COMPENDIUM KJMO

Korean Junior Mathematical Olympiad

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección Vol. 94

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Atribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática   Problemas de Geometría Vol. 1   Vol. 2   Vol. 3
Introducción a la Geometría   Álgebra   Teoría de números Vol. 1   Vol. 2   Combinatoria
Probabilidad Trigonometría   Desigualdades   Números complejos   Calculus & Precalculus

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

Cálculo infinitesimal ESP CAT   Álgebra Lineal ESP CAT   Geometría Lineal ESP CAT
Números Complejos ESP CAT   Combinatoria y probabilidad ESP CAT   Estadística ESP CAT
Programación Lineal ESP CAT   Álgebra ESP CAT   Trigonometria ESP CAT
Geometria analítica ESP CAT   Funciones ESP CAT   Números (Preálgebra) ESP CAT
Proporcionalidad ESP CAT   Medidas geométricas ESP CAT   Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC   Cataluña CCSS   Valencia   Galicia   País Vasco   Baleares

Reválidas internacionales:

Portugal   Italia   Francia   Rumanía   Hungría   Polonia   Pearson Edexcel International A Level
China-Gaokao   China-Zhongkao   Corea-Suneung   Cambridge International A Level
Cambridge IGCSE   AQA GCSE   International Baccalaureate (IB)   Pearson Edexcel IGCSE

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP   ACM4   CFGS   PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España   Cataluña   Francia   USA   Reino Unido   Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam HMMT
España: OME   OMEFL   OMEEX   OMC   OMEA   OMEM   OMA   CDP
Europa: OMI   Arquimede   BMO   BalkanMO   JBMO   OPM
Internacional: IMO   IGO   SMT   INMO   CMO   EGMO   KMO   KJMO
AHSME: Book 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otros materiales:

Pizzazz! Book A B C D E Pre-Algebra Algebra   REOIM , Llibre3r , Excalibur

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.
Consulta el **catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net
¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates Aquí MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: https://www.youtube.com/c/GerardRomo
Visita mi **blog:** https://toomatesbloc.blogspot.com/

Versión de este documento: **29/12/2025**

Presentación.

La KJMO (Olimpiada Coreana Juvenil de Matemáticas) es la versión juvenil de la Olimpiada Coreana de Matemáticas, una competencia crucial para estudiantes que aspiran a ser admitidos en escuelas secundarias para superdotados y de ciencias, o institutos para superdotados en matemáticas. Se centra en evaluar el razonamiento matemático, la creatividad y las habilidades de resolución de problemas, y está dirigida principalmente a estudiantes de primaria superior a primer año de secundaria.
La prueba consta de 20 preguntas de respuesta cor ta , con 120 minutos de duración y cada pregunta vale 5 puntos.
Características de los tipos de problemas de la KJMO:
Tipo A (Básico/Avanzado): Estos problemas se pueden resolver dentro del currículo y evalúan la capacidad de comprender y aplicar con precisión conceptos básicos.
Tipo B (Aplicado/Creativo): Estos problemas requieren razonamiento lógico, búsqueda de reglas y pensamiento creativo basado en condiciones dadas. Suelen incluir conceptos avanzados como "sucesiones", "divisores/múltiplos", "teoría de números" y "geometría".

Fuente de estos documentos:

https://www.kms.or.kr/board/list.html?code=junior2&num=25428

Índice.

Cuando no se indica lo contrario, las respuestas correctas se presentan al lado del enunciado correspondiente.

Korean Junior Mathematical Olympiad

Translation by rkm0959, problems written by KMS.

Latex revision by Leon.

Time limit is 2 hours and 30 minutes for each day.

Each problem is worth 7 points.

KJMO 2005

Day 1

1. Find a irreducible fraction with denominator not greater than 2005 that is closest to $\frac{9}{25}$ but is not $\frac{9}{25}$.
2. For triangle ABC, P and Q satisfy $\angle BPA + \angle AQC = 90^\circ$. It is provided that the vertices of the triangle BAP and ACQ are ordered counterclockwise(or clockwise). Let the intersection of the circumcircles of the two triangles be N ($A \neq N$, however if A is the only intersection $A = N$), and the midpoint of segment BC be M. Show that the length of MN does not depend on P and Q.
3. For a positive integer K, define a sequence, $\{a_n\}$, as following: $a_1 = K$ and
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1, & \text{if } a_n \text{ is even} \\ \frac{a_n - 1}{2}, & \text{if } a_n \text{ is odd} \end{cases}$$
for all $n \geq 1$. Find the smallest value of K, which makes a_{2005} the first term equal to 0.
4. 11 students take a test. For any two question in a test, there are at least 6 students who solved exactly one of those two questions. Prove that there are no more than 12 questions in this test. Showing the equality case is not needed.

Day 2

5. In $\triangle ABC$, let the bisector of $\angle BAC$ hit the circumcircle at M. Let $P = CM \cap AB$. The line passing P and perpendicular to AM meets AC at X. The line passing P and perpendicular to AC meets AM at Y. The line passing P and perpendicular to BC meets MB at Z. Prove that X, Y, Z are collinear.
6. For two different prime numbers p, q, define $S_{p,q} = \{p, q, pq\}$. If two elements in $S_{p,q}$ are numbers in the form of $x^2 + 2005y^2$, $(x, y \in \mathbb{Z})$, prove that all three elements in $S_{p,q}$ are in such form.
7. If positive reals $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfy $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, prove that
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{i} x_j} < \sqrt{\frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$
8. A group of 6 students decided to make study groups and service activity groups according to the following principle:

   Each group must have exactly 3 members. For any pair of students, there are same number of study groups and service activity groups that both of the students are members.

   Supposing there are at least one group and no three students belong to the same study group and service activity group, prove that the minimum number of groups is 8.

KJMO 2006

Day 1

1. $a_1, a_2, \ldots, a_{2006}$ is a permutation of $1, 2, \ldots, 2006$. Prove that

$$\left|\prod_{i=1}^{2006}(a_i^2 - i)\right|$$

is a multiple of 3. (0 is counted as a multiple of 3)

2. Find all positive integers that can be written in the following way.

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Also, a, b, c are positive integers that are pairwise relatively prime.

3. In a circle O, there are six points, A, B, C, D, E, F in a counterclockwise order. $BD \perp CF$, and CF, BE, AC are concurrent. Let the perpendicular from B to AC be M, and the perpendicular from D to CE be N. Prove that $AE \parallel MN$.

4. In the coordinate plane, define $M = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$. A transformation S, which is defined on M, sends (a, b) to $(a + b, b)$. Transformation T, also defined on M, sends (a, b) to $(-b, a)$. Prove that for all $(a, b) \in M$, we can use S, T finitely to map it to $(g, 0)$.

Day 2

5. Find all positive integers that can be written in the following way.

$$\frac{m^2 + 20mn + n^2}{m^3 + n^3}$$

Also, m, n are relatively prime positive integers.

6. For all reals a, b, c, d, prove the following inequality:

$$\frac{a + b + c + d}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2)} < 1$$

7. A line through point P outside of circle O meets the said circle at B, C. ($PB < PC$) Let PO meet circle O at Q, D (with $PQ < PD$). Let the line passing Q and perpendicular to BC meet circle O at A. If $BD^2 = AD \cdot CP$, prove that PA is a tangent to O.

8. Define the set F as the following.

$$F = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{2006}) : \forall i = 1, 2, \ldots, 2006, a_i \in \{-1, 1\}\}$$

Prove that there exists a subset of F, called S which satisfies the following.

$$|S| = 2006$$

and for all $(a_1, a_2, \ldots, a_{2006}) \in F$ there exists $(b_1, b_2, \ldots, b_{2006}) \in S$, such that $\sum_{i=1}^{2006} a_i b_i = 0$.

KJMO 2007

Day 1

1. A sequence $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ where $a_i \in \{2,3\}$ for $i = 1, 2, \ldots, 2007$ and an integer sequence $x_1, x_2, \ldots, x_{2007}$ satisfies the following:
$$a_i x_i + x_{i+2} \equiv 0 \pmod 5$$
where the indices are taken modulo 2007. Prove that $x_1, x_2, \ldots, x_{2007}$ are all multiples of 5.

2. If n is a positive integer and a, b are relatively prime positive integers, calculate $(a+b, a^n + b^n)$.

3. Consider the string of length 6 composed of three characters a, b, c. For each string, if two as are next to each other, or two bs are next to each other, then replace aa by b, and replace bb by a. Also, if a and b are next to each other, or two cs are next to each other, remove all two of them (i.e. delete ab, ba, cc). Determine the number of strings that can be reduced to c, the string of length 1, by the reducing processes mentioned above.

4. Let P be a point inside $\triangle ABC$. Let the perpendicular bisectors of PA, PB, PC be ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Let $D = \ell_1 \cap \ell_2, E = \ell_2 \cap \ell_3, F = \ell_3 \cap \ell_1$. If A, B, C, D, E, F lie on a circle, prove that C, P, D are collinear.

Day 2

5. For all positive real numbers a, b, c, prove the folllowing inequality:
$$\frac{a}{c+5b} + \frac{b}{a+5c} + \frac{c}{b+5a} \geq \frac{1}{2}$$

6. Let $T = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Find the number of bijective functions $f : T \to T$ that satisfies the following for all $x \in T$:
$$f(f(x)) = x$$
$$|f(x) - x| \geq 2$$

7. Let the incircle of $\triangle ABC$ meet BC, CA, AB at J, K, L. Let $D(\neq B, J), E(\neq C, K), F(\neq A, L)$ be points on BJ, CK, AL. If the incenter of $\triangle ABC$ is the circumcenter of $\triangle DEF$ and $\angle BAC = \angle DEF$, prove that $\triangle ABC$ and $\triangle DEF$ are isosceles triangles.

8. Prime p is called *Prime of the Year* if there exists a positive integer n such that $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p^{2007}}$. Prove that there are infinite number of *Prime of the Year*.

KJMO 2008

Day 1

1. In a $\triangle XYZ$, points A, B lie on segment ZX, C, D lie on segment XY, E, F lie on segment YZ. A, B, C, D lie on a circle, and
$$\frac{AZ \cdot EY \cdot ZB \cdot YF}{EZ \cdot CY \cdot ZF \cdot YD} = 1$$
Let $L = ZX \cap DE, M = XY \cap AF, N = YZ \cap BC$. Prove that L, M, N are collinear.

2. For reals $x > 2, y > 3$, find the minimum of
$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-9}}$$

3. For all positive integers n, prove that there are integers x, y relatively prime to 5 such that $x^2 + y^2 = 5^n$.

4. Let $\mathbb{N}$ be the set of positive integers. If $A, B, C \neq \varnothing$, $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$ and $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$, we say that A, B, C are partitions of $\mathbb{N}$. Prove that there are no partitions of $\mathbb{N}$, A, B, C, that satisfies the following.
   (i) $\forall a \in A, b \in B$, we have $a + b + 1 \in C$
   (ii) $\forall b \in B, c \in C$, we have $b + c + 1 \in A$
   (iii) $\forall c \in C, a \in A$, we have $c + a + 1 \in B$

Day 2

5. Let there be a pentagon $ABCDE$ inscribed in a circle O. The tangent to O at E is parallel to AD. A point F lies on O and it is in the opposite side of A with respect to CD, and satisfies
$$AB \cdot BC \cdot DF = AE \cdot ED \cdot CF, \qquad \angle CFD = 2\angle BFE$$
Prove that the tangent to O at B, E and line AF concur at one point.

6. If $d_1, d_2, \ldots, d_k$ are all distinct positive divisors of n, we define $f_s(n) = d_1^s + d_2^s + \cdots + d_k^s$. For example, we have $f_1(3) = 1 + 3 = 4$, $f_2(4) = 1 + 2^2 + 4^2 = 21$. Prove that for all positive integers n,
$$n^3 f_1(n) - 2nf_9(n) + n^2 f_3(n)$$
is divisible by 8.

7. Find all pairs of functions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all reals $x, y \neq 0$,
$$f(x+y) = g\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \cdot (xy)^{2008}$$

8. There are 12 members in a club. The members created some *small groups*, which satisfy the following. The *small group* consists of 3 or 4 people. Also, for two arbitrary members, there exists exactly one *small group* that has both members. Prove that all members are in the same number of *small groups*.

KJMO 2009

Day 1

1. For primes a, b, c that satisfies the following, calculate abc. $b+8$ is a multiple of a, and b^2-1 is a multiple of a and c. Also, $b+c=a^2-1$.
2. In an acute triangle $\triangle ABC$, let A', B', C' be the reflection of A, B, C with respect to BC, CA, AB. Let $D = B'C \cap BC', E = CA' \cap C'A, F = A'B \cap AB'$. Prove that AD, BE, CF are concurrent.
3. For two arbitrary reals x, y which are larger than 0 and less than 1, prove that
$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{1-x} + \frac{(1-x-y)^2}{1-y} \geq \frac{1}{2}$$
4. There are n clubs composed of 4 students out of all 9 students. For two arbitrary clubs, there are no more than 2 students who are a member of both clubs. Prove that $n \leq 18$.
Translator's Note. We can prove $n \leq 12$, and we can prove that the bound is tight.

Day 2

5. Acute triangle $\triangle ABC$ satisfies $AB < AC$. Let the circumcircle of this triangle be O, and the midpoint of BC, CA, AB be D, E, F. Let P be the intersection of the circle with AB as its diameter and line DF, which is in the same side of C with respect to AB. Let Q be the intersection of the circle with AC as its diameter and the line DE, which is in the same side of B with respect to AC. Let $PQ \cap BC = R$, and let the line passing through R and perpendicular to BC meet AO at X. Prove that $AX = XR$.
6. If positive reals a, b, c, d satisfy $abcd = 1$, prove the following inequality.
$$1 < \frac{b}{ab+b+1} + \frac{c}{bc+c+1} + \frac{d}{cd+d+1} + \frac{a}{da+a+1} < 2$$
7. There are 3 students from Korea, China, and Japan, so total of 9 students are present. How many ways are there to make them sit down in a circular table, with equally spaced and equal chairs, such that the students from the same country do not sit next to each other? If array A can become array B by rotation, these two arrays are considered equal.
8. Prove that there exists positive integers x, y, z, u, v such that
$$x^2 + y^3 + z^5 + u^7 = v^{11}$$

KJMO 2010

Day 1

1. For all positive integers k, prove that $2^{2^k} + 2^{2^{k-1}} + 1$ has at least k prime divisors.
2. Let there be a $n \times n$ board. Write down 0 or 1 in all n^2 squares. For $1 \le k \le n$, let A_k be the product of all numbers in the kth row. How many ways are there to write down the numbers so that $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ is even?
3. In an acute triangle $\triangle ABC$, let there be point D on segment AC, E on segment AB such that $\angle ADE = \angle ABC$. Let the bisector of $\angle A$ hit BC at K. Let the foot of the perpendicular from K to DE be P, and the foot of the perpendicular from A to DE be L. Let Q be the midpoint of AL. If the incenter of $\triangle ABC$ lies on the circumcircle of $\triangle ADE$, prove that P, Q and the incenter of $\triangle ADE$ are collinear.
4. Let there be a sequence a_n such that $a_1 = 2, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0$, and for $n \ge 1$, a_{n+4} is the remainder when $a_n + 2a_{n+1} + 3a_{n+2} + 4a_{n+3}$ is divided by 9. Prove that there are no positive integer k such that $a_k = 0, a_{k+1} = 1, a_{k+2} = 0, a_{k+3} = 2$.

Day 2

5. If reals x, y, z satisfies $\tan x + \tan y + \tan z = 2$ and $0 < x, y, z < \frac{\pi}{2}$, prove that
$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z < 1$$
6. For a positive integer n and an odd prime p, we know that $n^2 - n$ is not a multiple of p. Define a sequence a_n such that
$$a_1 = pn + 1, a_{k+1} = n \cdot a_k + 1$$
Prove that a_{p-1} is not a prime number.
7. Let $ABCD$ be a cyclic convex quadrilateral. Let E be the intersection of lines AB, CD. P is the intersection of line passing B and perpendicular to AC, and line passing C and perpendicular to BD. Q is the intersection of line passing D and perpendicular to AC, and line passing A and perpendicular to BD. Prove that three points E, P, Q are collinear.
8. In a rectangle with vertices $(0,0), (0,2), (n,0), (n,2)$, ($n$ is a positive integer) find the number of longest paths starting from $(0,0)$ and arriving at $(n,2)$ which satisfies the following. At each movement, you can move right, up, left, down by 1. You cannot visit a point you visited before. You cannot move outside the rectangle.

KJMO 2011

Day 1

1. Reals a, b, c $(a, b, c \neq 1)$ satisfies $abc = 1$ and

$$a^2 + b^2 + c^2 - (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}) = 8(a + b + c) - 8(ab + bc + ca)$$

   Find all possible values of

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1}$$

2. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral inscribed in circle O. Let the tangent to O at A meet BC at S, and the tangent to O at B meet CD at T. Circle with S as its center and passing A meets BC at E, and AE meets O again at $F(\neq A)$. The circle with T as its center and passing B meets CD at K. Let $P = BK \cap AC$. Prove that P, F, D are collinear if and only if $AB = AP$.

3. Let x, y be positive integers such that $\gcd(x, y) = 1$ and $x + 3y^2$ is a perfect square. Prove that $x^2 + 9y^4$ can't be a perfect square.

4. For a positive integer n, $(n \geq 2)$, find the number of sets with $2n + 1$ points $P_0, P_1, \ldots, P_{2n}$ in the coordinate plane satisfying the following as its elements.

$$P_0 = (0, 0), \qquad P_{2n} = (n, n)$$

   For all $i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$, line P_iP_{i+1} is parallel to x-axis or y-axis and its length is 1.

   Out of $2n$ lines $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{2n-1}P_{2n}$, there are exactly 4 lines that are enclosed in the domain $y \leq x$.

Day 2

5. In triangle ABC, $(AB \neq AC)$, let the orthocenter be H, circumcenter be O, and the midpoint of BC be M. Let $HM \cap AO = D$. Let P, Q, R, S be the midpoints of AB, CD, AC, BD. Let $X = PQ \cap RS$. Find AH/OX.

6. For a positive integer n, define the set S_n as

$$S_n = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N}, \mathrm{lcm}[a, b] = n\}$$

   Let $f(n)$ be the sum of $\phi(a)\phi(b)$ for all $(a, b) \in S_n$. If a prime p relatively prime to n is a divisor of $f(n)$, prove that there exists a prime $q|n$ such that $p|q^2 - 1$.

7. If reals $x_1, x_2, \ldots, x_{2011}$ satisfy $0 \leq x_i \leq 1$ for all $i = 1, 2, \ldots, 2011$, find the maximum of

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{2011}^3 - (x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \cdots + x_{2011}x_1x_2)$$

8. There are n students each having r positive integers. Their nr positive integers are all different. Prove that we can divide the students into k classes satisfying the following conditions.

   (a) $k \leq 4r$

   (b) If a student A has the number m, then the student B in the same class can't have a number ℓ such that

$$(m-1)! < \ell < (m+1)! + 1$$

KJMO 2012

Day 1

1. If positive reals a, b, c satisfy $ab + bc + ca = 1$, prove that
$$\frac{a+b}{\sqrt{ab(1-ab)}} + \frac{b+c}{\sqrt{bc(1-bc)}} + \frac{c+a}{\sqrt{ca(1-ca)}} \le \frac{\sqrt{2}}{abc}$$

2. A pentagon $ABCDE$ is inscribed in a circle O, and satisfies $\angle A = 90^\circ$, $AB = CD$. Let F be a point on segment AE. Let BF hit O again at $J(\neq B)$, $CE \cap DJ = K$, $BD \cap FK = L$. Prove that B, L, E, F are cyclic.
Translator's Note. Condition $\angle A = 90^\circ$ is not needed for this problem.

3. Find all positive integers ℓ, m, n such that $5^\ell 43^m + 1 = n^3$.

4. There are n students $A_1, A_2, \ldots, A_n$ and some of them shaked hands with each other. (A_i and A_j can shake hands more than one time.) Let the student A_i shaked hands d_i times. Suppose $d_1 + d_2 + \cdots + d_n > 0$. Prove that there exist $1 \le i < j \le n$ satisfying the following conditions:

   (a) Two students A_i and A_j shaked hands each other.

   (b) $\frac{(d_1+d_2+\cdots+d_n)^2}{n^2} \le d_i d_j$

Day 2

5. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral inscirbed in a circle O ($AB > AD$), and let E be a point on segment AB such that $AE = AD$. Let $AC \cap DE = F$, and $DE \cap O = K(\neq D)$. The tangent to the circle passing through C, F, E at E hits AK at L. Prove that $AL = AD$ if and only if $\angle KCE = \angle ALE$.

6. $p > 3$ is a prime number such that $p | 2^{p-1} - 1$ and $p \not| 2^x - 1$ for $x = 1, 2, \cdots, p-2$. Let $p = 2k + 3$. Now we define sequence $\{a_n\}$ as
$$a_i = a_{i+k} = 2^i (1 \le i \le k), \qquad a_{j+2k} = a_j a_{j+k} \ (j \ge 1)$$
Prove that there exist $2k$ consecutive terms of sequence $a_{x+1}, a_{x+2}, \ldots, a_{x+2k}$ such that for all $1 \le i < j \le 2k$, $a_{x+i} \not\equiv a_{x+j} \pmod{p}$.

7. If all x_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) are positive reals, and $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, find the maximum of
$$\frac{(\sqrt{s_1 x_1} + \sqrt{s_2 x_2} + \sqrt{s_3 x_3} + \sqrt{s_4 x_4} + \sqrt{s_5 x_5})^2}{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5}$$
($s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$)

8. Let there be n students, numbered 1 through n. Let there be n cards with numbers 1 through n written on them. Each student picks a card from the stack, and two students are called a pair if they pick each other's number. Let the probability that there are no pairs be p_n. Prove that $p_n - p_{n-1}$ is 0 is n is odd, and prove that
$$p_n - p_{n-1} = \frac{1}{(-2)^k k^{1-k}}$$
if $n = 2k$.

KJMO 2013

Day 1

1. Compare the size of the following three numbers.
$$\sqrt[3]{\frac{25}{3}}, \qquad \sqrt[3]{\frac{1148}{135}}, \qquad \frac{\sqrt[3]{25}}{3} + \sqrt[3]{\frac{6}{5}}$$

2. A pentagon $ABCDE$ is inscribed in a circle O, and satisfies $AB = BC, AE = DE$. The circle that is tangent to DE at E and passing A hits EC at F and BF at $G(\neq F)$. Let $DG \cap O = H(\neq D)$. Prove that the tangent to O at E is perpendicular to HA.

3. $\{a_n\}$ is a positive integer sequence such that $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ (for all $i \geq 1$). For positive integer n, define $\{b_n\}$ as
$$b_n = \frac{1}{a_{2n+1}} \sum_{i=1}^{4n-2} a_i$$
Prove that b_n is positive integer.

4. Prove that there exists a prime number p such that the minimum positive integer n such that $p | 2^n - 1$ is 3^{2013}.

Day 2

5. In an acute triangle $\triangle ABC$, $\angle A > \angle B$. Let the midpoint of AB be D, and let the foot of the perpendiculat from A to BC be E, and B from CA be F. Let the circumcenter of $\triangle DEF$ be O. A point J on segment BE satisfies $\angle ODC = \angle EAJ$. Prove that $AJ \cap DC$ lies on the circumcircle of $\triangle BDE$.

6. Find all functions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfying
$$f(mn) = \operatorname{lcm}(m, n) \cdot \gcd(f(m), f(n))$$
for all positive integer m, n.

7. A strictly increasing function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfies $f(f(n)) = 2n + 2$. Calculate $f(2013)$.

8. Drawing all diagonals in a regular 2013-gon, the regular 2013-gon is divided into non-overlapping polygons. Prove that there exist exactly one 2013-gon out of all such polygons.

KJMO 2014

Day 1

1. Let the incenter of $\triangle ABC$ be I. Let $AI \cap BC$ be D. The line passing through D and the incenter of $\triangle ABD$ hits BI at E, and hits the circumcircle of $\triangle BCE$ at $P(\neq E)$. The line passing through D and the incenter of $\triangle ACD$ hits CI at F, and hits the circumcircle of $\triangle BCF$ at $Q(\neq F)$. Prove that the midpoint of BC lies on the circumcircle of $\triangle DPQ$.

2. Let there be $2n$ positive reals $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Let $s = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$, $t = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$, and $x_k = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n-1}$ (indices are taken modulo $2n$). Prove that

$$\frac{s}{x_1} + \frac{t}{x_2} + \frac{s}{x_3} + \frac{t}{x_4} + \cdots + \frac{s}{x_{2n-1}} + \frac{t}{x_{2n}} > \frac{2n^2}{n+1}$$

3. Let there be points $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{10}$. Draw the following arrows:

$$P_1 \to P_2$$
$$P_2 \to P_3, P_4$$
$$P_3 \to P_1, P_5$$
$$P_4 \to P_5, P_7$$
$$P_5 \to P_2, P_6, P_8$$
$$P_6 \to P_3, P_9$$
$$P_7 \to P_8$$
$$P_8 \to P_4, P_9$$
$$P_9 \to P_5, P_{10}$$
$$P_{10} \to P_6$$

   How many ways are there to move n times following the arrows, starting from P_1?

4. Positive integers p, q, r satisfy $\gcd(a, b, c) = 1$. Prove that there exists an integer a such that $\gcd(p, q + ar) = 1$.

Day 2

5. For positive integers x, y, find all pairs (x, y) such that $x^2y + x$ is a multiple of $xy^2 + 7$.

6. Let $p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$. For nonnegative reals x, y, z satisfying

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 27$$

   find the maximum value of $x^p + y^p + z^p$.

7. Let there be a parallelogram $ABCD$ $(AB < BC)$ The incircle of $\triangle ABC$ hits BC, AC at P, Q. The incircle of $\triangle ACD$ hits CD at R. Let $S = PQ \cap AD$, and let T be a point on segment BC such that $AB = BT$. Let $U = AR \cap CS$. Prove that AT, BU, PQ are concurrent.

8. Let there be n students and m clubs. The students joined the clubs so that the following is true.

   For all students x, you can choose some clubs such that x is the only student who joined all of the chosen clubs.

   Let the number of clubs each student joined be $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Prove that

$$a_1!(m-a_1)! + a_2!(m-a_2)! + \cdots + a_n!(m-a_n)! \leq m!$$

KJMO 2015

Day 1

1. In an acute, scalene triangle $\triangle ABC$, let O be the circumcenter. Let M be the midpoint of AC. Let the perpendicular from A to BC be D. Let the circumcircle of $\triangle OAM$ hit DM at $P(\neq M)$. Prove that B, O, P are collinear.

2. For a positive integer m, prove that the number of pairs of positive integers (x, y) which satisfies the following two conditions is even or 0.

   (i) $x^2 - 3y^2 + 2 = 16m$

   (ii) $2y \leq x - 1$

3. For all nonnegative integer i, there are seven cards with 2^i written on it. How many ways are there to select the cards so that the numbers add up to n?

4. Reals a, b, c, x, y satisfy $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 = 1$. Find the maximum value of

$$(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$$

Day 2

5. Let I be the incenter of an acute triangle $\triangle ABC$, and let the incircle be Γ. Let the circumcircle of $\triangle IBC$ hit Γ at D, E, where D is closer to B and E is closer to C. Let $\Gamma \cap BE = K(\neq E)$, $CD \cap BI = T$, and $CD \cap \Gamma = L(\neq D)$. Let the line passing T and perpendicular to BI meet Γ at P, where P is inside $\triangle IBC$. Prove that the tangent to Γ at P, KL, BI are concurrent.

6. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

   (i) For different reals x, y, $f(x) \neq f(y)$.

   (ii) For all reals x, y, $f(x + f(f(-y))) = f(x) + f(f(y))$

7. For a polynomial $f(x)$ with integer coefficients and degree no less than 1, prove that there are infinitely many primes p which satisfies the following.

   There exists an integer n such that $f(n) \neq 0$ and $|f(n)|$ is a multiple of p.

8. A positive integer n is given. If there exist sets $F_1, F_2, \ldots, F_m$ satisfying the following, prove that $m \leq n$. (For sets A, B, $|A|$ is the number of elements in A. $A - B$ is the set of elements that are in A but not B)

   (i) For all $1 \leq i \leq m$, $F_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

   (ii) $|F_1| \leq |F_2| \leq \ldots, \leq |F_m|$

   (iii) For all $1 \leq i < j \leq m$, $|F_i - F_j| = 1$.

유형 가

제 1 회

한국주니어수학올림피아드

2019년 8월 24일　　　　제한시간 3시간

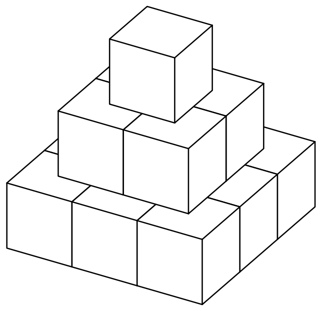
- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 25개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다. 예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
- 각각의 문항의 점수는 4점입니다.

1. 두 자리의 수 두 개를 곱하였더니 네 자리의 수가 되었는데 천의 자리수가 9이고 백의 자리수가 7이었다. 이 네 자리의 수의 일의 자리수는 무엇인가?

2. 두 개의 수 923과 1207의 최대공약수는 무엇인가?

3. 칠판에 $0, 1, 2, \ldots, 9, 10$ 이렇게 11개의 수가 적혀 있었다. 다음 날 학교에 와 보니 칠판의 수 중에서 하나가 지워져 있었는데, 처음 11개의 수의 평균과 다음 날의 10개의 수의 평균이 같았다. 지워진 수는 무엇인가?

4. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 14개를 그림과 같이 쌓은 입체의 겉넓이는 얼마인가?



5. 1이 적힌 카드가 한 장, 2가 적힌 카드가 한 장, $\ldots$, 10이 적힌 카드가 한 장, 이렇게 모두 10장의 카드가 있다. 이 중에서 3장의 카드를 뽑되, 뽑힌 3장의 카드에 적힌 수의 평균이 뽑힌 카드에 적힌 수 중에 있도록 카드를 뽑는 방법은 몇 가지인가?

6. 0에서 9까지의 숫자를 1개씩 적은 카드가 많이 있다. 이 카드를 이용하여 자연수를 만들어서 아래의 $1, 2, 3, \cdots, 9, 10, 11, 12, \cdots$ 와 같이 크기 순서대로 배열하였다. 어떤 수까지 만들었더니 사용된 카드가 모두 2019장이었다면 마지막으로 만든 수는 무엇일까?

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \cdots\ \boxed{9}\ \boxed{1}\boxed{0}\ \boxed{1}\boxed{1}\ \boxed{1}\boxed{2}\ \cdots$$

7. 시침과 분침이 있는 시계를 분해했다가 잘못 조립하여 시침이 분침의 속도로 돌아가고, 분침이 시침의 속도로 돌아가게 되었다. 12시 정각에 잘못 된 시계도 12시 정각을 가리키고 있었는데 다시 12시 정각이 될 때까지 잘못 된 시계가 올바른 시각을 나타내는 순간은 몇 번인가? (단, 처음과 마지막에 시침과 분침이 각각 12시를 가리킨 순간은 제외한다.)

8. 다음 표에 적힌 수를 모두 더하면 얼마인가?

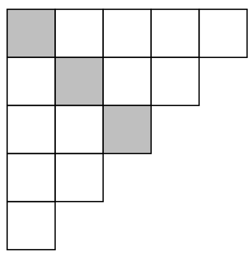
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\cdots$	$\frac{14}{1}$	$\frac{15}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{14}{2}$	$\frac{15}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\cdots$	$\frac{14}{3}$	$\frac{15}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{14}{4}$	$\frac{15}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$	$\frac{14}{5}$	$\frac{15}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\cdots$	$\frac{14}{6}$	$\frac{15}{6}$

(뒷면에 계속)

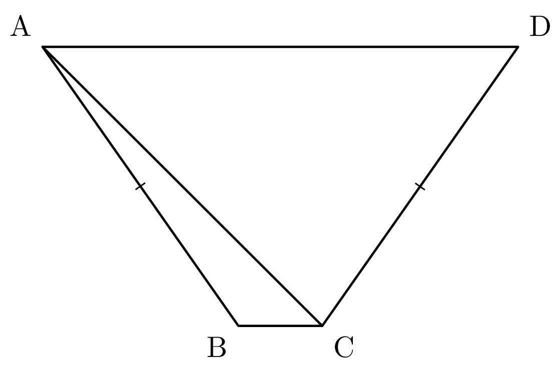
9. $\frac{3}{32}$보다 크고 $\frac{3}{31}$보다 작은 분수 가운데 분모가 가장 작은 분수를 $\frac{n}{m}$이라 할 때 m은 얼마인가? 여기에서 m, n은 서로소인 자연수이다.

10. 아래와 같이 생긴 도형의 각 빈칸에 1부터 15까지의 수를 다음 규칙을 따라서 적어 넣을 때, 회색 부분에 적힌 수의 합이 가장 큰 경우에 그 합은 얼마인가?

- 1부터 15까지의 수를 모두 사용한다.
- 왼쪽 칸의 수는 바로 오른쪽 칸의 수보다 크다.
- 아래 칸의 수는 바로 위 칸의 수보다 크다.



11. 그림의 사각형 $ABCD$에서 $\angle ACB = 45°$, $\angle BAC = 10°$, $\angle ADC = 55°$, $\overline{AB} = \overline{CD}$이고 $\overline{AC} = 10$이다. 사각형 $ABCD$의 넓이는?

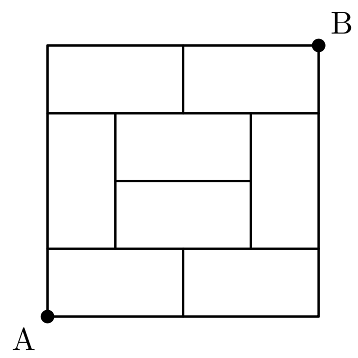


12. 어느 학교 학생들 200명이 다음과 같이 구성되어 있다.

- 여학생보다 남학생 수가 많다.
- 키가 160cm 이상인 학생은 남학생보다 여학생이 10명 이상 많다.
- 키가 160cm 미만인 남학생은 70명 이하다.

이 학교에서 키가 160cm 미만인 여학생의 수로 가능한 가장 큰 수는?

13. 다음 그림은 어느 지역의 도로 상황을 나타낸 것이다. 각각의 구역은 두 변의 길이가 10와 20인 직사각형 모양으로 생겼고 그 둘레를 따라 도로가 나 있다. A 지점에서 B 지점까지 가려고 하는데, 가장 거리가 길게 하려면 얼마나 걸어야 할까? (단, 한번 지나간 도로는 다시 지나지 않고, 도로의 폭은 무시한다.)



14. 등번호가 각각 1, 2, 3, 4, 5 인 남자 선수 다섯 명과 등번호가 각각 1, 2, 3, 4, 5 인 여자 선수 다섯 명이 있다. 남자 선수 한 명과 여자 선수 한 명씩 짝을 지을 때, 짝의 등번호의 차를 모두 더한 총합이 가장 클 때는 얼마인가? (단, 여기에서 등번호의 차는 음수가 아니다. 예를 들어서 3과 1의 차는 2이고 1과 3의 차도 2이다.)

15. 탁구실에는 금고가 4개 있는데, 이 금고에는 탁구채가 1개씩 들어 있다. 탁구부원 10명이 이 탁구실을 사용하는데, 항상 4명씩 와서 금고에 들어있는 탁구채를 사용하여 게임을 한다. 금고의 열쇠를 여러 개 만들어서 탁구부원 10명에게 나누어 주되, 10명 중에 어느 4명이 오더라도 4개의 금고를 모두 열어서 그 곳의 탁구채를 사용할 수 있도록 하고 싶다. 4개의 금고의 열쇠를 10개씩, 모두 40개의 열쇠를 만들어서 각 탁구부원에게 4개씩의 열쇠를 나누어 주면 되겠지만 곰곰 생각해 보니 더 적은 개수의 열쇠를 가지고도 가능함을 알았다. 가장 적은 개수는 얼마인가?

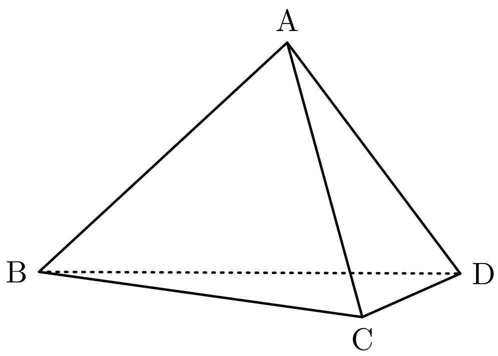
유형 가

제1회

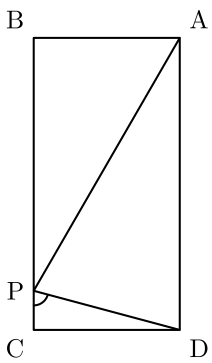
한국주니어수학올림피아드

16. 다음 사면체 $ABCD$의 여섯 개의 모서리에 다음 조건을 모두 만족하도록 1부터 6까지 여섯 개의 자연수를 하나씩 대응시킬 때, 꼭짓점 A에 이웃한 모서리에 대응된 수의 곱은 얼마인가?

    - 꼭짓점 A와 이웃한 모서리에 대응된 수를 모두 합하면 9이다.
    - 점 A를 제외한 꼭짓점에 이웃한 모서리에 대응된 수의 합은 모두 같다.



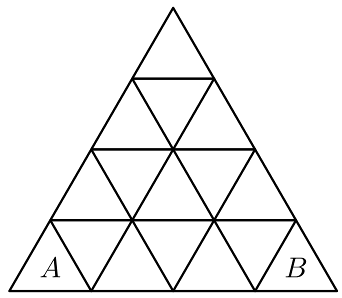
17. 다음 그림의 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 1$, $\overline{AD} = 2$이다. 점 P가 변 BC 위의 점으로 $\overline{AP} = 2$일 때, $\angle CPD$의 크기는 몇 도(°)인가?



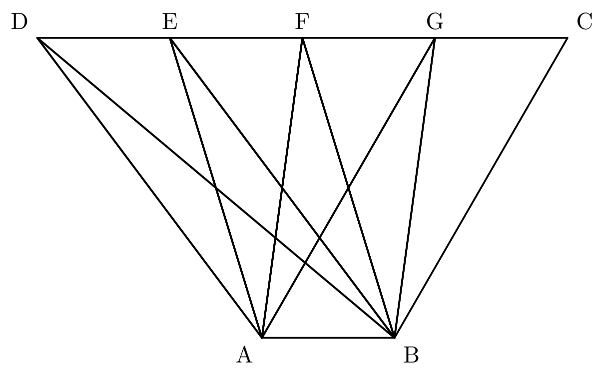
18. 다음 그림에서, 다음 규칙을 따라서 삼각형 A에서 출발하여 삼각형 B로 이동하려고 한다.

    - 변을 가로질러서 한 변을 공유한 삼각형으로만 이동한다.
    - 한 번 지나간 삼각형을 다시 지나갈 수 없다.

    가장 많은 개수의 변을 가로질러서 삼각형 B로 이동하려면 몇 개의 변을 가로질러야 하는가?



19. 그림의 사각형 $ABCD$에서 변 AB와 CD는 평행하다. $\overline{AB} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GC}$이고 $\angle BCD = 60°$, $\angle CDB = 40°$일 때, $\angle ADB + \angle AEB + \angle AFB + \angle AGB$는 몇 도(°)인가?



20. 세 사람이 사탕을 나누어 가졌는데, 첫 번째 사람이 전체 사탕의 $\frac{1}{a}$을 가지고, 두 번째 사람이 전체 사탕의 $\frac{1}{b}$을 가지고, 마지막 사람이 전체 사탕의 $\frac{1}{c}$을 가졌더니, 세 사람이 가진 사탕의 개수가 각각 소수이었고 남은 사탕의 개수는 1개이었다. 나누어 가지기 전에 있었던 사탕의 총 개수로 가능한 가장 큰 수는 무엇일까? 여기에서 a, b, c는 각각 자연수이다.

(뒷면에 계속)

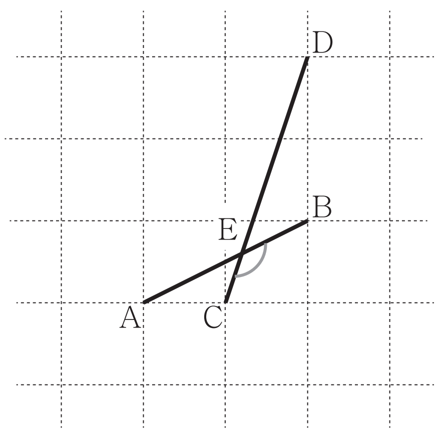
제1회

한국주니어수학올림피아드

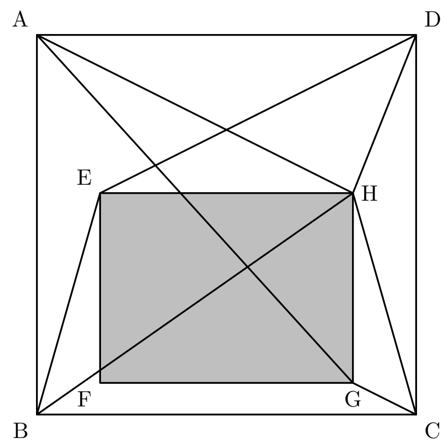
21. 몇 개의 주머니에 구슬이 들어 있는데, 각각의 주머니에 들어 있는 구슬의 개수는 모두 같을 뿐만 아니라 주머니의 개수와도 같다. 주머니가 조금 작은 듯해서 똑같은 주머니 5개를 더 가져다가 구슬을 나누어 담았는데, 각각의 주머니에 들어 있는 구슬의 개수가 모두 같았다. 처음에 있었던 주머니의 개수는?

22. 똑같은 크기의 정육면체를 모아서 속이 꽉 차 있는 큰 정육면체를 만든 다음에 큰 정육면체의 여섯 개의 면 중에서 몇 개의 면을 골라서 색칠을 하였다. 이제 큰 정육면체를 다시 처음의 작은 정육면체들로 나눈 다음에 살펴보았더니, 아무 칠도 되어 있지 않은 작은 정육면체의 개수는 24개이었다. 맨 처음에 작은 정육면체는 모두 몇 개 있었겠는가?

23. 다음 그림과 같이 가로 줄의 간격과 세로 줄의 간격이 똑같고 수직하게 만나는 모눈종이에 그린 두 선분 AB와 CD가 점 E에서 만날 때, $\angle BEC$의 크기는 몇 도($^\circ$)인가? (단, A, B, C, D는 모눈종이의 가로 줄과 세로 줄이 만나는 점이다.)



24. 다음 그림처럼 넓이가 144인 정사각형 $ABCD$의 내부에 직사각형 $EFGH$가 놓여있다. 변 EF는 변 AB와 평행하고 변 EH는 변 AD와 평행하다. 사각형 $AGCH$의 넓이와 사각형 $BHDE$의 넓이가 각각 정사각형 $ABCD$의 넓이의 $\frac{1}{4}$배, $\frac{1}{3}$배일 때, 직사각형 $EFGH$의 넓이는?



25. 내각의 크기가 모두 같고 6개의 변의 길이가 각각 $1, 2, 3, 4, 5, 6$인 육각형 중 가장 넓은 것의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이의 몇 배인가?

유형 나

제 1 회

한국주니어수학올림피아드

2019년 8월 24일 제한시간 3시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 25개의 **단답형** 문항으로 이단어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다. 예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입하여야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.
- 각각의 문항의 점수는 4점입니다.

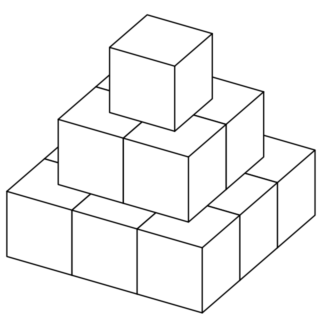
1. 두 자리의 수 두 개를 곱하였더니 네 자리의 수가 되었는데 천의 자리수가 9이고 백의 자리수가 7이었다. 이 네 자리의 수의 일의 자리수는 무엇인가?

2. 두 개의 수 923과 1207의 최대공약수는 무엇인가?

3. 칠판에 $0, 1, 2, \ldots, 9, 10$ 이렇게 11개의 수가 적혀 있었다. 다음 날 학교에 와 보니 칠판의 수 중에서 하나가 지워져 있었는데, 처음 11개의 수의 평균과 다음 날의 10개의 수의 평균이 같았다. 지워진 수는 무엇인가?

4. 1이 적힌 카드가 한 장, 2가 적힌 카드가 한 장, $\ldots$, 10이 적힌 카드가 한 장, 이렇게 모두 10장의 카드가 있다. 이 중에서 3장의 카드를 뽑되, 뽑힌 3장의 카드에 적힌 수의 평균이 뽑힌 카드에 적힌 수 중에 있도록 카드를 뽑는 방법은 몇 가지인가?

5. 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 14개를 그림과 같이 쌓은 입체의 겉넓이는 얼마인가?



6. 시침과 분침이 있는 시계를 분해했다가 잘못 조립하여 시침이 분침의 속도로 돌아가고, 분침이 시침의 속도로 돌아가게 되었다. 12시 정각에 잘못 된 시계도 12시 정각을 가리키고 있었는데 다시 12시 정각이 될 때까지 잘못 된 시계가 올바른 시각을 나타내는 순간은 몇 번인가? (단, 처음과 마지막에 시침과 분침이 각각 12시를 가리킨 순간은 제외한다.)

7. 다음 표에 적힌 수를 모두 더하면 얼마인가?

$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\cdots$	$\frac{14}{1}$	$\frac{15}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{14}{2}$	$\frac{15}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\cdots$	$\frac{14}{3}$	$\frac{15}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	$\frac{14}{4}$	$\frac{15}{4}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$	$\frac{14}{5}$	$\frac{15}{5}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\cdots$	$\frac{14}{6}$	$\frac{15}{6}$

8. 0에서 9까지의 숫자를 1개씩 적은 카드가 많이 있다. 이 카드를 이용하여 자연수를 만들어서 아래의 $1, 2, 3, \cdots, 9, 10, 11, 12, \cdots$ 와 같이 크기 순서대로 배열하였다. 어떤 수까지 만들었더니 사용된 카드가 모두 2019장이었다면 마지막으로 만든 수는 무엇일까?

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\cdots$ $\boxed{9}$ $\boxed{1}\boxed{0}$ $\boxed{1}\boxed{1}$ $\boxed{1}\boxed{2}$ $\cdots$

(뒷면에 계속)

9. $\frac{3}{32}$보다 크고 $\frac{3}{31}$보다 작은 분수 가운데 분모가 가장 작은 분수를 $\frac{n}{m}$이라 할 때 m은 얼마인가? 여기에서 m, n은 서로소인 자연수이다.

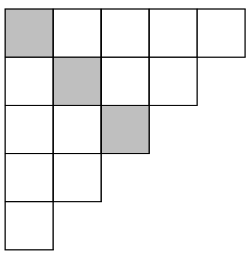
10. 어느 학교 학생들 200명이 다음과 같이 구성되어 있다.

- 여학생보다 남학생 수가 많다.
- 키가 160cm 이상인 학생은 남학생보다 여학생이 10명 이상 많다.
- 키가 160cm 미만인 남학생은 70명 이하다.

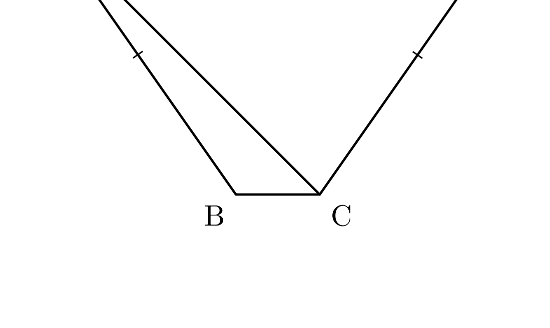
이 학교에서 키가 160cm 미만인 여학생의 수로 가능한 가장 큰 수는?

11. 아래와 같이 생긴 도형의 각 빈칸에 1부터 15까지의 수를 다음 규칙을 따라서 적어 넣을 때, 회색 부분에 적힌 수의 합이 가장 큰 경우에 그 합은 얼마인가?

- 1부터 15까지의 수를 모두 사용한다.
- 왼쪽 칸의 수는 바로 오른쪽 칸의 수보다 크다.
- 아래 칸의 수는 바로 위 칸의 수보다 크다.

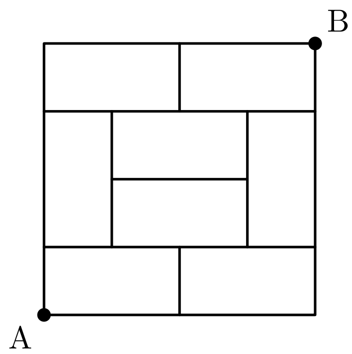


12. 그림의 사각형 $ABCD$에서 $\angle ACB = 45°$, $\angle BAC = 10°$, $\angle ADC = 55°$, $\overline{AB} = \overline{CD}$이고 $\overline{AC} = 10$이다. 사각형 $ABCD$의 넓이는?



13. 탁구실에는 금고가 4개 있는데, 이 금고에는 탁구채가 1개씩 들어 있다. 탁구부원 10명이 이 탁구실을 사용하는데, 항상 4명씩 와서 금고에 들어있는 탁구채를 사용하여 게임을 한다. 금고의 열쇠를 여러 개 만들어서 탁구부원 10명에게 나누어 주되, 10명 중에 어느 4명이 오더라도 4개의 금고를 모두 열어서 그 곳의 탁구채를 사용할 수 있도록 하고 싶다. 4개의 금고의 열쇠를 10개씩, 모두 40개의 열쇠를 만들어서 각 탁구부원에게 4개씩의 열쇠를 나누어 주면 되겠지만 곰곰 생각해 보니 더 적은 개수의 열쇠를 가지고도 가능함을 알았다. 가장 적은 개수는 얼마인가?

14. 다음 그림은 어느 지역의 도로 상황을 나타낸 것이다. 각각의 구역은 두 변의 길이가 10와 20인 직사각형 모양으로 생겼고 그 둘레를 따라 도로가 나 있다. A 지점에서 B 지점까지 가려고 하는데, 가장 거리가 길게 하려면 얼마나 걸어야 할까? (단, 한번 지나간 도로는 다시 지나지 않고, 도로의 폭은 무시한다.)

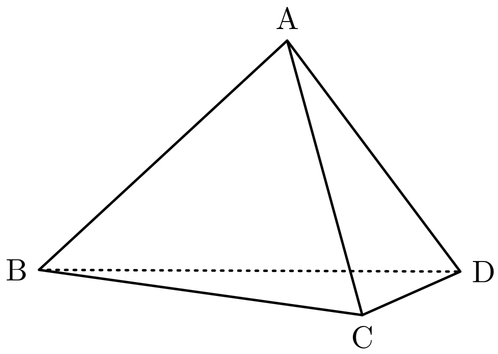


15. 등번호가 각각 1, 2, 3, 4, 5 인 남자 선수 다섯 명과 등번호가 각각 1, 2, 3, 4, 5 인 여자 선수 다섯 명이 있다. 남자 선수 한 명과 여자 선수 한 명씩 짝을 지을 때, 짝의 등번호의 차를 모두 더한 총합이 가장 클 때는 얼마인가? (단, 여기에서 등번호의 차는 음수가 아니다. 예를 들어서 3과 1의 차는 2이고 1과 3의 차도 2이다.)

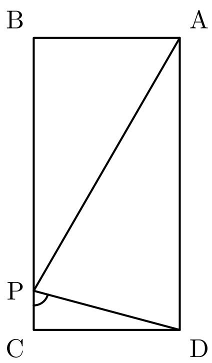
한국주니어수학올림피아드

16. 다음 사면체 $ABCD$의 여섯 개의 모서리에 다음 조건을 모두 만족하도록 1부터 6까지 여섯 개의 자연수를 하나씩 대응시킬 때, 꼭짓점 A에 이웃한 모서리에 대응된 수의 곱은 얼마인가?

- 꼭짓점 A와 이웃한 모서리에 대응된 수를 모두 합하면 9이다.
- 점 A를 제외한 꼭짓점에 이웃한 모서리에 대응된 수의 합은 모두 같다.



17. 다음 그림의 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB} = 1$, $\overline{AD} = 2$이다. 점 P가 변 BC 위의 점으로 $\overline{AP} = 2$일 때, $\angle CPD$의 크기는 몇 도(°)인가?

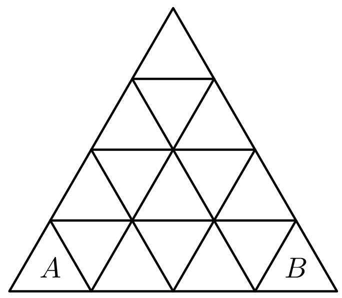


18. 세 사람이 사탕을 나누어 가졌는데, 첫 번째 사람이 전체 사탕의 $\frac{1}{a}$을 가지고, 두 번째 사람이 전체 사탕의 $\frac{1}{b}$을 가지고, 마지막 사람이 전체 사탕의 $\frac{1}{c}$을 가졌더니, 세 사람이 가진 사탕의 개수가 각각 소수이었고 남은 사탕의 개수는 1개이었다. 나누어 가지기 전에 있었던 사탕의 총 개수로 가능한 가장 큰 수는 무엇일까? 여기에서 a, b, c는 각각 자연수이다.

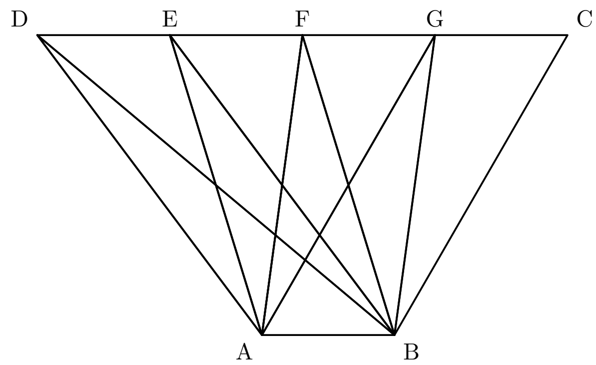
19. 다음 그림에서, 다음 규칙을 따라서 삼각형 A에서 출발하여 삼각형 B로 이동하려고 한다.

- 변을 가로질러서 한 변을 공유한 삼각형으로만 이동한다.
- 한 번 지나간 삼각형을 다시 지나갈 수 없다.

가장 많은 개수의 변을 가로질러서 삼각형 B로 이동하려면 몇 개의 변을 가로질러야 하는가?



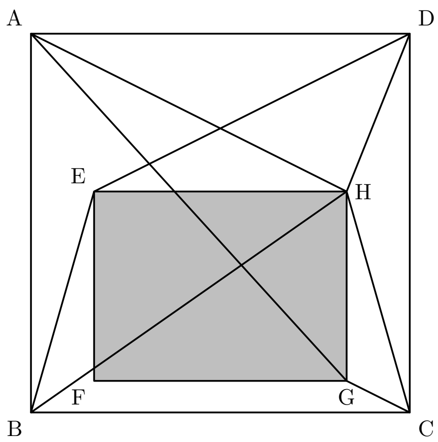
20. 그림의 사각형 $ABCD$에서 변 AB와 CD는 평행하다. $\overline{AB} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GC}$이고 $\angle BCD = 60°$, $\angle CDB = 40°$일 때, $\angle ADB + \angle AEB + \angle AFB + \angle AGB$는 몇 도(°)인가?



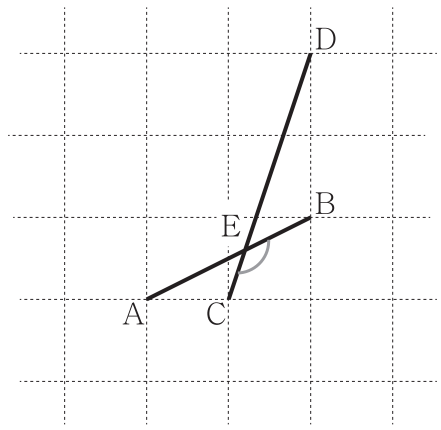
21. 똑같은 크기의 정육면체를 모아서 속이 꽉 차 있는 큰 정육면체를 만든 다음에 큰 정육면체의 여섯 개의 면 중에서 몇 개의 면을 골라서 색칠을 하였다. 이제 큰 정육면체를 다시 처음의 작은 정육면체들로 나눈 다음에 살펴보았더니, 아무 칠도 되어 있지 않은 작은 정육면체의 개수는 24개이었다. 맨 처음에 작은 정육면체는 모두 몇 개 있었겠는가?

22. 몇 개의 주머니에 구슬이 들어 있는데, 각각의 주머니에 들어 있는 구슬의 개수는 모두 같을 뿐만 아니라 주머니의 개수와도 같다. 주머니가 조금 작은 듯해서 똑같은 주머니 5개를 더 가져다가 구슬을 나누어 담았는데, 각각의 주머니에 들어 있는 구슬의 개수가 모두 같았다. 처음에 있었던 주머니의 개수는?

23. 다음 그림처럼 넓이가 144인 정사각형 $ABCD$의 내부에 직사각형 $EFGH$가 놓여있다. 변 EF는 변 AB와 평행하고 변 EH는 변 AD와 평행하다. 사각형 $AGCH$의 넓이와 사각형 $BHDE$의 넓이가 각각 정사각형 $ABCD$의 넓이의 $\frac{1}{4}$배, $\frac{1}{3}$배일 때, 직사각형 $EFGH$의 넓이는?



24. 다음 그림과 같이 가로 줄의 간격과 세로 줄의 간격이 똑같고 수직하게 만나는 모눈종이에 그린 두 선분 AB와 CD가 점 E에서 만날 때, $\angle BEC$의 크기는 몇 도(°)인가? (단, A, B, C, D는 모눈종이의 가로 줄과 세로 줄이 만나는 점이다.)



25. 내각의 크기가 모두 같고 6개의 변의 길이가 각각 $1, 2, 3, 4, 5, 6$인 육각형 중 가장 넓은 것의 넓이는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이의 몇 배인가?

2019 한국주니어수학올림피아드

가형

문제	정답	문제	정답	문제	정답
1	002	11	050	21	020
2	071	12	058	22	064
3	005	13	240	23	135
4	042	14	012	24	048
5	020	15	028	25	067
6	709	16	015		
7	010	17	075		
8	294	18	012		
9	021	19	080		
10	026	20	010		

나형

문제	정답	문제	정답	문제	정답
1	002	11	026	21	064
2	071	12	050	22	020
3	005	13	028	23	048
4	020	14	240	24	135
5	042	15	012	25	067
6	010	16	015		
7	294	17	075		
8	709	18	010		
9	021	19	012		
10	058	20	080		

1교시

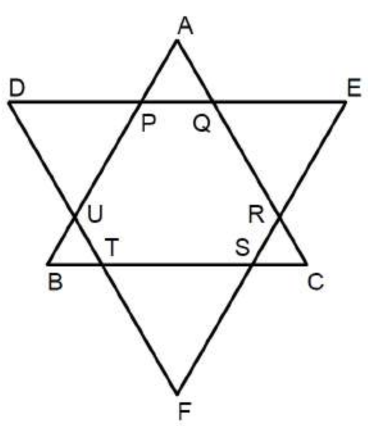
1. 다음 세 조건을 만족하는 두 자리 자연수를 모두 더하면 얼마인가? $\boxed{882}$

   - 9 로 나누어 떨어지지 않는다.
   - 일의 자리 숫자가 십의 자리 숫자보다크다.
   - 일의 자리 숫자는 9 보다 작다.

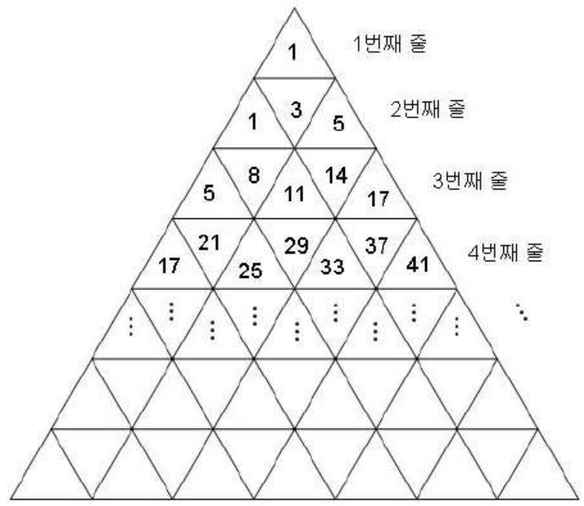
2. 러닝머신 운동을 했는데 처음 200 m 는 시속 6 km 의 속력으로 걷고 그 다음 200 m 는 시속 10 km 의 속력으로 뛰는 과정을 반복하였다. 처음 시작해서 8 분이 지났을 때까지 총 이동거리는 몇 m 인가? $\boxed{960}$

3. 1 부터 9 까지의 한 자리 자연수를 모두 더하면 45 이고 모두 곱하면 362880 이다. 그런데 한 자리 자연수 중에서 중복을 허락하여 아홉개를 뽑아서 이들을 모두 더하였더니 역시 45 이고 이들을 모두 곱하였더니 역시 362880 이었는데 이 아홉 개의 수 중에 1, 2, 4, 5, 7, 9 는 있었고 3, 6, 8 은 없었다. 한 번만 뽑힌 자연수를 모두 더하면 얼마인가? $\boxed{15}$

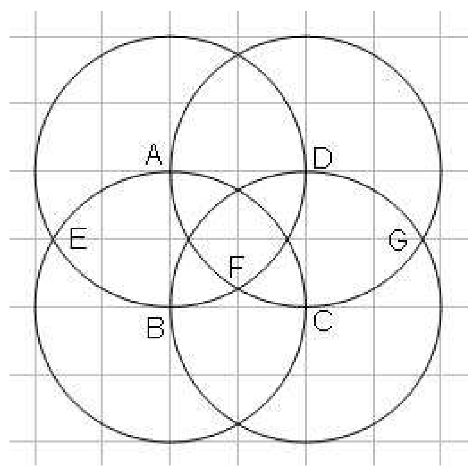
4. 다음 그림에서 삼각형 ABC 는 한 변의 길이가 10 인 정삼각형이고, 삼각형 DEF 는 한변의 길이가 13 인 정삼각형인데, 변 BC 와 변 DE 가 평행하게 놓여있다. 그림의 육각형 PQRSTU 의 둘레의 길이는 얼마인가? $\boxed{23}$



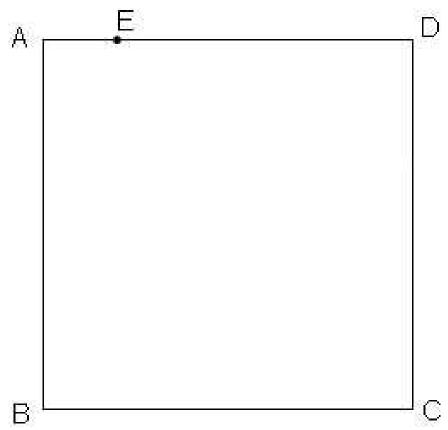
5. 다음 그림과 같이 k 번째 줄은 $k-1$ 번째 줄의 맨 오른쪽의 수부터 시작하여 k 씩 계속 더해 나가는 규칙으로 수들을 배열할 때, 400 이 포함되어 있는 줄에 있는 가장 작은 수와 가장 큰 수를 더하면 얼마인가? $\boxed{818}$

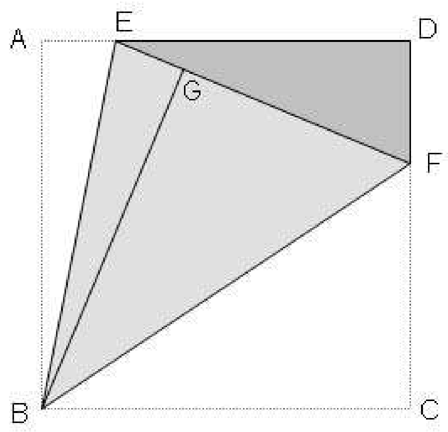


6. 다음 그림과 같이 모눈종이에 A, B, C, D 를 각각 중심으로 하는 원이 있다. A, B, C, D 는 모눈종이의 가로줄과 세로줄이 만나는 점이며 이 점 들에서 두 개의 원이 만난다. 점 D, E, F, G 에서도 두 개의 원이 만난다. $\angle EAB + \angle AFG$ 는 몇 도(°)인가? $\boxed{165}$

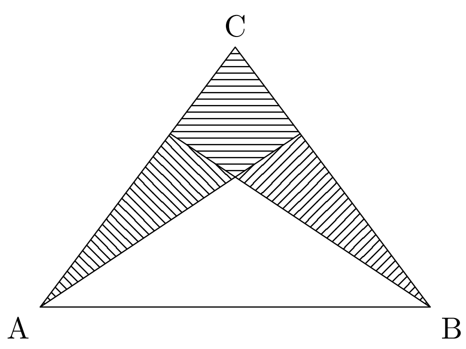


7. 아래의 첫번째 그림과 같이 한 변의 길이가 30 cm 인 정사각형 ABCD 모양의 종이의 변 AD 위에 선분 AE 의 길이가 6 cm 인 점 E가 있다. 아래의 두번째 그림에서 선분 BE를 따라 종이를 접어서 꼭지점 A가 종이에 닿은 점이 G이고, 꼭지점 C가 점 G에 닿도록 접은 선이 변 CD와 만나는 점이 F이다. 직각삼각형 EDF 의 넓이는 몇 cm^2 인가? $\boxed{120}$

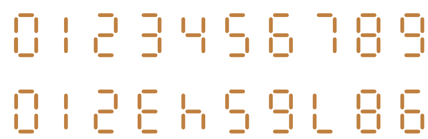




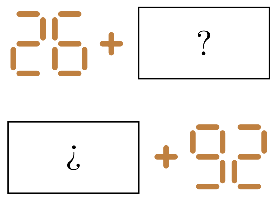
8. $\overline{CA} = \overline{CB}$ 인 다음 그림의 삼각형 ABC 의 넓이가 $1200\,\text{cm}^2$ 인데, 빗금 쳐진 세 부분의 넓이가 모두 같다. 빗금 쳐지지 않은 부분의 넓이는 몇 cm^2 인가? $\boxed{600}$



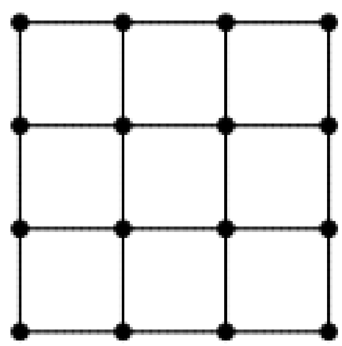
9. 다음과 같이 성냥개비로 아라비아 숫자를 만든 다음에 각각의 숫자를 180° 돌리면, 3, 4, 7은 다시 숫자가 되지 않지만, 0, 1, 2, 5, 6, 8, 9는 다시 숫자가 된다.



다음 그림에서 처음 것은 성냥개비로 만든 26과 성냥개비로 만든 세 자리 수를 더한 덧셈식이고 그 다음 것은 이 식을 180° 돌린 모양인데 세 자리 수는 보이지 않게 가려 두었다. 첫째 식과 둘째 식을 계산한 결과가 같다면 첫째 식에 가려져 있는 세 자리 수는 얼마인가? $\boxed{665}$



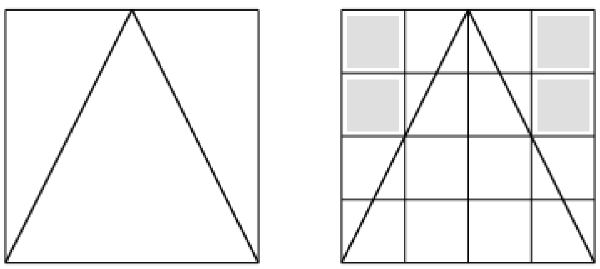
10. 다음 모눈종이에 세 꼭지점이 모두 가로줄과 세로줄이 만나는 점에 있도록 삼각형을 그릴 때, 직각이등변삼각형은 모두 몇 개 그릴 수 있는가? $\boxed{96}$



2교시

1. 물탱크에 100 리터의 물이 들어 있다. 처음에는 1분에 6 리터씩 물을 넣다가 2시간이 지나서는 1분에 6 리터씩 물을 넣으면서 동시에 1분에 8 리터씩 물을 빼낸다면, 물을 빼내기 시작한 때부터 몇 분 후에 물탱크에 물이 남아있지 않게 되는가? $\boxed{410}$

2. 아래의 왼쪽 그림과 같이 정사각형 안에 이등변삼각형이 들어 있다. 오른쪽 그림과 같이 가로 세로를 각각 4등분하여 얻은 16개의 작은 정사각형 중에서 4개는 삼각형의 내부와 만나지 않는다. 그러면 정사각형의 가로와 세로를 각각 32등분하여 얻는 1024개의 작은 정사각형 중에서 삼각형의 내부와 만나지 않는 것은 몇 개인가? $\boxed{480}$

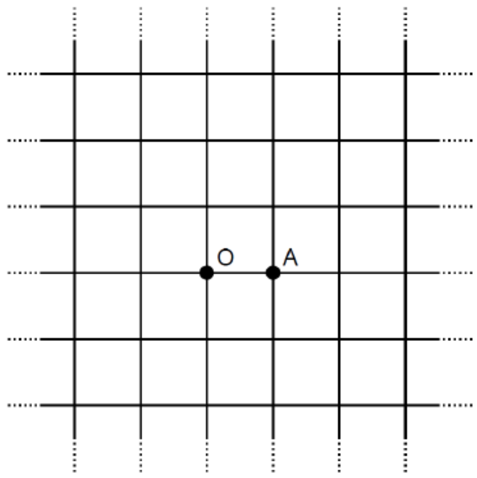


3. ABC는 백의 자리 숫자가 A, 십의 자리 숫자가 B, 일의 자리 숫자가 C인 세 자리 수이다. A, B, C가 서로 다를 때, 다음 식을 만족하는 가장 큰 세 자리 수 ABC는 무엇인가? $\boxed{629}$

$$\frac{\mathrm{ABC}}{999} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}}{9+9+9}$$

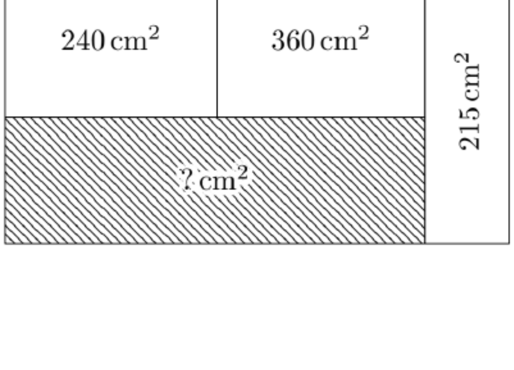
4. 다음과 같이 무한히 뻗어 있는 모눈종이에서 동전을 던져서 다음 규칙에 따라 이동한다.

- 동전을 던져서 앞면이 나오면 그 점에서 왼쪽으로 9칸, 아래로 11칸 이동한다.
- 동전을 던져서 뒷면이 나오면 그 점에서 오른쪽으로 m칸, 위로 n칸 이동한다.

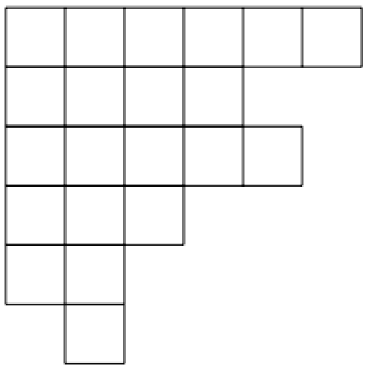


m과 n이 한 자리의 자연수일 때, 점 O에서 시작해서 점 A에 도착하려면, 동전을 최소한 몇 번 던져야 할까? $\boxed{17}$

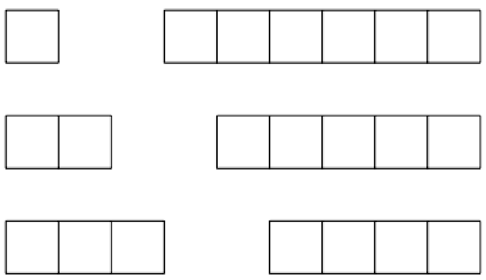
5. 다음 그림과 같이 직사각형 여섯 개를 맞붙여 놓았다. 빗금친 직사각형의 넓이는 몇 cm^2인가? $\boxed{475}$



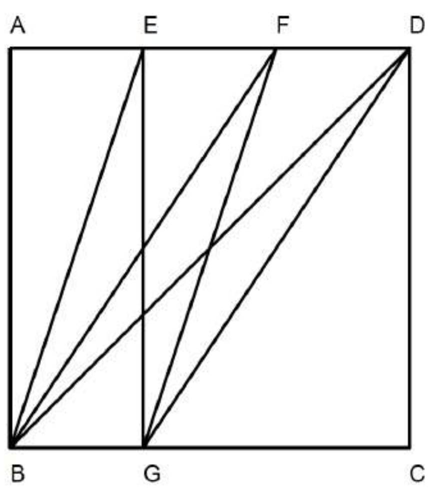
6. 그림



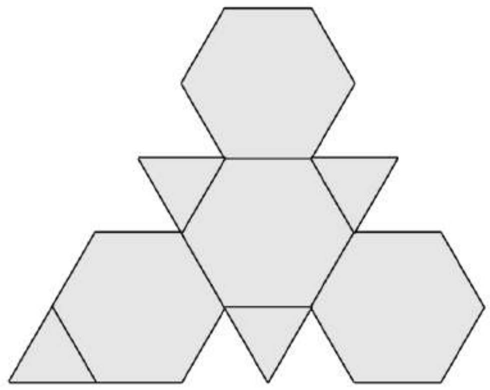
을 다음 6 가지의 타일을 모두 한 번씩만 사용하여 덮을 수 있는 방법의 수는? 단, 타일을 90° 돌려서 사용할 수도 있다. $\boxed{12}$



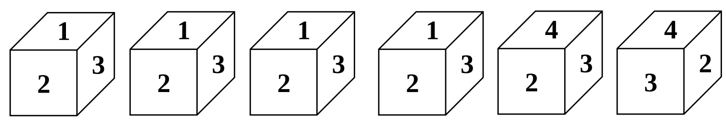
7. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 정사각형이고, $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FD} = \overline{BG}$ 이다. $\angle BEG + \angle BFG + \angle BDG$ 는 몇 도(°)인가? $\boxed{45}$



8. 다음 그림은 어떤 입체도형의 전개도이다. 이 입체도형의 꼭지점은 몇 개인가? $\boxed{12}$



9. 각각의 면에 1, 2, 3, 4, 5, 6 이 하나씩 적힌 주사위 여섯 개가 있는데, 이들 주사위를 아무리 돌려 보아도 한 주사위에 쓰여 있는 숫자의 배열이 다른 주사위에 적힌 숫자의 배열과 같게 할 수 없었다. 이 여섯 개의 주사위를 다음과 같이 바닥에 놓을 때, 바닥과 닿은 면에 적힌 수들을 모두 더하여 나올 수 있는 가장 작은 값은? $\boxed{22}$



10. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2018 \times 2019 \times 2020$ 을 715 로 나누었더니 나누어 떨어져서 몫을 구할 수 있었다. 이 몫을 다시 715 로 나누었더니 다시 나누어 떨어져서 몫을 구할 수 있었다. 이 몫을 다시 715 로 나누었더니 다시 나누어 떨어져서 몫을 구할 수 있었고 그래서 이 몫을 다시 715 로 나누었고.... 이렇게 계속하여서 715 로 나누었을 때, 나누어 떨어진 것은 처음부터 몇 번까지였을까? $\boxed{166}$

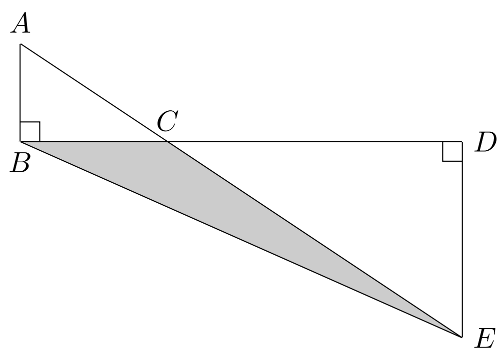
2021 한국 주니어 수학올림피아드 (1교시)

2021년 9월 4일 (14:00 – 15:00)

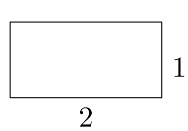
1. 자연수 $2022 \times 2023 \times 2024 \times 2025 \times 2026$ 을 2021로 나눈 나머지는 얼마인가?

2. 최소공배수가 2064인 두 자연수의 합이 177이라면, 두 자연수의 차는 얼마인가?

3. 다음 그림에서 $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ 이고 $\overline{AB} = 10$, $\overline{CD} = 30$ 일 때, 삼각형 BCE의 넓이는?



4. 가로의 길이가 8, 세로의 길이가 2인 직사각형 모양의 벽이 있다. 그림과 같이 변의 길이가 각각 1과 2인 직사각형 모양의 타일 여덟 개를 이용해 벽을 빈틈없이 채우려고 한다. 가능한 방법은 모두 몇 가지인가?
(단, 타일을 90° 돌려 사용할 수도 있다.)



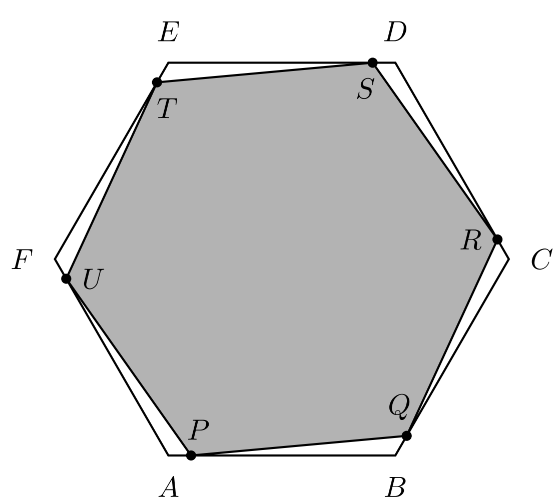
5. 시간과 분을 네 개의 숫자로 나타내며 초는 나타내지 않는 전자시계가 있다. 이 시계가 나타내는 시각 중에 숫자 1이 두 개 이상 들어있는 경우는 모두 몇 개인가?
(단, 오전과 오후는 구별되지 않으며, 0시는 12시로 표현된다. 예를 들어 00:13이 아니라 12:13으로 표현되며, 15:00이 아니라 03:00으로 표현된다.)

6. 아래 그림은 한밤중 어느 아파트에 가구별로 불이 켜진 상황을 표로 나타낸 것이다. (노란색이 불이 켜진 가구임)

901	902	903	904	905	906	907	908	909
801	802	803	804	805	806	807	808	809
701	702	703	704	705	706	707	708	709
601	602	603	604	605	606	607	608	609
501	502	503	504	505	506	507	508	509
401	402	403	404	405	406	407	408	409
301	302	303	304	305	306	307	308	309
201	202	203	204	205	206	207	208	209
101	102	103	104	105	106	107	108	109

불이 켜진 가구 중 몇 개를 선택하되, 그중 어느 두 가구도 같은 가로줄이나 같은 세로줄에 놓이지 않도록 선택하려고 한다. 최대한 몇 개의 가구를 선택할 수 있는가?

7. 정육각형 $ABCDEF$의 변 AB, BC, CD, DE, EF, FA에 대하여 각각 꼭짓점 A, B, C, D, E, F로부터 변의 길이의 $\frac{1}{10}$ 이 되는 지점에 그림과 같이 점 P, Q, R, S, T, U를 잡았다. 육각형 $ABCDEF$의 넓이가 100이라면, 육각형 $PQRSTU$의 넓이는?



8. 각 자릿수가 a, b, c, d 인 네 자리 자연수

$$1000 \times a + 100 \times b + 10 \times c + d$$

가 있다. 이 수는 자릿수가 거꾸로 된 네 자리 자연수인

$$1000 \times d + 100 \times c + 10 \times b + a$$

로 나누어 떨어진다. a 와 d 가 다를 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

9. 서로 다른 두 자리 자연수 다섯 개의 평균이 73.6 일 때, 이 중 가장 큰 수와 가장 작은 수를 제외한 나머지 세 개의 수의 합으로 가능한 가장 큰 값은?

10. 행사장에 총 8명이 입장하였으며, 1부터 8까지 서로 다른 번호를 하나씩 받았다. 입장한 8명은 다음 규칙에 따라 서로 주먹 인사를 한다.

- 번호가 짝수인 사람은 최대 본인의 번호만큼 주먹 인사를 할 수 있다. (예를 들어 번호가 4인 사람은 0번 이상 4번 이하)
- 번호가 홀수인 사람은 최대 3번까지 주먹 인사를 할 수 있다.
- 한 번 주먹 인사한 사람과는 다시 하지 않는다.
- 자기 자신과는 주먹 인사를 할 수 없다.

이 행사장에서 진행될 수 있는 주먹 인사는 최대 몇 회까지 가능한가?
(단, 두 명이 주먹을 부딪히는 행위를 1회의 주먹 인사로 센다. 예를 들어 모든 참가자가 한 번씩 주먹 인사를 한다면, 총 4회의 주먹 인사가 진행된다.)

2021 한국 주니어 수학올림피아드 (2교시)

2021년 9월 4일 (15:45 – 16:45)

1. 세 개의 수 196, 439, 952를 어떤 자연수 n으로 나누었더니 나머지가 모두 같았다. 이런 조건을 만족하는 가장 큰 자연수 n은?

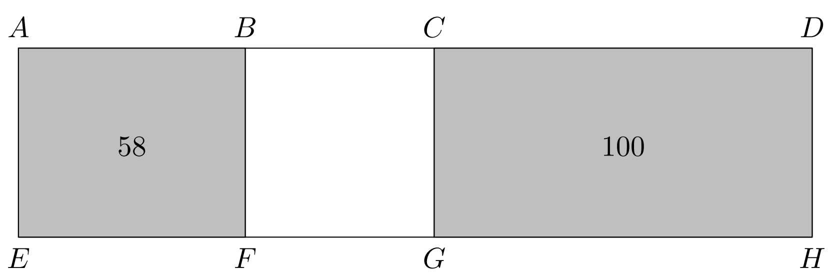
2. 분수 $\dfrac{2 \times n + 2021}{2 \times n + 1}$ 이 자연수가 되도록 하는 가장 큰 자연수 n은?

3. 자연수 a, b, c 에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{a}{60} + \frac{b}{60 \times 60} + \frac{c}{60 \times 60 \times 60} = \frac{641}{6000}$$

이때, $a + b + c$ 의 값은? (단, $a, b, c < 60$)

4. 다음 그림과 같이 직사각형 $AEHD$ 를 세 개의 작은 직사각형으로 분할했을 때, $\overline{AC} = 14$, $\overline{FH} = 20$ 이고, 직사각형 $AEFB$ 의 넓이는 58, 직사각형 $CGHD$ 의 넓이는 100 이다. 전체 직사각형 $AEHD$ 의 넓이는?



5. 다음 세 조건을 모두 만족하는 자연수는 몇 개인가?

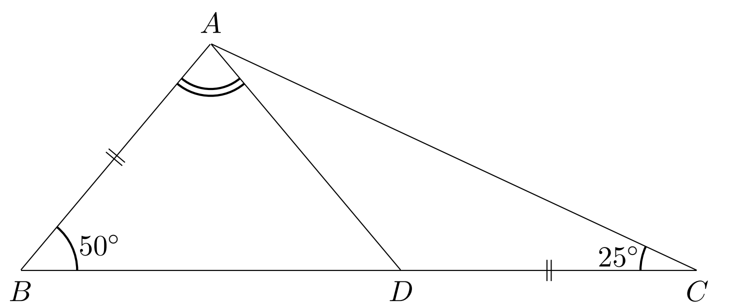
- 네 자리 수이다.
- 9로 나누어 떨어진다.
- 십의 자릿수는 5이다.

6. 어떤 기업이 다음 규칙에 따라 기부금 통장을 관리한다.

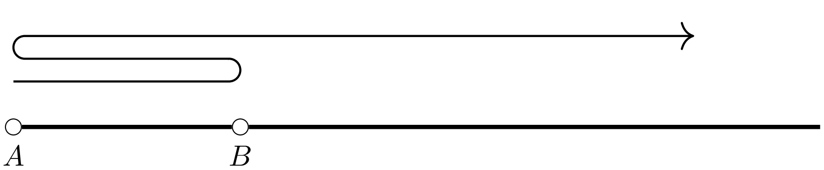
- 입금은 매해 11회 진행되며, 입금 시기는 1월을 제외한 나머지 열한 달의 1일이다.
- 입금액은 그 해 1월 1일의 통장 잔액과 같다.
- 매해 12월 31일에는 통장 잔액의 절반을 출금하여 기부한다.
- 위 항목 이외의 입출금은 하지 않는다.

2021년 1월 1일 기준으로 통장 잔액이 100원일 때, 통장 잔액이 처음으로 100000원을 초과하는 시기는 x년 y월이다. 이때, $x+y$의 값은?
(단, 이자는 붙지 않는다.)

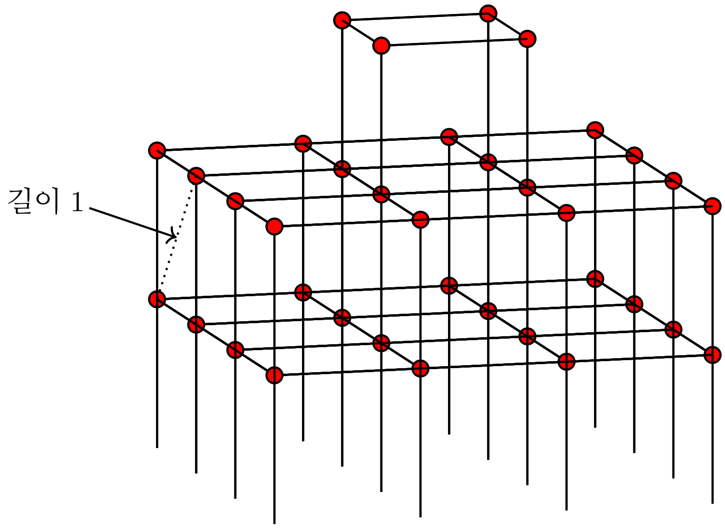
7. 다음 그림에서 $\angle ABC = 50°$, $\angle ACB = 25°$ 이고, $\overline{AB} = \overline{CD}$ 이다. $\angle BAD$ 는 몇 도(°) 인가?



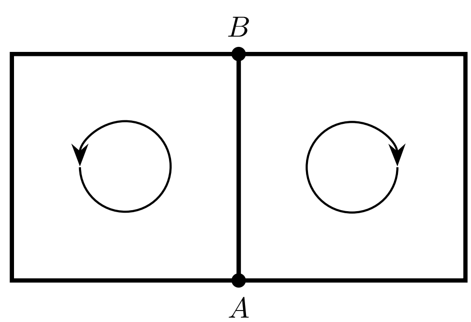
8. 1L의 휘발유로 10km를 갈 수 있는 차를 타고 직선도로를 주행하려고 한다. 출발지점 A에는 90L의 휘발유가 있지만, 이 차의 연료통에는 휘발유를 60L까지만 담을 수 있다. 최대한 A로부터 먼 곳까지 주행하기 위하여 일단 휘발유 60L를 담아 출발한 후, 도로 상의 한 지점 B에 일정량의 휘발유를 꺼내어 내려놓고 A로 돌아와 남아있는 휘발유 30L를 담아서 다시 B로 돌아가 내려놓았던 휘발유를 보충하여 계속 주행하려고 한다. 이런 방법으로 A로부터 거리가 최대한 몇 km 되는 곳까지 갈 수 있는가?
(단, 휘발유는 주행 중 연료통에만 담아야 하며, 다른 방법으로는 운반할 수 없다.)



9. 각 면의 대각선의 길이가 1인 정육면체 모양의 뼈대를 아래 그림과 같이 쌓아올려 만든 정글짐이 있다. 이 정글짐에 있는 36개의 빨간색 점 중 세 개를 꼭짓점으로 하여 한 변의 길이가 1인 정삼각형을 만들려고 한다. 모두 몇 개의 정삼각형을 만들 수 있는가?



10. 한 변의 길이가 150m인 정사각형 트랙 두 개가 그림과 같이 변 AB를 따라 붙어있다.



선수 X는 왼쪽 정사각형 트랙을 시계 반대 방향으로 여섯 바퀴를 달리고, 선수 Y는 오른쪽 정사각형 트랙을 시계 방향으로 네 바퀴를 달린다. 두 선수 모두 일정한 속력으로 달리며, X의 속력은 Y의 속력의 1.5배이다. 선수 X가 A 지점에서 출발할 때 선수 Y도 동시에 출발하되, 두 명이 달리는 도중에 만나지 않도록 Y의 출발 지점을 정하려고 한다. 오른쪽 정사각형 트랙 위의 점들 중 이런 조건을 만족하는 Y의 출발 지점으로 가능한 점들이 이루는 구간의 길이의 총합은 몇 m인가?

1교시

1. 120
2. 81
3. 150
4. 34
5. 113
6. 7
7. 91
8. 18
9. 267
10. 15

2교시

1. 27
2. 252
3. 66
4. 198
5. 100
6. 2029
7. 80
8. 700
9. 92
10. 450

유형 가

2022
한국주니어수학올림피아드

2022년 9월 3일 제한시간 2시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리 수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 “7” 일 경우 “007” 이라고 기입해야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 4월 2일부터 4월 5일까지 전날과 비교한 확진자의 증감 비율은 다음 표와 같다.

날짜	전날과 비교한 증감 비율
4월 2일	$+10\%$
4월 3일	-10%
4월 4일	$+20\%$
4월 5일	-20%

예를 들어 4월 2일의 확진자는 4월 1일에 비해 10% 늘어났으며, 4월 3일의 확진자는 4월 2일에 비해 10% 줄어들었다. 4월 1일의 확진자가 2500명이었다면, 4월 5일의 확진자는 몇 명인가?

2$\boxed{376}$

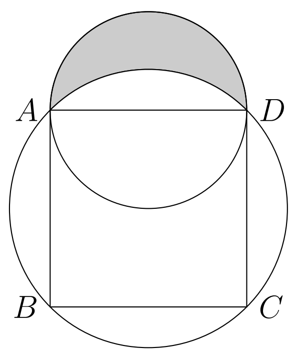
2. 자연수 1부터 10까지를 모두 붙여 적으면 12345678910인데, 이는 11자리 수이다. 1부터 n까지의 자연수를 모두 붙여 적었더니 2022자리 수가 되었다면, 자연수 n의 값은?

$\boxed{710}$

3. 비어있는 수영장에 물을 받아 가득 채우려고 한다. 세 개의 호스 A, B, C를 이용할 수 있으며, 호스 A와 B를 동시에 이용하면 1시간 40분, B와 C를 동시에 이용하면 2시간, A와 C를 동시에 이용하면 2시간 30분이 걸린다. 세 개의 호스 A, B, C를 동시에 이용해 30분간 물을 받은 후 A를 제외하고 B와 C만을 동시에 이용하여 수영장에 물을 가득 채우려면 몇 분 더 받아야 하는가?

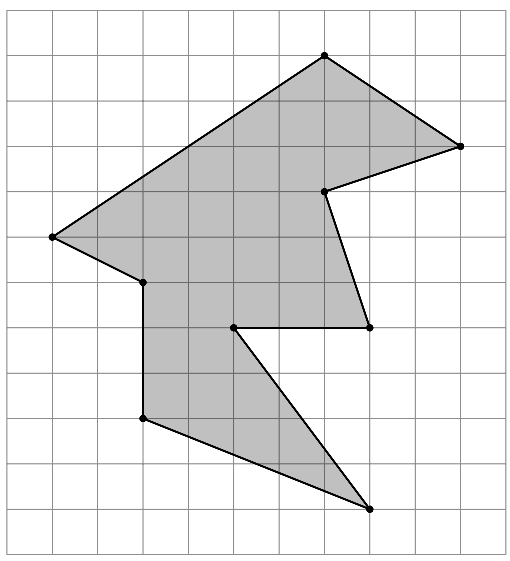
$\boxed{075}$

4. 한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$를 그린 후, 정사각형 $ABCD$의 대각선을 지름으로 하는 원과 변 AD를 지름으로 하는 원을 그렸다. 이때 그림의 색칠된 부분의 넓이는?



$\boxed{004}$

5. 다음 모눈종이의 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 색칠된 부분의 넓이는?



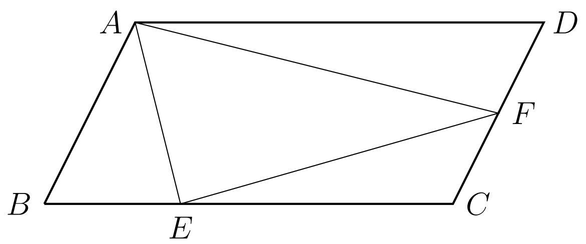
$\boxed{036}$

(뒷면에 계속)

2022

한국주니어수학올림피아드

6. 다음 그림에서 평행사변형 $ABCD$의 넓이는 36, $\triangle ABE$의 넓이는 6, $\triangle AFD$의 넓이는 9이다. 이때 $\triangle AEF$의 넓이는?



015

7. 자연수 a, b, c, d, e, f에 대하여

$$a+b+c+d+e+f = a\times b\times c\times d\times e\times f$$

가 성립한다. 이때 $a+b+c+d+e+f$의 값은?

012

8. 다음 조건을 모두 만족하는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 모두 몇 개인가?

- $m > n$이다.
- m과 n의 최소공배수와 최대공약수의 차가 77이다.

008

9. 자연수 n에 대하여 $1\times 2\times 3\times \cdots \times n$을 계산했을 때, 일의 자리에서부터 연속으로 나타나는 0의 개수를 "n년도의 행운의 수"라 부르자. 2022년도의 행운의 수가 x이고, 2022년 이후 행운의 수가 x보다 처음으로 커지는 해의 행운의 수를 y라고 하자. 이때 $y-x$의 값은?

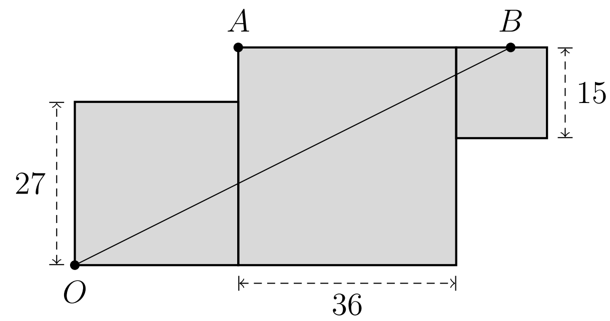
002

10. 어떤 자연수에서 시작하여 각 자리의 수들의 합을 구하고, 다시 그 수의 각 자리의 수들의 합을 구하고, 이러한 과정을 반복하면 결국 한 자리 수를 얻게 된다. 이를 "한 자리 수 만들기"라고 하자. 예를 들어 54329의 각 자리의 수들을 모두 합하면 $5+4+3+2+9=23$이다. 그리고 23의 각 자리의 수들을 모두 합하면 $2+3=5$이다. 다음 수에 "한 자리 수 만들기"를 적용하면 어떤 수를 얻는가?

$$3\times 5\times 7\times 9\times 11\times 13\times 15\times 17\times 19$$

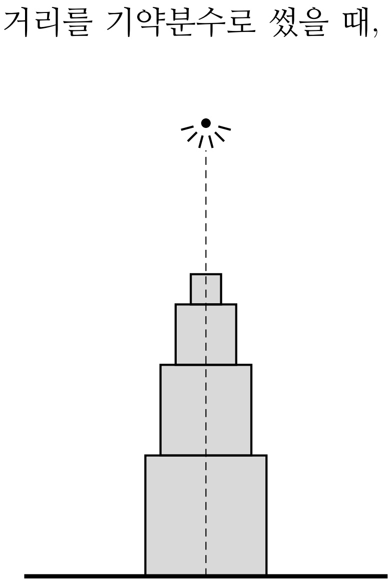
009

11. 한 변의 길이가 각각 $27, 36, 15$인 세 정사각형이 그림과 같이 놓여 있다. 선분 OB가 색칠된 부분의 넓이를 이등분할 때, 선분 AB의 길이는?



049

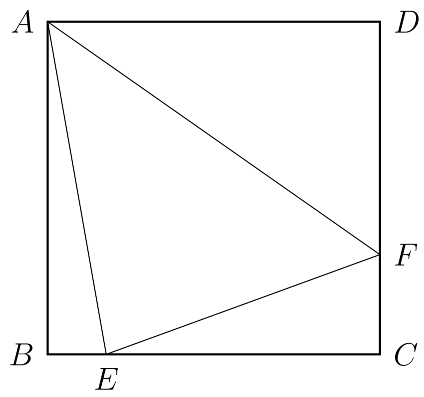
12. 다음 그림은 한 변의 길이가 각각 $4, 3, 2, 1$인 정사각형 네 개를 그린 것이며, 정사각형은 모두 점선에 대하여 대칭이다. 점선을 따라 바닥으로부터 높이가 15인 지점에서 빛을 비추었다. 바닥에 생기는 정사각형 무더기의 그림자의 양 끝점 사이의 거리를 기약분수로 썼을 때, 그 기약분수의 분자는?



045

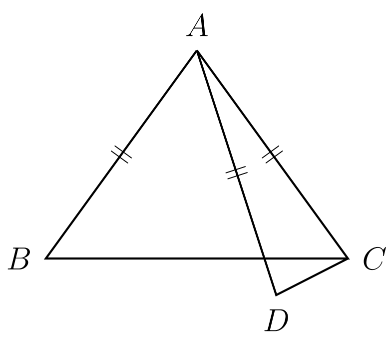
(뒷면에 계속)

13. 다음 그림에서 정사각형 $ABCD$ 위의 점 E, F에 대하여 $\angle BAE = 10°$, $\angle AFD = 55°$이다. 이때 $\angle FEC$는 몇 도(°)인가?



$\boxed{020}$

14. 다음 그림에서 $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC}$이고, $\angle BAD$는 $\angle DAC$의 세 배이며, $\angle ACB$는 $\angle BCD$의 두 배이다. 이때 $\angle BAD$는 몇 도(°)인가?



$\boxed{054}$

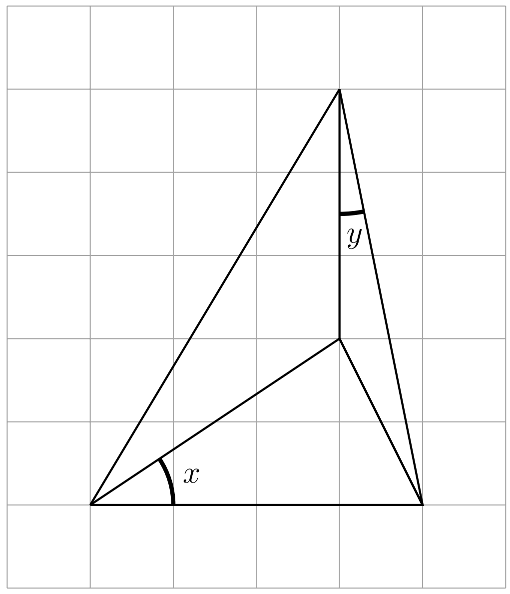
15. 아래의 왼쪽 표에서 비어 있는 13개의 칸에 A, B, C, D 중 하나를 적어 넣되, 각 가로줄과 세로줄에 A, B, C, D가 모두 나타나도록 하는 표의 개수는? (오른쪽 표는 이러한 조건을 만족하는 표의 한 예이다.)

A	B		
B			

A	B	C	D
B	C	D	A
D	A	B	C
C	D	A	B

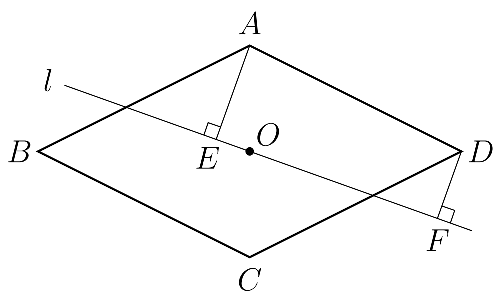
$\boxed{016}$

16. 가로줄의 간격과 세로줄의 간격이 똑같고 수직하게 만나는 모눈종이에 그린 아래 그림에서 두 각의 크기 x, y의 합은 몇 도(°)인가?



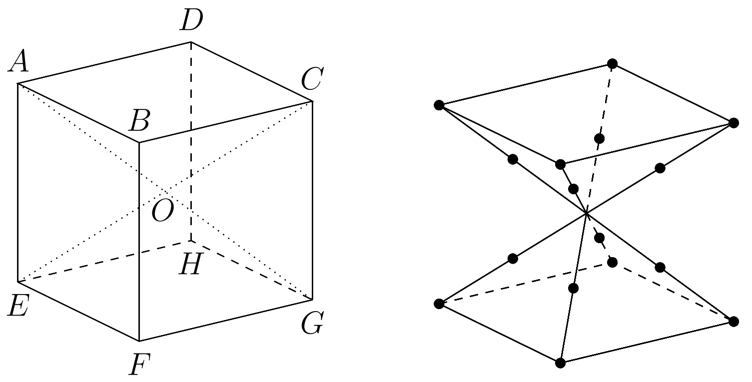
$\boxed{045}$

17. 다음 그림의 마름모 $ABCD$에서 $\overline{AC} : \overline{BD} = 1 : 2$이다. 직선 l은 선분 AC와 선분 BD의 교점 O를 지나고, 선분 AB와 선분 CD를 만난다. 직선 l 위의 두 점 E, F에 대하여 선분 AE와 선분 DF는 직선 l과 수직이고, $\overline{AE} = 7$, $\overline{DF} = 5$이다. 사각형 $AEFD$의 넓이는?



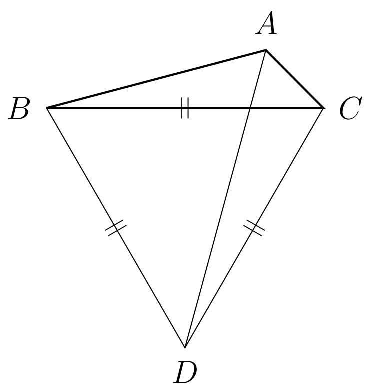
$\boxed{099}$

18. 아래의 왼쪽 그림은 꼭짓점이 A, B, C, D, E, F, G, H인 직육면체를 나타낸 것이며, 내부의 점 O에서 두 선분 AG와 CE가 만난다. 오른쪽 그림은 직육면체의 여덟 개의 꼭짓점과 함께, O와 각 꼭짓점을 잇는 선분의 중점 여덟 개를 나타낸 것이다. 오른쪽 그림의 16개의 점 중에서 4개를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 개수는?



$\boxed{024}$

19. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 100$, $\overline{AC} = 36$이고 $\angle BAC = 120°$이다. 그림처럼 선분 BC를 한 변으로 하는 정삼각형 $\triangle BCD$를 그렸을 때 선분 AD의 길이는?



$\boxed{136}$

20. 전구 128개에 각각 1번부터 128번까지 번호가 붙어 있다. 각 전구마다 스위치가 있어서 누를 때마다 켜져있는 전구는 꺼지고, 꺼져있는 전구는 켜진다. 모든 전구에 불이 켜져있는 상태에서 시작하여 아래의 일곱 단계를 수행하였을 때, 불이 켜져있는 전구의 개수는?

- 1단계: 번호가 2의 배수인 전구의 스위치를 누른다.
- 2단계: 번호가 4의 배수인 전구의 스위치를 누른다.

  ⋮

- m단계: 번호가 $\overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{m\text{개}}$ 의 배수인 전구의 스위치를 누른다.

  ⋮

- 7단계: 번호가 128의 배수인 전구의 스위치를 누른다.

$\boxed{085}$

(끝)

유형 나

2022

한국주니어수학올림피아드

2022년 9월 3일 제한시간 2시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리 수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입해야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 4월 2일부터 4월 5일까지 전날과 비교한 확진자의 증감 비율은 다음 표와 같다.

날짜	전날과 비교한 증감 비율
4월 2일	$+10\%$
4월 3일	-10%
4월 4일	$+20\%$
4월 5일	-20%

예를 들어 4월 2일의 확진자는 4월 1일에 비해 10% 늘어났으며, 4월 3일의 확진자는 4월 2일에 비해 10% 줄어들었다. 4월 1일의 확진자가 2500명이었다면, 4월 5일의 확진자는 몇 명인가?

$2\boxed{376}$

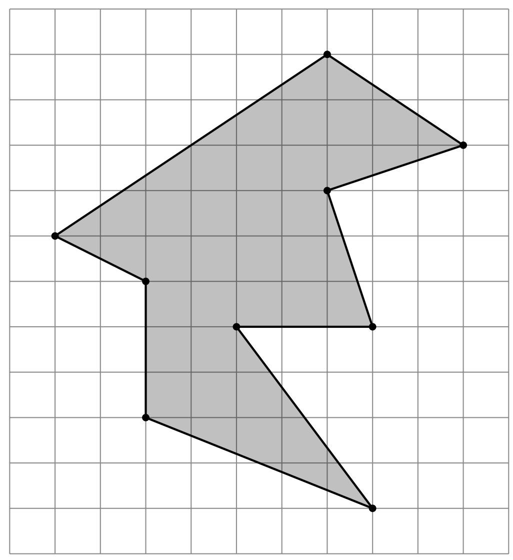
2. 비어있는 수영장에 물을 받아 가득 채우려고 한다. 세 개의 호스 A, B, C를 이용할 수 있으며, 호스 A와 B를 동시에 이용하면 1시간 40분, B와 C를 동시에 이용하면 2시간, A와 C를 동시에 이용하면 2시간 30분이 걸린다. 세 개의 호스 A, B, C를 동시에 이용해 30분간 물을 받은 후 A를 제외하고 B와 C만을 동시에 이용하여 수영장에 물을 가득 채우려면 몇 분 더 받아야 하는가?

$\boxed{075}$

3. 자연수 1부터 10까지를 모두 붙여 적으면 12345678910인데, 이는 11자리 수이다. 1부터 n까지의 자연수를 모두 붙여 적었더니 2022자리 수가 되었다면, 자연수 n의 값은?

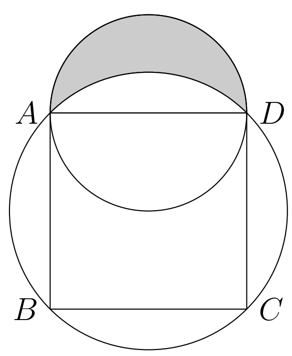
$\boxed{710}$

4. 다음 모눈종이의 한 칸은 한 변의 길이가 1인 정사각형이다. 색칠된 부분의 넓이는?



$\boxed{036}$

5. 한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$를 그린 후, 정사각형 $ABCD$의 대각선을 지름으로 하는 원과 변 AD를 지름으로 하는 원을 그렸다. 이때 그림의 색칠된 부분의 넓이는?



$\boxed{004}$

(뒷면에 계속)

2022

한국주니어수학올림피아드

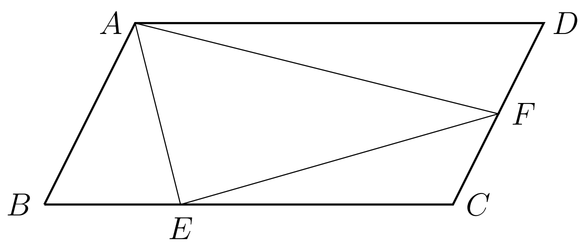
6. 자연수 a, b, c, d, e, f에 대하여

$$a+b+c+d+e+f = a\times b\times c\times d\times e\times f$$

가 성립한다. 이때 $a+b+c+d+e+f$의 값은?

$\boxed{012}$

7. 다음 그림에서 평행사변형 $ABCD$의 넓이는 36, $\triangle ABE$의 넓이는 6, $\triangle AFD$의 넓이는 9이다. 이때 $\triangle AEF$의 넓이는?



$\boxed{015}$

8. 자연수 n에 대하여 $1\times 2\times 3\times \cdots \times n$을 계산했을 때, 일의 자리에서부터 연속으로 나타나는 0의 개수를 "n년도의 행운의 수"라 부르자. 2022년도의 행운의 수가 x이고, 2022년 이후 행운의 수가 x보다 처음으로 커지는 해의 행운의 수를 y라고 하자. 이때 $y-x$의 값은?

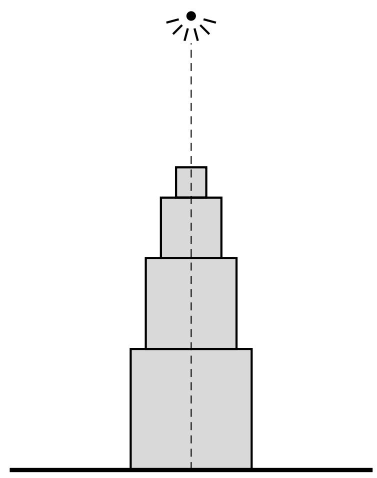
$\boxed{002}$

9. 다음 조건을 모두 만족하는 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 모두 몇 개인가?

- $m > n$이다.
- m과 n의 최소공배수와 최대공약수의 차가 77이다.

$\boxed{008}$

10. 다음 그림은 한 변의 길이가 각각 $4, 3, 2, 1$인 정사각형 네 개를 그린 것이며, 정사각형은 모두 점선에 대하여 대칭이다. 점선을 따라 바닥으로부터 높이가 15인 지점에서 빛을 비추었다. 바닥에 생기는 정사각형 무더기의 그림자의 양 끝점 사이의 거리를 기약분수로 썼을 때, 그 기약분수의 분자는?



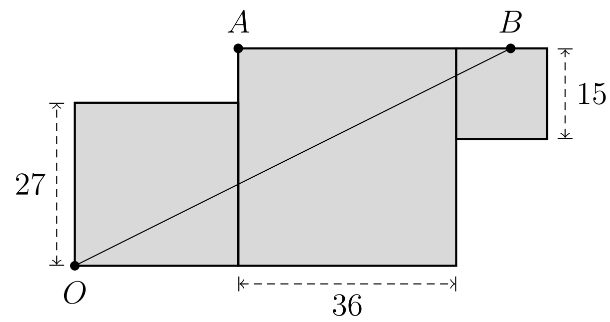
$\boxed{045}$

11. 어떤 자연수에서 시작하여 각 자리의 수들의 합을 구하고, 다시 그 수의 각 자리의 수들의 합을 구하고, 이러한 과정을 반복하면 결국 한 자리 수를 얻게 된다. 이를 "한 자리 수 만들기"라고 하자. 예를 들어 54329의 각 자리의 수들을 모두 합하면 $5+4+3+2+9=23$이다. 그리고 23의 각 자리의 수들을 모두 합하면 $2+3=5$이다. 다음 수에 "한 자리 수 만들기"를 적용하면 어떤 수를 얻는가?

$$3\times 5\times 7\times 9\times 11\times 13\times 15\times 17\times 19$$

$\boxed{009}$

12. 한 변의 길이가 각각 $27, 36, 15$인 세 정사각형이 그림과 같이 놓여 있다. 선분 OB가 색칠된 부분의 넓이를 이등분할 때, 선분 AB의 길이는?



$\boxed{049}$

(뒷면에 계속)

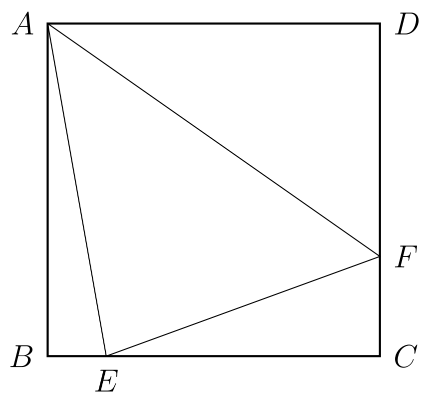
13. 아래의 왼쪽 표에서 비어 있는 13개의 칸에 A, B, C, D 중 하나를 적어 넣되, 각 가로줄과 세로줄에 A, B, C, D가 모두 나타나도록 하는 표의 개수는? (오른쪽 표는 이러한 조건을 만족하는 표의 한 예이다.)

A	B		
B			

A	B	C	D
B	C	D	A
D	A	B	C
C	D	A	B

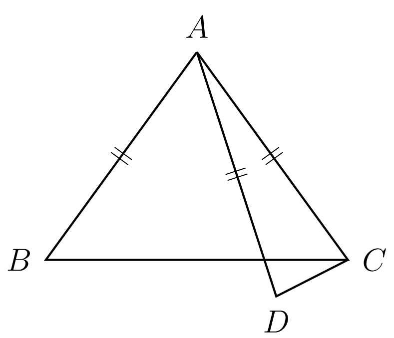
016

14. 다음 그림에서 정사각형 $ABCD$ 위의 점 E, F에 대하여 $\angle BAE = 10°$, $\angle AFD = 55°$이다. 이때 $\angle FEC$는 몇 도(°)인가?



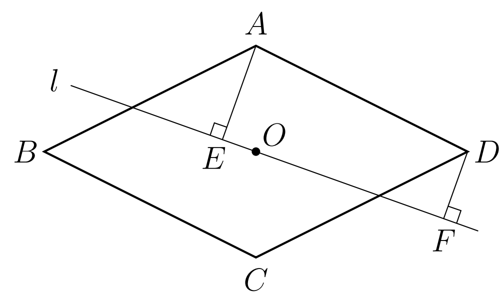
020

15. 다음 그림에서 $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC}$이고, $\angle BAD$는 $\angle DAC$의 세 배이며, $\angle ACB$는 $\angle BCD$의 두 배이다. 이때 $\angle BAD$는 몇 도(°)인가?



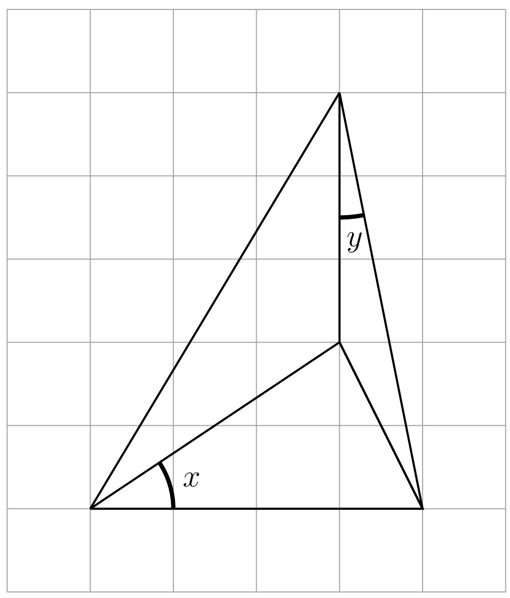
054

16. 다음 그림의 마름모 $ABCD$에서 $\overline{AC} : \overline{BD} = 1 : 2$이다. 직선 l은 선분 AC와 선분 BD의 교점 O를 지나고, 선분 AB와 선분 CD를 만난다. 직선 l 위의 두 점 E, F에 대하여 선분 AE와 선분 DF는 직선 l과 수직이고, $\overline{AE} = 7$, $\overline{DF} = 5$이다. 사각형 $AEFD$의 넓이는?



099

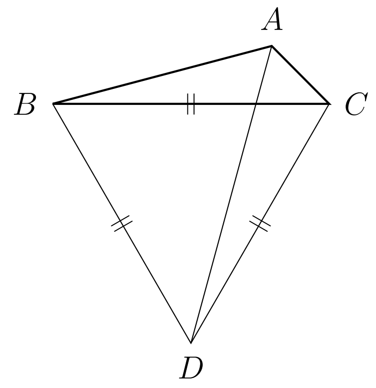
17. 가로줄의 간격과 세로줄의 간격이 똑같고 수직하게 만나는 모눈종이에 그린 아래 그림에서 두 각의 크기 x, y의 합은 몇 도(°)인가?



045

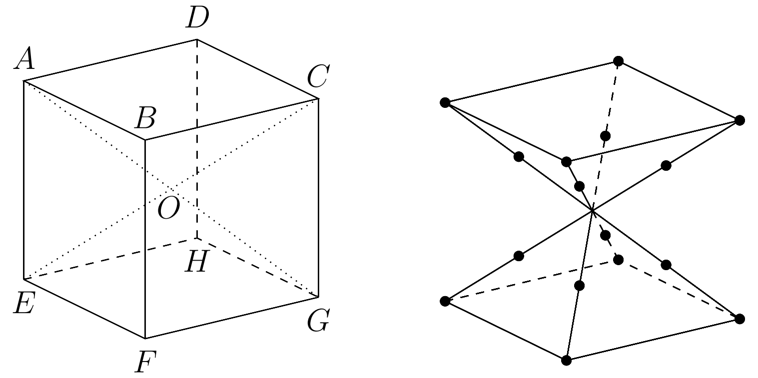
2022
한국주니어수학올림피아드

18. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 100$, $\overline{AC} = 36$이고 $\angle BAC = 120°$이다. 그림처럼 선분 BC를 한 변으로 하는 정삼각형 $\triangle BCD$를 그렸을 때 선분 AD의 길이는?



$\boxed{136}$

19. 아래의 왼쪽 그림은 꼭짓점이 A, B, C, D, E, F, G, H인 직육면체를 나타낸 것이며, 내부의 점 O에서 두 선분 AG와 CE가 만난다. 오른쪽 그림은 직육면체의 여덟 개의 꼭짓점과 함께, O와 각 꼭짓점을 잇는 선분의 중점 여덟 개를 나타낸 것이다. 오른쪽 그림의 16개의 점 중에서 4개를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 개수는?



$\boxed{024}$

20. 전구 128개에 각각 1번부터 128번까지 번호가 붙어 있다. 각 전구마다 스위치가 있어서 누를 때마다 켜져있는 전구는 꺼지고, 꺼져있는 전구는 켜진다. 모든 전구에 불이 켜져있는 상태에서 시작하여 아래의 일곱 단계를 수행하였을 때, 불이 켜져있는 전구의 개수는?

- 1단계: 번호가 2의 배수인 전구의 스위치를 누른다.
- 2단계: 번호가 4의 배수인 전구의 스위치를 누른다.

  $\vdots$

- m단계: 번호가 $\overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{m\text{개}}$ 의 배수인 전구의 스위치를 누른다.

  $\vdots$

- 7단계: 번호가 128의 배수인 전구의 스위치를 누른다.

$\boxed{085}$

(끝)

유형 가

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

2023년 8월 26일 | 제한시간 2시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이단어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입해야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "1007" 일 경우 "007" 이라고 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 자연수 a, b, c, d에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 곱 $abcd$의 값을 구하시오.

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{29}{24}$$

016

2. 물통의 $\frac{1}{4}$을 물로 채웠을 때 무게를 재었더니 200g이고, 물통의 $\frac{1}{3}$을 물로 채웠을 때 무게를 재었더니 250g이었다. 물이 없을 때, 이 물통의 무게는 몇 g인가?

050

3. 다음 조건을 만족하는 두 자리 자연수 n의 개수를 구하시오.

> n의 십의 자릿수와 일의 자릿수를 바꾸면 n보다 작은 두 자리 자연수 m을 얻으며, 두 수의 차 $n-m$은 어떤 자연수의 제곱이다.

013

4. 다음 조건을 만족하는 두 자연수 m과 n의 순서쌍 (m, n)은 모두 몇 개인가?

> m과 n의 곱은 $990^2 = 990 \times 990$이다.

135

5. 연속된 열 개의 자연수 중 하나를 제외한 아홉 개를 더하였더니 3000이었다. 제외한 수는 무엇인가?

335

6. 네 개의 두 자리 자연수 중 두 개씩 골라 평균을 계산하였더니 각각 79, 84, 85, 89, 90, 95이었다. 네 개의 수 중 가장 큰 수는 무엇인가?

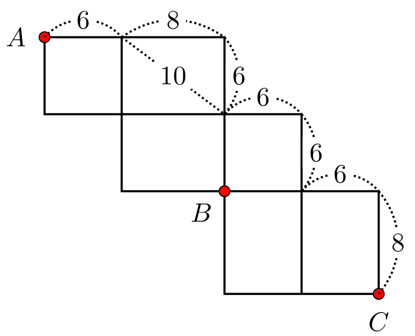
096

(뒷면에 계속)

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

7. 그림의 전개도로 만든 직육면체에서 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하시오.



030

8. 자연수 $1, 2, 3, \ldots, 20$을 차례로 이어 붙여 얻은 다음 자연수를 생각하자.

$$N = 1234567891011121314151617181920$$

이제 N을 이루는 31개 숫자에서 20개를 지운 후 남은 11개의 숫자들을 적힌 순서대로 이어 붙여 얻을 수 있는 가장 큰 자연수를 M이라 하자. 이때 M의 각 자릿수의 합을 구하시오.

049

9. 자연수 $1, 2, 3, \ldots, 99$가 적힌 99개의 카드가 들어있는 상자에 다음 과정을 수행하였다.

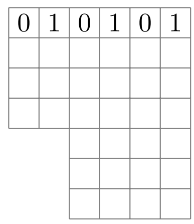
- 상자에서 세 장의 카드를 꺼내어 버리고, 세 카드에 적힌 수가 a, b, c였다면 $a+b+c-1$이 적힌 새로운 카드를 상자에 추가한다.
- 상자에 세 장 이상의 카드가 남아있다면 위 과정을 반복하고, 그렇지 않다면 종료한다.

과정이 종료된 후, 상자에 한 장의 카드가 남았다. 이 카드에 적힌 수를 구하시오.

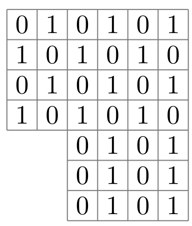
(답안에는 1000으로 나눈 나머지를 쓰시오.)

901

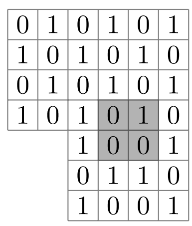
10. 아래의 그림과 같이 36개의 네모칸이 기역자 모양으로 배치되어 있으며, 가장 윗 줄에는 0과 1이 번갈아 들어가 있다.



남은 칸마다 0 또는 1을 넣되, ⊞ 모양의 네 칸에 있는 수의 합이 항상 2가 되도록 하려고 한다. 아래의 그림은 각각 올바른 예와 잘못된 예이다.



올바른 예

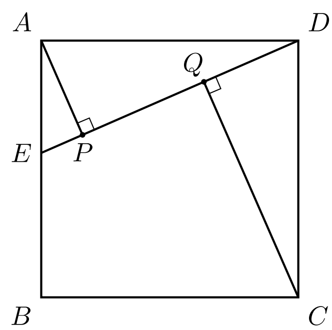


잘못된 예

이러한 규칙을 지키면서 남은 칸에 0 또는 1을 채워 넣을 수 있는 방법은 몇 가지인가?

064

11. 정사각형 $ABCD$의 한 변 AB에서 점 E를 잡고, 점 A와 점 C에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 각각 P와 Q라 하자. $\overline{AP} = 7, \overline{CQ} = 16$일 때, 정사각형 $ABCD$의 넓이는 얼마인가?



305

(뒷면에 계속)

한국주니어수학올림피아드

12. 두 자연수 m과 n에 대하여 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{10}$이 성립할 때, 가장 큰 m의 값은?

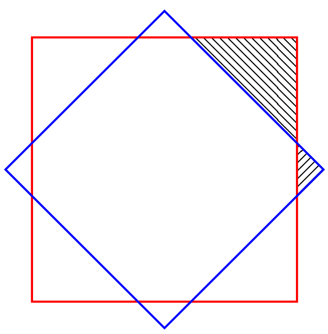
020

13. 다음과 같이 홀수를 차례대로 삼각형 모양으로 적었을 때, 2023은 위로부터 몇 번째 줄에서 나타날까?

1	첫 번째 줄
3 5	두 번째 줄
7 9 11	세 번째 줄
13 15 17 19	네 번째 줄
21 23 25 27 29	다섯 번째 줄
⋮	⋮

045

14. 그림과 같이 서로 다른 크기의 두 정사각형이 겹쳐져 있다. 두 정사각형의 중심은 일치하며, 빗금친 삼각형은 넓이가 각각 8과 1인 이등변 삼각형이다. 작은 정사각형의 넓이는 얼마인가?

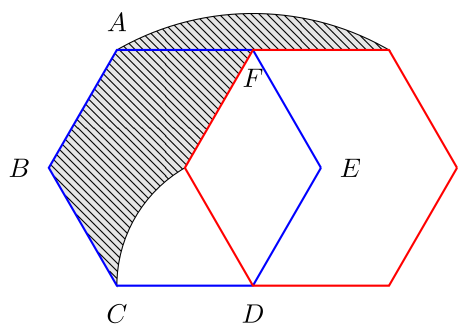


072

15. 자연수 19를 자연수의 합으로 표현한 뒤 합에 사용된 수를 모두 곱하여 새로운 수를 얻으려고 한다. 예를 들어 $19=1+18$이므로 $1\times 18=18$을 얻을 수 있고, $19=2+3+14$이므로 $2\times 3\times 14=84$도 얻을 수 있다. 이렇게 하여 얻을 수 있는 가장 큰 수는 무엇인가?

972

16. 한 변의 길이가 4인 정육각형 모양의 철판 $ABCDEF$를 점 D를 중심으로 시계 방향으로 60° 회전하면 그림의 빨간색 정육각형으로 이동한다. 빗금친 부분은 회전 과정에서 선분 AB와 선분 BC가 지나간 부분을 그린 것이다. 이때 빗금친 부분의 넓이에 가장 가까운 정수는 무엇인가? (단, 원주율은 3.14로 한다.)



025

(뒷면에 계속)

17. 다음 두 조건을 모두 만족하는 기약분수 $\frac{p}{q}$에 대하여, $p+q$의 값을 구하시오.

- 어떤 자연수를 $\frac{p}{q}$의 분모에는 곱하고 분자에는 더하여 얻은 분수가 $\frac{p}{q}$와 같다.
- $\frac{1}{4} < \frac{p}{q} < \frac{1}{3}$

009

18. 네 팀이 모여 각 팀은 다른 세 팀과 한 번씩 경기를 하였다. 이때, 경기에서 이기면 승점 3점, 비기면 승점 1점을 얻고, 패하면 승점이 없다. 네 팀의 경기 결과, 각 팀의 최종 승점은 모두 홀수이고 서로 달랐다. 최종 승점이 가장 낮은 팀을 A라고 할 때, A팀에게 승리한 팀들의 최종 승점의 합을 구하시오.

010

19. 어떤 자연수 N의 자릿수를 둘로 적절히 나누었을 때 합이 같아진다면 N을 "좋은 수"라 부르자. 예를 들어 9562의 자릿수를 $9, 2$와 $5, 6$으로 나누면 $9+2=5+6$이 성립하므로 9562는 좋은 수이다. 마찬가지로 1337도 $1+3+3=7$이 성립하므로 좋은 수이다.

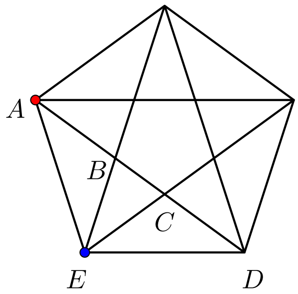
다음 조건을 만족하는 가장 큰 자연수 N을 구하시오.

(답안에는 N을 1000으로 나눈 나머지를 쓰시오.)

- $1000 \le N \le 3000$이다.
- N과 $N+1$은 둘 다 좋은 수이다.

749

20. 다음과 같이 정오각형의 꼭짓점을 이용해 별을 그리면, 등식 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$가 성립한다. 이 공통된 비율을 x라 하면, 부등식 $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$가 성립한다.



위 그림에서 선분들을 따라 A에서 E까지 가려고 한다. 한 번 지난 점은 다시 지나지 않으면서 A에서 E까지 가는 가장 긴 경로의 길이를 ℓ이라 할 때, ℓ에 가장 가까운 정수를 구하시오. (단, $\overline{BC}=1$이다.)

015

(끝)

유형 나

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

2023년 8월 26일 제한시간 2시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입해야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "1007"일 경우 "007"이라고 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 물통의 $\frac{1}{4}$을 물로 채웠을 때 무게를 재었더니 200g이고, 물통의 $\frac{1}{3}$을 물로 채웠을 때 무게를 재었더니 250g 이었다. 물이 없을 때, 이 물통의 무게는 몇 g인가?

050

2. 자연수 a, b, c, d에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 곱 $abcd$의 값을 구하시오.

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{29}{24}$$

016

3. 다음 조건을 만족하는 두 자리 자연수 n의 개수를 구하시오.

n의 십의 자릿수와 일의 자릿수를 바꾸면 n보다 작은 두 자리 자연수 m을 얻으며, 두 수의 차 $n-m$은 어떤 자연수의 제곱이다.

013

4. 네 개의 두 자리 자연수 중 두 개씩 골라 평균을 계산하였더니 각각 79, 84, 85, 89, 90, 95이었다. 네 개의 수 중 가장 큰 수는 무엇인가?

096

5. 다음 조건을 만족하는 두 자연수 m과 n의 순서쌍 (m, n)은 모두 몇 개인가?

m과 n의 곱은 $990^2 = 990 \times 990$이다.

135

6. 연속된 열 개의 자연수 중 하나를 제외한 아홉 개를 더하였더니 3000이었다. 제외한 수는 무엇인가?

335

(뒷면에 계속)

제 5 회
한국주니어수학올림피아드

7. 자연수 $1, 2, 3, \ldots, 99$가 적힌 99개의 카드가 들어있는 상자에 다음 과정을 수행하였다.

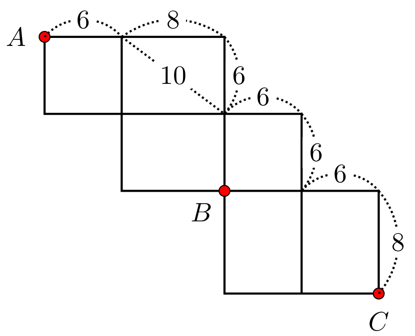
- 상자에서 세 장의 카드를 꺼내어 버리고, 세 카드에 적힌 수가 a, b, c였다면 $a+b+c-1$이 적힌 새로운 카드를 상자에 추가한다.
- 상자에 세 장 이상의 카드가 남아있다면 위 과정을 반복하고, 그렇지 않다면 종료한다.

과정이 종료된 후, 상자에 한 장의 카드가 남았다. 이 카드에 적힌 수를 구하시오.

(답안에는 1000으로 나눈 나머지를 쓰시오.)

901

8. 그림의 전개도로 만든 직육면체에서 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하시오.



030

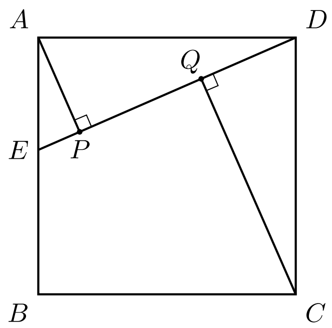
9. 자연수 $1, 2, 3, \ldots, 20$을 차례로 이어 붙여 얻은 다음 자연수를 생각하자.

$$N = 1234567891011121314151617181920$$

이제 N을 이루는 31개 숫자에서 20개를 지운 후 남은 11개의 숫자들을 적힌 순서대로 이어 붙여 얻을 수 있는 가장 큰 자연수를 M이라 하자. 이때 M의 각 자릿수의 합을 구하시오.

049

10. 정사각형 $ABCD$의 한 변 AB에서 점 E를 잡고, 점 A와 점 C에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 각각 P와 Q라 하자. $\overline{AP} = 7, \overline{CQ} = 16$일 때, 정사각형 $ABCD$의 넓이는 얼마인가?



305

11. 아래의 그림과 같이 36개의 네모칸이 기역자 모양으로 배치되어 있으며, 가장 윗 줄에는 0과 1이 번갈아 들어가 있다.

0	1	0	1	0	1

남은 칸마다 0 또는 1을 넣되, ⊞ 모양의 네 칸에 있는 수의 합이 항상 2가 되도록 하려고 한다. 아래의 그림은 각각 올바른 예와 잘못된 예이다.

0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
		0	1	0	1
		0	1	0	1
		0	1	0	1

올바른 예

0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
		1	0	0	1
		0	1	1	0
		1	0	0	1

잘못된 예

이러한 규칙을 지키면서 남은 칸에 0 또는 1을 채워 넣을 수 있는 방법은 몇 가지인가?

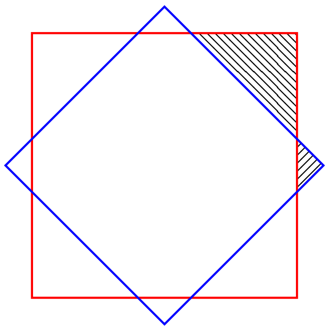
064

(뒷면에 계속)

제 5 회

한국주니어수학올림피아드

12. 그림과 같이 서로 다른 크기의 두 정사각형이 겹쳐져 있다. 두 정사각형의 중심은 일치하며, 빗금친 삼각형은 넓이가 각각 8과 1인 이등변 삼각형이다. 작은 정사각형의 넓이는 얼마인가?



072

13. 두 자연수 m과 n에 대하여 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{10}$이 성립할 때, 가장 큰 m의 값은?

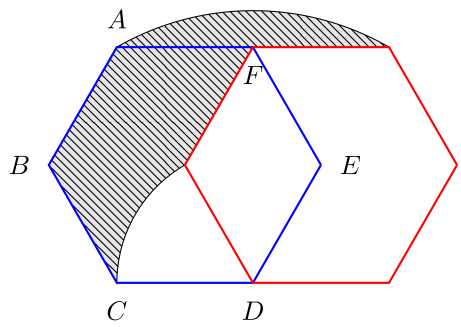
020

14. 다음과 같이 홀수를 차례대로 삼각형 모양으로 적었을 때, 2023은 위로부터 몇 번째 줄에서 나타날까?

1	첫 번째 줄
3 5	두 번째 줄
7 9 11	세 번째 줄
13 15 17 19	네 번째 줄
21 23 25 27 29	다섯 번째 줄
⋮	⋮

045

15. 한 변의 길이가 4인 정육각형 모양의 철판 $ABCDEF$를 점 D를 중심으로 시계 방향으로 $60°$ 회전하면 그림의 빨간색 정육각형으로 이동한다. 빗금친 부분은 회전 과정에서 선분 AB와 선분 BC가 지나간 부분을 그린 것이다. 이때 빗금친 부분의 넓이에 가장 가까운 정수는 무엇인가? (단, 원주율은 3.14로 한다.)



025

16. 자연수 19를 자연수의 합으로 표현한 뒤 합에 사용된 수를 모두 곱하여 새로운 수를 얻으려고 한다. 예를 들어 $19 = 1+18$이므로 $1\times18 = 18$을 얻을 수 있고, $19 = 2+3+14$이므로 $2\times3\times14 = 84$도 얻을 수 있다. 이렇게 하여 얻을 수 있는 가장 큰 수는 무엇인가?

972

(뒷면에 계속)

제 5 회
한국주니어수학올림피아드

17. 네 팀이 모여 각 팀은 다른 세 팀과 한 번씩 경기를 하였다. 이때, 경기에서 이기면 승점 3점, 비기면 승점 1점을 얻고, 패하면 승점이 없다. 네 팀의 경기 결과, 각 팀의 최종 승점은 모두 홀수이고 서로 달랐다. 최종 승점이 가장 낮은 팀을 A라고 할 때, A팀에게 승리한 팀들의 최종 승점의 합을 구하시오.

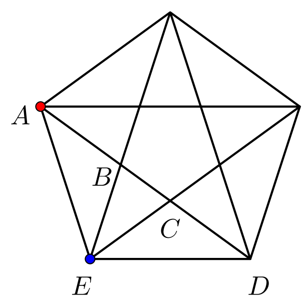
010

18. 다음 두 조건을 모두 만족하는 기약분수 $\frac{p}{q}$에 대하여, $p+q$의 값을 구하시오.

- 어떤 자연수를 $\frac{p}{q}$의 분모에는 곱하고 분자에는 더하여 얻은 분수가 $\frac{p}{q}$와 같다.
- $\frac{1}{4} < \frac{p}{q} < \frac{1}{3}$

009

19. 다음과 같이 정오각형의 꼭짓점을 이용해 별을 그리면, 등식 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$가 성립한다. 이 공통된 비율을 x라 하면, 부등식 $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$가 성립한다.



위 그림에서 선분들을 따라 A에서 E까지 가려고 한다. 한 번 지난 점은 다시 지나지 않으면서 A에서 E까지 가는 가장 긴 경로의 길이를 ℓ이라 할 때, ℓ에 가장 가까운 정수를 구하시오. (단, $\overline{BC} = 1$이다.)

015

20. 어떤 자연수 N의 자릿수를 둘로 적절히 나누었을 때 합이 같아진다면 N을 "좋은 수"라 부르자. 예를 들어 9562의 자릿수를 $9, 2$와 $5, 6$으로 나누면 $9+2=5+6$이 성립하므로 9562는 좋은 수이다. 마찬가지로 1337도 $1+3+3=7$이 성립하므로 좋은 수이다.

다음 조건을 만족하는 가장 큰 자연수 N을 구하시오.

(답안에는 N을 1000으로 나눈 나머지를 쓰시오.)

- $1000 \le N \le 3000$이다.
- N과 $N+1$은 둘 다 좋은 수이다.

749

(끝)

유형 가

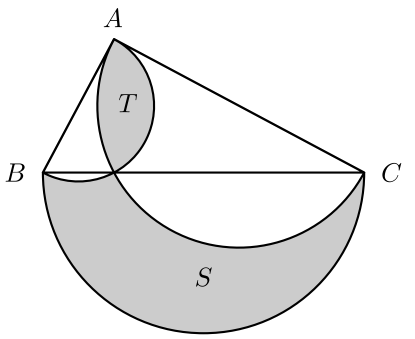
2024

한국주니어수학올림피아드

2024년 9월 7일 제한시간 2시간

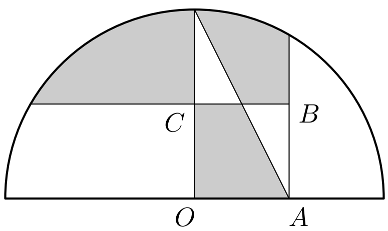
- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "7" 일 경우 "007" 이라고 기입해야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "1007" 일 경우 "007" 이라고 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 다음 그림에서 $\triangle ABC$는 직각삼각형이고, $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 12$, $\overline{BC} = 13$이다. 세 변 AB, AC, BC를 지름으로 하는 반원을 그려 색칠된 두 영역 S와 T를 얻었다. S의 넓이와 T의 넓이의 차는?



$\boxed{030}$

2. 다음 그림에서 중심이 O인 반원의 반지름이 20이며 정사각형 $OABC$의 한 변의 길이는 10이다. 색칠된 영역의 넓이의 총합은? (단, 원주율은 3.14로 계산한다.)



$\boxed{264}$

3. 서로 다른 10 이하의 자연수 여섯 개 a, b, c, d, e, f를 골라서 $\dfrac{2a+2b}{e} + \dfrac{cd}{f}$의 값을 계산하자. 이렇게 얻은 값 중에서 가장 작은 것을 k라 할 때, $90k$는?

$\boxed{130}$

4. 다음 그림과 같이 아홉 칸 중 몇 개의 칸에 ◇를 그려 넣어서 각 세로줄의 ◇의 개수가 순서대로 $1, 1, 2$이고, 첫 번째와 세 번째 가로줄의 ◇의 개수가 $1, 1$이 되도록 하려고 한다.

		◇
	◇	◇
◇		

이 예를 포함하여 가능한 방법은 모두 몇 가지인가?

1			
1			
	1	**1**	**2**

$\boxed{005}$

(뒷면에 계속)

5. 아홉 개의 수 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26이 있다. 다음 그림과 같이 왼쪽 위 칸에 먼저 20을 적었다. 서로 이웃한 칸에 적힌 두 수는 서로소가 되도록 나머지 여덟 개의 수를 써 넣는 방법은 모두 몇 가지인가?

(이웃한 칸은 대각선이 아닌 좌우 또는 위아래 칸을 말한다. 예를 들어, 그림에서 20이 적힌 칸과 이웃한 칸은 오른쪽 칸과 아래 칸 두 개뿐이다.)

20		

$\boxed{288}$

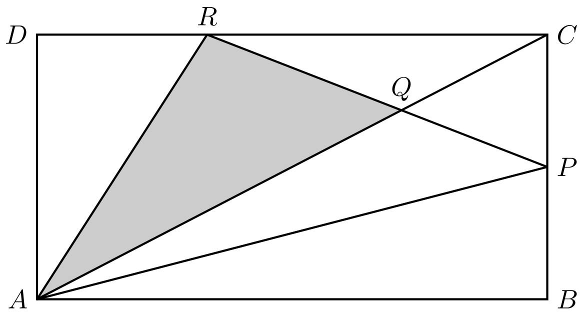
6. 다음과 같이 40보다 작은 홀수를 모두 곱하여 얻은 수를 N이라 하자.

$$N = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 39$$

이때 $m^3(= m \times m \times m)$이 N의 약수가 되도록 하는 자연수 m 중에서 가장 큰 수는 무엇인가?

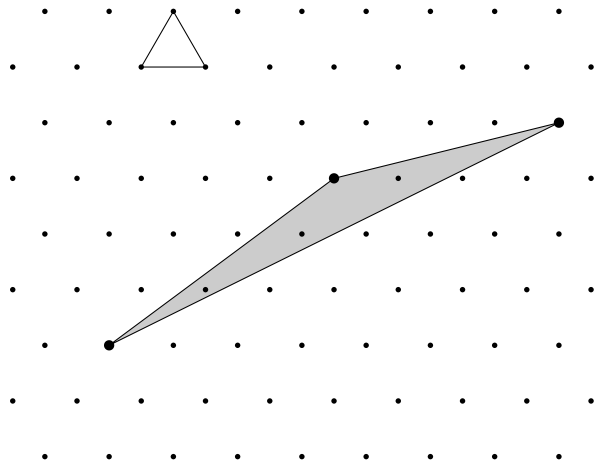
$\boxed{945}$

7. 다음 그림의 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{DR} = 9$, $\overline{RC} = 18$, $\overline{CP} = 7$, $\overline{PB} = 7$이다. 색칠된 영역의 넓이는?



$\boxed{090}$

8. 다음 그림의 정삼각형의 넓이가 1일 때, 색칠된 삼각형의 넓이는?



$\boxed{007}$

9. 다음 조건을 모두 만족시키는 가장 큰 자연수 n은 무엇인가?

- n은 1000보다 작다.
- n은 연속된 두 개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.
- n은 연속된 세 개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.
- n은 연속된 다섯 개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.

$\boxed{975}$

10. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n은 모두 몇 개인가?

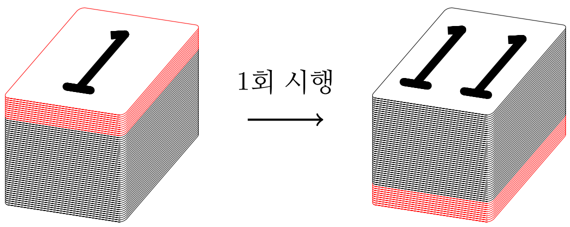
분수 $\frac{1000}{n}$과 $\frac{999}{n}$를 각각 소수로 고쳐쓴 후, 소수점 아래를 버리면 서로 다른 정수가 된다.

$\boxed{016}$

11. 세 자리 자연수 n을 7로 나누었을 때의 몫은 m이고, $\frac{m}{n}$을 기약분수로 나타내면 $\frac{p}{q}$이다. 이때 $n = 36p + q$가 성립한다면, n은 얼마인가?

216

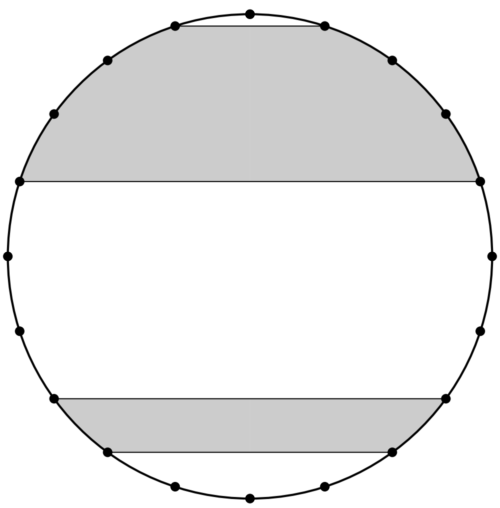
12. 위에서부터 차례로 $1, 2, 3, \ldots, 52$가 적혀있는 52장의 카드가 있다. 위쪽의 10장의 카드를 아래로 옮기기를 1회 시행하면 카드의 순서는 위에서부터 차례로 $11, 12, \ldots, 51, 52, 1, 2, \ldots, 9, 10$이 된다.



이와 같이 위쪽의 10장의 카드를 아래로 옮기기를 최소 몇 회 반복하여 시행하면 다시 처음 카드의 배열로 되돌아오게 되는가?

026

13. 다음 그림과 같이 반지름이 25인 원의 둘레를 20등분 하였다. 색칠된 영역의 넓이의 총합은? (단, 원주율은 3.14로 계산한다.)



785

14. 다음 규칙에 따라 정수를 나열하자.

> • 첫 번째 수는 양수 a이고, 두 번째 수는 100이다.
> • 세 번째 수 = (첫 번째 수) − (두 번째 수)
> • 네 번째 수 = (두 번째 수) − (세 번째 수)
> $\vdots$

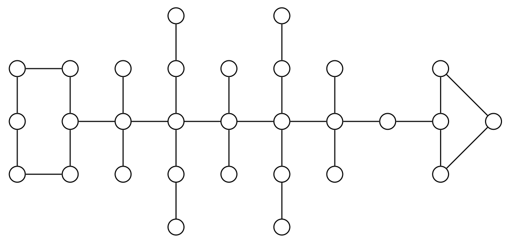
예를 들어 $a = 123$인 경우 나열되는 수는 다음과 같으며, 이때 첫 번째 수부터 연속하여 4개의 양수가 나온다.

$$123, 100, 23, 77, -54, 131, -185, \ldots$$

첫 번째 수 a부터 연속하여 가장 많은 개수의 양수가 나오도록 하는 수 a는 무엇인가?

162

15. 다음 그림은 30개의 점을 31개의 선분으로 연결한 것이다.



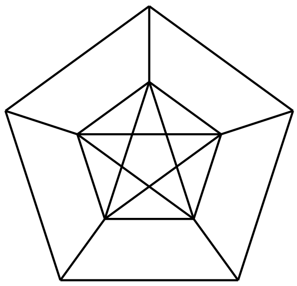
다음 조건이 만족되도록 30개의 점마다 색을 칠하고자 한다. 최대 몇 개의 색을 사용할 수 있을까?

> 각 점 A에 대하여, A와 선분으로 연결된 점 중 적어도 하나는 A와 같은 색으로 칠해야 한다.

012

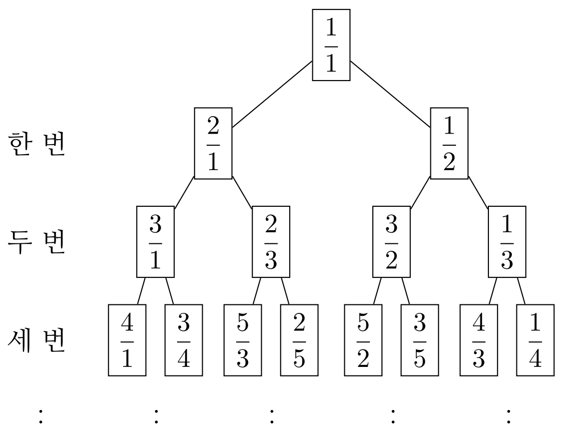
(뒷면에 계속)

16. 다음 그림에서 크고 작은 사각형은 모두 몇 개인가? (단, 네 각의 크기가 모두 180° 미만인 사각형만 센다.)



025

17. 분수 $\frac{1}{1}$에서 시작하여 분모를 분자에 더하거나 분자를 분모에 더하여 새로운 분수를 얻을 수 있다. 이러한 과정을 반복하면 다음과 같은 분수들을 얻는다.



분수 $\frac{999}{1234}$는 몇 번의 과정을 반복하여 얻게 되는가?

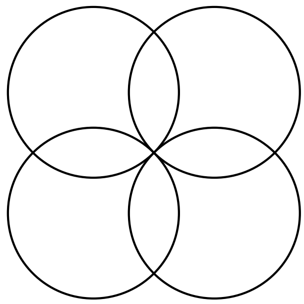
066

18. 다음 조건을 만족시키는 가장 큰 자연수 n은 무엇인가?

2024는 연속된 n개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.

023

19. 다음 그림과 같이 네 개의 원으로 만들어진 8개의 칸에 1부터 8까지의 자연수를 하나씩 중복되지 않게 써 넣으려 한다.



다음 조건을 만족시키는 가장 큰 자연수 n은 무엇인가?

각 원으로 둘러싸인 세 수의 합은 모두 n이다.

015

20. 자연수 n에 대하여 $n^3(= n \times n \times n)$의 약수의 개수가 n의 약수의 개수의 5배이다. 이때 $n^2(= n \times n)$의 약수의 개수는?

021

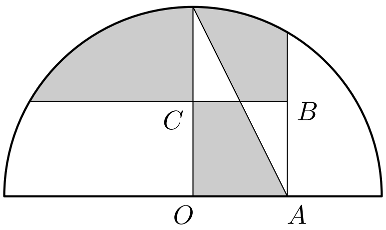
유형 나

2024
한국주니어수학올림피아드

2024년 9월 7일 제한시간 2시간

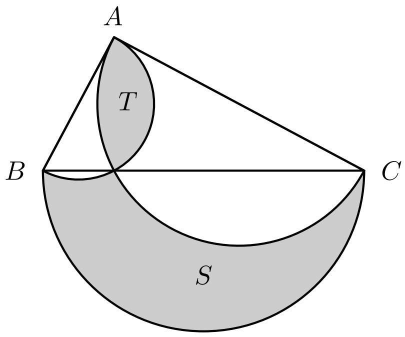
- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입해야 합니다.
- 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "1007"일 경우 "007"이라고 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 다음 그림에서 중심이 O인 반원의 반지름이 20이며 정사각형 $OABC$의 한 변의 길이는 10이다. 색칠된 영역의 넓이의 총합은? (단, 원주율은 3.14로 계산한다.)



264

2. 다음 그림에서 $\triangle ABC$는 직각삼각형이고, $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=12$, $\overline{BC}=13$이다. 세 변 AB, AC, BC를 지름으로 하는 반원을 그려 색칠된 두 영역 S와 T를 얻었다. S의 넓이와 T의 넓이의 차는?



030

3. 다음 그림과 같이 아홉 칸 중 몇 개의 칸에 $\diamondsuit$를 그려 넣어서 각 세로줄의 $\diamondsuit$의 개수가 순서대로 $1, 1, 2$이고, 첫 번째와 세 번째 가로줄의 $\diamondsuit$의 개수가 $1, 1$이 되도록 하려고 한다.

		$\diamondsuit$
	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$
$\diamondsuit$		

이 예를 포함하여 가능한 방법은 모두 몇 가지인가?

1			
1			
	1	**1**	**2**

005

4. 서로 다른 10 이하의 자연수 여섯 개 a, b, c, d, e, f를 골라서 $\dfrac{2a+2b}{e}+\dfrac{cd}{f}$의 값을 계산하자. 이렇게 얻은 값 중에서 가장 작은 것을 k라 할 때, $90k$는?

130

(뒷면에 계속)

2024

한국주니어수학올림피아드

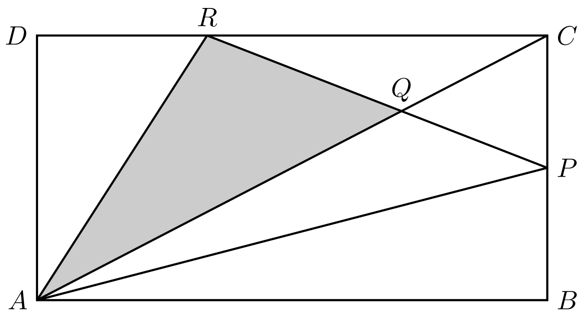
5. 다음과 같이 40보다 작은 홀수를 모두 곱하여 얻은 수를 N이라 하자.

$$N = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 39$$

이때 $m^3(= m \times m \times m)$이 N의 약수가 되도록 하는 자연수 m 중에서 가장 큰 수는 무엇인가?

945

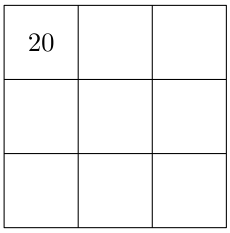
6. 다음 그림의 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{DR} = 9$, $\overline{RC} = 18$, $\overline{CP} = 7$, $\overline{PB} = 7$이다. 색칠된 영역의 넓이는?



090

7. 아홉 개의 수 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26이 있다. 다음 그림과 같이 왼쪽 위 칸에 먼저 20을 적었다. 서로 이웃한 칸에 적힌 두 수는 서로소가 되도록 나머지 여덟 개의 수를 써 넣는 방법은 모두 몇 가지인가?

(이웃한 칸은 대각선이 아닌 좌우 또는 위아래 칸을 말한다. 예를 들어, 그림에서 20이 적힌 칸과 이웃한 칸은 오른쪽 칸과 아래 칸 두 개뿐이다.)



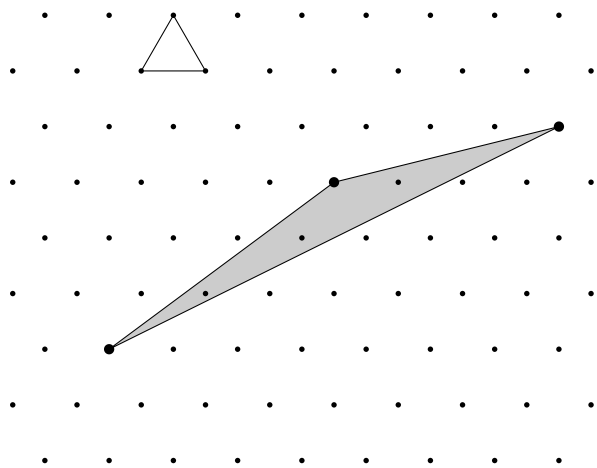
288

8. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n은 모두 몇 개인가?

> 분수 $\frac{1000}{n}$과 $\frac{999}{n}$를 각각 소수로 고쳐쓴 후, 소수점 아래를 버리면 서로 다른 정수가 된다.

016

9. 다음 그림의 정삼각형의 넓이가 1일 때, 색칠된 삼각형의 넓이는?



007

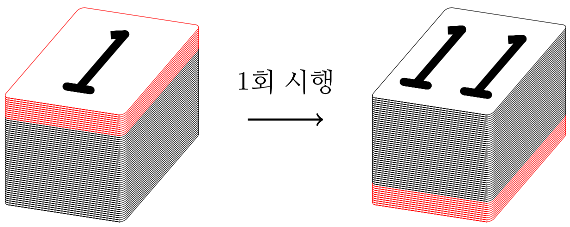
10. 다음 조건을 모두 만족시키는 가장 큰 자연수 n은 무엇인가?

> - n은 1000보다 작다.
> - n은 연속된 두 개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.
> - n은 연속된 세 개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.
> - n은 연속된 다섯 개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.

975

(뒷면에 계속)

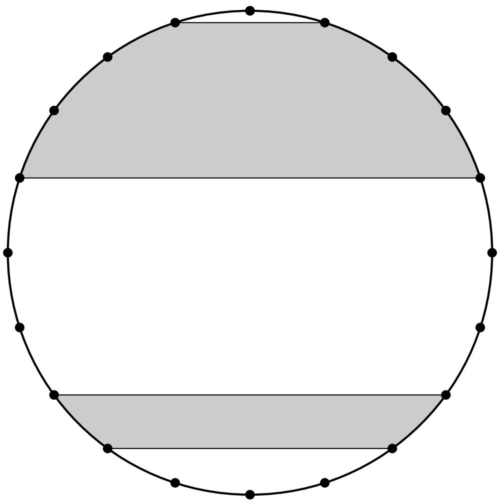
11. 위에서부터 차례로 $1, 2, 3, \ldots, 52$가 적혀있는 52장의 카드가 있다. 위쪽의 10장의 카드를 아래로 옮기기를 1회 시행하면 카드의 순서는 위에서부터 차례로 $11, 12, \ldots, 51, 52, 1, 2, \ldots, 9, 10$이 된다.



이와 같이 위쪽의 10장의 카드를 아래로 옮기기를 최소 몇 회 반복하여 시행하면 다시 처음 카드의 배열로 되돌아오게 되는가?

026

12. 다음 그림과 같이 반지름이 25인 원의 둘레를 20등분 하였다. 색칠된 영역의 넓이의 총합은? (단, 원주율은 3.14로 계산한다.)

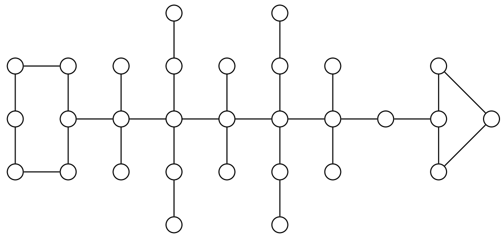


785

13. 세 자리 자연수 n을 7로 나누었을 때의 몫은 m이고, $\frac{m}{n}$을 기약분수로 나타내면 $\frac{p}{q}$이다. 이때 $n = 36p + q$가 성립한다면, n은 얼마인가?

216

14. 다음 그림은 30개의 점을 31개의 선분으로 연결한 것이다.



다음 조건이 만족되도록 30개의 점마다 색을 칠하고자 한다. 최대 몇 개의 색을 사용할 수 있을까?

> 각 점 A에 대하여, A와 선분으로 연결된 점 중 적어도 하나는 A와 같은 색으로 칠해야 한다.

012

15. 다음 규칙에 따라 정수를 나열하자.

> • 첫 번째 수는 양수 a이고, 두 번째 수는 100이다.
> • 세 번째 수 = (첫 번째 수) − (두 번째 수)
> • 네 번째 수 = (두 번째 수) − (세 번째 수)
> ⋮

예를 들어 $a = 123$인 경우 나열되는 수는 다음과 같으며, 이때 첫 번째 수부터 연속하여 4개의 양수가 나온다.

$$123, 100, 23, 77, -54, 131, -185, \ldots$$

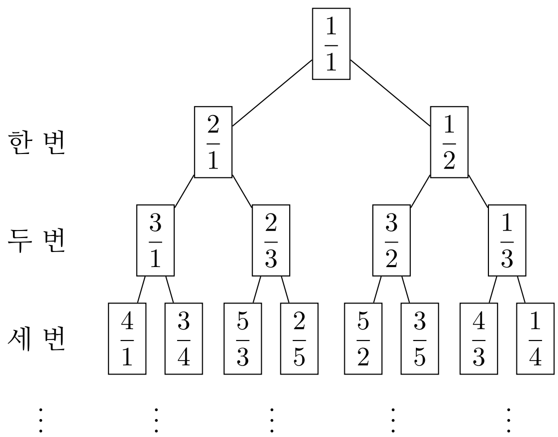
첫 번째 수 a부터 연속하여 가장 많은 개수의 양수가 나오도록 하는 수 a는 무엇인가?

162

(뒷면에 계속)

2024
한국주니어수학올림피아드

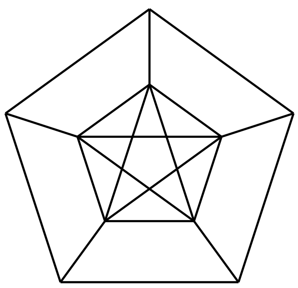
16. 분수 $\frac{1}{1}$에서 시작하여 분모를 분자에 더하거나 분자를 분모에 더하여 새로운 분수를 얻을 수 있다. 이러한 과정을 반복하면 다음과 같은 분수들을 얻는다.



분수 $\frac{999}{1234}$는 몇 번의 과정을 반복하여 얻게 되는가?

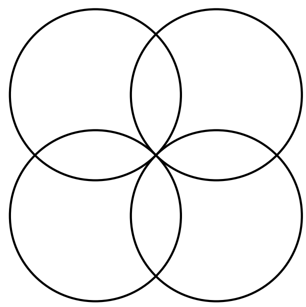
066

17. 다음 그림에서 크고 작은 사각형은 모두 몇 개인가? (단, 네 각의 크기가 모두 $180°$ 미만인 사각형만 센다.)



025

18. 다음 그림과 같이 네 개의 원으로 만들어진 8개의 칸에 1부터 8까지의 자연수를 하나씩 중복되지 않게 써 넣으려 한다.



다음 조건을 만족시키는 가장 큰 자연수 n은 무엇인가?

각 원으로 둘러싸인 세 수의 합은 모두 n이다.

015

19. 자연수 n에 대하여 $n^3(= n \times n \times n)$의 약수의 개수가 n의 약수의 개수의 5배이다. 이때 $n^2(= n \times n)$의 약수의 개수는?

021

20. 다음 조건을 만족시키는 가장 큰 자연수 n은 무엇인가?

2024는 연속된 n개의 자연수의 합으로 쓸 수 있다.

023

(뒷면에 계속)

유형 가

2025

한국주니어수학올림피아드

2025년 9월 6일 제한시간 2시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

1. 서로 다른 자연수 a, b, c에 대하여

$$\frac{a \times b \times c}{2a + 3b + 5c}$$

의 최솟값을 기약분수로 나타내면 $\frac{q}{p}$이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오.

029

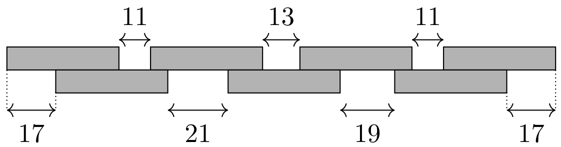
2. 1보다 큰 서로 다른 자연수 네 개가 있다. 이중에서 서로 다른 두 개를 골라 더한 수들은 각각

$$8,\ 13,\ 15,\ 19,\ 21,\ 26$$

이다. 네 수 중 가장 큰 수를 구하시오.

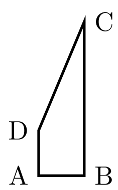
016

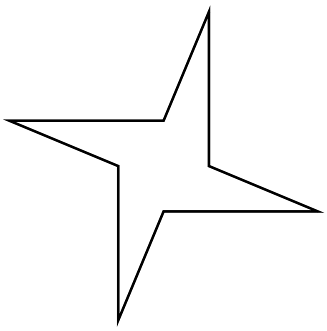
3. 크기와 모양이 같은 직사각형 일곱 개가 그림과 같이 놓여 있다. 직사각형 사이의 간격이 그림처럼 주어졌을 때, 직사각형의 가로의 길이를 구하시오.



039

4. 각 A, B가 직각인 왼쪽 사각형 네 조각을 붙여 오른쪽 도형을 만들었다. 오른쪽 도형의 둘레의 길이가 왼쪽 사각형 둘레의 길이의 세 배이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$일 때, 사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오.





040

5. 자연수 N은 1부터 11까지의 곱 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \times 11$이다. N의 약수 중에서 일의 자릿수가 3인 수들의 합을 구하시오.

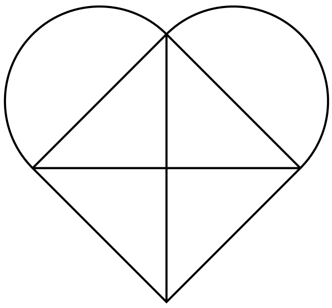
792

(뒷면에 계속)

유형 가

2025
한국주니어수학올림피아드

6. 다음 그림의 영역 여섯 개를 빨간색, 노란색, 파란색으로 칠하려고 한다. 같은 색은 여러 번 사용할 수 있지만, 변을 공유하는 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때 전체 영역을 칠할 수 있는 방법의 수는 몇 가지인가?



072

7. 1부터 9까지 아홉 개의 숫자를 상자에 넣으면 가로와 세로로 여섯 개의 세 자리 수가 만들어진다. 예를 들어 아래와 같은 배열에서는 $123, 456, 789, 147, 258, 369$가 만들어진다.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

다음 조건이 모두 성립하도록 상자에 1부터 9까지 아홉 개의 숫자를 넣었을 때 세 자리 수 $100a + 10b + c$는 무엇인가?

a	$\star$	
$\star$	b	$\star$
	$\star$	c

(1) a는 1이 아니다.

(2) $\star$ 위치에는 짝수만 들어간다.

(3) 가로와 세로로 만들어지는 여섯 개의 세 자리 수를 모두 더하면 2700이다.

539

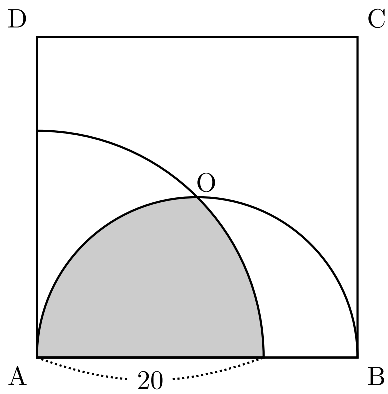
8. 51개의 수

$$98,\ 998,\ \underbrace{999}_{3\text{개}}8,\ \ldots,\ \underbrace{999\cdots9}_{50\text{개}}8,\ \underbrace{999\cdots9}_{51\text{개}}8$$

을 모두 더하여 얻은 자연수를 N이라 할 때, N의 모든 자리의 수의 합을 구하시오.

075

9. 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 하자. 길이 20인 선분 OA를 반지름으로 하는 부채꼴과 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그려 아래 그림을 얻었다. 색칠된 부분의 넓이를 구하시오. (단, 원주율은 3.14로 계산한다.)



214

10. 네 자리 자연수 $abcd$로부터 다른 네 자리 자연수 $bcda$를 만들었다. 이런 꼴을 가진 두 수의 공약수가 될 수 있는 가장 큰 세 자리 자연수를 구하시오.

909

(뒷면에 계속)

유형 가

2025

한국주니어수학올림피아드

11. 자연수 a, b, c에 대하여 $2^a + 2^b + 2^c$의 꼴로 쓸 수 있는 수를 작은 것부터 차례로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1 + 2^1 + 2^1 \\ 8 &= 2^2 + 2^1 + 2^1 \\ 10 &= 2^2 + 2^2 + 2^1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

이렇게 차례로 썼을 때 25번째 수를 구하시오.

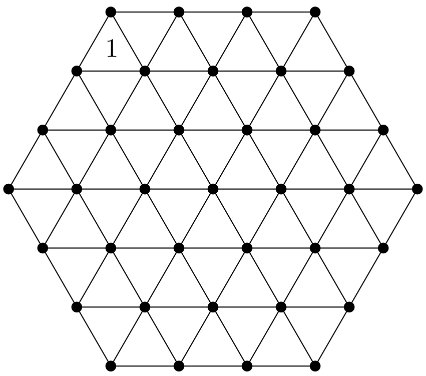
066

12. 다음 조건이 성립하는 세 자리 자연수 n은 모두 몇 개인가?

> n과 55×55의 최소공배수는 어떤 자연수의 제곱수이다.

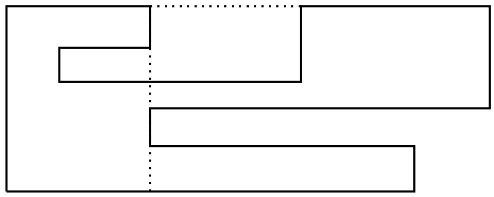
039

13. 넓이가 1인 정삼각형을 변을 따라 이어붙여 아래 그림과 같은 도형을 얻었다. 그림에서 • 표시된 점들 중 세 개를 꼭짓점으로 하는 정삼각형을 만들 때, 세 꼭짓점을 제외하면 변 위에는 • 표시된 점이 놓이지 않도록 하려고 한다. 이런 정삼각형 중에서 가장 큰 정삼각형의 넓이를 구하시오.



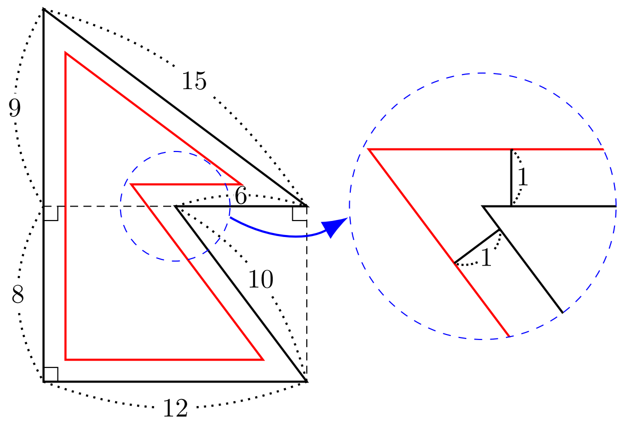
021

14. 아래 도형은 14개의 선분을 수직으로 이어붙여 만든 것이다. 이 도형의 14개의 선분 중 최소 몇 개의 길이를 알면 이 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있겠는가?



005

15. 아래 그림과 같이 바깥쪽 도형의 각 변에 평행한 선분을 그어 안쪽 도형을 그렸다. 오른쪽 그림처럼 평행한 두 선분의 거리는 모두 1이다. 안쪽 도형의 둘레의 길이를 구하시오.



048

16. 거꾸로 읽어도 원래 수와 같은 수를 대칭수라 하자. 예를 들어 33, 121, 8998은 대칭수이다. 자연수 2025를 두 대칭수의 합으로 썼을 때, 두 대칭수 중에서 작은 수를 구하시오.

474

(뒷면에 계속)

2025

한국주니어수학올림피아드

17. 바둑 선수 A, B, C가 다음 규칙에 따라 반복하여 대결한다.

- 첫 경기에서 A와 B가 대결한다.
- 대결에서 패한 선수는 한 번 쉬고 이어지는 경기에서는 남은 두 선수가 대결한다.
- 한 선수가 누적하여 3패 하면 탈락한다.
- 탈락한 선수가 생기면 남은 선수끼리 계속하여 대결한다.
- 무승부는 없다.

이러한 규칙에 따라 대결하여 얻은 각 선수의 전적은 A가 a승 3패, B가 b승 3패, C가 5승 c패였다. 이러한 결과가 나올 수 있는 순서쌍 (a, b, c)는 모두 몇 가지인가?

006

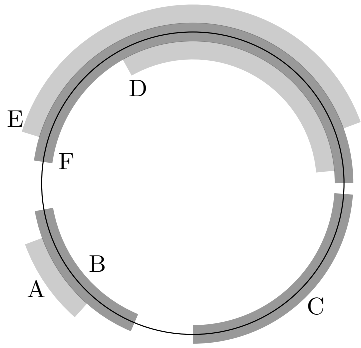
18. 비밀번호를 알아내어 방을 탈출하는 게임이 있다. 방 번호가 115일 때 비밀번호가 523이라는 힌트가 주어졌다. 원래 비밀번호의 규칙은 방 번호 115를 소인수분해하여 소인수 5와 23을 작은 수부터 차례로 적은 것이었다. 하지만 병재는 비밀번호의 규칙이 다음과 같다고 생각했다.

"비밀번호 첫 자리에 방 번호 끝 자리 수인 5를 적고, 이어서 방 번호 115를 5로 나눈 수 23을 적었네."

방 번호가 122인 경우도 병재의 방법대로 맞는 비밀번호 261이 나온다. 한편, 방 번호 102는 비밀번호가 2317인데, 병재의 방법으로는 틀린 비밀번호 251이 나오고, 방 번호 103이나 110은 병재의 방법이 적용될 수 없다. 100 이상 200 이하의 방 번호 중에서 병재의 방법대로 하여 맞는 비밀번호를 찾게 되는 것은 모두 몇 개인가?

008

19. 반지름이 r인 원 위에 길이가 각각 $1, 2, 3, 4, 5, 6$인 호 A, B, C, D, E, F를 그렸다. 이때 겹쳐 있는 서로 다른 두 개의 호가 총 몇 쌍이 있는지 세려고 한다. 예를 들어 아래의 그림에서는 총 네 쌍의 호가 겹쳐 있다 (A와 B, D와 E, D와 F, E와 F).



반지름 r이 각각 $1, \frac{3}{2}, 2$일 때, 가장 적은 쌍의 호가 겹치도록 그리면 총 x, y, z 쌍이 겹치게 된다. 이때 $x+y+z$의 값을 구하시오. (단, 원주율은 3.1로 계산한다.)

018

20. 칠판에 10000이 적혀 있다. 다음 규칙에 따라 칠판에 적힌 수의 개수를 두 배로 늘린다.

> 칠판에 x라는 수가 있으면 이 수를 지우고 $x+1$과 $\frac{1}{x}$을 쓴다.

예를 들어 이 규칙에 따라 한 번 고쳐 쓰면 10001과 $\frac{1}{10000}$이 적힌다. 이 규칙에 따라 여섯 번 고쳐 써서 칠판에 64개의 수가 적혔을 때, 이 수들의 평균을 A라 하자. $\frac{A}{100}$에 가장 가까운 정수를 구하시오.

020

(끝)

유형 나

2025

한국주니어수학올림피아드

2025년 9월 6일 제한시간 2시간

- 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.
- 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이**단**어져 있습니다.
- 각 문항의 답은 **세 자리수**로 기입해야 합니다. 예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입해야 합니다.
- 각 문항의 점수는 5점입니다.

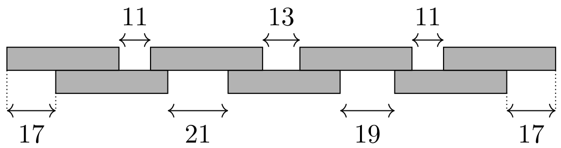
1. 1보다 큰 서로 다른 자연수 네 개가 있다. 이중에서 서로 다른 두 개를 골라 더한 수들은 각각

$$8,\ 13,\ 15,\ 19,\ 21,\ 26$$

이다. 네 수 중 가장 큰 수를 구하시오.

$\boxed{016}$

2. 크기와 모양이 같은 직사각형 일곱 개가 그림과 같이 놓여 있다. 직사각형 사이의 간격이 그림처럼 주어졌을 때, 직사각형의 가로의 길이를 구하시오.



$\boxed{039}$

3. 서로 다른 자연수 a, b, c에 대하여

$$\frac{a \times b \times c}{2a + 3b + 5c}$$

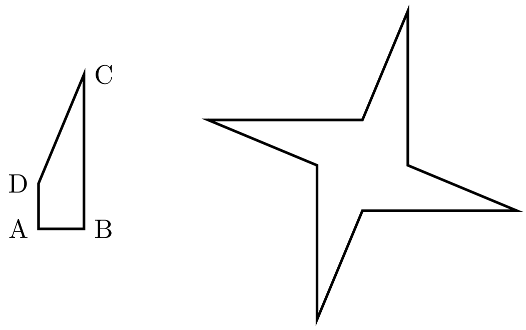
의 최솟값을 기약분수로 나타내면 $\frac{q}{p}$이다. 이때 $p + q$의 값을 구하시오.

$\boxed{029}$

4. 자연수 N은 1부터 11까지의 곱 $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 \times 11$이다. N의 약수 중에서 일의 자릿수가 3인 수들의 합을 구하시오.

$\boxed{792}$

5. 각 A, B가 직각인 왼쪽 사각형 네 조각을 붙여 오른쪽 도형을 만들었다. 오른쪽 도형의 둘레의 길이가 왼쪽 사각형 둘레의 길이의 세 배이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$일 때, 사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오.



$\boxed{040}$

(뒷면에 계속)

2025

한국주니어수학올림피아드

6. 1부터 9까지 아홉 개의 숫자를 상자에 넣으면 가로와 세로로 여섯 개의 세 자리 수가 만들어진다. 예를 들어 아래와 같은 배열에서는 $123, 456, 789, 147, 258, 369$가 만들어진다.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

다음 조건이 모두 성립하도록 상자에 1부터 9까지 아홉 개의 숫자를 넣었을 때 세 자리 수 $100a + 10b + c$는 무엇인가?

a	$\star$	
$\star$	b	$\star$
	$\star$	c

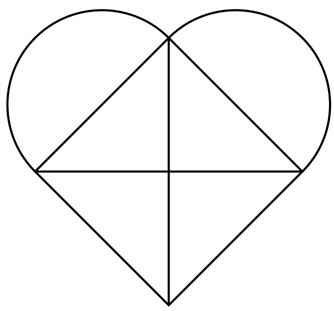
(1) a는 1이 아니다.

(2) $\star$ 위치에는 짝수만 들어간다.

(3) 가로와 세로로 만들어지는 여섯 개의 세 자리 수를 모두 더하면 2700이다.

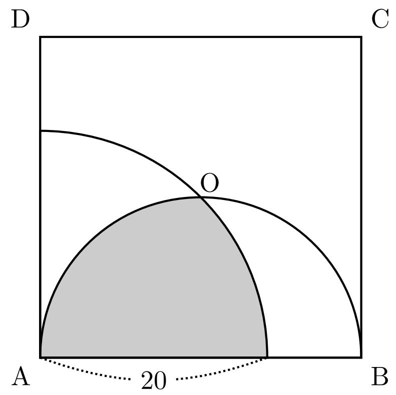
$\boxed{539}$

7. 다음 그림의 영역 여섯 개를 빨간색, 노란색, 파란색으로 칠하려고 한다. 같은 색은 여러 번 사용할 수 있지만, 변을 공유하는 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때 전체 영역을 칠할 수 있는 방법의 수는 몇 가지인가?



$\boxed{072}$

8. 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 하자. 길이 20인 선분 OA를 반지름으로 하는 부채꼴과 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그려 아래 그림을 얻었다. 색칠된 부분의 넓이를 구하시오. (단, 원주율은 3.14로 계산한다.)



$\boxed{214}$

9. 네 자리 자연수 $abcd$로부터 다른 네 자리 자연수 $bcda$를 만들었다. 이런 꼴을 가진 두 수의 공약수가 될 수 있는 가장 큰 세 자리 자연수를 구하시오.

$\boxed{909}$

10. 51개의 수

$$98,\ 998,\ \underbrace{999}_{3\text{개}}8,\ \ldots,\ \underbrace{999\cdots}_{50\text{개}}98,\ \underbrace{999\cdots}_{51\text{개}}98$$

을 모두 더하여 얻은 자연수를 N이라 할 때, N의 모든 자리의 수의 합을 구하시오.

$\boxed{075}$

(뒷면에 계속)

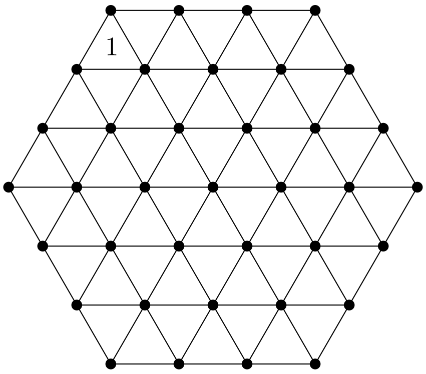
2025
한국주니어수학올림피아드

11. 다음 조건이 성립하는 세 자리 자연수 n은 모두 몇 개인가?

> n과 55×55의 최소공배수는 어떤 자연수의 제곱수이다.

039

12. 넓이가 1인 정삼각형을 변을 따라 이어붙여 아래 그림과 같은 도형을 얻었다. 그림에서 • 표시된 점들 중 세 개를 꼭짓점으로 하는 정삼각형을 만들 때, 세 꼭짓점을 제외하면 변 위에는 • 표시된 점이 놓이지 않도록 하려고 한다. 이런 정삼각형 중에서 가장 큰 정삼각형의 넓이를 구하시오.



021

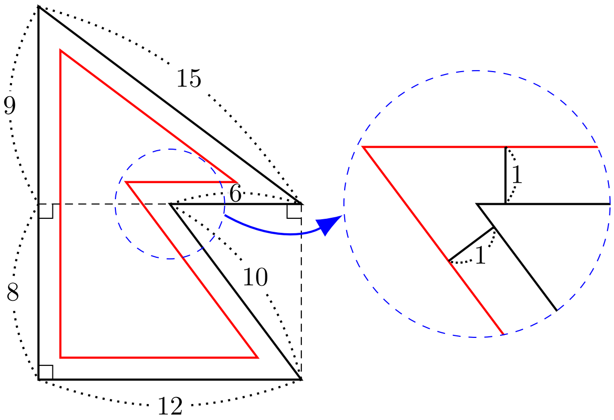
13. 자연수 a, b, c에 대하여 $2^a + 2^b + 2^c$의 꼴로 쓸 수 있는 수를 작은 것부터 차례로 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1 + 2^1 + 2^1 \\ 8 &= 2^2 + 2^1 + 2^1 \\ 10 &= 2^2 + 2^2 + 2^1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

이렇게 차례로 썼을 때 25번째 수를 구하시오.

066

14. 아래 그림과 같이 바깥쪽 도형의 각 변에 평행한 선분을 그어 안쪽 도형을 그렸다. 오른쪽 그림처럼 평행한 두 선분의 거리는 모두 1이다. 안쪽 도형의 둘레의 길이를 구하시오.

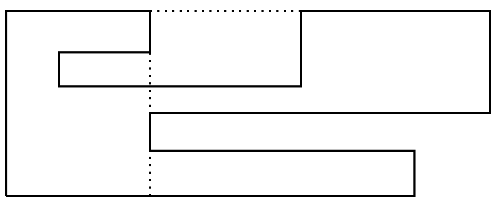


048

15. 거꾸로 읽어도 원래 수와 같은 수를 대칭수라 하자. 예를 들어 33, 121, 8998은 대칭수이다. 자연수 2025를 두 대칭수의 합으로 썼을 때, 두 대칭수 중에서 작은 수를 구하시오.

474

16. 아래 도형은 14개의 선분을 수직으로 이어붙여 만든 것이다. 이 도형의 14개의 선분 중 최소 몇 개의 길이를 알면 이 도형의 둘레의 길이를 구할 수 있겠는가?



005

(뒷면에 계속)

유형 나

2025
한국주니어수학올림피아드

17. 비밀번호를 알아내어 방을 탈출하는 게임이 있다. 방 번호가 115일 때 비밀번호가 523이라는 힌트가 주어졌다. 원래 비밀번호의 규칙은 방 번호 115를 소인수분해하여 소인수 5와 23을 작은 수부터 차례로 적은 것이었다. 하지만 병재는 비밀번호의 규칙이 다음과 같다고 생각했다.

“비밀번호 첫 자리에 방 번호 끝 자리 수인 5를 적고, 이어서 방 번호 115를 5로 나눈 수 23을 적었네.”

방 번호가 122인 경우도 병재의 방법대로 맞는 비밀번호 261이 나온다. 한편, 방 번호 102는 비밀번호가 2317인데, 병재의 방법으로는 틀린 비밀번호 251이 나오고, 방 번호 103이나 110은 병재의 방법이 적용될 수 없다. 100 이상 200 이하의 방 번호 중에서 병재의 방법대로 하여 맞는 비밀번호를 찾게 되는 것은 모두 몇 개인가?

008

18. 바둑 선수 A, B, C가 다음 규칙에 따라 반복하여 대결한다.

- 첫 경기에서 A와 B가 대결한다.
- 대결에서 패한 선수는 한 번 쉬고 이어지는 경기에서는 남은 두 선수가 대결한다.
- 한 선수가 누적하여 3패 하면 탈락한다.
- 탈락한 선수가 생기면 남은 선수끼리 계속하여 대결한다.
- 무승부는 없다.

이러한 규칙에 따라 대결하여 얻은 각 선수의 전적은 A가 a승 3패, B가 b승 3패, C가 5승 c패였다. 이러한 결과가 나올 수 있는 순서쌍 (a, b, c)는 모두 몇 가지인가?

006

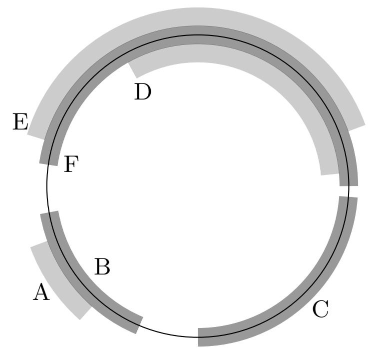
19. 칠판에 10000이 적혀 있다. 다음 규칙에 따라 칠판에 적힌 수의 개수를 두 배로 늘린다.

> 칠판에 x라는 수가 있으면 이 수를 지우고 $x+1$과 $\frac{1}{x}$을 쓴다.

예를 들어 이 규칙에 따라 한 번 고쳐 쓰면 10001과 $\frac{1}{10000}$이 적힌다. 이 규칙에 따라 여섯 번 고쳐 써서 칠판에 64개의 수가 적혔을 때, 이 수들의 평균을 A라 하자. $\frac{A}{100}$에 가장 가까운 정수를 구하시오.

020

20. 반지름이 r인 원 위에 길이가 각각 $1, 2, 3, 4, 5, 6$인 호 A, B, C, D, E, F를 그렸다. 이때 겹쳐 있는 서로 다른 두 개의 호가 총 몇 쌍이 있는지 세려고 한다. 예를 들어 아래의 그림에서는 총 네 쌍의 호가 겹쳐 있다 (A와 B, D와 E, D와 F, E와 F).



반지름 r이 각각 $1, \frac{3}{2}, 2$일 때, 가장 적은 쌍의 호가 겹치도록 그리면 총 x, y, z 쌍이 겹치게 된다. 이때 $x+y+z$의 값을 구하시오. (단, 원주율은 3.1로 계산한다.)

018

(끝)