle PDI = 90^\circ$일 때, $\angle BDC = x^\circ$이다. $6x$의 값을 구하여라.

20. [정답. 19]

실수 $x_1, x_2, \ldots, x_6$가 다음 두 식을 모두 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 4, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 11$$

$6x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + \sum_{i=1}^{6} x_i^3 - \sum_{i=1}^{6} x_i^4$의 최댓값을 M이라 할 때, $[M]$의 값을 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수)

제 38 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2025년 3월 29일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots$이 다음 조건을 만족한다.

(조건) 모든 양의 정수 n에 대하여, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{[\frac{n}{k}]}\right) a_k = 1$이다.

양의 정수 $m = 1001 \cdot 2^{2025}$에 대하여, a_m의 값을 구하여라.

2. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $f^{100}(x)$는 $f(x)$를 100번 합성한 함수, 즉 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 } 100\text{개}})(x)$이다.)

(조건) 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여,

$$f(x + f^{100}(y)) = x + y \qquad \text{또는} \qquad f(f^{100}(x) + y) = x + y$$

3. 예각삼각형 ABC가 $\overline{BC} > \overline{CA} > \overline{AB}$ 를 만족한다. 삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원을 ω라 하고, ω가 변 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 직선 AD와 BE는 점 P에서 만난다. 점 D에서 삼각형 DIP의 외접원에 접하는 직선을 ℓ_1, 점 E에서 삼각형 EIP의 외접원에 접하는 직선을 ℓ_2, 점 F에서 삼각형 FIP의 외접원에 접하는 직선을 ℓ_3라 할 때, 세 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3가 한 점에서 만남을 보여라.

제 38 회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2025년 3월 30일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 삼각형 ABC가 $\overline{CA} > \overline{AB}$ 를 만족한다. 삼각형 ABC의 내접원 ω가 변 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하고, 변 BC의 중점을 M이라 하자. 중심이 M이고 점 D를 지나는 원이 직선 DE, DF와 만나는 점을 각각 $P(\neq D), Q(\neq D)$라 하자. 직선 AP와 BC의 교점을 N, 직선 BP와 CA의 교점을 L이라 할 때, 세 직선 EQ, FP, NL이 한 점에서 만남을 보여라.

5. 집합 $S = \{1, 2, \ldots, 1000\}$의 부분집합 T에 대하여, $\widetilde{T} = \{1001 - t \mid t \in T\}$라 정의하자. 다음 세 조건을 모두 만족하는 집합 $\mathcal{P}$의 원소의 개수의 최댓값을 구하여라. (단, T가 공집합이면, $\widetilde{T}$는 공집합으로 정의한다.)

- $\mathcal{P}$의 모든 원소는 S의 부분집합이다.
- $\mathcal{P}$의 임의의 두 원소 A, B에 대하여, $A \cap B$는 공집합이 아니다.
- $\mathcal{P}$의 임의의 원소 A에 대하여, $\widetilde{A} \in \mathcal{P}$이다.

6. 양의 정수 a, b가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- 양의 정수 m에 대하여, $m^2 \mid ab$ 이면 $m = 1$이다.
- 식 $ax^2 + by^2 = z^2 + w^2$을 만족하며 $z^2 + w^2 > 0$인 정수 x, y, z, w가 존재한다.

임의의 정수 n에 대하여, 식 $ax^2 + by^2 + n = z^2 + w^2$을 만족하는 정수 x, y, z, w가 존재함을 보여라.