# COMPENDIUM CDP

## Concurso de Primavera

Toomates Coolección vol. 53.2

# Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Atribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

**Problem Solving** (en español):

Geometría Axiomática  Problemas de Geometría Vol. 1  Vol. 2  Vol. 3
Introducción a la Geometría  Álgebra  Teoría de números Vol. 1  Vol. 2  Combinatoria
Probabilidad Trigonometría  Desigualdades  Números complejos  Calculus & Precalculus

**Libros de texto para ESO y bachillerato** (en español y en catalán):

Cálculo infinitesimal ESP CAT  Álgebra Lineal ESP CAT  Geometría Lineal ESP CAT
Números Complejos ESP CAT  Combinatoria y probabilidad ESP CAT  Estadística ESP CAT
Programación Lineal ESP CAT  Álgebra ESP CAT  Trigonometria ESP CAT
Geometria analítica ESP CAT  Funciones ESP CAT  Números (Preálgebra) ESP CAT
Proporcionalidad ESP CAT  Medidas geométricas ESP CAT  Mates amb Excel

**PAU españolas:**

Cataluña TEC  Cataluña CCSS  Valencia  Galicia  País Vasco  Baleares

**Reválidas internacionales:**

Portugal  Italia  Francia  Rumanía  Hungría  Polonia  Pearson Edexcel International A Level
China-Gaokao  China-Zhongkao  Corea-Suneung  Israel-Bagrut  Cambridge Int A Level
Cambridge IGCSE  AQA GCSE  International Baccalaureate (IB)  Pearson Edexcel IGCSE

**Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:**

ACM6EP  ACM4  CFGS  PAP

**Competiciones matemáticas**:

Canguro: España  Cataluña  Francia  USA  Reino Unido  Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam HMMT
España: OME  OMEFL  OMEEX  OMC  OMEA  OMEM  OMA  CDP  OFEM
Europa: OMI  Arquimede  BMO  BalkanMO  JBMO  OPM  OMP  OMJ  ONM
Internacional: IMO  IGO  SMT  INMO  CMO  EGMO  KMO  KJMO
AHSME: Book 1  2  3  4  5  6  7  8  9

**Otros materiales:**

Pizzazz! ( Book A  B  C  D  E  Pre-Algebra  Algebra ) ,  REOIM , Llibre3r , Excalibur

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

**¡Ayuda a mejorar!** Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
**¡No utilices una versión anticuada!** Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net

**¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates** Aquí MEGA

Visita mi **Canal de Youtube**: https://www.youtube.com/c/GerardRomo

Visita mi **blog:** https://toomatesbloc.blogspot.com/

Versión de este documento: **23/02/2026**

## Este documento forma parte del grupo:

Concurso de Primavera 1997 – 2009
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumCDP.pdf

Concurso de Primavera 2010 – 2022
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumCDP2.pdf

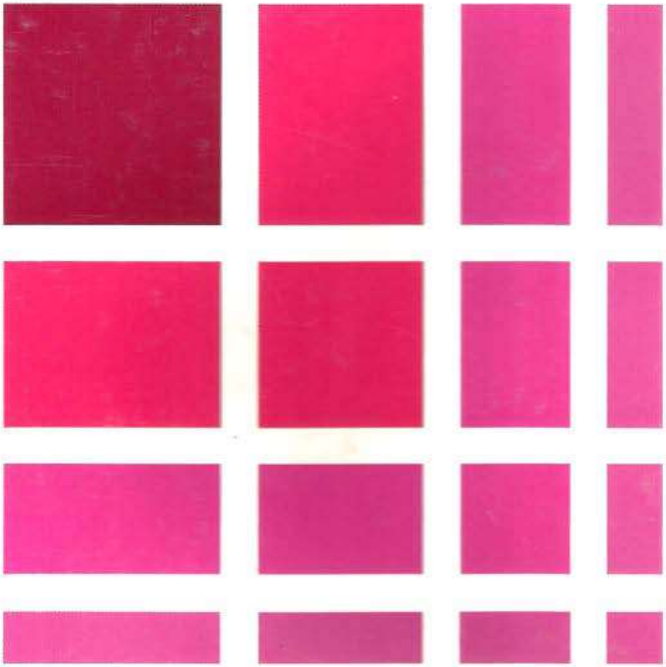
Concurso de Primavera 2023 – Actualidad
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumCDP3.pdf

## Fuente.

https://www.concursoprimavera.es/#problemas

Este recopilatorio se ha generado con la herramienta on-line www.ilovepdf.com

# XV concurso de primavera



MATEMÁTICAS 2011

Comunidad de Madrid

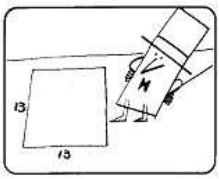
***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*Alfredo Martínez Sanz*
*Pilar Ruiz Cervigón*
*Merche Sánchez Benito*
*Javier Soler Areta*

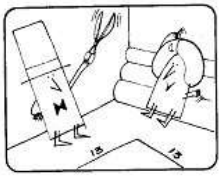
*Luis Ferrero de Pablo*
*María Gaspar Alonso-Vega*
*Francisco López Álvarez*
*María Moreno Warleta*
*Víctor Manuel Sánchez González*
*Esteban Serrano Marugán*
*José María Sordo Juanena*

*A Martín Gardner*
(1914-2010)

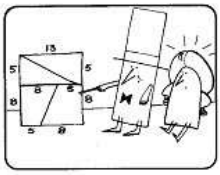
*Martin ha convertido miles de niños en matemáticos y miles de matemáticos en niños.* (Ronald Graham).



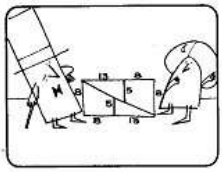

Randi, mago famoso conocido en todo el mundo, tiene una alfombra de 13 por 13 decímetros, y la quiere transformar en otra de 8 por 21. Para ello, Randi llevó su alfombra a Omar, un especialista.




**Randi:** Omar, amigo mío, quiero que cortes esta alfombra en cuatro piezas, y luego montes con ellas una alfombra rectangular de 8 por 21 decímetros.
**Omar:** Lo lamento, señor Randi. Es usted un gran mago, pero no anda bien de aritmética. 13 por 13 son 169, mientras que 8 por 21 son 168. No podrá ser.




**Randi:** Querido Omar, el gran Randi *jamás* se equivoca. Ten la bondad de cortar la alfombra en cuatro piezas como éstas.




Omar hizo como se le dijo. Después Randi reagrupó las piezas, y Omar las cosió, formando una alfombra de 8 por 21.
**Omar:** ¡No puedo creerlo! El área se ha contraído, de 169 a 168 $dm^2$! ¿Qué ha ocurrido con el decímetro cuadrado que falta?

## *Presentación*

El Concurso de Primavera cumple quince años y se viste de alto a lo largo y ancho de la Comunidad de Madrid.

En ese tiempo hemos podido comprobar el deseo y la apuesta de padres, alumnos y profesores por una enseñanza escolar cálida y de calidad, en cuyos cimientos deben estar las matemáticas.

Comité Organizador

*Agradecimientos:*

*A los participantes y colaboradores del Concurso.*

*A la Facultad de Matemáticas., al Consejo Social y al Vicerrectorado de Alumnos de la U. C.M.*

*Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dir. Gral. de Ordenación Académica de la Consejería de Educación.*

*A educamadrid*

*A las editoriales* Grupo ANAYA y Ediciones S.M,

*Al grupo empresarial* El Corte Inglés

*A la librería Aviraneta*

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 1ª FASE: 3 de marzo de 2010

## NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

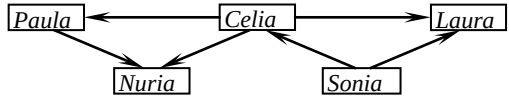
**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

**1** ¿Cuánto suman las cifras del número 1 000 000 000 – 123 456 789?

**A)** 64 **B)** 45 **C)** 46 **D)** 37 **E)** 39

**2** Si *Paula* ⟶ *Nuria* significa que Paula es mayor que Nuria, ¿quién es la mayor de todas las niñas que aparecen en el diagrama?




**A)** Celia **B)** Laura **C)** Nuria **D)** Paula **E)** Sonia

**3** Alfredo, Francisco, Luis y Víctor quedan todas las tardes para su partida de dominó. Hoy Alfredo ha llegado siete minutos después que Francisco. Luis ha llegado tres minutos después que Francisco y seis minutos antes que Víctor. ¿Cuántos minutos tuvo que esperar el que llegó primero hasta que llegó el último?

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

**4** Si cada consonante vale 2 y cada vocal vale 1, ¿cuál es el resultado de $[P\cdot(R+I)-(M+A)]:(V:E+R-A)$?

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** 1 **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** 0

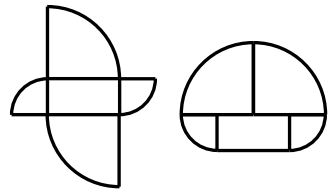
**5** El panadero Don Miga es muy hábil cortando barras de pan. Es capaz de cortar una barra en tres trozos en tan solo 12 milésimas de segundo. Siguiendo este ritmo veloz, ¿cuántas milésimas de segundo tardará Don Miga en cortar otra barra de pan en seis trozos?

**A)** 30 **B)** 28 **C)** 26 **D)** 24 **E)** 20

**6** Julián ha ahorrado dos euros y su hermanita Lucía, uno. Deciden comprarse chuches y entre los dos gastan 1,40 €. Si a Julián le queda el triple de dinero que a Lucía, ¿cuántos céntimos gastó Julián?

**A)** 80 **B)** 60 **C)** 35 **D)** 105 **E)** 30

**7** Con cuatro cuartos de círculos y un rectángulo cuya base mide el doble que su altura he formado estas dos figuras. Si la altura del rectángulo mide 5 cm, ¿cuál es, en cm, la diferencia de sus perímetros?

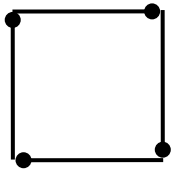


**A)** 2,5 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 20 **E)** 30

**8** Mariquilla ha recortado una **X**, una **I** y una **V** para hacer el cartel del XIV Concurso de Primavera. Se pone a jugar con ellas y piensa: "*Con estas letras puedo escribir el 10, el 11,…*"
¿Cuántos números romanos distintos se pueden formar con esas tres letras?

**A)** Siete **B)** Nueve **C)** Diez **D)** Doce **E)** Quince

**9** Saray puede meter 25 pulgas en este cuadrado construido con cuatro cerillas. ¿Cuántas cerillas necesitará para construir un cuadrado en el que quepan 100 pulgas?



**A)** 12 **B)** 16 **C)** 8 **D)** 10

**E)** 15

**10** La tabla de la figura está rellena con las letras A, M, O y R, de forma que en cada fila y columna aparecen esas cuatro letras. ¿En qué línea se lee la palabra AMOR?

| | C1 ↓ | C2 ↓ | C3 ↓ | C4 ↓ |
|---|---|---|---|---|
| F1→ | | A | | |
| F2→ | M | | | |
| F3→ | | | | |
| F4→ | R | | M | |

**A)** Fila 2 **B)** Columna 4

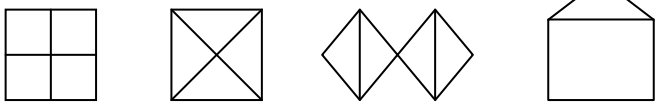
**C)** Fila 3 **D)** Columna 1

**E)** Columna 2

**11** La ardilla Amarilla se dispone a recorrer una larga fila de pinos. Comienza a saltar de uno a otro y cuando lleva un buen rato, descansa en un pino y recapacita así: "Uf, por delante de mí hay todavía el doble de pinos que los que tengo por detrás". A continuación avanza nueve pinos más y comenta: "Qué bien, ahora tengo por delante la mitad de pinos de los que tengo por detrás". ¿Cuántos pinos hay en la fila?

**A)** 27 **B)** 28 **C)** 29 **D)** 30 **E)** 31

**12** ¿Cuántos de estos dibujos pueden hacerse sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea?



**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E) 4**

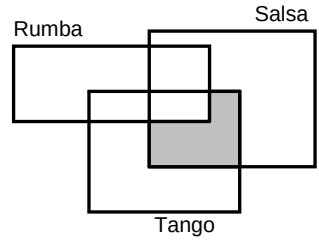
**13** Mamá ballena pesa 98,42 toneladas y su ballenato pesó al nacer 2 115 kg ¿Cuántos kilogramos debe engordar el ballenato para pesar la cuarta parte de lo que pesa su madre?

**A)** 345,5 **B)** 455 **C)** 2 235,5 **D)** 22 490 **E)** 26 720

**14** Un año en Marte dura 668 días marcianos. Sus habitantes dividen el año en diecinueve meses de igual número de días y un vigésimo mes que tiene algunos días menos, pero no muchos. ¿Cuántos días tiene el mes corto de Marte?

**A)** 18 **B)** 22 **C)** 28 **D)** 33 **E)** 34

**15** En la academia *Baila que te baila* ofrecen a sus alumnos tres bailes diferentes. En el diagrama están representados los alumnos que se han matriculado en cada baile. ¿Qué alumnos corresponden a los de la zona sombreada?




**A)** Los que bailan salsa y tango

**B)** Los que no bailan rumba

**C)** Los que bailan salsa o tango

**D)** Los que bailan salsa y tango pero no rumba

**E)** Los que bailan sólo dos bailes

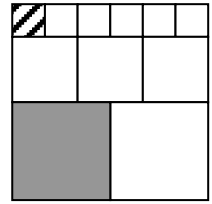
**16** El número de cuatro cifras 86❁✹ es divisible entre tres, cuatro y cinco. ¿Cuál es la suma de las dos cifras que faltan?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 14

**17** Observa el siguiente diseño: la *Figura* 1 tiene cuatro triángulos y un círculo, la 2 tiene cinco triángulos y dos círculos. ¿Cuántos triángulos y círculos en total tendrá la *Figura* 100?

**A)** 197 **B)** 200 **C)** 201 **D)** 203 **E)** 205

**18** Esta figura está formada juntando once cuadrados. Sabiendo que el cuadrado rayado tiene 1 $m^2$ de área, ¿qué área, en $m^2$, tiene el cuadrado sombreado?



**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

**19** Los hunos tienen billetes de 1, 11, 111 y 1111 atilanos. ¿Cuál es el menor número de billetes que hay que usar para pagar 3742 atilanos?

**A)** 13 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 22

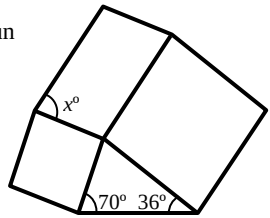
**20** ¿Cuál de las siguientes fracciones está más próxima a 1?

**A)** $\frac{12}{23}$ **B)** $\frac{23}{34}$ **C)** $\frac{34}{45}$ **D)** $\frac{45}{56}$ **E)** $\frac{56}{67}$

**21** Javier, Jesús, Joaquín, José María y Juanje tienen un grupo de rock llamado **5J**. Debido a sus obligaciones laborales, Javier solo puede tocar cada quince días; Jesús, cada seis; Joaquín, cada doce; José María, cada veinte y Juanje, cada dos. Si el 1 de enero dieron su primer concierto, ¿cuántos conciertos darán como máximo los **5J** a lo largo de 2010?

**A)** 60 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 7 **E)** 6

**22** En la figura podemos ver un triángulo, dos cuadrados y un romboide. ¿Cuál es la medida del ángulo $x$?

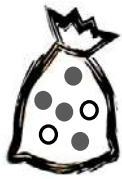



**A)** 54º **B)** 64º **C)** 70º **D)** 72º **E)** 74º

**23** La suma $1 + 22 + 333 + 4\,444 + 55\,555 + 5 + 44 + 333 + 2\,222 + 11\,111$ es igual a:

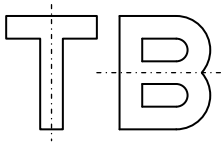
**A)** $6 \times 12\,345$ **B)** $5 \times 12\,346$ **C)** 654 321 **D)** $11 \times 43\,210$ **E)** 66 666

**24** Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?



**A)** Una **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**25** Algunas letras tiene ejes de simetría, como la **T** y la **B**, pero hay otras que no, como la **G** y la **Z**. ¿Cuántas letras distintas de **CONCURSO DE PRIMAVERA** no tienen ejes de simetría?



**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 1ª FASE: 3 de marzo de 2010

## NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

**1** ¿Cuál es el menor número, entre monedas y billetes, que debemos reunir para juntar 48,97 €?

**A)** 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

**2** Micaela ha dibujado un triángulo y ha unido los puntos medios de sus lados, formando así varios triángulos. En cada uno de esos triángulos ha repetido la misma acción: unir sus puntos medios. ¿En cuántos triangulitos de los más pequeños ha quedado dividido el triángulo inicial de Micaela?

**A)** Cuatro **B)** Diez **C)** Doce **D)** Dieciséis **E)** Dieciocho

**3** Una serpiente mide 4 codos y un cocodrilo mide 6 codos. Si utilizamos palmos, la serpiente mide 6 palmos. ¿Cuántos palmos mide el cocodrilo?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

**4** Si cada consonante vale 2 y cada vocal vale 1, ¿cuál es el resultado de: $[P+(R+I)^M-A]:[V\cdot(E+R)-A]$ ?

**A)** 1 **B)** $\frac{6}{5}$ **C)** $\frac{7}{5}$ **D)** $\frac{10}{7}$ **E)** 2

**5** En la siguiente lista de cinco números, los tres primeros suman cien; los tres del medio suman doscientos; y los tres últimos suman trescientos. ¿Qué número está en el centro de la lista?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **10** | | | | **130** |

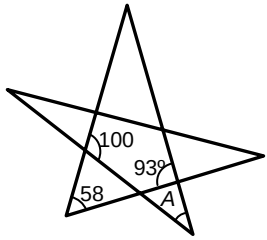
**A)** 100 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 50 **E)** 75

**6** Estoy pensando un número de tres cifras que al dividirlo entre 3, entre 5 y entre 11, da resto cero. Además, ninguna de sus cifras es la suma de las otras dos. ¿Cuál es la cifra de las centenas de mi número?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**7** Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo *A*?

**A)** 35º **B)** 42º **C)** 51º **D)** 65º **E)** 109º



**8** Javier dice haber descubierto esta interesante propiedad: "si $n$ es un número primo, entonces $2n+1$ también es primo". Pablo le dice que lo siente mucho pero que eso es falso. ¿Qué valor de $n$ niega la afirmación de Javier?

**A)** 3 **B)** 11 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 5

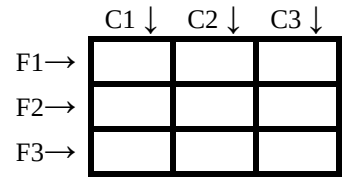
**9** Cuando tus abuelos tenían tu edad seguro que resolvieron este problema: ¿cuántas pesetas cuestan siete sardinas y media a peseta y media la sardina y media?

**A)** 7 y media **B)** 7 **C)** 6 y media **D)** 6 **E)** 1

**10** He olvidado dos cifras del número 28▲75■ que abre mi caja fuerte. Recuerdo que elegí esa clave porque era divisible entre 33. Sólo una de las siguientes igualdades puede ser verdadera. ¿Cuál?

**A)** ▲= ■ **B)** ▲= 4 **C)** ▲= 5 **D)** ■ = 8 **E)** ▲+ ■ es múltiplo de 3

**11** En la siguiente cuadrícula debes colocar todos los números desde el 1 hasta el 9. Para ello te damos estas pistas: la suma de los números de la columna C1 es 24; el producto de los números de la fila F1 es 27; la suma de los números de la fila F2 es 16; la suma de los números de la columna C3 es 14; todos los números de la fila F3 son pares.




¿Qué número estará colocado en la casilla central del cuadrado?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**12** De los cinco números: $123\,456$, $123^{456}$, $456^{123}$, $123 \cdot 456$, $12 \cdot 34 \cdot 56$, ¿cuántos son múltiplos de 9?

**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**13** Hoy, 3 de marzo de 2010, Goyo celebra dos aniversarios muy especiales: cumple 72 años y además cumple 34 años sin fumar. ¿En qué año celebró o celebrará que lleva la mitad de su vida sin fumar?

**A)** 2014 **B)** 2016 **C)** 2008 **D)** 2006 **E)** 2012

**14** Hay algunos números de tres cifras que tiene esta propiedad: si les quitas la primera cifra queda un cuadrado perfecto y si la cifra que quitas es la última también queda un cuadrado perfecto. ¿Cuánto vale la suma de todos estos números con tan curiosa propiedad?

**A)** 1013 **B)** 1177 **C)** 1465 **D)** 1993 **E)** 2016

**15** Dibuja un cuadrado y nombra sus vértices con las letras *A*, *B*, *C*, *D*, en dicho orden y en sentido antihorario. Encuentra un punto *P*, exterior al cuadrado, tal que las distancias *PA* y *PB* sean iguales al lado del cuadrado. Prolonga el segmento *PA* hasta que corte a la prolongación de la diagonal que parte de *B*. ¿Qué ángulo forman estas dos prolongaciones al cortarse?

**A)** 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º

**E)** No se cortan porque son paralelas

**16** ¿Cuántas cifras distintas tiene el producto $12\,345 \cdot 11\,111$?

**A)** Nueve **B)** Ocho **C)** Siete **D)** Seis **E)** Cinco

**17** La siguiente barra está dividida en cuatro partes iguales. Hacemos girar la barra 180º tres veces, la primera vez con centro en *A*, la segunda con centro en *B* y la tercera con centro en *E*. ¿Cuál de los puntos vuelve a quedar en la misma posición que al principio?

**A)** *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*

**18** Te enfrentas ahora a una suma secreta en la que letras diferentes representan cifras diferentes. Ahí van cinco pistas: las letras de la palabra **MORSA** corresponden a las cifras 8, 7, 6, 5, 2, aunque no necesariamente en ese orden. ¿Y no me dices nada de la **L**? No, no quiero, pero sí te diré que el número **OLA** no es múltiplo de 11. ¿A qué cifra corresponde la **S**?

$$\begin{array}{rcccc} & \mathbf{O} & \mathbf{L} & \mathbf{A} \\ + & \mathbf{S} & \mathbf{A} & \mathbf{L} \\ \hline & \mathbf{M} & \mathbf{A} & \mathbf{R} \end{array}$$

**A)** 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 2

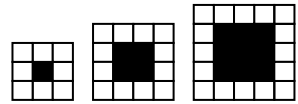
**19** Antonio y Beatriz pesan juntos 78 kilos, Beatriz y Carmen 76, Carmen y Daniel 80, Daniel y Enrique 76 kilos, y Enrique y Antonio 80. ¿Cuántos kilos pesan juntos, Antonio, Daniel y Enrique?

**A)** 117 **B)** 118 **C)** 119 **D)** 120 **E)** 121

**20** Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

**A)** 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

**21** ¿Cuántas baldosas blancas necesitaremos para rodear un cuadrado negro de 18 baldosas de lado?



**A)** 80 **B)** 76 **C)** 74 **D)** 72 **E)** 70

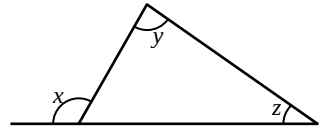
**22** En un partido de balonmano están ocupadas 748 localidades de un total de 850 plazas disponibles. ¿Qué frases de las siguientes son verdaderas?
I. Han quedado vacíos el 12% de los asientos.
II. De cada 25 asientos, 22 estaban ocupados.
III. La asistencia superó los tres cuartos.

**A)** Sólo la I **B)** Sólo la I y la III **C)** Todas son ciertas **D)** Sólo la I y la II **E)** Sólo la III

**23** Sofía ha encontrado una varilla de 48 dm en el taller de su casa y se ha propuesto construir con ella las aristas necesarias para formar un cubo sin desperdiciar ni un milímetro de varilla. ¿Qué volumen, en $dm^3$, ocupará el cubo de Sofía?

**A)** 64 **B)** 96 **C)** 144 **D)** 48 **E)** 16

**24** En la figura hemos señalado tres ángulos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?




**A)** $x = y + z$ **B)** $x > y + z$ **C)** $x < y + z$ **D)** $x < y$ **E)** $x < z$

**25** ¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen que la diferencia entre cada dos cifras vecinas siempre es 4?

**A)** 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 1ª FASE: 3 de marzo de 2010

## NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

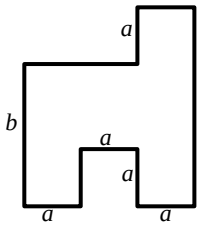
- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

**1** El dibujo de la derecha muestra el plano de una habitación en la que cualesquiera de las paredes que se juntan son perpendiculares. Si las longitudes de algunas paredes son $a$ y $b$, ¿cuál es el área de la habitación?




**A)** $3ab + b^2$ **B)** $8a + 2b$ **C)** $3ab - a^2$ **D)** $b^2 - a^2$ **E)** $3ab$

**2** Un grupo de estudiantes decide contratar un autobús para una excursión. Calculan que si cada uno paga 14 euros, faltarán 4 euros para poder pagar el alquiler del autobús, pero si cada uno paga 16 euros, sobrarán 6 euros. ¿Cuántos euros debe pagar cada uno para recaudar el precio exacto del alquiler del autobús?

**A)** 14,40 **B)** 14,60 **C)** 14,80 **D)** 15 **E)** 15,20

**3** En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es $x$?
(Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante).

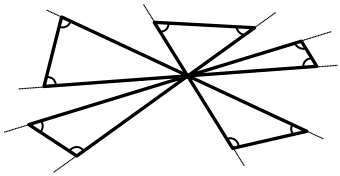
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 21 |
| | 16 | | | |
| | | 27 | | |
| | | | | $x$ |
| | | | | |

**A)** 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

**4** Llamamos *longitud* de un número natural al número de factores que tiene su descomposición en factores primos. Por ejemplo, la longitud de 30 es 3 pues $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y la longitud de 90 es 4 pues $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. ¿Cuántos números impares mayores que 2 pero menores que 100 tienen longitud 3?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** Nada de lo anterior

**5** ¿Cuál es la suma de los diez ángulos señalados en el dibujo en el que los triángulos los hemos construido ayudándonos de cinco rectas concurrentes?

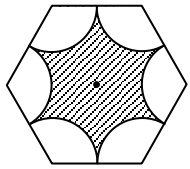


**A)** 300º **B)** 450º **C)** 360º **D)** 600º **E)** 720º

**6** Isa ha olvidado el código del candado de su bicicleta, que era de tres cifras distintas, pero recuerda que si dividía la primera entre la segunda y luego elevaba el resultado al cuadrado, obtenía la tercera. ¿Cuántos códigos tienen esta propiedad?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**7** Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la estrella central?



**A)** $3\sqrt{3}-\pi$ **B)** $6\sqrt{3}-2\pi$ **C)** $2\sqrt{6}-\pi$
**D)** $3\cdot\left(\sqrt{18}-\pi\right)$ **E)** $6\cdot\left(2\sqrt{3}-\pi\right)$

**8** En una circunferencia de radio 5, trazamos una cuerda *AB* de longitud 6. Si *C* es el punto medio del menor de los arcos *AB*, ¿cuál es la longitud de la cuerda *AC*?

**A)** $\sqrt{10}$ **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{15}$ **E)** 4

**9** En una sucesión de números, cada uno de ellos a partir del tercero es igual a la suma del doble del anterior más el anterior a éste, es decir: $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Si el tercero es 9 y el sexto es 128, ¿cuál es el valor del quinto?

**A)** 40 **B)** 53 **C)** 68 **D)** 88 **E)** 104

**10** Marta quiere comprar un ordenador y acude a dos tiendas. En la tienda A le rebajan un 15 % del precio y, posteriormente, le descuentan 90 euros. En la tienda B le rebajan un 25 % del precio sin descuento posterior. Si Marta se ahorra 15 euros comprando en la tienda A en lugar de en la B, ¿cuál era, en euros, el precio del ordenador?

**A)** 750 **B)** 900 **C)** 1000 **D)** 1050 **E)** 1500

**11** Los lados de un triángulo rectángulo son números enteros menores que 100. ¿En cuántos de estos triángulos se cumple que el cateto mayor y la hipotenusa son números consecutivos?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**12** Unimos los puntos medios de los lados de un cuadrado $S_1$ de área 16, formando así un nuevo cuadrado $S_2$. Hacemos lo mismo en $S_2$ para formar un nuevo cuadrado $S_3$. ¿Cuál es el área de $S_3$?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**13** ¿Cuánto mide, en cm, la hipotenusa de un triángulo rectángulo de 128 cm de perímetro y 320 $cm^2$ de área?

**A)** 57 **B)** 59 **C)** 61 **D)** 63 **E)** 65

**14** Si $k = 2^{2010} + 2010^2$, ¿cuál es la cifra de las unidades de $2^k + k^2$?

**A)** 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**15** En el segmento de extremos $A$ y $D$, marcamos los puntos $B$ y $C$. Si la longitud de $AB$ es cuatro veces la de $BD$ y la longitud de $AC$ es nueve veces la de $CD$, ¿qué fracción de $AD$ es $BC$?

**A)** $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{13}$ **C)** $\frac{1}{10}$ **D)** $\frac{5}{36}$ **E)** $\frac{1}{5}$

**16** ¿Cuántas parejas $(x, y)$ de enteros no negativos verifican que $3x + 2y = 50$?

**A)** 1 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 16 **E)** 17

**17** Si la ecuación de segundo grado $ax^2 - 2ax + b = 0$ tiene dos soluciones, ¿cuál es la media aritmética de dichas soluciones?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** $\frac{b}{a}$ **D)** $\frac{2b}{a}$ **E)** $\sqrt{2a-b}$

**18** Si terminamos de rellenar el cuadrado mágico de la figura (los tres números de cualquier fila, columna o diagonal suman lo mismo), ¿cuál es el mayor número que aparece en el cuadrado?

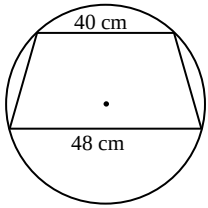
| | | |
|---|---|---|
| 8 | | 4 |
| | | |
| | | 10 |

**A)** 10 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

**19** Un polinomio $P$ de grado dos tiene dos raíces enteras distintas. El coeficiente de $x^2$ es 1 y el coeficiente del término de primer grado es 20. ¿Cuál es el mayor valor numérico que puede tomar para $x = 1$?

**A)** 120 **B)** 108 **C)** 107 **D)** 96 **E)** 40

**20** En una circunferencia de radio 25 cm, inscribimos un trapecio isósceles de bases 40 y 48 cm. ¿Cuál es, en $cm^2$, su área?




**A)** 968 **B)** 954 **C)** 944 **D)** 920 **E)** 900

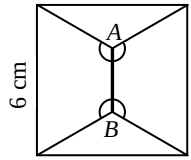
**21** ¿Cuántos números de seis cifras distintas $abcdef$ formados con las cifras del 1 al 6 son múltiplos de 12?

**A)** 192 **B)** 48 **C)** 130 **D)** 240 **E)** 18

**22** ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que divide a $9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot 9\,999 \cdot 99\,999 \cdot 999\,999$?

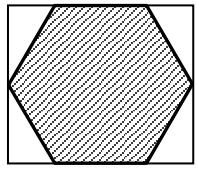
**A)** 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

**23** En este cuadrado de 6 cm de lado hemos marcado cuatro ángulos que miden 120º cada uno. ¿Cuántos centímetros mide el segmento *AB*?



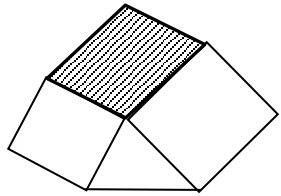

**A)** $6-2\sqrt{3}$ **B)** $3\sqrt{3}-2$ **C)** 4 **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** $3\sqrt{2}$

**24** El rectángulo de la figura tiene 64 cm$^2$ de área. ¿Cuál es, en cm$^2$, el área del hexágono regular inscrito?



**A)** 36 **B)** 40 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 56

**25** La figura está formada por dos cuadrados de lados 4 y 5 cm, un triángulo de área 8 cm$^2$, y un paralelogramo. ¿Cuál es, en cm$^2$, el área del paralelogramo?



**A)** 21 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 16 **E)** 15

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 1ª FASE: 3 de marzo de 2010

## NIVEL IV (Bachillerato)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

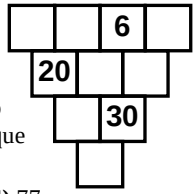
- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

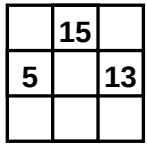
**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

**1** En la pirámide invertida de la derecha, se colocan en las casillas números enteros mayores que cero, de forma que el número de una casilla inferior sea suma de los dos números de las casillas superiores que la tocan. Si con este criterio rellenamos el resto de casillas, ¿cuál es el mayor número que puede aparecer en la casilla inferior?



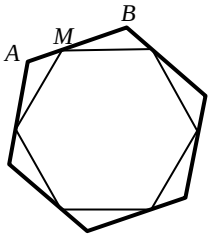

**A)** 55 **B)** 60 **C)** 73 **D)** 75 **E)** 77

**2** Si acabamos de rellenar el cuadrado mágico de la figura (los tres números de cualquier fila, columna o diagonal suman lo mismo), ¿cuál es el número menor que aparece en el cuadrado?




**A)** 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

**3** En un hexágono regular de lado *AB* inscribimos otro hexágono regular con vértice en *M*, siendo $BM = 2\,MA$. Si el hexágono grande tiene 36 cm$^2$ de área, ¿cuál es, en cm$^2$, el área del pequeño?




**A)** 30 **B)** 28 **C)** 27 **D)** 25 **E)** 24

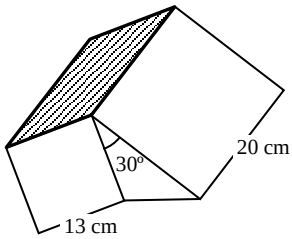
**4** De todos los cuadriláteros inscritos en una circunferencia que verifican que dos de sus lados, de longitudes 6 y 8 cm, forman un ángulo recto, ¿cuál es, en cm$^2$, el área del que tiene área máxima?

**A)** 48 **B)** 48,5 **C)** 49 **D)** 50 **E)** 52

**5** Uno de los números complejos *z* que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

**A)** $2 + 2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3} - 2i$ **C)** $3 + 3\,i$ **D)** $2 + 2\,i$ **E)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

**6** La figura está formada por dos cuadrados de lados 13 y 20 cm, un triángulo con el ángulo marcado de 30º, y un romboide. ¿Cuál es el área, en cm$^2$, del romboide?

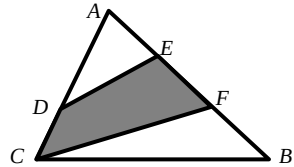



**A)** 130 **B)** 125 **C)** 115 **D)** 112 **E)** 111

**7** Las soluciones del sistema $\begin{cases} y = x^2 - 7x + 5 \\ x = y^2 - 7y + 5 \end{cases}$ verifican, o bien que $x - y = 0$, o bien que $x + y$ es igual a:

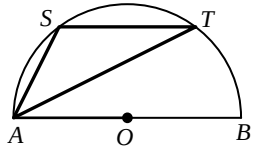
**A)** 1 **B)** 2 **C)** 6 **D)** – 1 **E)** – 2

**8** En la figura que te mostramos, el área del triángulo *ABC* es 9, *DC* es un tercio de *AC* y los puntos *E* y *F* dividen a *AB* en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?




**A)** 3 **B)** 4 **C)** 4,5 **D)** 5 **E)** 6

**9** En una semicircunferencia de centro *O* y radio *r*, trazamos una cuerda *ST* paralela al diámetro *AB*. Si llamamos $\alpha$ al ángulo *SOT*, ¿cuál es el área del triángulo *AST* en términos del radio *r* y el ángulo $\alpha$?

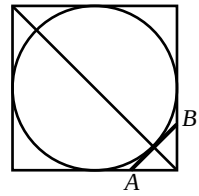



**A)** $r \cdot sen^2\alpha$ **B)** $r(sen\alpha + \cos\alpha)$ **C)** $\frac{r^2 \cos\alpha}{2}$ **D)** $\frac{r^2}{2}$ **E)** $\frac{r^2 sen\alpha}{2}$

**10** Lanzamos al aire cinco veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras?

**A)** $\frac{3}{16}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{7}{16}$ **D)** $\frac{13}{16}$ **E)** $\frac{27}{32}$

**11** ¿Qué longitud tiene el segmento *AB*, tangente a la circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 1 y perpendicular a la diagonal?




**A)** $\sqrt{2} - 1$ **B)** $2 - \sqrt{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\sqrt{2} + 1$

**12** Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

**A)** 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 45 **E)** 50

**13** Si todos los marcianos veranean en Venus, entonces podemos asegurar que:

**A)** Un ser que no veranee en Venus no es marciano.
**B)** Cualquiera que veranee en Venus es un marciano.
**C)** Ningún ser de Plutón veranea en Venus.
**D)** Todos los de Venus veranean en Marte.
**E)** Ningún ser de Plutón veranea en Marte.

**14** En una circunferencia señalamos diez puntos. ¿Cuál es la diferencia entre el número de heptágonos y el de triángulos cuyos vértices son algunos de esos puntos?

**A)** 210 **B)** 35 **C)** 21 **D)** 4 **E)** 0

**15** ¿Cuántos polinomios de grado cinco cuyos coeficientes en valor absoluto son todos 1 tienen la raíz 1?

**A)** 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 24

**16** ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados aparezcan en la cara superior números consecutivos?

**A)** $0,1\widehat{4}$ **B)** 0,17 **C)** $0,2\widehat{7}$ **D)** $0,\widehat{3}$ **E)** 0,5

**17** Si $\log_2(x-16) = \log_4(x-4)$ , la suma de las cifras de $x$ es:

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

**18** El conjunto de soluciones de la inecuación $|x|+|x-3|>3$ es:

**A)** $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ **B)** $(-3,3)$ **C)** $(-\infty,-3)$ **D)** $(-3,+\infty)$
**E)** Todos los números reales.

**19** Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ y $tg\ x = \frac{a}{2}$, cos $x$ es igual a:

**A)** $\frac{2}{\sqrt{a^2-4}}$ **B)** $\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}$ **C)** $\frac{2}{a+2}$ **D)** $\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$ **E)** $\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$

**20** Si el radio de una circunferencia de longitud $\log b^4$ es $\log a^2$, ¿cuál es el valor de $\log_a b$?

**A)** $\frac{1}{4\pi}$ **B)** $\frac{1}{\pi}$ **C)** $\pi$ **D)** $2\pi$ **E)** $10^{2\pi}$

**21** Sobre el lado *AB* del cuadrado *ABCD*, de lado 1, dibujamos el triángulo equilátero *ABE*, estando el vértice *E* en el interior del cuadrado. Sea *R* la región formada por los puntos interiores al cuadrado pero exteriores al triángulo equilátero cuya distancia a *AD* está comprendida entre 1/3 y 2/3. ¿Cuál es el área de *R*?

**A)** $\frac{12-5\sqrt{3}}{72}$ **B)** $\frac{12-5\sqrt{3}}{36}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{18}$ **D)** $\frac{3-\sqrt{3}}{9}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{12}$

**22** Si $k = 2^{2010} + 2010^2$, ¿cuál es la cifra de las unidades de $2^k + k^2$?

**A)** 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**23** Una montaña con forma de cono y altura de 2000 m, tiene su base sobre el suelo del océano. La parte de la montaña que se ve sobre el agua constituye un octavo del volumen de la montaña entera. ¿Cuál es, en metros, la profundidad del océano en ese punto?

**A)** 1000 **B)** $500\left(4-\sqrt{2}\right)$ **C)** 1500 **D)** 1800 **E)** 1900

**24** Sean *A*, *B* y *C* tres puntos de la gráfica de $y = x^2$ tales que la recta *AB* es paralela al eje *OX*, y el triángulo *ABC*, de área 2010, es rectángulo en *C*. ¿Cuál es la suma de las cifras de la segunda coordenada de *C*?

A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

**25** La suma de las cifras del menor entero positivo *x* que verifica que 5 es un divisor de $x + 7$ y 7 un divisor de $x + 5$ es:

A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 2ª FASE: 24 de abril de 2010

## NIVEL I (5º y 6º de Primaria)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

**1** ¿Cuánto suman las cifras del número 1 000 000 000 – 123 456 789?

**A)** 34 **B)** 35 **C)** 36 **D)** 37 **E)** 38

**2** ¿Qué ángulo recorre la manecilla pequeña de un reloj en tres horas y media?

**A)** 3,5º **B)** 90º **C)** 105º **D)** 180º **E)** 350º

**3** Sofía, Juan y Pinchamé se fueron a pescar. Entre todos consiguieron 34 peces. Sofía pescó cinco más que Juan y Pinchamé pescó tres más que Sofía. ¿Cuántos peces pescaron entre Juan y Pinchamé?

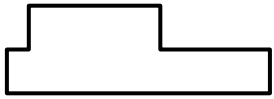
**A)** 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 24

**4** En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con una cruz?

| | | |
|---|---|---|
| **X** | | |
| | **15** | **3** |
| **12** | | **24** |

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**5** La figura que ves está hecha con tres rectángulos iguales que miden 3 cm de base y 1 cm de altura. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de la figura?



**A)** 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** Falta información

**6** La ardilla Amarilla guarda su botín de otoño en distintos árboles. Hizo seis montones, cinco de avellanas y uno de nueces. Los montones tenían 15, 16, 18, 19, 20 y 31 frutos cada uno. Un día, la urraca Paca le robó unas cuantas avellanas de distintos montones. Al día siguiente, el oso Mañoso le robó el doble de avellanas que la urraca y a la pobre ardilla solo le quedaron nueces. ¿Cuántas nueces tenía la ardilla?

**A)** 15 **B)** 16 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 31

**7** En un código numérico de siete cifras, cualquier grupo de cuatro cifras seguidas suman 16 y cualquier grupo de cinco cifras seguidas suman 19. ¿Cuánto vale la suma de las siete cifras?

**A)** 21 **B)** 25 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 35

**8** Pilar ha recortado dos triángulos isósceles iguales de 25 cm de perímetro. Con ellos, haciendo coincidir uno de los lados iguales, ha construido un paralelogramo que tiene 32 cm de perímetro. Después, haciendo coincidir los lados desiguales, ha construido un rombo. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del rombo?

**A)** 64 **B)** 57 **C)** 50 **D)** 28 **E)** 36

**9** De los cinco relojes que ves, sólo uno indica la hora exacta. Uno de ellos tiene 20 minutos de adelanto, otro 20 de retraso y los otros dos están parados. ¿Cuál es el que marca la hora correcta?

**A)** 16:00 **B)** 17:25 **C)** 17:40 **D)** 17:05 **E)** 16:45

**10** Los puntos $P$ y $Q$ tienen coordenadas (9, 7) y (9, 1). ¿Cuál de las siguientes coordenadas para $R$ hacen que el triángulo $PQR$ **no** sea isósceles?

**A)** (3, 7) **B)** (15, 4) **C)** (2, 4) **D)** (2, 1) **E)** (15, 1)

**11** ¿En qué cifra acaba $3^{2010}$?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

**12** Las taquillas del colegio están colocadas en tres filas. Las casillas están numeradas de izquierda a derecha, en la fila de arriba están del 1 al 40, en la fila del medio están las casillas del 41 al 80 y en la de abajo, del 81 al 120.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| … | | | | | **Alicia** | | | | … |
| … | | | | | | | **Marta** | | … |
| … | | **Pedro** | | | | | | | … |

Las taquillas de Alicia, Marta y Pedro están situadas como en el dibujo y la suma de los tres números es 185, ¿cuánto suman los números de las casillas de Alicia y Pedro?

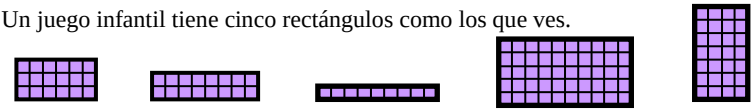
**A)** 121 **B)** 87 **C)** 163 **D)** 91 **E)** 127

**13** Observa la siguiente pirámide numérica.¿Cuánto sumarán los números de la fila 10?

Fila 1
Fila 1 1
Fila 1 2 1
Fila 1 3 3 1
Fila 1 4 6 4 1
Fila 1 5 10 10 5 1
Fila 1 6 15 20 15 6 1

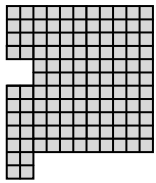
**A)** 72 **B)** 252 **C)** 512 **D)** 1024 **E)** 2048

**14** Un juego infantil tiene cinco rectángulos como los que ves.

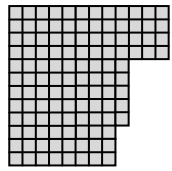


¿Cuál de estas figuras puede formarse con esas cinco piezas?

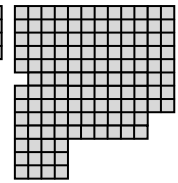
**A)**



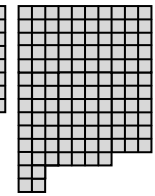
**B)**



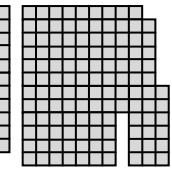
**C)**



**D)**



**E)**



**15** Ana, Irene y Olivia comen juntas todos los días y para beber piden zumo o agua.
Si Ana toma agua, Irene toma lo mismo que Olivia.
Si Irene toma agua, Ana toma la bebida que no toma Olivia.
Si Olivia toma zumo, Ana toma lo mismo que Irene.
¿Cuál de las chicas toma siempre la misma bebida durante la comida?

**A)** Ninguna **B)** Ana **C)** Irene **D)** Olivia **E)** Todas

**16** Si al dividir un número positivo $x$ entre 11 resulta que el cociente es igual que el resto, ¿cuántas posibilidades hay para $x$?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** Infinitas

**17** En clase había un gran alboroto y Don Retorcido se ha enfadado y nos ha borrado seis números de una división. Muy enojado ha dicho:

"¡Silencio!, ¿cuántas divisiones correctas pueden adaptarse a esta situación?"

$$\begin{array}{rr|r} 1 & \bullet\,\bullet\,1 & \bullet\,3 \\ \cline{3-3} 0 & 9\,\bullet & \bullet\,7 \\ & 0\,\bullet & \end{array}$$

**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1
**E)** Ninguna

**18** Alejandro, Belén y Carlos lanzan dos dados y miran la suma de los puntos. Si la suma es par, Alejandro se come una cereza; si la suma es un número primo, Belén se come una cereza y si la suma es mayor que 6, Carlos se come una cereza.
¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) Alejandro y Carlos tienen la misma probabilidad de comer una cereza.
b) Belén nunca comerá una cereza en la misma partida que Alejandro.
c) La probabilidad de que Carlos coma una cereza es 5/9.
d) Alejandro es el que tiene la mayor probabilidad de comer una cereza.

**A)** Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Todas

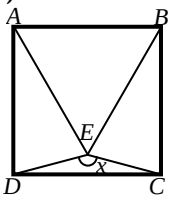
**19** El pasado 31 de diciembre Esteban y Felisa comenzaron a correr la carrera de San Silvestre Vallecana a la vez. Esteban hizo un magnífico tiempo: 43 minutos y 30 segundos pero Felisa, que estuvo parte del año lesionada, tardó 28 minutos y medio más que Esteban y llegó a la meta a las 19:20. ¿A qué hora comenzaron a correr?

**A)** 18:16:30 **B)** 18:51:30 **C)** 19:05 **D)** 18:08 **E)** 18: 15

**20** Ana ha sacado 6, 9 y 7 en los tres últimos controles de matemáticas. ¿Qué nota debe sacar, como mínimo, en el próximo, si quiere que su nota media sea al menos 7?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**21** En la figura que ves, *ABCD* es un cuadrado y *ABE* un triángulo equilátero. ¿Cuál es el valor de *x*?



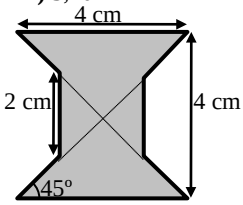

**A)** 130º **B)** 140º **C)** 150º **D)** 160º

**E)** 170º

**22** Joaquín compró dos refrescos y un pastel por 4,90 euros. Alicia compró un refresco y dos pasteles por 4,70 euros. Pedro compró un refresco y un pastel. ¿Cuántos euros pagó Pedro?

**A)** 3 **B)** 3,10 **C)** 3,20 **D)** 3,30 **E)** 3,40

**23** ¿Cuál es, en $cm^2$, el área de la figura?




**A)** 14 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10

**E)** 18

**24** Todas las mañanas Richi tarda 30 minutos en recorrer el perímetro del parque sin alterar el paso. El parque es un cuadrilátero de lados $L_1$, $L_2$, $L_3$ y $L_4$.
$L_2$ es el doble de $L_1$ y $L_3$ es el doble de $L_2$. Si tarda 10 minutos en recorrer $L_3$, ¿qué relación existe entre $L_2$ y $L_4$?

**A)** $3 \cdot L_2 = 2 \cdot L_4$ **B)** $2 \cdot L_2 = 3L_4$ **C)** $5 \cdot L_2 = 2 \cdot L_4$ **D)** $2 \cdot L_2 = 5\, L_4$ **E)** $4 \cdot L_2 = L_4$

**25** Inés tiene tres anillos distintos que siempre lleva puestos. Nunca se pone los tres anillos en la misma mano, tampoco se pone dos anillos en un mismo dedo y jamás se pone anillos en los pulgares. ¿De cuántas formas distintas puede ponerse Inés los anillos?

**A)** 72 **B)** 96 **C)** 144 **D)** 288 **E)** 312

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 2ª FASE: 24 de abril de 2010

## NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

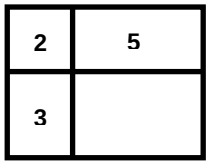
**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Avirameta - www.profes.net

**1** Durante el pasado mes de febrero, que fue muy lluvioso, cayeron durante una noche 60 litros por $m^2$ en uno de los pantanos de la comunidad. ¿Cuánto subió el nivel de agua en ese pantano?

**A)** 600 cm **B)** 6 cm **C)** 0,6 cm **D)** 0,6 mm
**E)** Depende de la superficie del pantano

**2** Dividimos un rectángulo en cuatro más pequeños y resulta que las áreas, en $cm^2$, de tres de ellos vienen dadas por los tres primeros números primos, como indica la figura. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área del cuarto rectángulo?




**A)** 5,5 **B)** 6 **C)** 6,5 **D)** 7 **E)** 7,5

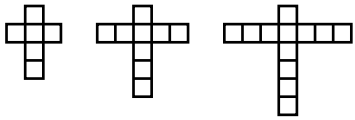
**3** En un espectáculo, las entradas de tres adultos y dos niños cuestan 26 €, y las de cuatro adultos y seis niños 48 €. ¿Cuál es la diferencia de precio, en euros, entre la entrada de adulto y la de niño?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**4** En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

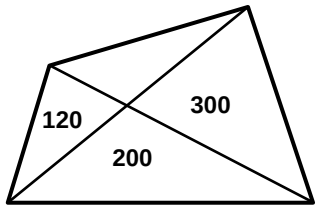
**A)** 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

**5** Ana y Cati hacen cruces sin parar usando cuadrados pequeñitos y ya han dibujado las tres primeras. Siguiendo este diseño, ¿cuántos cuadraditos necesitarán para componer la cruz número 50?



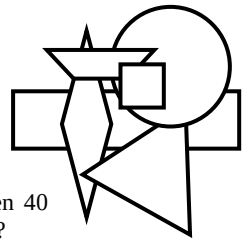
**A)** 132 **B)** 135 **C)** 150 **D)** 153 **E)** 162

**6** Corto una plancha metálica, con forma de cuadrilátero, en cuatro partes por sus diagonales. Retiro un trozo y los tres restantes pesan 120 gramos, 200 gramos y 300 gramos. ¿Cuántos gramos pesaba el trozo que retiré?




**A)** 120 **B)** 180 **C)** 280
**D)** 330 **E)** 500

**7** Alejandro y Álvaro han pegado sus pegatinas geométricas sobre una hoja. ¿Qué pegatina pegaron en tercer lugar?



**A)** Rombo **B)** Triángulo **C)** Trapecio

**D)** Rectángulo **E)** Círculo

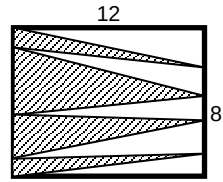
**8** Un coche recorre 1 km en un minuto. Para recorrerlo en 40 segundos, ¿en qué porcentaje debe aumentar su velocidad?

**A)** 40 % **B)** 45 % **C)** 50 % **D)** 66,6 % **E)** Nada de lo anterior

**9** En un rectángulo de área 24 se cumple que el doble de la base es igual al triple de la altura. Señalamos dos puntos *A* y *B*, en la base, que la dividen en tres partes iguales y el punto *C*, centro del rectángulo. ¿Qué área tiene el triángulo *ABC*?

**A)** 2 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 16

**10** ¿Qué fracción del rectángulo de la figura representa la zona sombreada?



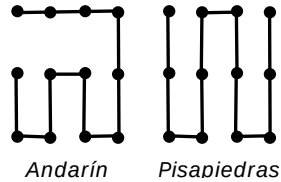

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{3}{5}$ **D)** $\frac{1}{2}$

**E)** Nada de lo anterior

**11** El número $10^{100}$ recibe el nombre de *googol*. ¿Cuántos googoles son $1000^{100}$?

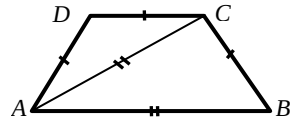
**A)** 100 **B)** $100^{10}$ **C)** $900^{100}$ **D)** $10^3$ **E)** $10^{200}$

**12** Andarín y Pisapiedras han recorrido todos los puntos de una gran retícula rectangular siguiendo dos caminos distintos, como se aprecia en el esquema. Si Andarín ha caminado 37 kilómetros y Pisapiedras 46, ¿qué longitud tiene el camino más corto posible que pasa por todos los puntos?




**A)** 16 km **B)** 37 km **C)** 25 km **D)** 28 km **E)** 32 km

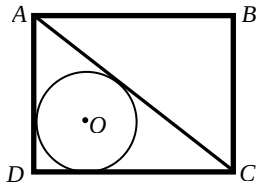
**13** En el trapecio isósceles de la figura (*AD* = *BC*) se verifica que además *AD* = *DC* y la diagonal *AC* es igual a la base mayor *AB*. ¿Cuánto mide el ángulo en *D*?




**A)** 108º **B)** 110º **C)** 112º

**D)** 114º **E)** Faltan datos para determinarlo

**14** En el rectángulo *ABCD* de área 2010 hemos dibujado el círculo de centro *O*, inscrito en el triángulo *ACD*. ¿Cuál es el área del rectángulo de lados paralelos al anterior en el que *O* y *B* son vértices diagonalmente opuestos?




**A)** 1340 **B)** $335\pi$ **C)** 1005

**D)** $670\sqrt{2}$ **E)** Nada de lo anterior

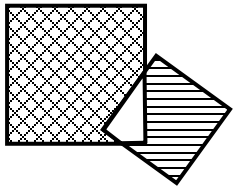
**15** Si $x$ e $y$ son dos números positivos cuya suma es 5, ¿cuál es el mínimo valor que puede tomar la expresión $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$?

**A)** $\frac{5}{6}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**16** Trece canicas pesan igual que tres boloncios y una pelota juntos. Cinco canicas y un boloncio juntos pesan lo mismo que dos pelotas. ¿Cuántas canicas hay que reunir para conseguir el mismo peso que un boloncio?

**A)** Dos **B)** Tres **C)** Cuatro **D)** Cinco **E)** Seis

**17** Observa estos dos cuadrados que se solapan. El lado del mayor mide 6 cm y el del menor mide 4 cm. ¿Cuál es, en $cm^2$, la diferencia entre el área de la zona cuadriculada y la zona rayada?



**A)** 30 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 25
**E)** 20

**18** En esta suma, letras diferentes representan cifras diferentes. ¿Cuánto vale la suma **T + Q + M**?

$$\begin{array}{cccc} & M & T & Q \\ + & M & Q & T \\ \hline & T & Q & M \end{array}$$

**A)** 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20
**E)** 22

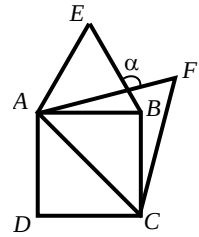
**19** Miguel y Raúl están buscando un color que les guste para pintar su habitación. Tienen pintura blanca, verde y amarilla y deciden trabajar así: llenan muchos vasos de yogur con las distintas pinturas y hacen mezclas vertiendo tres de estos vasos en un bote. ¿Cuántos botes necesitarán para conseguir todas las tonalidades distintas que pueden formarse de esta manera?

**A)** 27 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 12

**20** Si $p$, $q$, $r$, son enteros positivos y $p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$, el producto $p\cdot q\cdot r$ es igual a:

**A)** 6 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 42

**21** En el siguiente dibujo, *ABCD* es un cuadrado y los triángulos *ABE* y *ACF* son equiláteros. ¿Cuánto vale el ángulo $\alpha$?




**A)** 105º **B)** 90º **C)** 120º **D)** 75º **E)** 100º

**22** En el triángulo *ABC*, de lados 2, 3 y 4 cm, las bisectrices de los ángulos *A* y *B* se cortan en el punto *I*. ¿Cuál es el valor del cociente entre el área del triángulo *IAB* y el área del triángulo *ABC*?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{3}{5}$

**23** ¿Cuántos números de tres cifras cumplen a la vez estas tres condiciones? UNA: que todas sus cifras sean pares. DOS: que una de sus cifras sea suma de las otras dos. TRES: que la cifra cero no aparezca en dicho número.

**A)** 10 **B)** 24 **C)** 12 **D)** 4 **E)** 18

**24** Dos trenes AVE circulan en sentido contrario por vías paralelas con velocidades de 270 km/h y 306 km/h. Un pasajero sentado en el tren más rápido observa que el otro tarda 0,8 segundos en pasar completamente ante él. La longitud, en metros, del tren más lento es:

**A)** 128 **B)** 136 **C)** 144 **D)** 152 **E)** 160

**25** Tenemos seis cajas llenas de paquetes con huevos. Hay paquetes de seis huevos y paquetes de doce huevos, siendo todos los huevos del mismo peso. Cada caja, que contiene 240 huevos, tiene el doble de paquetes de seis huevos que de doce. Si cada paquete de seis huevos pesa vacío 20 gramos, lleno 380 gramos y cada caja llena pesa 16,8 kg, ¿qué no se puede calcular con estos datos?

**A)** El número de paquetes de seis huevos de cada caja

**B)** El número de paquetes de doce huevos de cada caja

**C)** El peso de cada huevo

**D)** El peso de cada caja vacía

**E)** Puede calcularse todo

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 2ª FASE: 24 de abril de 2010

## NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

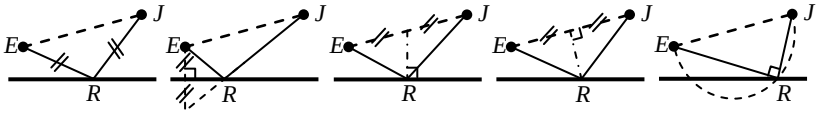
**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Aviraneta - www.profes.net

**1** En un mes hay tres domingos que caen en día par. ¿En qué día de la semana cae el 20 de ese mes?

**A)** Lunes **B)** Martes **C)** Miércoles **D)** Jueves **E)** Viernes

**2** Esteban está en un campamento base de subida al Aconcagua, en el punto *E*, cerca de Joaquín (punto *J*). Cada mañana le visita porque Joaquín está lesionado, pero se acerca antes al río, punto *R*, para llevarle agua. Cinco veces determina el punto R de forma diferente. ¿Cuál es el trayecto más corto? (los segmentos marcado con ‖ son de igual longitud)




**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**3** Dos tangentes a una circunferencia en los puntos *Z* e *Y* se cortan en *W*. Una tercera tangente en el punto *Q* corta al segmento *WZ* en *P* y al *WY* en *R*. Si *WZ* = 20, el perímetro del triángulo *WPR* es:

**A)** 36 **B)** 40 **C)** 42 **D)** 50

**E)** Depende de la posición del punto *Q*

**4** Si $a$ y $b$ son números positivos con $a$ menor que $b$ y llamamos $u$ al número $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}+\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ , ¿qué igualdad es verdadera?

**A)** $u=2\sqrt{a+b}$ **B)** $u=(a+b)\sqrt{2}$ **C)** $u=a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$

**D)** $u=2\sqrt{a}$ **E)** $u=2\sqrt{b}$

**5** Si se aumenta la velocidad de un tren de mercancías en 10 km/h se ganan 40 minutos de tiempo, pero si se disminuye en 10 km/h, se pierde una hora. ¿Cuál es la longitud del recorrido?

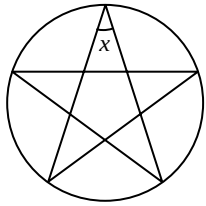
**A)** 120 km **B)** 200 km **C)** 400 km **D)** 1400 km

**E)** Los datos son contradictorios

**6** ¿Cuánto vale el ángulo interior de un polígono regular convexo de 20 diagonales?

**A)** 18º **B)** 45º **C)** 72º **D)** 135º **E)** 162º

**7** En una circunferencia hemos inscrito un pentágono regular estrellado. ¿Cuál es la medida del ángulo $x$?




**A)** 30º **B)** 32º **C)** 34º **D)** 36º **E)** 38º

**8** ¿Cuál es la suma de las cifras del cuadrado de 111 111 111?

**A)** 18 **B)** 27 **C)** 45 **D)** 63 **E)** 81

**9** Si $A = 2^{24}$, $B = 3^{16}$, $C = 49^4$, entonces se verifica:

**A)** $A < B < C$ **B)** $A < C < B$ **C)** $B < A < C$ **D)** $B < C < A$ **E)** $C < A < B$

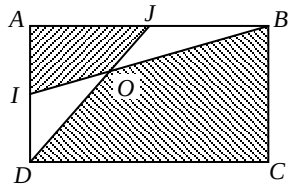
**10** En un triángulo isósceles, el ángulo obtuso formado por las bisectrices de los dos ángulos iguales es el triple del ángulo en el tercer vértice. La suma de las cifras del valor de este ángulo, medido en grados sexagesimales, es:

**A)** 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

**11** La torre Eiffel tiene 300 m de altura, está construida enteramente de hierro y pesa exactamente 8000 toneladas. Se quiere construir un modelo reducido de la torre, también de hierro y que pese 1 kg. ¿Cuál debe ser su altura?

**A)** 8 cm **B)** 80 cm **C)** 8 m **D)** 1,5 m **E)** 0,0375 m

**12** *ABCD* es un rectángulo. *I* es el punto medio de *AD* y *J* el de *AB*. Si *O* es el punto de intersección de *IB* y *DJ*, el cociente de las áreas de los cuadriláteros *AIOJ* y *BCDO* es:




**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

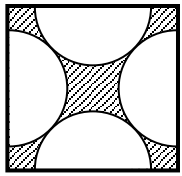
**13** ¿Cuántos enteros hay entre 9 999 y 100 000 tales que la suma de sus cifras sea igual a 2?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**14** Las rectas de ecuaciones $y = ax$, $y = -x + b$ se cortan en un punto cuyas coordenadas son estrictamente negativas. Se deduce de ello que:

**A)** $a > 0, \quad b > 0$ **B)** $a > 0, \quad b < 0$ **C)** $a < 0, \quad b < 0$
**D)** $a < -1, \quad b < 0$ **E)** $a < -1, \quad b > 0$

**15** En la figura se muestra un cuadrado de lado 1 y cuatro semicírculos iguales mutuamente tangentes. ¿Cuál es el área de la parte rayada?



**A)** $\frac{\pi}{2}$ **B)** $1-\frac{\pi}{4}$ **C)** $4-\pi$ **D)** $\sqrt{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

**E)** Nada de lo anterior

**16** Si $P=2^n$ y $Q=3^m$, ¿cuál de los siguientes números es $12^{mn}$ sea cual fuere el par de enteros $(m, n)$?

**A)** $P^2Q$ **B)** $P^nQ^m$ **C)** $P^nQ^{2m}$ **D)** $P^{2m}Q^n$ **E)** $P^{2n}Q^m$

**17** Si aumentamos en 1 cm una arista de un cubo, disminuimos otra en 1 cm y dejamos la tercera como está, nos da lugar un paralelepípedo cuyo volumen es 5 $cm^3$ menos que el del cubo original. ¿Cuál era el volumen, en $cm^3$, del cubo?

**A)** 8 **B)** 27 **C)** 64 **D)** 125 **E)** 216

**18** En el cuadrilátero de la figura, $AB = 5$, $BC = 17$, $CD = 5$, $DA = 9$ y $BD$ un entero. ¿Qué entero es éste?

**A)** 11 **B)** 12 **C)** 13

**D)** 14 **E)** 15

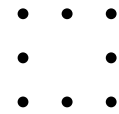
**19** Considera el rectángulo $ABCD$ con $AB = 4$ y $BC = 3$. Si el segmento $EF$, que pasa por $B$, es perpendicular a la diagonal $DB$ y los puntos $E$ y $F$ están en las prolongaciones de $AD$ y $DC$ respectivamente, ¿cuál es la longitud de dicho segmento $EF$?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** $\frac{125}{12}$ **D)** $\frac{103}{9}$ **E)** 12

**20** En un campamento de verano, el 60% de los estudiantes juega al fútbol, el 30 % hace natación y el 40% de los que juegan al fútbol hace natación. Aproximando al entero más próximo, ¿qué porcentaje de los estudiantes que no hacen natación juega al fútbol?

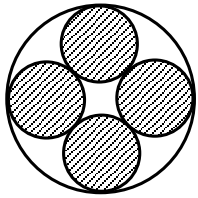
**A)** 30% **B)** 40% **C)** 49% **D)** 51% **E)** 70%

**21** De los ocho puntos de la figura, separados 1 unidad los más cercanos, elegimos dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su distancia sea 1?



**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{7}$ **C)** $\frac{4}{11}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{4}{7}$

**22** Muchas catedrales góticas tienen ventanas como la de la figura: varios círculos iguales, tangentes dos a dos y un círculo grande tangente exterior a todos. En la figura hay cuatro círculos pequeños. ¿Cuál es el cociente entre la suma de las áreas de los cuatro pequeños y el área del grande?



**A)** $3-2\sqrt{2}$ **B)** $2-\sqrt{2}$ **C)** $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$

**D)** $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{2}\right)$ **E)** $2\sqrt{2}-2$

**23** Decimos que un número de 3 cifras distintas es un número "geométrico" si sus cifras, leídas de izquierda a derecha, están en progresión geométrica. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor números geométricos?

**A)** 888 **B)** 124 **C)** 718 **D)** 840
**E)** Nada de lo anterior

**24** La probabilidad de que en una moneda trucada obtengamos cara es $p \neq 0$. Tiramos la moneda 8 veces, siendo la probabilidad de obtener 3 caras y 5 cruces $\frac{1}{25}$ de la probabilidad de obtener 5 caras y 3 cruces. El valor de $p$ es:

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{4}{5}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{6}{7}$

**25** En el rectángulo $ABCD$ con $AB = 8$ y $BC = 6$, el punto $M$ es el punto medio de la diagonal $AC$; el segmento $ME$, con $E$ en $AB$, es perpendicular a dicha diagonal. ¿Cuál es el área del triángulo $AME$?

**A)** $\frac{65}{8}$ **B)** $\frac{25}{3}$ **C)** 9 **D)** $\frac{75}{8}$ **E)** $\frac{85}{8}$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

## 2ª FASE: 24 de abril de 2010

## NIVEL IV (Bachillerato)

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

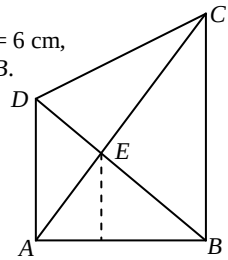
- EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
- **SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**
Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid - El Corte Inglés
Grupo ANAYA - Grupo SM
Librería Avirameta - www.profes.net

**1** En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura, de altura *AB* = 6 cm, las diagonales se cortan en el punto *E*, que dista 3 cm de *AB*. Si la diagonal *AC* mide 10 cm, la longitud, en cm, de la diagonal *BD* es:




**A)** $\frac{36}{5}$ **B)** $\frac{12\sqrt{10}}{5}$ **C)** $\frac{6\sqrt{41}}{5}$ **D)** $\frac{12\sqrt{11}}{5}$

**E)** Nada de lo anterior

**2** La ecuación, de incógnita *x*, $\ln(x+a) = \ln x + \ln a$ (*x* real, $a > 1$).

**A)** No tiene solución **B)** Tiene solución única

**C)** Tiene dos soluciones **D)** Se verifica para todo *x* positivo

**E)** El número de soluciones depende del valor de *a*.

**3** ¿Cuál de las siguientes igualdades puede ser falsa, siendo *x*, *a* y *b* números reales?

**A)** $x^2 + 2x + 1 = |x+1|^2$ **B)** $x^2 - a^2 = (x-a)\cdot(x+a)$

**C)** $a^2 - 2ab + b^2 = (-a+b)^2$ **D)** $1 - \sqrt{x^2} = 1 - x$ **E)** Ninguna de ellas

**4** Se considera $x = 3,\ y = 1,\ z = 2$. Así pues $x = y + z$. En el siguiente razonamiento hay, evidentemente, un error. ¿En qué paso está el error?

**A)** Como $x = y + z \Rightarrow x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y)$

**B)** Si $x\cdot(x-y) = (y+z)\cdot(x-y) \Rightarrow x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy$

**C)** Si $x^2 - xy = yx + zx - y^2 - zy \Rightarrow x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy$

**D)** Si $x^2 - xy - xz = yx - y^2 - zy \Rightarrow x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z)$

**E)** Si $x\cdot(x-y-z) = y\cdot(x-y-z) \Rightarrow x = y$

**5** La ecuación, de incógnita *x*, $\big|\,|x|-1\,\big| - b\big| = 4$ tiene exactamente 5 soluciones reales cuando *b* es:

**A)** Cualquier número positivo **B)** $b = 3$ **C)** $b = 4$ **D)** $b = 5$ **E)** $4 < b < 5$

**6** Cuando una botella está llena de agua hasta $\frac{2}{3}$ de su volumen, pesa *a* kg. Cuando está llena hasta la mitad, pesa *b* kg. ¿Cuántos kg pesará cuando esté totalmente llena?

**A)** $\frac{2a}{3} + \frac{b}{3}$ **B)** $\frac{3a}{2} - \frac{b}{2}$ **C)** $\frac{3a}{2} + b$ **D)** $\frac{3a}{2} + 2b$ **E)** $3a - 2b$

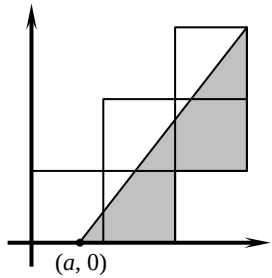
**7** En una circunferencia de centro *O* marcamos dos puntos *A* y *C*. Si *B* es un punto exterior tal que *BA* y *BC* son tangentes a la circunferencia y el triángulo *ABC* es equilátero, ¿cuánto vale el cociente $\frac{BD}{BO}$, siendo *D* la intersección de *BO* con la circunferencia?

**A)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**8** Si la recta $y = mx$ divide al triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y (6*m*, 0) en dos triángulos de igual área, la suma de todos los valores posibles de *m* es.

**A)** $-\frac{1}{3}$ **B)** $-\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**9** Dibujamos cinco cuadrados de lado 1 en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas como se muestra en la figura. Si el área de la región sombreada es $\frac{5}{2}$, el valor de *a* es:




**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

**10** ¿Cuál es el resto de la división de $3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{2010}$ entre 8?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

**11** ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son seis veces la suma de sus dígitos?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 12

**12** Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x+3) = 3x^2 + 7x + 4$, $a + b + c$ es igual a:

**A)** – 1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 3

**13** ¿Para qué valor de *n* se verifica que la suma $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + \ldots + ni^n$ es el número complejo 48 + 49*i*?

**A)** 24 **B)** 48 **C)** 49 **D)** 97 **E)** 98

**14** Hay dos circunferencias tangentes a la parte positiva de los ejes de coordenadas y tangentes exteriores a la circunferencia de centro *O* (3, 0) y radio 1. La suma de sus radios es:

**A)** 9 **B)** $\frac{17}{2}$ **C)** 8 **D)** $\frac{15}{2}$ **E) 7**

**15** Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , donde *a*, *b* y *c* son números complejos. Supongamos que $p(2010 + 102\,i) = p(2010) = p(102) = 0$ . ¿Cuántas soluciones reales tiene como máximo la ecuación $0 = x^{12} + ax^8 + bx^4 + c$ ?

**A)** 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

**16** Para cada entero positivo *n*, sea $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400$ . ¿Cuál es la suma de todos los valores *f*(*n*) que resultan ser números primos?

**A)** 794 **B)** 796 **C)** 798 **D)** 800 **E)** 802

**17** ¿Cuál es el área del triángulo de vértices *A*(4, 0), *B*(0, 4) y *C*(– 2010, 4020)?

**A)** 4010 **B)** 4012 **C)** 4014 **D)** 4016 **E)** 4018

**18** Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 blancas. Sacamos las bolas sin mirar una a una. ¿Cuál es la probabilidad de que en algún momento sólo queden bolas blancas?

**A)** $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{3}{10}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{7}{10}$

**19** Si $sen\ a + sen\ b = \sqrt{\frac{5}{3}}$ y $cos\ a + cos\ b = 1$, $cos(a - b)$ es igual a:

**A)** $\sqrt{\frac{5}{3}} - 1$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** 1

**20** En el interior del triángulo equilátero *ABC* elegimos un punto *P*. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo *ABP* sea mayor que el área del triángulo *ACP* y que el área del triángulo *BCP*?

**A)** $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**21** ¿En qué intervalo está el número $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$ ?

**A)** (–2, –1) **B)** (1, 2) **C)** (–3, –2) **D)** (2, 3) **E)** (3, 4)

**22** En el triángulo *ABC*, con *AB* = *AC*, resulta que tanto la longitud del lado *BC* como la de la altura que parte de *A* vienen dadas por números enteros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

**A)** *senÂ* es racional y *cosÂ* irracional **B)** *senÂ* y *cosÂ* son números racionales

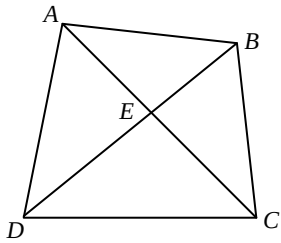
**C)** *senÂ* es irracional y *cosÂ* racional **D)** *senÂ* y *cosÂ* son irracionales

**E)** La irracionalidad de *senÂ* y *cosÂ* depende de los valores de *BC* y de la altura

**23** Sea $M = \{(x, y)/\ y \geq x^2\}$ y $N = \{(x, y)/\ x^2 + (y-a)^2 \leq 1\}$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es condición necesaria y suficiente para que $M \cap N = N$ ?

**A)** $a \geq \frac{5}{4}$ **B)** $a = \frac{5}{4}$ **C)** $a \geq 1$ **D)** $0 < a < 1$ **E)** $1 < a < \frac{5}{4}$

**24** En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está hecho a escala, se verifica que *AB* = 9 y *CD* = 12. Las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *E*. Si *AC* = 14 y los triángulos *AED* y *BEC* tienen igual área, ¿cuál es la longitud de *AE*?




**A)** $\frac{9}{2}$ **B)** $\frac{50}{11}$ **C)** $\frac{21}{4}$

**D)** $\frac{17}{3}$ **E)** 6

**25** El área de la región encerrada por la curva formada por los puntos (*x*, *y*) tales que $|x-1| + |y-1| = 1$ es:

**A)** 2 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** 3 **D)** $\pi$ **E)** 4

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **D** | 1 | **E** | 1 | **C** |
| 2 | **E** | 2 | **D** | 2 | **C** | 2 | **C** |
| 3 | **B** | 3 | **B** | 3 | **B** | 3 | **B** |
| 4 | **B** | 4 | **E** | 4 | **C** | 4 | **C** |
| 5 | **A** | 5 | **B** | 5 | **E** | 5 | **C** |
| 6 | **A** | 6 | **E** | 6 | **D** | 6 | **A** |
| 7 | **D** | 7 | **C** | 7 | **B** | 7 | **C** |
| 8 | **C** | 8 | **D** | 8 | **A** | 8 | **B** |
| 9 | **C** | 9 | **A** | 9 | **B** | 9 | **E** |
| 10 | **C** | 10 | **B** | 10 | **A** | 10 | **D** |
| 11 | **B** | 11 | **C** | 11 | **A** | 11 | **A** |
| 12 | **B** | 12 | **C** | 12 | **E** | 12 | **D** |
| 13 | **D** | 13 | **A** | 13 | **B** | 13 | **A** |
| 14 | **B** | 14 | **D** | 14 | **B** | 14 | **E** |
| 15 | **D** | 15 | **A** | 15 | **C** | 15 | **D** |
| 16 | **B** | 16 | **C** | 16 | **C** | 16 | **C** |
| 17 | **D** | 17 | **D** | 17 | **A** | 17 | **A** |
| 18 | **E** | 18 | **E** | 18 | **C** | 18 | **A** |
| 19 | **E** | 19 | **C** | 19 | **A** | 19 | **D** |
| 20 | **E** | 20 | **E** | 20 | **A** | 20 | **C** |
| 21 | **E** | 21 | **B** | 21 | **A** | 21 | **B** |
| 22 | **E** | 22 | **C** | 22 | **C** | 22 | **B** |
| 23 | **A** | 23 | **A** | 23 | **A** | 23 | **A** |
| 24 | **B** | 24 | **A** | 24 | **D** | 24 | **E** |
| 25 | **C** | 25 | **D** | 25 | **D** | 25 | **B** |

# XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **B** | 1 | **D** | 1 | **C** |
| 2 | **C** | 2 | **E** | 2 | **B** | 2 | **B** |
| 3 | **D** | 3 | **B** | 3 | **B** | 3 | **D** |
| 4 | **D** | 4 | **A** | 4 | **E** | 4 | **E** |
| 5 | **A** | 5 | **D** | 5 | **B** | 5 | **D** |
| 6 | **D** | 6 | **B** | 6 | **D** | 6 | **E** |
| 7 | **B** | 7 | **B** | 7 | **D** | 7 | **B** |
| 8 | **E** | 8 | **C** | 8 | **E** | 8 | **B** |
| 9 | **D** | 9 | **A** | 9 | **E** | 9 | **C** |
| 10 | **D** | 10 | **D** | 10 | **C** | 10 | **D** |
| 11 | **E** | 11 | **E** | 11 | **D** | 11 | **B** |
| 12 | **A** | 12 | **D** | 12 | **A** | 12 | **D** |
| 13 | **D** | 13 | **A** | 13 | **E** | 13 | **D** |
| 14 | **E** | 14 | **C** | 14 | **B** | 14 | **C** |
| 15 | **B** | 15 | **B** | 15 | **B** | 15 | **B** |
| 16 | **B** | 16 | **B** | 16 | **D** | 16 | **E** |
| 17 | **B** | 17 | **E** | 17 | **D** | 17 | **B** |
| 18 | **A** | 18 | **C** | 18 | **C** | 18 | **A** |
| 19 | **D** | 19 | **B** | 19 | **C** | 19 | **B** |
| 20 | **C** | 20 | **C** | 20 | **D** | 20 | **C** |
| 21 | **C** | 21 | **A** | 21 | **B** | 21 | **D** |
| 22 | **C** | 22 | **D** | 22 | **C** | 22 | **B** |
| 23 | **D** | 23 | **E** | 23 | **D** | 23 | **A** |
| 24 | **C** | 24 | **A** | 24 | **D** | 24 | **E** |
| 25 | **D** | 25 | **D** | 25 | **D** | 25 | **A** |

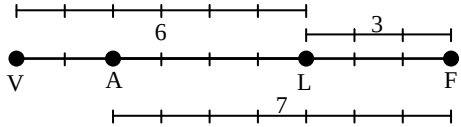
## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* I

**1. (D)** La diferencia es: 112 345 678. La suma de sus cifras es: $(8 \times 9): 2 + 1 = 37$

**2. (E)** Observando simplemente las flechas se deduce que Sonia es la mayor de todas las niñas.

**3. (B)** Con el apoyo de un diagrama lineal se puede apreciar el tiempo de llegada de cada uno:




Tuvo que esperar: $2 + 4 + 3 = 9$ minutos.

**4. (B)** Sustituyendo las letras por su valor numérico y resolviendo la expresión se obtiene el resultado pedido.

**5. (A)** Para hacer más comprensible la solución la expresamos de forma gráfica:

_____*_____*_____

←---------12 milésimas----------→

Con dos cortes obtiene tres trozos y tarda 12 milésimas de segundo; luego en cada corte tarda seis milésimas de segundo.

Para hacer seis trozos necesitará hacer cinco cortes

_____*_____*_____*_____*_____

Por tanto, tardará: $5 \times 6 = 30$ milésimas de segundo.

**6. (A)** Entre Julián y Lucía tienen 3 €. 3 € − 1,40 € = 1,60 € les quedan.

Como a Julián le queda el triple que a Lucía, la cantidad sobrante se reparte en cuatro partes: tres para Julián y una para Lucía.

1,60: 4 = 0,40 €

A Julián le quedan 0,40 € × 3 = 1,20 €. A Lucía le quedan 0,40 €

2 € que tenía Julián menos 1,20 € que le quedan, ha gastado 0,80 € = 80 céntimos de euro.

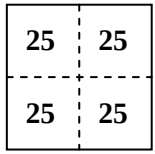
**7. (D)** Los perímetros de las dos figuras tienen en común la longitud de los cuatro cuadrantes de circunferencia. Las longitudes no comunes son: para la 1ª figura: $2\times10+2\times5$ = 20 + 10 = 30 cm; para la 2ª figura: 10 cm. La diferencia de sus perímetros es 30 – 10 = 20 cm

**8. (C)** Puede escribir los siguientes números:

I = 1; V = 5; X = 10; IV = 4; VI = 6; IX = 9; XI = 11; XV = 15;

XVI = 16; XIV = 14

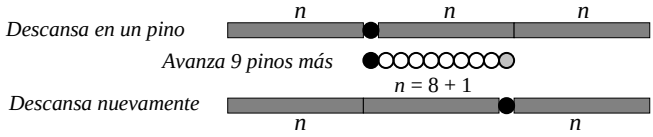
**9. (C)** Se trata de hacer un cuadrado con dos cerillas en cada lado, total 8 cerillas.




**10. (C)** Si se completa el cuadrado latino, en el que en cada fila y en cada columna no pueden aparecer letras iguales, la palabra AMOR aparece en la fila 3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **O** | **A** | **R** | **M** |
| **M** | **R** | **A** | **O** |
| **A** | **M** | **O** | **R** |
| **R** | **O** | **M** | **A** |

**11. (B)** En la figura, que explica el proceso de solución del problema, puede apreciarse que número de pinos es $3n+1$ y, además, vemos que $n$ es igual a 9; por lo tanto, en la fila hay 28 pinos.




**12.(B)** Se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea la última figura porque es la única que tiene menos de tres vértices impares.

**13. (D)** 98,42 t = 98420 kg

98420 : 4 = 24 605 kg que es la cuarta parte de lo que pesa la ballena.

24 605 – 2 115 = 22 490 kg tiene que engordar el ballenato.

**14.(B)** 668 : 19 = 35,~~15…~~ meses

35 – 1 = 34 meses con el mismo número de días…

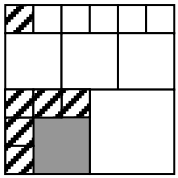
$19 \times 34 = 646$; 668 – 646 = 22 días

**15. (D)** En el diagrama propuesto se aprecia perfectamente la respuesta D.

**16. (B)** El número múltiplo de 3, 4 y 5 tiene que terminar en cero porque el producto $4 \times 5$ y la suma de sus cifras tiene que ser 3 o múltiplo de 3. El único número que cumple estas condiciones es 8 640. La suma de las dos cifras que faltan es: 4 + 0 = 4

**17. (D)** En la tabla se aprecia cómo se desarrolla la secuencia:
La figura cien tiene: 103 + 100 = 203 triángulos y círculos.

**18. (E)** Si dividimos el cuadrado sombreado en cuadrados de unidad uno (cuadrado rayado), obtenemos que el lado del cuadrado sombreado es de 3 m; por tanto, su área es 3 m × 3 m = 9 $m^2$.



**19. (E)** Mediante divisiones sucesivas de los restos se obtiene:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 0 | 9 | 1 | 1 | 1 | 7 | 6 | 1 | 1 |
| | 4 | 0 | 9 | 3 | | | | | 7 | 6 | 3 | | | 1 | 0 | 6 | |

El resultado es la suma de los cocientes y el último resto. 3 + 3 + 6 + 10 = 22

**20. (E)** Las diferencias de cada una de las fracciones y la unidad son:

$1-\frac{12}{23}=\frac{11}{23}$; $1-\frac{23}{34}=\frac{11}{34}$; $1-\frac{34}{45}=\frac{11}{45}$; $1-\frac{45}{56}=\frac{11}{56}$; $1-\frac{56}{67}=\frac{11}{67}$

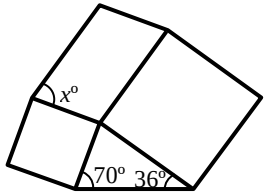
Como todas tienen el mismo numerador, la menor es la de mayor denominador, es decir, $\frac{11}{67}$. Por lo tanto la fracción más próxima a 1 es $\frac{56}{67}$

Un razonamiento más sencillo consiste en expresar cada fracción en forma decimal, dividiendo el numerador entre el denominador, pero el método es más largo ya que no podemos hacer uso de una calculadora:

$\frac{12}{23}=0{,}5217...$; $\frac{23}{34}=0{,}6764...$; $\frac{34}{45}=0{,}7555...$; $\frac{45}{56}=0{,}8035...$; $\frac{56}{67}=0{,}8358...$

**21. (D)** El mínimo común múltiplo de 15, 6, 12, 20 y 2 es 60.
Dividiendo el número de días de un año entre 60 se obtiene 6 enteros que es el mayor número de conciertos que pueden volver a dar todos juntos en ese año. En total podrán dar 7 conciertos como máximo en los díqas:
1 enero, 2 marzo, 1 mayo, 30 junio, 29 agosto, 28 octubre, 27 diciembre.

**22. (E)** La medida del ángulo que falta en el triángulo es:
$180 - (70^o + 36^o) = 74^o$
La medida del ángulo obtuso del romboide es:
$360^o - (90^o + 90^o + 74^o) = 106^o$;
La medida del ángulo "$x$" es: $180^o - 106^o = 74^o$




**23. (A)** El resultado de la suma es 74 070 que corresponde al producto $6 \times 12345$.

**24. (B)** La probabilidad actual de sacar bola blanca es 2/6; para que la probabilidad sea 2/5 es necesario añadir 2 bolas grises y 2 bolas blancas.
$P = 4/10 = 2/5$

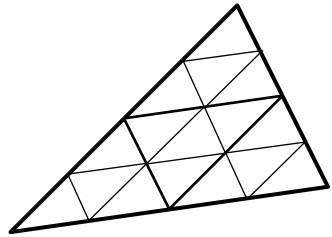
**25. (C)** Las letras que no tienen eje de simetría son: N, R, S y P.

## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

***Soluciones 1ª Fase Nivel II***

**1. (D)** Se consigue con 2 billetes de 20 €, 1 billete de 5 €, 1 moneda de 2 €, 1 moneda de 1 €**,** 1 moneda de 50 céntimos, 2 monedas de 20 céntimos, 1 moneda de 5 céntimos y 1 moneda de 2 céntimos.

**2. (D)** Como se ve en la figura son $4 \times 4 = 16$.



**3. (B)** Si llamamos *S* a lo que mide la serpiente, *Co* a lo que mide el cocodrilo, *C* al codo y *P* al palmo, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l}(I)\quad S = 4\,C = 6P \\ (II)\ Co = 6\,C\end{array}\right\}\ \text{De (I): } C = \frac{6}{4}P\text{. Sustituyendo en (II): } Co = 6\cdot\frac{6}{4}P = 9P$$

**4. (E)** Sustituyendo cada letra por su valor y operando, tenemos:

$$\left[2+(2+1)^2-1\right]:\left[2\cdot(1+2)-1\right] = (2+3^2-1):(2\cdot 3-1) = (2+9-1):(6-1) = 10:5 = 2$$

**5. (B)** Si llamamos a, b, c (de izquierda a derecha) a los tres números del medio, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{rl} 10+a+b & =100 \\ (II)\quad a+b+c & =200 \\ b+c+130 & =300\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}(I)\quad a+b=90 \\ (III)\ b+c=170\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}a=90-b \\ c=170-b\end{array}\right\}\ \text{Sustituyendo en (II)}$$

tenemos: $90-b+b+170-b=200;\ 90+170-200=b;\ b=60$.

Otra forma de resolverlo: (I) + (III) – (II)

$a + b + b + c - (a + b + c) = 90 + 170 - 200 \Rightarrow b = 60$.

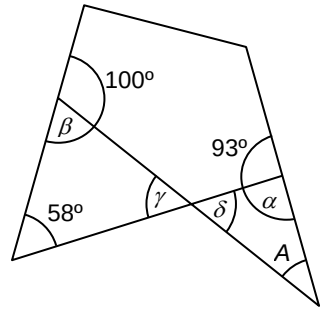
**6. (E)** El número es múltiplo de 3, 5 y 11. El m.c.m. $(3, 5, 11) = 3\cdot 5\cdot 11 = 165$.

Este número no cumple la condición impuesta en el enunciado: "ninguna de sus cifras es la suma de las otras dos".

Múltiplos de 165 (y por tanto de 3, 5 y 11) de tres cifras: 330, 495, 660, 825, 990.

El único que cumple la condición citada es el 825.

**7. (C)** En la figura vamos calculando los ángulos:
$\alpha = 180^o - 93^o = 87^o$, $\beta = 180^o - 100^o = 80^o$,
$\gamma = 180^o - (58^o + 80^o) = 180^o - 138^o = 42^o$,
$\delta = 42^o$ (por opuestos por el vértice)
$\hat{A} = 180^o - (42^o + 87^o) = 180^o - 129^o = 51^o$




**8. (D)** Probando con n = 3, 5 y 7, vemos que para n = 7 resulta: $2 \cdot 7 + 1 = 15$, que no es primo.

**9. (A)** $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ sardinas $\rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ pesetas $\Rightarrow$ 1 sardina $\rightarrow$ 1 peseta,

por lo tanto, $\left(7+\frac{1}{2}\right)$ sardinas $\rightarrow$ $\left(7+\frac{1}{2}\right)$ pesetas

**10.(B)** Al ser divisible entre 33, el número es múltiplo de 3 y de 11.
Por ser múltiplo de 3 $\Rightarrow 2 + 8 + \blacktriangle + 7 + 5 + \blacksquare = \dot{3} \Rightarrow \quad 22 + \blacktriangle + \blacksquare = \dot{3}$ (I)
Por ser múltiplo de 11 $\Rightarrow 8 + 7 + \blacksquare - (2 + \blacktriangle + 5) = 0$ o múltiplo de 11 $\Rightarrow$
$8 + \blacksquare - \blacktriangle = 0$ ó 11 (quedan descartados los restantes múltiplos de 11 ya que ■ puede valer como máximo 9 y ▲ como mínimo 0).
Con la opción $8 + \blacksquare - \blacktriangle = 0$, quedaría: $\blacksquare - \blacktriangle = -8$ (que se cumpliría para ■ = 1, ▲ = 9, o ■ = 0, ▲ = 8; sin embargo (I) no se cumple con estos valores).
Veamos ahora con la opción $8 + \blacksquare - \blacktriangle = 11$; quedaría:

$\blacksquare + \blacktriangle = \dot{3} - 22$

$\blacksquare - \blacktriangle = 3$

Probando distintos múltiplos de 3 (24, 27, 30, 33, 36, 39), para el caso de 33 resulta ▲ = 4 (opción B de las respuestas).
Para el múltiplo 27 resulta ■ = 4, ▲ = 1 que es otra posibilidad (que no viene recogida en las respuestas).
No se prueban múltiplos de 3 inferiores a 24 pues ■ + ▲ resulta negativo, ni superiores a 39 ya que resultan valores de dos cifras. En los restantes casos (24, 30, 36, 39) resultan valores fraccionarios o de dos cifras.

**11.(C)** Las pistas del problema, llamando a los números de las casillas tal como se indica en la figura, se expresan como:
C1: a + d + g = 24 (I)
F1: a · b · c = 27 (II)
F2: d + e + f = 16 (III)

| | C1 ↓ | C2 ↓ | C3 ↓ |
|---|---|---|---|
| F1→ | a | b | c |
| F2→ | d | e | f |
| F3→ | g | h | i |

C3: c + f + i = 14 (IV)
F3: g, h, i son pares (V)
De (II), deducimos que a, b y c serán 1, 3 y 9 (en este u otro orden)
De (I), deducimos que a, d y g serán 7, 8 y 9 (en este u otro orden). Por (I). (II) y (V) se deduce que a = 9, d = 7, g = 8
De (III), se deduce que e + f = 9, por lo tanto e y f serán 4 y 5 (en este u otro orden)
De (IV), como i es par y c es impar se deduce que f es impar, es decir, f = 5, luego e = 4.

**12.(C)** 123 456 no es múltiplo de 9 pues la suma de sus cifras no lo es.

$123^{456}$ es múltiplo de 9 ya que 123 es multiplo de 3.

$456^{123}$ es múltiplo de 9 ya que 456 es multiplo de 3.

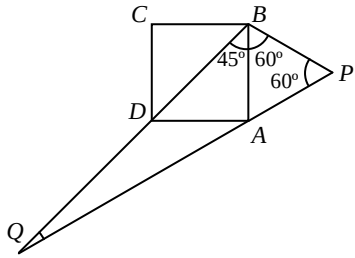
$123 \cdot 456$ es múltiplo de 9 ya que 123 y 456 son múltiplos de 3.

$12 \cdot 34 \cdot 56$ no es múltiplo de 9 ya que 12 es múltiplo de 3 pero 34 y 56 no lo son.

**13.(A)** Goyo ha fumado durante 38 años (72 – 34). Cuando tenga $38 \cdot 2 = 76$ años llevará la mitad de su vida sin fumar, es decir, dentro de 4 años, en el 2014.

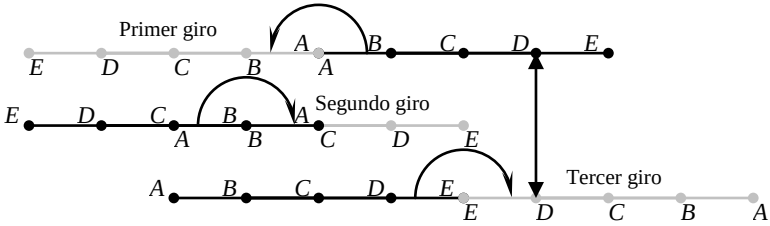
**14.(D)** Como al quitar la primera cifra tiene que quedar un cuadrado perfecto, estos números tan curiosos tienen que ser de la forma C00 , C01, C04, C09, C16, C25, C36, C49, C64, C81, siendo C la cifra de las centenas; pero como, al quitar la cifra de la unidades, el número resultante también tiene que ser cuadrado perfecto, este número sólo podrá acabar en 0, 1, 4, 5, 6 y 9, lo que nos permite descartar los candidatos C25, C36 y C81. Por otra parte, como no hay ningún cuadrado perfecto de dos cifras que termine en 0, también desecharemos a C00 , C01, C04 y C09. Sin embargo, el C16 da lugar al 816; el C49, al 649;y el C64, al 164 y al 364. Por lo tanto, la suma pedida es 816+649+164+364=1993.

**15.(A)** Como *PA* = *PB* = *AB*, el triángulo *PAB* es equilátero; por lo tanto, los ángulos *APB* y *PBA* miden, cada uno, 60º, y el ángulo *PQB* será igual a:
180º – (60º+60º+45º) = 180º – 165º = 15º




**16.(C)** Tomando 12 345 como multiplicando y 11111 como multiplicador, se obtiene enseguida el producto 137 165 295, que, como se ve, tiene 7 cifras distintas.

**17.(D)**




Después de los tres giros, el punto *D* queda en la misma posición que al principio

**18.(E)** Por ser A + L = L + A y A distinto de R, la suma de las unidades tiene que ser mayor que 10 (para que nos podamos "llevar" 1).
Luego A = R +1 y L + A +1 = 10 + A; por lo tanto, L =9.

$$\begin{array}{rccc} & O & L & A \\ + & S & A & L \\ \hline & M & A & R \end{array}$$

Como al sumar las decenas nos llevamos 1, tiene que ocurrir que O + S +1= M, lo que implica que las letras O y S tienen que representar a las cifras 2 y 5, mientras que M sólo puede ser igual a 8. Nos quedan sólo las cifras 6 y 7 y las letras A y R, pero como A = R +1, A =7 y R =6.
Finalmente, la información que nos dice que OLA no es múltiplo de 11 nos lleva a concluir que la letra O tiene que representar a la cifra 5.
Conclusión: S =2

**19.(C)** Designando los pesos de cada persona con su inicial, podemos escribir:
A + B = 78; B + C = 76; C + D = 80; D + E = 76; E + A = 80
Sumando miembro a miembro estas 5 igualdades resulta:
2A + 2B + 2C + 2D + 2E = 390; A +B +C +D +E =195; A +(B +C) +D +E = 195;
A +76 +D +E = 195; A +D +E = 195 – 76 = 119.

**20.(E)** Los números formados por las dos últimas cifras que al multiplicarlos por 2 dan lugar a números de dos cifras son 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, ... 49, que originan, respectivamente, los 45 números *dobledés* siguientes: 1005, 1206, 1407, ... 9849.

**21.(B)** Para rodear un cuadrado de 18×18 baldosas negras, necesitaremos colocar 18 baldosas blancas a su derecha, 18 a su izquierda, 18 en la parte superior, 18 en la inferior y una para cada esquina. En total: $18 \cdot 4 + 4 = 72 + 4 = 76$.

**22.(C)** Asientos vacíos: 850 – 748 = 102.

Como $\frac{12 \cdot 850}{100} = 102$, la frase I es cierta.

Si de los 850 asientos, 748 está ocupados, por cada 25 lo estarán *x*. La proporción es: $\frac{850}{748} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 748}{850} = 22$ ; por lo tanto, la frase II también es correcta.

Como $\frac{3 \cdot 850}{4} = 636$, que es menor que 748, la frase III también es verdadera.

Conclusión: Las tres frases son ciertas.

**23.(A)** Como un cubo tiene 12 aristas, cada una medirá 48 : 12 = 4 ; por lo tanto, el volumen del cubo será $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

**24.(A)** El ángulo $x$ es suplementario del ángulo interior del triángulo que está sin nombrar. Por lo tanto, si le llamamos $t$, por ejemplo, ocurrirá que $x + t = 180^{\circ}$ . Y como la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º, será $y + z + t = 180^{\circ}$.
Luego $x = y + z$.

**25.(D)** Hay 18 números que cumplen las condiciones pedidas, como puede verse en la siguiente tabla.

| 1ª cifra | 2ª cifra | 3ª cifra | 4ª cifra | Número |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 1 | 5 | 1515 |
| | | 9 | 5 | 1595 |
| 2 | 6 | 2 | 6 | 2626 |
| 3 | 7 | 3 | 7 | 3737 |
| 4 | 0 | 4 | 0 | 4040 |
| | | | 8 | 4048 |
| | 8 | 4 | 0 | 4840 |
| | | | 8 | 4848 |
| 5 | 1 | 5 | 1 | 5151 |
| | | | 9 | 5159 |
| | 9 | 5 | 1 | 5951 |
| | | | 9 | 5959 |
| 6 | 2 | 6 | 2 | 6262 |
| 7 | 3 | 7 | 3 | 7373 |
| 8 | 4 | 0 | 4 | 8404 |
| | | 8 | 4 | 8484 |
| 9 | 5 | 1 | 5 | 9515 |
| | | 9 | 5 | 9595 |

## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* **III**

**1. (E)** El área buscada es igual al área de un rectángulo de base $3a$ y altura $b$, esto es, $3ab$.

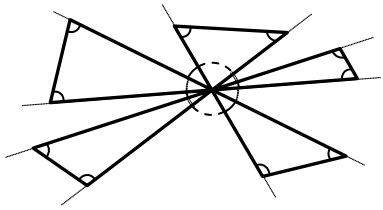
**2. (C)** Llamando $x$ al número de alumnos, podemos calcular el precio del autobús de dos formas: $14x + 4$ ó $16x - 6$. Como esas cantidades deben ser iguales, obtenemos la ecuación $14x + 4 = 16x - 6$ cuya solución es $x = 5$. Así pues, el número de alumnos es 5 y el precio del autobús $14 \cdot 5 + 4 = 74$.
Cada alumno debe pagar $74 : 5 = 14{,}80$ euros.

**3. (B)** Comencemos por la diagonal: 16 y 27 son dos términos consecutivos de una progresión aritmética luego la razón es $27 - 16 = 11$ y eso nos permite rellenar toda la diagonal: $16 - 11 = 5$, $27 + 11 = 38$ y $38 + 11 = 49$. A continuación nos fijamos en la última columna de la que tenemos el primer y el quinto término de la progresión: Como $49 = 21 + 4\,d$ obtenemos que la diferencia es 7 y por tanto $x = 49 - 7 = 42$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | 21 |
| | 16 | | | |
| | | 27 | | |
| | | | 38 | $x$ |
| | | | | 49 |

**4. (C)** Como deben ser impares ninguno de sus factores puede ser 2. Comencemos de menor a mayor: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$, $3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$, $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$, $3 \cdot 3 \cdot 11 = 99$ y ya no hay más. En total hay cinco.

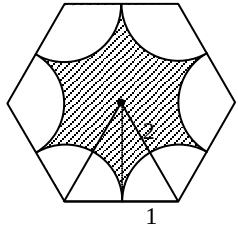
**5. (E)** Observa que los la suma de los ángulos de los vértices concurrentes es 180º pues cada uno de ellos aparece dos veces en el círculo, uno dentro de un triángulo y otro fuera. Como la suma de los ángulos de los cinco triángulos es $5 \cdot 180º$, si quitamos 180º de los ángulos de los vértices concurrentes, la suma de los ángulos que nos piden es $4 \cdot 180º = 720º$.



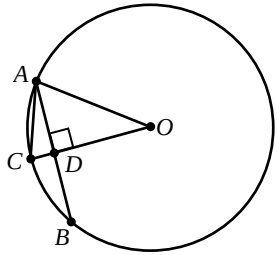
**6. (D)** Como el cuadro del cociente entre la primera y la segunda solo puede tener una cifra ese cociente puede ser 1, 2 ó 3 y tenemos las siguientes posibilidades:
Si la segunda es 1, la primera puede ser 2 ó 3 y las combinaciones son 214, 319.
Si la segunda es 2, la primera solo puede ser 6 y la combinación es 629.
Si la segunda es 3, la primera solo puede ser 6 y la combinación es 634.
La segunda cifra no puede ser mayor que 3 ya que entonces tendríamos que repetir cifra. En total hay 4 combinaciones.

**7. (B)** Como los ángulos de un hexágono suman 720º, los sectores circulares blancos forman dos circunferencias de radio 1 dm. Así pues el área buscada es el área del hexágono regular de 2 dm de lado menos el área de dos circunferencias de radio 1 dm:

$$6\cdot\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}-2\cdot\pi\cdot1^2=6\sqrt{3}-2\pi$$




**8. (A)** Comenzamos haciendo un dibujo.
Si *C* es el punto medio del arco *AB*, el radio *OC* corta a la cuerda *AB* perpendicularmente y por su punto medio *D* (pues los triángulos *ACO* y *BCO* son iguales). Observa los triángulos rectángulos *OAD* y *ACD*. Del triángulo *OAD* sabemos que *AO* = 5 y *AD* =3, por tanto, sus lados forman la famosa terna pitagórica (3, 4, 5), luego *OD* = 4. Del triángulo *ACD* tenemos *CD* = *CO* – *DO* = 5 – 4 = 1 y *AD* = 3 . Así pues, $AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ .



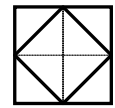

**9. (B)** Sabemos que $a_6 = 2a_5 + a_4$ y que $a_5 = 2a_4 + a_3$. Sustituyendo los valores que conocemos obtenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases}128=2a_5+a_4\\ a_5=2a_4+9\end{cases}$$ y al resolverlo obtenemos que $a_5 = 53$.

**10.(A)** Si el precio inicial de ordenador es *x* euros, en la tienda A pagará 0,85*x* – 90 y en la B pagará 0,75*x*. Como en la A le cuesta 15 euros menos que en la B, escribimos la ecuación 0,85*x* – 90 = 0,75*x* – 15 cuya solución es *x* = 750.

**11.(A)** Buscamos ternas de números enteros positivos (*n*, *m*, *m*+1) con $n < m$ y que cumplan que $(m+1)^2 = m^2 + n^2$. Así pues debe ser $n^2 = 2m+1$ esto es, 2*m* + 1 debe ser un cuadrado perfecto y como es impar, tenemos.
Si $2m + 1 = 3^2$; *m* = 4; si $2m + 1 = 5^2$; *m* = 12…
Como *m* < 100, 2*m*+1 < 201, podemos continuar calculando *m* para cuatro valores más: $7^2$, $9^2$, $11^2$ y $13^2$ pues $15^2 > 201$. En total hemos encontrado 6 ternas.

**12.(E)** No te líes haciendo cuentas. Simplemente hay que observar que al hacer ese proceso el área se reduce a la mitad, como ves en la figura.
Así pues, $S_2=\frac{1}{2}S_1=8$ y $S_3=\frac{1}{2}S_2=4$.



**13.(B)** Si llamamos $x$ e $y$ a los catetos y $z$ a la hipotenusa, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{2} = 320 \\ x + y + z = 128 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$ que parece un poco tedioso de resolver

Reescribimos el sistema del siguiente modo: $\begin{cases} xy = 640 \\ (x+y)^2 = (128 - z)^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$.

La segunda ecuación nos dice que $x^2 + y^2 + 2xy = 128^2 - 256z + z^2$. Utilizando la primera y la tercera ecuación tenemos que $z^2 + 1280 = 128^2 - 256z + z^2$ luego $256z = 128(128 - 10)$ y, por tanto, $z = 59$.

**14.(B)** Comencemos observando qué ocurre con la última cifra de las potencias de 2:
$2^1 = 2$ $\quad 2^2 = 4$ $\quad 2^3 = 8$ $\quad 2^4 = *6$
$2^5 = *2$; $\quad 2^6 = *4$ $\quad 2^7 = *8$ $\quad 2^8 = *6$…
Como ves, las terminaciones son cíclicas y se van repitiendo de 4 en 4 luego, para saber la última cifra de una potencia de 2, basta conocer el resto de dividir el exponente entre 4.
$k$ es múltiplo de 4: $2^{2010} + 2010^2 = (2^2)^{1005} + (2 \cdot 1005)^2 = 4^{1005} + 4 \cdot 1005^2$, así que $2^k$ acaba en 6.
Por otro lado, $k$ acaba en 4 pues $2010 = 4 \cdot 502 + 2$ y, por tanto $2^{2010} = *4$ y $2010^2$ acaba en cero, luego $k$ acaba en $4 + 0 = 4$ y, por tanto, $k^2$ en 6.
Así pues $2^k + k^2$ es $*6 + *6$ que acaba en 2.

**15.(C)** $AD = AB + BC + CD$ por otro lado,

$AB = 4BD$ y $AB + BD = AD$ entonces, $AB = \dfrac{4}{5} AD$ y

$AC = 9\,CD$ y $AC + CD = AD$ entonces, $CD = \dfrac{1}{10} AD$.

Luego, $AD = AB + BC + CD = \dfrac{4}{5} AD + BC + \dfrac{1}{10} AD$ y, por tanto,

$$BC = \left(1 - \frac{4}{5} - \frac{1}{10}\right) AD = \frac{1}{10} AD\,.$$

**16.(C)** Se puede hacer probando, pero si observamos que para que se cumpla la igualdad, $x$ debe ser par y $3x < 50$, obtenemos que $x$ debe ser un número par entre 0 y 16 (ambos incluidos) y, por tanto, hay 9 parejas.

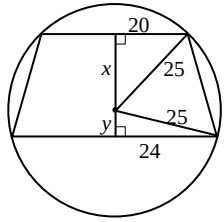
**17.(A)** Las soluciones de la ecuación son $x = \dfrac{2a+\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}$ y $x = \dfrac{2a-\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}$ y la media aritmética es $\dfrac{\dfrac{2a+\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}+\dfrac{2a-\sqrt{4a^2-4ab}}{2a}}{2} = 1$. Observa que la ecuación tendrá dos soluciones distintas siempre que a > b.

**18.(C)** En un cuadrado mágico de 3×3 el número central es un tercio del valor constante de la suma de las filas, columnas y diagonales (intenta demostrarlo). Si llamamos $N$ al valor constante de las sumas tenemos que $8 + \dfrac{N}{3} + 10 = N$, luego $N = 27$ y el valor central es 9. Con estos datos es fácil continuar completando el cuadrado. El número mayor es 15.

| | | |
|---|---|---|
| **8** | 15 | **4** |
| 5 | 9 | 13 |
| 14 | 3 | **10** |

**19.(A)** Tenemos un polinomio de la forma $x^2 + 20x + a$ y queremos que su valor en 1, que es $21 + a$, sea lo más grande posible. Así pues, buscamos el mayor valor de $a$ de modo que el polinomio tenga dos raíces enteras distintas. Como sus raíces son $\dfrac{-20+\sqrt{20^2-4a}}{2} = -10+\sqrt{100-a}$ y $-10-\sqrt{100-a}$ el mayor valor de $a$ que hace que esos números sean enteros y diferentes es 99 y por tanto el valor en 1 será 120.

**20. (A)** Para hallar la altura del trapecio tendremos que aplicar dos veces el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 25^2 - 20^2 = (25 + 20)(25 - 20) = 45 \cdot 5 = 9 \cdot 25$. Luego $x = 15$.
$y^2 = 25^2 - 24^2 = (25 + 24)(25 - 24) = 49$. Luego $y = 7$.
La altura del trapecio es 22 y su área $\dfrac{48+40}{2} \cdot 22 = 968$ cm$^2$.

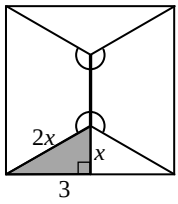



**21.(A)** Para ser múltiplo de 12 hay que serlo de 3 y de 4. Cualquier número formado con esas cifras es múltiplo de 3 pues la suma de sus cifras es 21 que es múltiplo de 3. Así pues, solo debemos ver cuándo es múltiplo de 4. Un número es múltiplo de 4

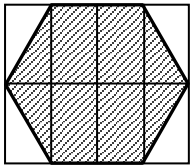
si lo es el número formado por sus dos últimas cifras. Así pues el número podrá tener la forma:
****12; ****16; ****24; ****32; ****36; ****52; ****56; ****64**.** Como para cada terminación hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ combinaciones posibles, en total hay $24 \cdot 8 = 192$ posibilidades.

**22.(C)** Vamos despacio: $9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot 9\,999 \cdot 99\,999 \cdot 999\,999 = 3^2 \cdot (3^2 \cdot 11) \cdot (3^2 \cdot 111) \cdot (3^2 \cdot 1111) \cdot (3^2 \cdot 11111) \cdot (3^2 \cdot 111111)$. Pero 111 y 111111 son ambos múltiplos de 3 y no lo son de 9 lo que nos da un $3^2$ más. La potencia máxima es $(3^2)^7 = 3^{14}$.

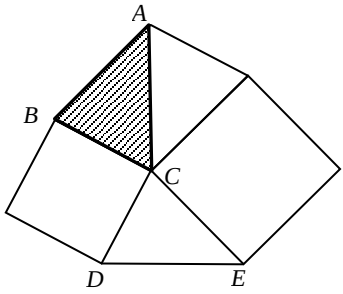
**23.(A)** Observa que los ángulos del triángulo rectángulo sombreado valen 90º, 30º y 60º, luego el cateto opuesto al ángulo de 30º vale la mitad de la hipotenusa (cae en la cuenta de que este triángulo es la "mitad" de un equilátero y su base es medio lado). Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que:
$4x^2 = 3^2 + x^2$ y por tanto $x = \sqrt{3}$ con lo que el segmento $AB$ mide $6 - 2\sqrt{3}$ .




**24.(D)** Como la base del rectángulo mide el doble del lado del hexágono, podemos dividir la figura en ocho rectangulitos iguales. Como el área del hexágono es 3/4 del área del cuadrado, su área es 48 $cm^2$.



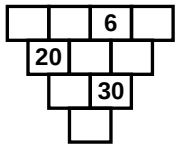
**25.(D)** Los triángulos $ABC$ y $CDE$ son iguales pues tienen dos lados iguales ($AB = CE = 5$ y $BC = CD = 4$) y el ángulo que forman también es igual ($AB$ es perpendicular a $CE$ y $BC$ es perpendicular a $CD$) luego sus áreas son iguales y por tanto, el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo, 16 $cm^2$.



## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* **IV**

**1. (C)** El número mínimo que podemos colocar en la tercera casilla de la 2ª fila es 7, de modo que el número máximo que puede ocupar la segunda casilla de dicha fila es 23. Así el máximo de primera casilla de la tercera fila será 43 y el máximo de la última fila 73

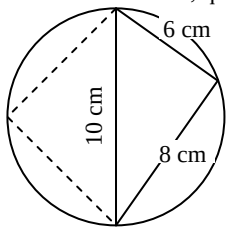



**2. (C)** En un cuadrado mágico 3×3 el número del cuadro central es la media de los nueve números y también la media de la fila central, de la columna central y de cada una de las dos diagonales, por lo tanto en el cuadro central hay un 9. La suma de cada fila, columna o diagonal es 27. Una vez resuelto, el cuadrado mágico queda:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 15 | 4 |
| 5 | 9 | 13 |
| 14 | 3 | 10 |

**3. (B)** Si llamamos $x$ al lado del hexágono mayor e $y$ al del menor tenemos, por el teorema del coseno: $y^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{4x^2}{9} - 2\frac{x}{3}\frac{2x}{3}\cos(120^\circ) = \frac{7x^2}{9}$. Puesto que las áreas son proporcionales a los cuadrados de los lados: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{7}$ y $A_2 = 28\ cm^2$

**4. (C)** Una de las diagonales de dicho cuadrilátero es el diámetro de la circunferencia, que vale $\sqrt{6^2+8^2} = 10$. Dividiendo el cuadrilátero en dos triángulos rectángulos por dicha diagonal, uno de los dos triángulos es fijo de 24 cm$^2$ de área. Si el otro tiene área máxima, el cuadrilátero tiene área máxima. Esto se produce cuando el triángulo es isósceles. Como la hipotenusa es 10 cada cateto mide $5\sqrt{2}$, y el área total máxima es 24 + 25 = 49



**5. (C)** Como $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ z = 3_{30^\circ} \cdot t \end{cases} \Rightarrow 3_{30^\circ} \cdot t \cdot t = 6_{60^\circ} \Rightarrow t^2 = 2_{30^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \left(\sqrt{2}\right)_{15^\circ} \Rightarrow z_1 = 3\sqrt{2}_{45^\circ} = 3+3i \\ t_2 = \left(\sqrt{2}\right)_{195^\circ} \Rightarrow z_2 = 3\sqrt{2}_{225^\circ} = -3-3i \end{cases}$

**6. (A)** El área del romboide es $A = l_1 \cdot l_2 \cdot sen(150^\circ) = 13 \cdot 20 \cdot \dfrac{1}{2} = 130 \text{ cm}^2$

**7. (C)** Restando miembro a miembro las dos ecuaciones tenemos $y - x = x^2 - y^2 - 7(x - y)$. Es decir: $(x-y)(x+y) - 6(x-y) = 0$, Y sacando factor común $(x-y)\left[(x+y) - 6\right] = 0$. De aquí $x - y = 0$ o $x + y = 6$

**8. (B)** $A_{CBF} = \dfrac{1}{3} A_{ABC} = 3$ porque tiene la misma base y un tercio de su altura. Por otro lado $A_{ADE} = \dfrac{2}{9} A_{ABC} = 2$ porque su base es dos tercios de la base del mayor y su altura un tercio de la altura del mayor. El área del cuadrilátero es $9 - 3 - 2 = 4$.

**9. (E)** El triángulo *AST* tiene la misma base y la misma altura que el triángulo *SOT*, por tanto su misma área: $\dfrac{r \cdot r \cdot sen(\alpha)}{2} = \dfrac{r^2 sen(\alpha)}{2}$

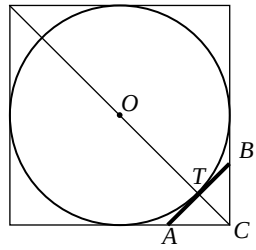
**10.(D)** $p(\text{al menos dos caras}) = 1 - p(0 \text{ caras}) - p(1 \text{ cara}) = 1 - \dfrac{1}{32} - \dfrac{5}{32} = \dfrac{13}{16}$

**11.(A)** $OT = r = \dfrac{1}{2}$

$OC = \dfrac{d}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$TC = OC - OT = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

$AB = 2AT = 2TC = \sqrt{2} - 1$



**12.(D)** El número formado por las dos últimas cifras debe ser tal que su doble también sea de dos cifras. Esto lo cumplen todos los números desde el 05 hasta el 49, que son en total 45 números.

**13.(A)** La afirmación contrarrecíproca de una afirmación verdadera, también es verdadera. Si $H \Rightarrow T$ es cierto, entonces *no* $T \Rightarrow$ *no* $H$ también es cierto **.** Por tanto, si todos los marcianos veranean en Venus, podemos asegurar que un ser que no veranea en Venus no es marciano.

**14.(E)** El número de heptágonos es $C_{10,7} = \binom{10}{7}$ El número de triángulos es $C_{10,3} = \binom{10}{3}$ y como $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$, su diferencia es 0.

**15.(D)** Como los seis coeficientes han de ser 1 o -1, y 1 debe ser raíz, tiene que haber tres 1 y tres -1. Las posibles formas de colocarlos son $PR_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!\,3!} = 20$

**16.(C)** $p$(números consecutivos) $= \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18} = 0{,}2\widehat{7}$ .

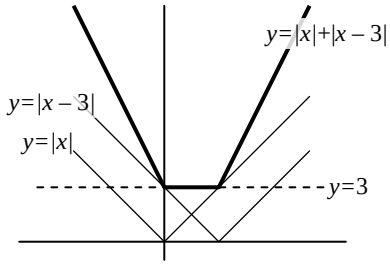
**17.(A)** Cambiando a base 2 el logaritmo de base 4, tenemos:

$$\log_2(x-16) = \frac{\log_2(x-4)}{2} \quad \Rightarrow \quad (x-16)^2 = x-4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 33x + 260 = 0$$ **.**

De las dos soluciones de esta ecuación, la primera, 13, es extraña porque no existe $\log_2(-13)$. La segunda es 20, y la suma de sus cifras es 2 + 0 = 2

**18.(A)** $|x| + |x-3| = \begin{cases} 3-2x & x < 0 \\ 3 & 0 \le x \le 3 \\ 2x-3 & x > 3 \end{cases}$.

Excepto cuando $x \in [0, 3]$ en los demás casos resulta mayor que 3, por tanto la solución a la inecuación $|x| + |x-3| > 3$ es $x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$



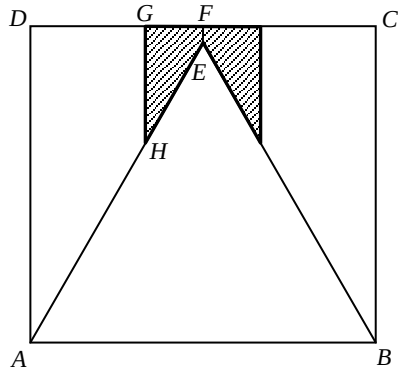

Para verlo mejor podemos representar las funciones $y = |x|$, $y = |x-3|$, $y = |x| + |x-3|$

**19.(D)** Sabemos que $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = 1 + \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2+4}{4} \Rightarrow \cos x = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+4}}$

**20. (C)** $\left.\begin{matrix} r = \log a^2 \\ L = \log b^4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \log b^4 = 2\pi \log a^2 \Rightarrow \log b = \pi \log a \Rightarrow \log_a b = \dfrac{\log b}{\log a} = \pi$ .

**21.(B)** El área de la región pedida es el doble del área del trapecio *EFGH*. Es decir

$A_R = 2 \cdot \dfrac{GH + EF}{2} \cdot GF = (GH + EF) \cdot GF$ .




La altura del trapecio es la mitad de la tercera parte del lado, por tanto $\dfrac{1}{6}$.

Por otro lado,

$GH = 1 - \dfrac{1}{3} tg(60^\circ) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y

$EF = 1 - \dfrac{1}{2} tg(60^\circ) = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

Así el área es $A_R = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{12 - 5\sqrt{3}}{6}$ .

**22.(B)** Las potencias de 2 acaban en 2, 4, 8 ó 6 periódicamente con periodo 4. Si el exponente es múltiplo de 4, la terminación es 6. Si es múltiplo de 4 más 1, la terminación es 2. Si es múltiplo de 4 más dos, la terminación es 4 y si es múltiplo de 4 más 3 la terminación es 8.

$2^k + k^2 = 2^{2^{2010} + 2010^2} + (2^{2010} + 2010^2)^2 = 2^{2^{2010}} \cdot 2^{2010^2} + 2^{4020} + 2^{2011} \cdot 2010^2 + 2010^4$

Si en la expresión anterior sustituimos cada número por su residuo módulo 10, tenemos: Residuo $\left(2^k + k^2\right) = \{6\} \cdot \{6\} + \{6\} + \{0\} + \{0\} = \{6\} + \{6\} = \{2\}$

**23.(A)** El volumen que sobresale del agua es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{8} V_T = \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$ . Por tanto,

$\dfrac{r^2 \cdot h}{R^2 \cdot H} = \dfrac{1}{8}$. Pero como $\dfrac{r}{R} = \dfrac{h}{H} \Rightarrow \left(\dfrac{h}{H}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \dfrac{h}{H} = \dfrac{1}{2}$

**24.(E)** Sean los puntos $A(-a,a^2)$ *y* $B(a,a^2)$ y el punto $C(c,c^2)$. Evidentemente $c < a$ para que el ángulo en C pueda ser recto.

El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ debe ser 0.

Entonces: $(-a-c)(a-c)+(a^2-c^2)(a^2-c^2)=0 \Rightarrow (a^2-c^2)^2 = a^2-c^2$

Pero esto solo puede ser si $\begin{cases} a^2-c^2=0 \\ a^2-c^2=1 \end{cases}$.

La primera posibilidad no tiene sentido, por tanto la buena es la segunda.

Como el área del triángulo es $A=\dfrac{2a\cdot(a^2-c^2)}{2}$ y sabemos que vale 2010, resulta que $a = 2010$, $a^2 = 4.040.100$ y $c^2 = 4.040.099$.

La suma de las cifras de $c^2$ es $4 + 0 + 4 + 0 + 0 + 9 + 9 = 26$.

**25.(B)** Los enteros positivos, *x*, que cumplen: $\left.\begin{matrix} x+7=5k \\ x+5=7p \end{matrix}\right\}$ son

$x=5k-7=7p-5 \Rightarrow 5k+5=7p+7 \Rightarrow \dfrac{p+1}{k+1}=\dfrac{5}{7}$.

El menor valor posible para *x* se obtiene de los menores valores posibles para *k* y *p* que son, 6 y 4, respectivamente, lo que producen un menor valor posible de $x = 23$.

La suma de las cifras de *x* es 5.

## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel I*

**1. (D)** La diferencia es 876 543 211, y la suma de sus cifras se hace más fácilmente si nos damos cuenta de que $8+1=7+2=6+3=5+4=9$. Con lo que la suma pedida es: $9\cdot 4+1=37$.

**2. (C)** Como la manecilla recorre $\frac{360}{12}=30^{\circ}$ por hora, en 3,5 horas recorrerá $30\cdot 3{,}5=105^{\circ}$.

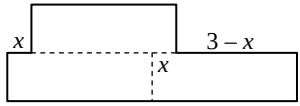
**3. (D)** Si Juan pescó $x$ peces, Sofía pescó $x+5$ y Pinchamé $x+8$. En consecuencia, entre los tres pescaron $3x+13=34$, que resuelta da $x=7$. Como entre Juan y Pinchamé pescaron $2x+8$ peces, basta sustituir ahí el valor de $x$ para obtener los 22 peces que pescaron entre los dos últimos.

**4. (D)** Como $x$ pertenece a la vez a una columna y una diagonal, la suma de los dos elementos restantes deberá ser igual. En nuestro caso tendremos: $z+12=15+24\Rightarrow z=27$, y ya con la segunda fila completa podemos calcular la suma común (que llamaremos $M$): $M=27+15+3=45$, de donde $x=45-15-24=6$.

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | | |
| $z$ | 15 | 3 |
| 12 | | 24 |

En realidad, en este problema "sobran datos", pues si sumamos las dos diagonales más la fila y la columna centrales tendremos $4M$, pero por otra parte vemos que hemos sumado todos los números del cuadrado una vez, excepto el número de la casilla central que lo hemos sumado 4 veces. Tenemos pues: $4M-3\cdot 15=3M\Rightarrow M=45$.

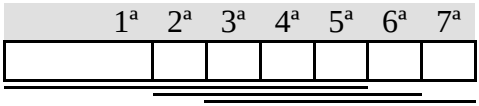
**5. (A)** Dado que los tres rectángulos miden 3 cm de base y 1 cm de altura, de la figura se desprende que el perímetro es: $1+3+1+(3-x)+1+6+1+x=16$ cm.




**6. (D)** Si la urraca le quita $n$ avellanas y el oso le roba $2n$, en total le sustraen $3n$ avellanas. Como ardilla se ha quedado sin ninguna avellana deducimos que el número total de avellanas es múltiplo de 3. Además, a la pobre ardilla solo le queda el montón de nueces. Ya no nos queda mas que averiguar cuál de los montones es el de nueces. El número total de frutos era 119 y por tanto, 119 menos el desconocido montón de nueces debe ser igual a $3n$. Entonces, para saber cuantas avellanas tenía,

comprobaremos, de entre todas las posibilidades, cuál hace que el número de avellanas sea múltiplo de 3:
119 – 15 = 104; 119 – 16 = 103; 119 – 18 = 101; 119 – 19 = 100; 119 – 20 = 99; 119 – 31 = 88.
Es muy fácil ver que el único múltiplo de 3 es 99, en consecuencia el número de nueces es 20.

**7. (B)** Siguiendo el esquema representado por la tabla de abajo hacemos la siguiente suma: (Suma de las 5 primeras cifras) + (suma de la 2ª a la 6ª) + (suma de la 3ª a la 7ª) que, de acuerdo con el enunciado, será igual a $3 \cdot 19$. Pero observamos que hemos sumado todas las cifras, repitiendo en el segundo *paréntesis* un grupo de 4 cifras que ya habíamos sumado en el primero, situación que se repite en el tercer *paréntesis*, pero ahora respecto al 2º. Por lo tanto la suma de las siete cifras será: $3 \cdot 19 - 2 \cdot 16 = 25$.

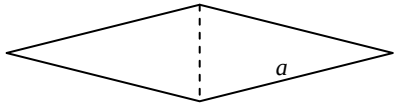


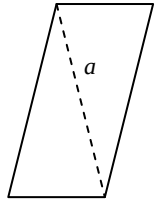

Otra forma de resolver el problema es:
Como 1ª + 2ª + 3ª + 4ª = 16 y 1ª + 2ª + 3ª + 4ª + 5ª = 19, la 5ª cifra es un 3.
Análogamente 3ª + 4ª + 5ª + 6ª + 7ª = 19 y 4ª + 5ª + 6ª + 7ª = 16, la 3ª cifra es un 3.
Análogamente 2ª + 3ª + 4ª + 5ª + 6ª = 19 y 3ª + 4ª + 5ª + 6ª = 16, la 2ª cifra es un 3.
De esta forma se deduce que la clave es:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 7 | 3 | 3 | 3 |

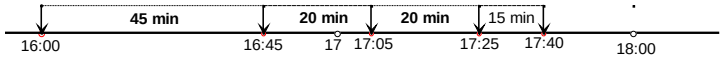
Y la suma de sus cifras es 25.

**8. (E)** En la figura vemos que $25 + 25 - 2a = 32$ cm, es decir, el doble del lado igual mide 18 cm y dicho lado mide 9 cm, con lo que el perímetro del rombo mide $9 \cdot 4 = 36$ cm.

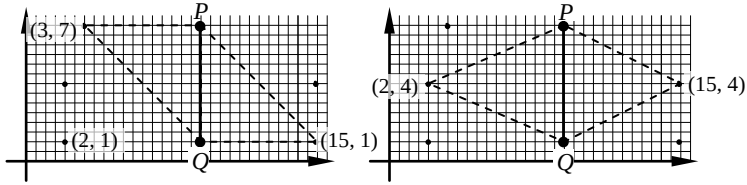



**9. (D)** Ordenando los tiempos sobre un eje coordenado, nos damos cuenta inmediatamente de que, solo respecto al reloj que marca las 17:05, hay dos relojes que cumplen las condiciones del problema: el que marca las 16:45 y el que marca las 17:25, que estarán, respectivamente, retrasados y adelantados 20 minutos. Por lo tanto, el de las 17:05 marca la hora correcta.



**10. (D)** Con el punto (3, 7) se forma un triángulo, rectángulo en P. Sus catetos miden 6.
Los puntos (15, 4) y (2, 4) pertenecen a la mediatriz del segmento PQ.
Con el punto (2, 1) se forma un triángulo, rectángulo en Q, cuyos catetos miden 6 y 7 respectivamente. Este no es isósceles.
Con el punto (15, 1) se forma un triángulo, rectángulo en Q. Sus catetos miden 6.




**11. (E)** Comencemos calculando la última cifra de las primeras potencias de 3:
$3^1$, $3^{2,}$ $3^3$, $3^4$, $3^5$, $3^6$, …
3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, …
(Al hacer esto hemos observado que para obtener la última cifra de una potencia de 3 es suficiente multiplicar por 3 la última cifra de la potencia anterior).
Tenemos ahora una sucesión que forma ciclos de longitud 4, lo que nos permite concluir que la última cifra de $3^{2010}$ será la misma que la de 3 elevado al resto de dividir 2010 entre 4, que resulta ser 2.
Concluimos que la cifra pedida es la última de $3^2$, es decir, 9.

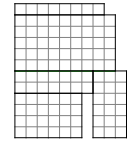
**12.(A)** Si Alicia está en la casilla número $n$, Marta estará en la número $n+42$ y Pedro en la $n+77$, como queda claro de la observación de la tabla.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| … | | | | **A l i c i a** | | | … |
| … | | | | n + 40 | n + 41 | **M a r t a** | … |
| … | **P e d r o** | n + 78 | n + 79 | n + 80 | | | … |

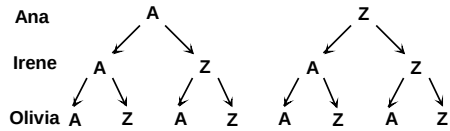
Luego tenemos: $n+(n+42)+(n+77)=185 \Rightarrow 3n+119=185 \Rightarrow n=22$
Y la suma pedida es: $n+(n+77)=121$.

**13. (D)** Es sencillo percatarse de que la suma de los números de cada fila es el doble que la suma de los de la anterior. Además no es preciso realizar dichas sumas, pues como cualquier número de una fila (excepto el primero y el último) se obtiene sumando los dos que están encima de él a derecha e izquierda, cada número de la fila anterior se suma dos veces (también los unos se suman dos veces) y, en consecuencia, la suma de los números de una fila es el doble que la suma de los de la anterior. Obtenemos así las siguientes sumas: $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, $2^6$, … donde el exponente es el número de fila, por tanto la suma de los números de la fila 10 será $2^{10} = 1024$.

**14.(E)** El número total de cuadraditos de las cinco piezas es:
$18+16+9+50+28=121$, lo que limita el estudio a las figuras D y E que son las únicas que cuentan con 121 cuadraditos. Por otra parte es muy fácil -como se muestra en la figura- encontrar una disección de la figura E en los cinco rectángulos de partida.



**15. (B)** Representando por A el agua y por Z el zumo es sencillo ver todas las posibilidades que tienen Ana, Irene y Olivia mediante un diagrama de árbol. Pero para analizar estas posibilidades es más cómodo representar la situación en una tabla:




| | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 6ª | 7ª | 8ª |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ana | ~~A~~ | ~~A~~ | ~~A~~ | ~~A~~ | **Z** | ~~Z~~ | **Z** | **Z** |
| Irene | ~~A~~ | ~~A~~ | ~~Z~~ | ~~Z~~ | **A** | ~~A~~ | **Z** | **Z** |
| Olivia | ~~A~~ | ~~Z~~ | ~~A~~ | ~~Z~~ | **A** | ~~Z~~ | **A** | **Z** |

La primera proposición descarta las columnas 2ª y 3ª.
La segunda descarta la 1ª y la 6ª.
Y la tercera descarta la 4ª columna.
A la vista de la tabla queda claro que Ana siempre toma la misma bebida: zumo.

**16. (B)** En principio podría pensarse que hay 11 posibilidades, correspondientes a los 11 restos posibles $(x=11\cdot r+r)$, pero como $x > 0$, tenemos que descartar $r=0$, con lo que quedan solo 10 posibilidades para $x$.

**17. (B)** La cifra de las unidades del primer resto es evidentemente un 1, y como $7\times 3=21$ tenemos que la cifra de las unidades del resto es un 0 (la división es exacta). Pero esto obliga a que 7 por el divisor valga 91y esto último, a que el resto sea 13. Ahora bien, que el divisor sea 13 implica que la cifra de centenas del dividendo no sea mayor que 2, es decir, que sea 0, 1 ó 2.
Tras estas consideraciones, el problema queda reducido a encontrar los números de la forma $1\bullet\bullet$, comprendidos entre 100 y 129, que divididos entre 13 den resto 9.
Como 100 dividido entre 13 da resto 9, también lo darán 113, 126, ~~139,~~ …
Podemos pues concluir que los tres números, 1001, 1131 y 1261, son los únicos que se adaptan a la situación impuesta por el problema.

**18. (A)** Para empezar construimos una tabla con todos los casos posibles y, en ella vemos:

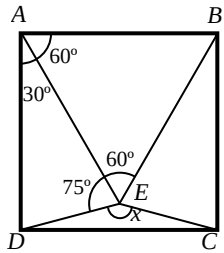
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| 2 | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| 3 | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| 4 | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| 5 | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** |
| 6 | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** |

18 casos en los que la suma es par (la probabilidad de que Alejandro se coma una cereza es 18/36 = 6/12),
15 casos en los que la suma es un número primo (la probabilidad de que Belén se coma una cereza es 15/36 = 5/12) y
21 casos en los que la suma es mayor que 6 (la probabilidad de que Carlos se coma una cereza es 21/36 = 7/12).
Todas las afirmaciones son claramente falsas.

**19. (D)** Felisa tardó 43 min 30 s + 28 min 30s = 71 min 60 s = 72 min = 1h 12 min.
Como llegó a las 19:20 comenzó a correr a las:
19 h 20 min **–** 1h 12 min = 18 h 8 min, es decir, a las 18:08.

**20. (C)** Llamando $x$ a la nota de la 4ª evaluación, para que la nota media sea un siete debe cumplirse: $\frac{6+9+7+x}{4}=7 \Rightarrow \frac{22+x}{4}=7 \Rightarrow x=6.$
Si la nota $x$ es mayor que 6 la media será mayor que 7**.** Como mínimo debe sacar un 6 en la 4ª evaluación.

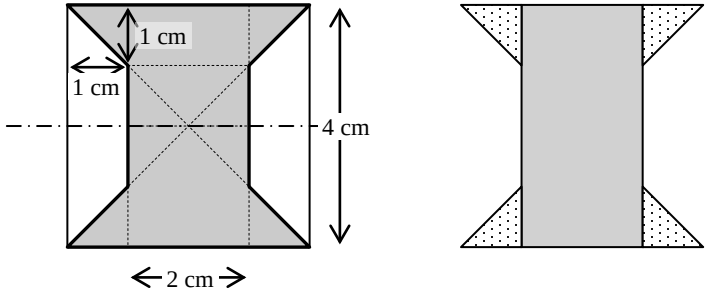
**21. (C)** Al ser los lados *AE* y *AD* iguales, el triángulo *DAE* es isósceles y cada uno de sus ángulos iguales medirá $\frac{180^\circ-30^\circ}{2}=75^\circ$ y, por el mismo motivo, el ángulo *BEC* valdrá también 75º. Por lo tanto, el valor del ángulo $x$ será $360^\circ-(75^\circ+60^\circ+75^\circ)=150^\circ$.




**22. (C)** Entre Joaquín y Alicia compraron 3 refrescos y 3 pasteles, y pagaron en total $4{,}90+4{,}70=9{,}60$; por lo tanto, un refresco más un pastel (que es lo que pagó Pedro) costarán $9{,}60/3=3{,}20$ €.

**23.(D)** Por las simetrías del cuadrado se deducen las medidas de los segmentos marcados en la figura inferior.

Seccionando la figura, como se aprecia en la parte derecha, es inmediato ver que el área vale: $4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 4 = 10 \text{ cm}^2$.




**24. (C)** La velocidad constante a la que anda Richi hace que la relación entre $L_2$ y $L_4$ sea la misma que la de los tiempos empleados en recorrer esas distancias. Según los datos del enunciado, el tiempo empleado en recorrer $L_2$ será la mitad del empleado en recorrer $L_3$, es decir, 5 minutos y, del mismo modo, calculamos que el tiempo para $L_1$ es 2,5 minutos. En consecuencia el tiempo para $L_4$ será $30 - (10 + 5 + 2{,}5) = 12{,}5$ minutos, y la relación entre $L_2$ y $L_4$:

$$\frac{L_2}{L_4} = \frac{5}{12{,}5} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5L_2 = 2L_4.$$

**25. (D)** Supongamos, para empezar, que se pone 1 anillo en la mano izquierda y 2 en la derecha.

Como en los pulgares no se pone anillos solo tenemos que considerar 4 dedos en cada mano. Así, en la mano izquierda tiene 4 dedos para elegir y 3 anillos para escoger, una vez haya elegido el dedo. Tiene pues, en total, $3 \times 4 = 12$ formas distintas de ponerse un anillo en la mano izquierda.

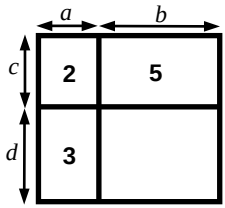
Una vez hecho eso, tiene 4 formas distintas de elegir 1 dedo de la derecha para el segundo anillo y 3 para el tercero, es decir, tiene $4 \times 3 = 12$ formas distintas para cada una de las 12 de la mano izquierda. En total $12 \times 12 = 144$ formas distintas, que sumadas a las que proporciona la situación simétrica (1 anillo en la derecha y 2 en la izquierda), hacen 288 formas distintas.

## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

### *Soluciones 2ª Fase Nivel II*

**1. (B)** 60 l / $m^2$ = 60 $dm^3$ / 100 $dm^2$ = 0,6 $dm^3$ / $dm^2$ , lo que significa que en un cubo de un decímetro cuadrado de base habríamos recogido un volumen de 0,6 $dm^3$ de agua, o lo que es lo mismo tendríamos una columna de agua de 0,6 dm de altura. Este hecho "justifica" el abuso de lenguaje de leer las precipitaciones de lluvia, bien en l / $m^2$ o bien en mm.

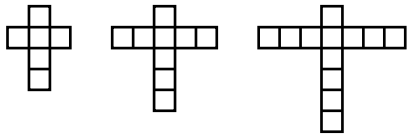
**2. (E)** Nuestras áreas son el resultado de un producto: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$, de forma que los dos primeros términos del 2º miembro están en proporción con los dos segundos: $\frac{\cancel{a}\cdot c}{\cancel{a}\cdot d} = \frac{\cancel{b}\cdot c}{\cancel{b}\cdot d}$, luego leamos la tabla como de proporcionalidad directa. Si a 2 le corresponde 3, a 5 le corresponde 7,5.




**3. (B)** Típico problema de resolución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3a + 2n = 26 \\ 4a + 6n = 48 \end{cases}$, donde $a$ es el precio de la entrada de un adulto y $n$ el precio de la entrada de un niño, siendo la pregunta el valor de $a - n$. Podemos resolver completamente el sistema, o dedicarnos solamente a la pregunta. Está claro que $2a + 3n = 24$ , y si conocemos el precio de tres "adultos" y dos "niños" y el precio de dos "adultos" y tres "niños", la resta de ambos (26 – 24 = 2 €) es la solución buscada.

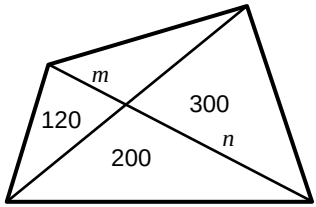
**4. (A)** Si llamamos respectivamente, $a$, $b$ y $c$, a los votos que obtuvieron Alicia, Beatriz y Carlos, tenemos que $a = \frac{5}{6} b = 300$ , luego $b = \frac{6}{5} \cdot 300 = 360$ , y como además, $b = 80\% \cdot c = 0{,}8 \cdot c = 360$ , $c = \frac{360}{0{,}8} = \frac{3600}{8} = 450$ votos.

**5. (D)** Vemos que la primera cruz tiene 6 cuadraditos y que después se añade un cuadrado a cada brazo y otro al palo central, es decir que el número de cuadrados aumenta de tres en tres.

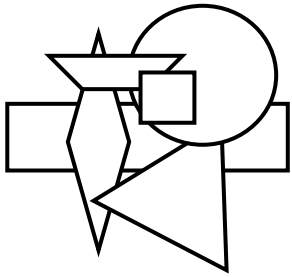


Nos piden pues qué número ocupa el lugar 50 en la serie 6, 9, 12, ... Pues llegaremos a él realizando 49 saltos de longitud 3 desde el primer número. La respuesta es $6 + 49 \cdot 3 = 153$.

**6. (B)** Damos por hecho que la plancha es homogénea y por tanto los pesos de los triángulos son proporcionales a sus áreas. Llamemos A, B, C, respectivamente a los triángulos de peso 120, 200 y 300 g, y D al de peso desconocido. B y C comparten un lado que podemos tomar como base de medida *n*, y A y D una base de medida *m*. Por otro lado las alturas de A y B sobre esas bases miden lo mismo *p*, y las de C y D miden *q*. Luego las áreas de A, B, D y C son, respectivamente, $\frac{m\cdot p}{2}$, $\frac{n\cdot p}{2}$, $\frac{m\cdot q}{2}$, $\frac{n\cdot q}{2}$, y por tanto las dos primeras están en igual proporción que las dos últimas, es decir: $\frac{120}{200}=\frac{x}{300}$, de donde $x$ = 180 g.



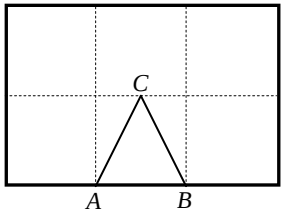

**7. (B)** Es cuestión de fijarse un poco. La primera etiqueta en pegarse es el rectángulo, luego se puso el rombo, y la tercera fue el triángulo.



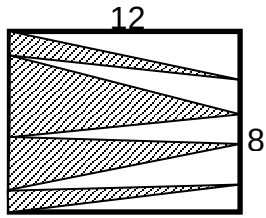
**8. (C)** Para compararlas escribamos las dos velocidades en las mismas unidades:

1 *km/min* $=\frac{1}{60}km/s$ y $\frac{1}{40}km/s$. Luego la segunda es $\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$ de la primera, es decir un 150% de ella. Hay pues que aumentar en un 50% la primera velocidad.

**9. (A)** Como el triángulo tiene de base un tercio de la del rectángulo y de altura la mitad, su área (al ser un triángulo) será $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ de la del rectángulo, es decir, 2.



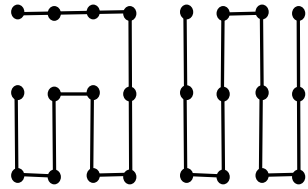
**10. (D)** Pocos datos para que no haya otra respuesta posible que $\frac{1}{2}$. Efectivamente, el área rayada se obtiene sumando las áreas de triángulos de altura común 12 y cuyas bases suman 8, y por tanto su área es:




$\frac{\text{Suma de bases}}{2} \cdot \text{ altura} = 6 \cdot 8 = 48$ (igual que la de la zona blanca).

**11.(E)** $1000^{100} = \left(10^3\right)^{100} = 10^{300} = 10^{100} \cdot 10^{200} = 10^{200}$ googoles.

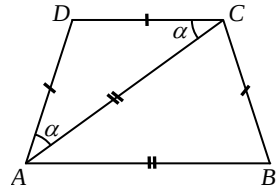
**12.(D)** *Andarín* ha recorrido 6 tramos horizontales y 5 verticales, $6h + 5v = 37$ mientras que *Pisapiedras* ha andado 3 horizontales y 8 verticales, $3h + 8v = 46$ . En ambos casos han recorrido 11 tramos (ya que hay doce puntos y sólo los visitamos una vez). La solución más corta será la que tenga menor número de tramos verticales que son más largos. El trayecto mínimo no es único, pero sí su longitud $9h + 2v$.




Resolvamos el sistema $\left.\begin{array}{c} 6h + 5v = 37 \\ 3h + 8v = 46 \Rightarrow \ 6h + 16v = 92 \end{array}\right\}$ $11v = 55;\ v = 5;\ h = 2$

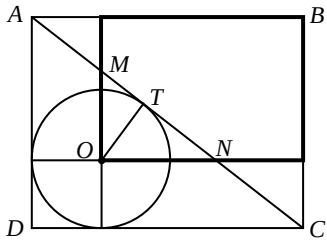
$9h + 2v = 18 + 10 = 28$ km.

**13.(A)** En el triángulo isósceles *ADC* llamamos $\alpha$ al ángulo que se repite. En el otro triángulo isósceles tenemos que: $\hat{A} - \alpha = \hat{B} - \alpha = 180^\circ - 2\hat{B}$ , y por tanto $3\hat{B} - \alpha = 180^\circ$ . Por otro lado en el trapecio isósceles: $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \hat{B} + (\hat{B} + \alpha) = 2\hat{B} + \alpha$ .




Sumando ambas ecuaciones en $\alpha$ y $\hat{B}$, nos queda que $5\hat{B} = 360^\circ$ , es decir $\hat{B} = 72^\circ$ , y por tanto $\hat{D} = 108^\circ$ .

**14.(C)** Dibujamos el rectángulo pedido. Si trazamos los radios del círculo en los puntos de contacto con el triángulo *ADC* se vislumbra la posibilidad de tener triángulos repetidos.




Los triángulos *MPA* y *MOT* son iguales. Ambos son rectángulos, tienen en M ángulos opuestos por el vértice, y $\overline{AP} = \overline{OT} = r$. De igual forma son iguales los triángulos *NTO* y *NCQ*. Por tanto el área de *POQB* es igual a la del triángulo *ABC*, mitad de la dl rectángulo de partida.

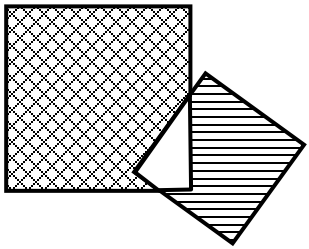
**15.(B)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{x\cdot y}=\frac{5}{x\cdot y}$ ya que $x + y = 5$, y por tanto esa suma será menor cuánto mayor sea $x \cdot y$. Si escribimos $x$ e $y$ respecto a $2{,}5$, uno es $2{,}5 + h$ y el otro $2{,}5 - h$, y así el producto es $(2{,}5+h)\cdot(2{,}5-h)=6{,}25-h^2$, con lo que este producto a lo más vale $6{,}25$ cuando $h = 0$. Así tenemos que**:**

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{x\cdot y}\geq\frac{5}{6{,}25}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}\,.$$

**16.(B)** Llamando c al peso de una canica, *b* la de un boloncio y *p* al de una pelota. Tenemos el sistema $\begin{cases}13c=3b+p\\5c+b=2p\end{cases}$, y queremos eliminar las pelotas para encontrar una relación entre canicas y boloncios. Despejamos *p* de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$p=13c-3b;\ \ 5c+b=2\cdot(13c-3b);\ 5c+b=26c-6b;\ 7b=21c;\ b=3c\ .$$

**17.(E)** El área cuadriculada es $36 - B$, el área rayada es $16 - B$. La diferencia de las dos es $36 - 16 = 20$.



**18.(C)** De la primera columna deducimos que Q + T es M o 10 + M. Como en la segunda aparece de nuevo T + Q y el resultado no es M, deducimos que en la primera suma llevamos una unidad a las decenas y por tanto estas suman 10 + Q –1 y por tanto T = 9 ( T + Q = 10 + Q – 1). La suma de las centenas nos dice que M = 4, y volviendo a las unidades Q = 5.
Por lo tanto T + Q + M = 18.

$$\begin{array}{rccc} & M & T & Q \\ + & M & Q & T \\ \hline & T & Q & M \end{array}$$

**19.(B)** Como hay pocos casos podemos escribirlos todos, es decir igual número que claves de tres letras ordenadas alfabéticamente (una vez escrita una clave no cambiamos el orden de sus letras porque produciría el mismo color) formadas con las letras B, V y A: AAA, AAB, AAV, ABB, ABV, AVV, BBB, BBV, BVV, VVV

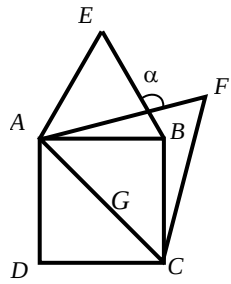
**20.(C)** $p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$ Operemos en el castillo de fracciones:

$p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}}=p+\dfrac{1}{\dfrac{rq+1}{r}}=p+\dfrac{r}{rq+1}=\dfrac{prq+p+r}{rq+1}=\dfrac{25}{19}$ . Tentados estamos a decir que $rq + 1 = 19$, y lo diremos si previamente razonamos que $rq$ +1 es primo con $prq + p + r$.

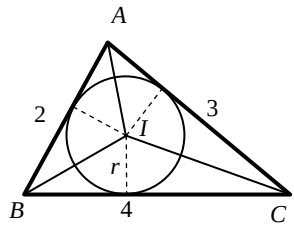
Como $prq + p + r = p(rq + 1)+ r = = p(rq + 1)+ r$, el mcd( $p(rq + 1) + r, rq + 1$) = = mcd($r, rq + 1$) = 1.

Liberados de escrúpulos puntillosos, podemos afirmar que $rq + 1 = 19$, y $prq + p + r = 25$, luego $rq = 18$, y $prq$ debe ser también 18 (por ser números enteros positivos).

**21.(A)** $\alpha$ es opuesto por el vértice del ángulo $AGB$ . El ángulo $GAB$ mide 60º – 45º = 15º, y el ángulo $ABG$ también 60º, luego $\alpha = 180º – 15º – 60º = 105º$



**22.(D)** El incentro de un triángulo divide a este en tres triángulos de altura común el radio inscrito y bases cada uno de los lados . Así el área del triángulo se descompone como suma de esas tres áreas:




$S = \frac{r \cdot a + r \cdot b + r \cdot c}{2} = \frac{4r + 3r + 2r}{2} = \frac{9}{2} r$ . Como el área de *IAB* es $\frac{2r}{2}$, el cociente pedido es $\frac{2}{9}$.

**23.(E)** Las cifras que podemos usar son 2, 4, 6 y 8. Formamos tríos a partir de una pareja cuya suma no pase de 8 y de su suma: 224, 246, 268 y 448. Y ahora en esos tríos variamos la posición de las cifras. Si las tres son distintas obtendremos 6 números diferentes, y si dos cifras son iguales obtendremos sólo 3:

| Trío | 224 | 246 | 268 | 448 |
|---|---|---|---|---|
| Números que genera | 3 | 6 | 6 | 3 |

En total 18 números

**24.(A)** Al circular en sentido contrario la velocidad de separación es la suma de velocidades, es decir 270 + 306 = 576 km/h. Si tarda 0,8 segundos en ver pasar el tren más lento, durante este tiempo el espacio recorrido es:

$$e = 0{,}8\,s \cdot \frac{576\cancel{000}}{36\cancel{00}}\, m/s = 0{,}8 \cdot \frac{640}{4}\, m = 128\ m\ .$$

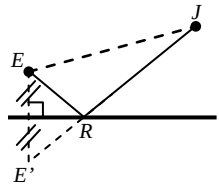
**25.(D)** Como todas las cajas son iguales podemos referirnos a una sola de ellas. Los paquetes de 6 huevos pesan 20 g vacíos y 380 g llenos, luego cada huevo pesa 60 g. Una caja tiene el doble de paquetes de 6 huevos que de 12, luego contiene el mismo número de huevos en cada tipo de paquete, es decir 120 en paquetes de 6 y 120 en paquetes de 12, luego contiene 20 paquetes de 6 y 10 de 12. El peso de una caja (16,8 kg) se obtiene como la suma de 20 paquetes llenos de 6 huevos, 120 huevos, el peso de los 10 paquetes vacíos de 12 huevos y el peso de la caja vacía. Así: 16 800 = 20 · 380 + 120 · 60 g +10 p + c, y así 10 p + c = 2000 g , no pudiendo calcular ni el peso del paquete vacío de 12 huevos, ni el peso de una caja vacía.

## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

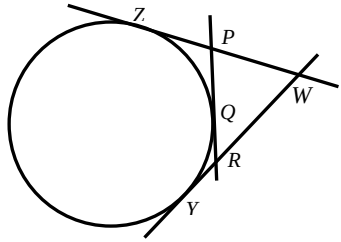
***Soluciones 2ª Fase Nivel* III**

**1. (D)** Observa que la paridad de los días de la semana va cambiando de semana en semana. Es decir, si hoy martes es par, el martes de la semana que viene será impar. La única manera de que haya tres domingos pares es que el día 2 sea domingo. Así pues, los domingos serán los días 2, 9, 16, 23, 30. El día 20 será jueves.

**2. (B)** El camino más corto es el B): se ha calculado el simétrico (*E'*) de *E* respecto al río y se une con *J*. El punto de intersección de *E'J* con el río nos da el punto *R*, que es a donde debe dirigirse Esteban.
El trayecto *ER* + *RJ* es el más corto posible ya que *ER* = *E'R* y para ir de *E'* a *J* el camino más corto es la línea recta (que, por construcción, pasa por *R*).




**3. (B)** Las tangentes trazadas desde un mismo punto tienen igual longitud, así que $WZ = WY = 20$, $PZ = PQ = a$ y $RQ = RY = b$.
Los lados del triángulo *WPR* miden:
$WP = WZ - PZ = 20 - a$
$WR = WY - RY = 20 - b$
$PR = PQ + RQ = a + b$
El perímetro del triángulo *WPR* es $WP + WR + PR = 20 - a + 20 - b + a + b = 40$.




**4. (E)** Para calcular el valor de $u = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ siendo $a < b$, calcularemos $u^2$ primero:

$u^2 = a+b+2\sqrt{ab} + a+b-2\sqrt{ab} + 2\sqrt{(a+b+2\sqrt{ab})(a+b-2\sqrt{ab})}$

$u^2 = 2a+2b+2\sqrt{(a+b)^2-4ab} = 2a+2b+2\sqrt{(a-b)^2}$ y aquí está el paso peligroso: $\sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = b-a$ ya que $b > a$.

Así pues, $u^2 = 2a+2b+2(b-a) = 4b$ y entonces, $u = 2\sqrt{b}$

**5. (B)** Llamamos *e*, *v* y *t* al espacio (km), velocidad (km/h) y tiempo (h) del tren. Según los datos del problema podemos formar este sistema:

$$\left.\begin{array}{l} vt = (v+10)\cdot(t-\frac{2}{3}) \\ vt = (v-10)\cdot(t+1) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 30t-2v=20 \\ 10t-v=-10 \end{array}\right\} \rightarrow v=50 \quad t=4\,.$$

La longitud del recorrido es $e = v\cdot t = 50\cdot 4 = 200$ km.

**6. (C)** Un polígono de *n* lados tiene $\frac{n\cdot(n-1)}{2} - n$ diagonales.

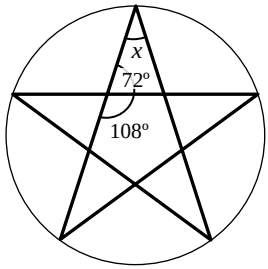
¿De dónde sale esa fórmula? Si tenemos *n* vértices de un polígono, podemos trazar $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ segmentos (de cada vértice parte un segmento a los restantes *n* – 1 vértices, pero hay que dividir entre dos porque cada segmento se ha contado dos veces). Como los lados del polígono no son diagonales hay que restar *n*.

$\frac{n\cdot(n-1)}{2} - n = 20 \Rightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Rightarrow n = 8$ y $n = -5$.

Descartamos la solución negativa y concluimos que nuestro polígono regular tiene 8 lados y la suma de sus ángulos es $180^\circ\cdot(8-2) = 1080^\circ$.

Cada uno de sus ángulos mide $1080^\circ : 8 = 135^\circ$.

**7. (D)** Cada ángulo de un pentágono regular mide 108º, así pues cada ángulo igual de esos cinco triángulos isósceles medirá 180º – 108º = 72º.
El ángulo desigual, *x*, mide, por tanto, 180º – 2·72º = 36º.




**8. (E)** Podemos calcular las potencias de los primeros números formados por 'unos' e intentar encontrar alguna pauta:

$1^2 = 1$ $\quad 11^2 = 121$ $\quad 111^2 = 12321$ $\quad 1111^2 = 1234321$

Parece que la formación está clara: 123... hasta llegar a la cifra central que es el número de 'unos' y luego a retroceder ...321.

Así pues, $111111111^2 = 12345678987654321$. Sus cifras suman 81.

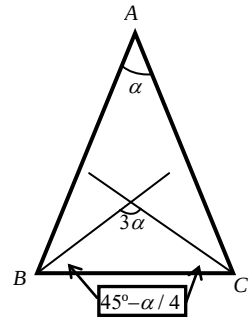
**9. (E)** Para comparar esos números los expresamos como potencias de igual exponente.

$A = 2^{24} = (2^3)^8 = 8^8$ $\quad B = 3^{16} = (3^2)^8 = 9^8$ $\quad C = 49^4 = (7^2)^4 = 7^8$

De menor a mayor quedan ordenados así: *C* < *A* < *B*.

**10. (C)** Cada uno de los ángulos iguales del triángulo isósceles *ABC* miden $\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Así pues, la bisectriz los divide en ángulos de $45^\circ-\frac{\alpha}{4}$. En el triángulo interior se cumple esta relación:

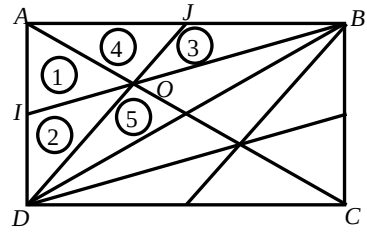
$3\alpha+45^\circ-\frac{\alpha}{4}+45^\circ-\frac{\alpha}{4}=180^\circ\Rightarrow\alpha=36^\circ$. Sus cifras suman 9.




**11. (D)** Sabemos que el peso es proporcional al volumen y éste es proporcional al cubo de la altura, así pues, si llamamos *x* a la altura de la maqueta, podemos escribir esta proporción, en la que hemos pasado ya las toneladas a kilogramos: $\frac{8000000}{1}=\frac{300^3}{x^3}$, de donde se concluye que $x^3=\frac{300^3}{200^3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3\Rightarrow x=\frac{3}{2}=1{,}5$.

La altura de la maqueta debe ser de un metro y medio.

**12. (A)** Completamos la figura trazando algunos segmentos. Los doce triángulos en los que ha quedado divido el rectángulo tiene igual área. Vamos a justificar esta afirmación en los triángulos 1, 2, 3, 4 y 5 (el resto son iguales por la simetría de la construcción).




Los triángulos 1 y 2 tienen la misma base y la misma altura, por tanto tiene igual área. El mismo razonamiento vale para 3 y 4.

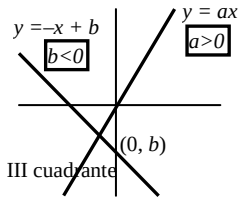
Los triángulos *ABI* y *AJD* ocupan un cuarto del rectángulo, por tanto, si les quitamos la parte común (1 + 4) nos quedarán restos iguales: así pues los triángulos 2 y 3 también tienen igual área. Así pues, los triángulos 1, 2, 3 y 4 tienen igual área: un doceavo del rectángulo.

Por último, el triángulo *ABD* ocupa la mitad del rectángulo y está formado por cinco triángulos de un doceavo más el triángulo número 5, así pues, este triángulo también ocupa un doceavo.

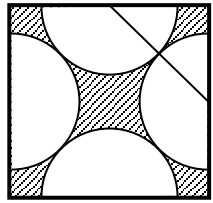
El cuadrilátero *AIOJ* ocupa dos triángulos y el *BCDO* ocupa ocho: el cociente entre sus áreas es $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

**13. (E)** En total hay cinco números: 10001, 10010, 10100, 11000 y 20000. Muy sencillo si se sigue un orden.

**14. (B)** Para que esas rectas se corten en un punto con coordenadas estrictamente negativas, ambas deben pasar por el tercer cuadrante. La recta $y = ax$ pasará por el tercer cuadrante si $a > 0$ y la recta $y = -x + b$ pasará por el tercer cuadrante si $b < 0$.




**15. (B)** Si unimos los centros de dos semicírculos tangentes obtenemos un triángulo rectángulo isósceles, cuya hipotenusa es el diámetro (dos radios) de un semicírculo y los catetos son la mitad del lado del cuadrado.



Así pues, el diámetro $D$ cumple: $D^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, por lo que $D = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y el radio de cada semicírculo es $r = \frac{D}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. El área de la zona rayada es el área del cuadrado menos dos círculos: $1 - 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

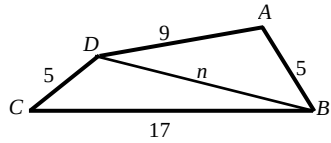
**16. (E)** A operar toca:

$$P^2Q = (2^n)^2 \cdot 3^m = 2^{2n} \cdot 3^m$$
$$P^nQ^m = (2^n)^n \cdot (3^m)^m = 2^{n^2} \cdot 3^{m^2}$$
$$P^nQ^{2m} = (2^n)^n \cdot (3^m)^{2m} = 2^{n^2} \cdot 3^{2m^2}$$
$$P^{2m}Q^n = (2^n)^{2m} \cdot (3^m)^n = 2^{2mn} \cdot 3^{mn} = (2^2)^{mn} \cdot 3^{mn} = (2^2 \cdot 3)^{mn} = 12^{mn}$$
$$P^{2n}Q^m = (2^n)^{2n} \cdot (3^m)^m = 2^{2n^2} \cdot 3^{m^2}$$

**17. (D)** Si llamamos $x$ a la longitud, en cm, de la arista del cubo, podemos traducir los datos del problema a esta ecuación: $(x+1) \cdot (x-1) \cdot x = x^3 - 5$.

Al resolverla obtenemos que $x = 5$ y el volumen del cubo es, por tanto, $5^3 = 125\ \text{cm}^3$.

**18. (C)** Trazamos la diagonal *BD* y se forman dos triángulos. Sabemos que dos lados de un triángulo siempre deben sumar más que el tercero. Así pues, en el triángulo *ABD* debe cumplirse que $5+9>n \Rightarrow n<14$. Y en el triángulo *BCD* debe cumplirse que $5+n>17 \Rightarrow 12<n$. Así pues, la longitud *n* del segmento *BD* cumple que $12<n<14$, y como *n* debe ser entero, sólo hay un valor posible: $n=13$.

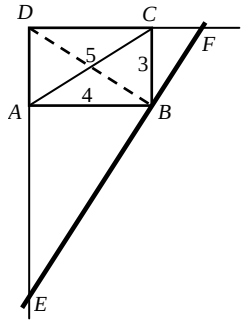



**19. (C)** Hacemos el dibujo respetando las condiciones del enunciado. Al momento notamos que la diagonal del rectángulo mide 5 y también observamos que los triángulos *ABC*, *EAB* y *BCF* son semejantes ya que sus ángulos son iguales (la clave está en que los ángulos *DBF* y *DBE* son rectos). Establecemos las proporciones y calculamos *EB* y *BF*:

$$ABC \approx EAB \Rightarrow \frac{BC}{AC}=\frac{AB}{EB} \Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{4}{EB} \Rightarrow EB=\frac{20}{3}$$

$$ABC \approx BCF \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BC}{BF} \Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{3}{BF} \Rightarrow BF=\frac{15}{4}$$

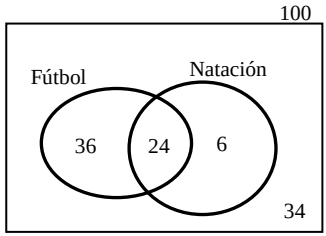
$$EF=EB+BF=\frac{20}{3}+\frac{15}{4}=\frac{125}{12}$$




**20. (D)** Como piden porcentajes podemos suponer que en el campamento hay 100 estudiantes. Los que practican fútbol y natación son el 40% de 60, es decir 24. Con este dato podemos rellenar las cantidades del diagrama como indica el dibujo.

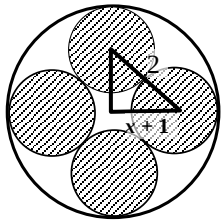
Hay 70 estudiantes que no practican natación, de los cuales 36 juegan al fútbol.

Esto supone una proporción de $\frac{36}{70}=51{,}43$, es decir, un porcentaje cercano al 51%.




**21. (B)** Elegido un punto cualquiera, dos de los siete restantes están a distancia 1. Por tanto la probabilidad pedida es $\frac{2}{7}$.

**22. (C)** Vamos a suponer que el radio de cada círculo pequeño es $r = 1$ y calcularemos el radio del círculo grande. Dibujamos un triángulo rectángulo de vértices el centro del círculo grande y los centros de dos círculos pequeños tangentes. La hipotenusa mide 2 y cada cateto 1 + *x*. Vamos a hallar cuánto mide *x*:




$(x+1)^2 + (x+1)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones y, naturalmente, nos quedamos sólo con la positiva: $x = \sqrt{2} - 1$. Así pues el radio del círculo grande es $R = \sqrt{2} - 1 + 2 = 1 + \sqrt{2}$. El cociente que nos piden es

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot 1^2}{\pi(1+\sqrt{2})^2} = \frac{4}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 4(3-2\sqrt{2}).$$

**23. (D)** El menor número geométrico de tres cifras diferentes es 124 (razón = 2) y el mayor es 964 (razón = 2/3). La diferencia entre ambos es 840. [Observa que no hay números geométricos que comiencen por 98_ ni por 97_]

**24. (D)** Sabemos que $P(C) = p$ y $P(X) = 1 - p$, siendo los sucesos *C* (salir cara) y *X* (salir cruz). El enunciado nos indica que $P(3C \text{ y } 5X) = \frac{1}{25} \cdot P(5C \text{ y } 3X)$. Calculemos las probabilidades de estos dos últimos sucesos:

$P(3C \text{ y } 5X) = \binom{8}{3} p^3 \cdot (1-p)^5$. (Date cuenta de que 3 caras pueden estar situadas en 8 lugares de $\binom{8}{3}$ formas diferentes). Análogamente:

$P(5C \text{ y } 3X) = \binom{8}{5} p^5 \cdot (1-p)^3$.

Como además sabemos que $\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$, ya podemos escribir la ecuación que resolverá el problema:

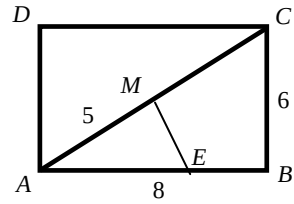
$$P(3C \text{ y } 5X) = \frac{1}{25} \cdot P(5C \text{ y } 3X) \Rightarrow \binom{8}{3} p^3 \cdot (1-p)^5 = \frac{1}{25} \binom{8}{3} p^5 \cdot (1-p)^3$$

Como $p$ es distinto de cero, podemos dividir ambos miembros entre $\binom{8}{3}p^3\cdot(1-p)^3$ y nos queda una sencilla ecuación de segundo grado: $(1-p)^2=\frac{1}{25}p^2\Rightarrow 24p^2-50p+25=0$, cuyas soluciones son $p=\frac{5}{4}$ y $p=\frac{5}{6}$.

Atención: la solución $p=\frac{5}{4}$ hay que descartarla por ser mayor que 1.

Así pues, la respuesta es $p=\frac{5}{6}$.

**25. (D)** Lo primero que podemos deducir es que la diagonal *AC* mide 10. [Observa que la terna pitagórica (6, 8, 10) es la doble de la archifamosa (3, 4, 5)]




Al ser *ME* perpendicular a la diagonal *AC*, los triángulos *AME* y *ABC* son semejantes ya que sus ángulos son iguales. Establecemos esta proporción:

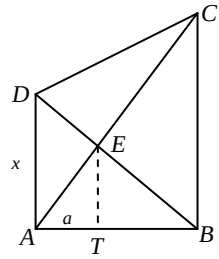
$$AME\approx ABC\Rightarrow\frac{CAT}{cat}=\frac{CAT}{cat}\Rightarrow\frac{AM}{ME}=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{5}{ME}=\frac{8}{6}\Rightarrow ME=\frac{15}{4}.$$

El área del triángulo *AME* es $\frac{5\cdot\frac{15}{4}}{2}=\frac{75}{8}$.

## XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

### *Soluciones 2ª Fase Nivel* IV

**1. (C)** Llamando $a$ al segmento $AT$, la semejanza de los triángulos $AET$ y $ACB$, en el que $CB = 8$, $\left(\sqrt{10^2 - 6^2}\right)$, nos permite escribir $\frac{8}{3} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{9}{4}$ y $6 - a = \frac{15}{4}$. Otra vez por semejanza de triángulos, ahora $ABD$ y $ET$ $B$, podemos escribir $\frac{x}{3} = \frac{6}{\frac{15}{4}} \Rightarrow x = \frac{24}{5}$ y



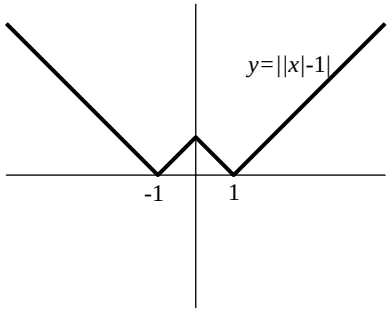

$BD = \sqrt{x^2 + 6^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + 6^2} = \frac{6\sqrt{41}}{5}$, respuesta C.

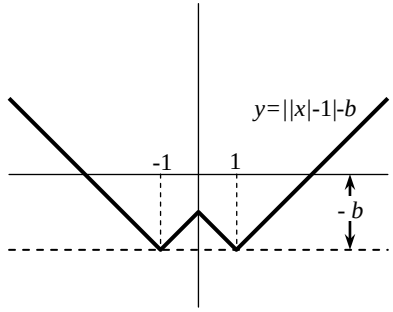
**2. (B)** La ecuación $\ln(x + a) = \ln x + \ln a$, es equivalente a $\ln(x + a) = \ln(x \cdot a)$, de donde $x + a = x \cdot a$, ecuación con una única solución: $x = \frac{a}{a-1}$.

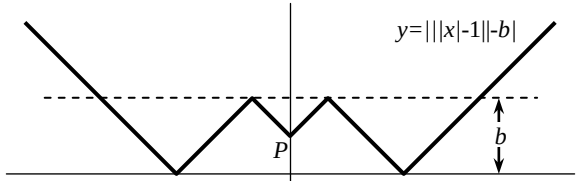
**3.** (D) La igualdad D es falsa si $x < 0$, pues $\sqrt{x^2} = |x|$.

**4.** (E) La implicación que aparece en E no es válida pues $x - y - z = 0$ ya que nos dicen que $x = y + z$.

**5.** (D) La mejor estrategia es dibujar la gráfica de $y = \big|\,|\,|x| - 1\big| - b\big|$, obligando a $b$ a que dicha gráfica corte en 5 puntos a la recta $y = 4$.



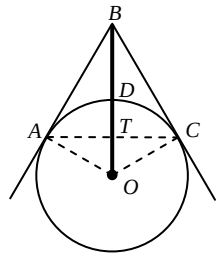






Esta gráfica cortará 5 veces a la recta $y = 4$ sólo cuando dicha recta pase por $P$, es decir cuando $4 = b - 1$, por lo que $b = 5$ y la respuesta, D.

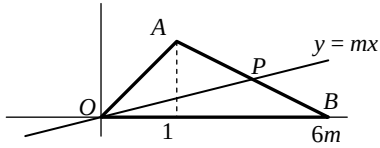
**6. (E)** Llamando $x$ al peso de la botella vacía e $y$ al peso del líquido cuando la botella está llena, nos piden $x + y$. Sabemos que $\begin{cases} x+\frac{2}{3}y=a \\ x+\frac{1}{2}y=b \end{cases}$. Eliminando $x$, obtenemos $\frac{1}{6}y = a - b$, y = 6 $(a - b)$ por lo que $x = b - \frac{1}{2}y = b - 3(a - b) = 4b - 3a$, con lo que $x + y = 4b - 3a + 6\,(a - b) = 3a - 2b$, respuesta E.

**7. (B)** Llamando $r$ al radio de la circunferencia y al ser $O\hat{A}B = 90^o$ y $T\hat{A}B = 60^o$, sigue que $OT = \frac{r}{2}$, $AT = \frac{r\sqrt{3}}{2}$,




$BT = \frac{r\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{3r}{2}$, $BO = BT + TO = 2r$ y $BD = BO - r = r$. Así pues, el cociente pedido, $\frac{BD}{BO} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, respuesta B.

**8. (B)** El área del triángulo $OPB$ debe ser la mitad del área de $OAB$ y tomado en ambos como base $OB$, debe ocurrir que la ordenada de $P$ sea $\frac{1}{2}$.




$P$ es el punto de corte de $y = mx$, $y - 1 = \frac{-1}{6m-1}(x-1)$, sistema en el que,

$x = \dfrac{6m}{6m^2 - m + 1}$, $y = \dfrac{6m^2}{6m^2 - m + 1}$, así que $\dfrac{6m^2}{6m^2 - m + 1} = \dfrac{1}{2}$, es decir, $6m^2 + m - 1 = 0$ y la suma de todos los valores de $m$, soluciones de esta ecuación, es $-\dfrac{1}{6}$, respuesta B.

OTRA RESPUESTA

Como los triángulos *OPB* y *OPA* han de tener la misma área, al tener la misma altura sobre el segmento *AB*, sus bases serán iguales, es decir, *P* es el punto medio de *AB*. Las coordenadas de *P* son: $\left(\dfrac{1+6m}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y como pertenece a la recta $y = mx$, se verifica que $\dfrac{1}{2} = m \cdot \dfrac{1+6m}{2} \Rightarrow 1 = m + 6m^2 \Rightarrow 6m^2 + m - 1 = 0$ y la suma de todos los valores de $m$, soluciones de esta ecuación, es $-\dfrac{1}{6}$, respuesta B.

**9. (C)** El área de la región sombreada es $\dfrac{1}{2}(3 - a) \cdot 3 - 1$, así que $\dfrac{1}{2}(3 - a) \cdot 3 - 1 = \dfrac{5}{2}$, nos lleva a $3 - a = \dfrac{7}{3}$ y $a = \dfrac{2}{3}$, respuesta C.

**10. (D)** La forma más cómoda de atacar el problema es observar los restos de las divisiones entre 8 de las sucesivas potencias de 3. Así, $3^0$ daría 1, $3^1$ daría 3, $3^2$ daría 1, por lo que comienza a repetirse el ciclo (1, 3). Así pues, el resto de la división de $3^0 + 3^1 + + 3^2 + 3^3$ entre 8 es 0, por lo que descomponiendo los 2011 sumandos en bloques de 4, basta con que calculemos el resto de la división de $3^{2008} + 3^{2009} + 3^{2010}$ entre 8. Como cada uno de los restos de estos 3 sumandos es 1, 3 y 1, el resto pedido es 5, respuesta D.

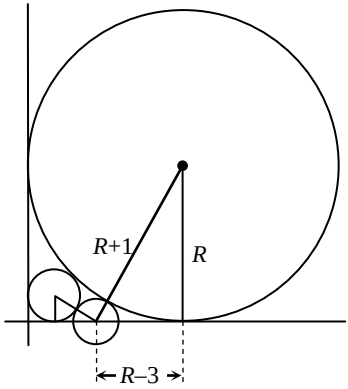
**11. (B)** La mayor suma posible de dígitos aparece en 999 y es 27, así que los enteros buscados serán menores o iguales que $6 \cdot 27 = 162$.
Si estas son de la forma $100a + 10b + c$, $a$ sólo puede tomar los valores 0 y 1. Si $a = 0$, tenemos $10b + c = 6b + 6c$, así que $4b = 5c$ y la única solución posible es $b = 5$, $c = 4$ y el entero es 54. Si $a = 1$, tenemos $100 + 10b + c = 6 + 6b + 6c$, es decir, $5c - 4b = 94$, ecuación que no tiene solución al ser $b$ y $c$ dígitos. Así pues hay un único entero positivo con esa propiedad: 54.

**12. (D)** $f(x + 3) = a(x + 3)^2 + b(x + 3) + c = 3x^2 + 7x + 4$. Así pues, $a = 3$, $6a + b = 7$, $9a + 3b + c = 4$, de donde sigue que $b = -11$ y $c = 10$, por lo que $a + b + c = 2$.

**13. (D)** Si $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + ni^n = 48 + 49i$, sigue que (multiplicando ambos términos por $i$) $i^2 + 2i^3 + \ldots + (n-1)i^n + ni^{n+1} = 48i - 49$.
Así pues $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = 97 + i$. Ahora, observando que las potencias de $i$ se repiten en ciclos de 4 elementos $(i^1, i^2, i^3, i^4) = (i, -1, -i, 1)$ cuya suma es 0, sigue que si $n = 96$, es $i + i^2 + \ldots + i^{96} = 0$, por lo que para $n = 97$, tenemos que $i + i^2 + \ldots + i^{97} - 97i^{98} = i^{97} - 97i^{98} = i - 97\left(i^2\right)^{49} = i - 97 \cdot (-1) = 97 + i$, por lo que 97 es el $n$ buscado.

¿Por qué empezamos directamente por 96 y no por 8000?
Propongo:
Si $n = 4k$ (múltiplo de 4), entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = -ni \neq 97 + i$
Si $n = 4k + 1$, entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = i - n(-1) = 97 + i \Rightarrow n = 97$
Si $n = 4k + 2$, entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = i - 1 - n(-i) \neq 97 + i$
Si $n = 4k + 3$, entonces $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^n - ni^{n+1} = i - 1 - i - n \neq 97 + i$
Por lo tanto $n = 97$.

**14. (C)** La situación es como indica la figura.
Utilizando la tangencia de la circunferencia grande con la dada, podemos escribir que $(R + 1)^2 = R^2 + (R - 3)^2$ y utilizando la tangencia de la pequeña, $(r + 1)^2 = r^2 + (3 - r)^2$.
Como se observa, $R$ y $r$ son las soluciones de la ecuación $(x + 1)^2 = x^2 + (x - 3)^2$, que es equivalente a $x^2 - 8x + 8 = 0$ cuya suma de soluciones es 8, por lo que C) es la respuesta al problema..

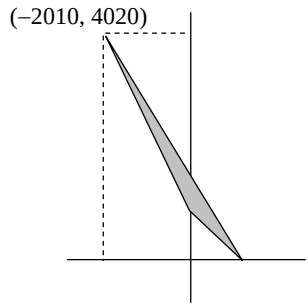



**15. (B)** Haciendo $x^4 = t$ en la ecuación $x^{12} + ax^8 + bx^4 + c = 0$, tenemos $t^3 + at^2 + bt + c = 0$, ecuación que nos dicen que tiene 2 soluciones reales positivas, 2010 y 102, y una compleja $2010 + 102i$. Al hacer las raíces cuartas de estas soluciones, para obtener $x$, resultan 2 raíces reales por cada una de las reales y ninguna por la compleja, así que la respuesta es 4.

**16. (E)** $f(n) = n^4 - 360n^2 + 400 = (n^2 + 20)^2 - 400n^2 = (n^2 + 20 + 20n)\cdot(n^2 + 20 - 20n)$ y $f(n)$ será primo sólo cuando uno de estos factores, que son enteros, sea 1 y además resulte que el otro es primo. El factor $n + 20 + 20n$ nunca es 1 ($n$ es entero positivo) y el otro lo será si $n^2 - 20n + 20 = 1$, es decir, $n^2 - 20n + 19 = 0$, $n = 1, 19$. Si $n = 1$,

$f(n) = 41 \cdot 1$, primo, y si $n = 19$, $f(n) = 761$ que será primo pues 41 no aparece en las soluciones. Así pues, la suma pedida es 41 + 761 = 802, respuesta E.

**17. (B)** El triángulo en cuestión es como el de la figura y la manera más cómoda de obtener su área es restar al área de un triángulo rectángulo, el área de un trapecio rectángulo y otro triángulo rectángulo pequeño. Así pues,




$$A = \frac{2014 \cdot 4020}{2} - \left( \frac{(4020+4)}{2} \cdot 2010 + \frac{4 \cdot 4}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} 2010(4028 - 4024) - 8 = 4012.$$

Respuesta B.

**18. (A)** En algún momento sólo habrá bolas blancas si las tres primeras extraídas son rojas o si en las tres primeras hay 1 blanca y la cuarta es roja. La probabilidad de *RRR* es $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$ y la probabilidad del otro suceso es $3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Así pues la probabilidad pedida es la suma de estos dos números es decir, $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$ respuesta A.

**19. (B)** Si $sena + senb = \sqrt{\frac{5}{3}}$, elevando al cuadrado, resulta $sen^2 a + sen^2 b + 2 sena\, senb = \frac{5}{3}$

Análogamente, si $cosa + cosb = 1$, es $cos^2 a + cos^2 b + 2\, cosa\, cosb = 1$. Sumando estas dos últimas igualdades, tendremos $2 + 2\,(sena\, senb + cosa\, cosb) = \frac{8}{3}$, por lo que $cosa\, cosb + sena\, senb = \frac{1}{3}$, es decir, $\cos(a - b) = \frac{1}{3}$.

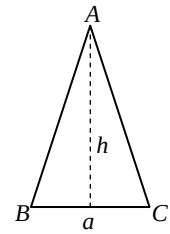
**20. (C)** Ordenando las áreas de estos tres triángulos de mayor a menor hay 6 ordenaciones posibles de las que el área del triángulo *ABP* estará en primer lugar en 2 ocasiones. Como la elección del punto *P* es aleatoria, la probabilidad pedida es $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

**21. (D)** Escribamos en base 10 los logaritmos que aparecen:

$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=t$, es decir $\left(\frac{1}{2}\right)^t=\frac{1}{3}$ por lo que $t\cdot\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{3}$, es decir, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\frac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{1}{2}}$. Análogamente, $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}=\frac{\log\frac{1}{3}}{\log\frac{1}{5}}$.

Nos hablan de $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$, es decir, de $\frac{\log\frac{1}{2}+\log\frac{1}{5}}{\log\frac{1}{3}}$, o sea, de $\frac{\log\frac{1}{10}}{\log\frac{1}{3}}$, que es lo mismo que $\frac{1}{\log 3}$. Como $\frac{1}{3}<\log 3<\frac{1}{2}$ pues $\sqrt[3]{10}<3<\sqrt{10}$, sigue que $2<\frac{1}{\log 3}<3$, por lo que la respuesta es D.

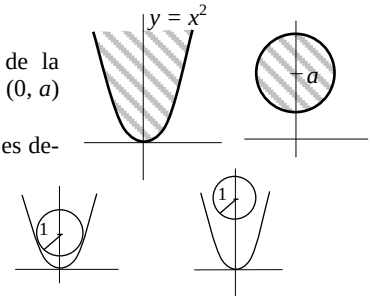
**22. (B)** Nos dicen que en el triángulo isósceles *ABC* de la figura, *h* y *a* son números enteros, así pues tg $\frac{A}{2}$ es un número racional, $\frac{a}{2h}$.




Como $sen A=2sen\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{2sen\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{A}{2}}=\frac{2tg\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$, resulta que *senA* será racional, y al ser

$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-sen^2\frac{A}{2}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-sen^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+sen^2\frac{A}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{A}{2}}{1+tg^2\frac{A}{2}}$, *cosA* también será racional, por lo que la respuesta es *B*.

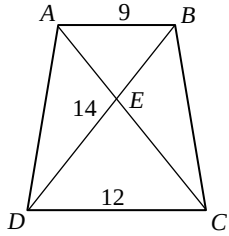
**23. (A)** El conjunto *M* es el conjunto sombreado de la figura, y el conjunto *N* es el círculo de centro (0, *a*) y radio 1.
Así pues, $M\cap N$ será *N* sólo cuando $N\subset M$, es decir, que la situación sea como una de éstas:



Así pues, el número $a$ debe ser positivo y lo suficientemente grande para que la circunferencia de centro $(0, a)$ y radio 1 no salga de la región encerrada por la parábola $y = x^2$. Analicemos la intersección de la parábola $y = x^2$, con la circunferencia $x^2 + (y - a)^2 = 1$, es decir, estudiemos las soluciones de la ecuación $x^2 + (x^2 - a)^2 = 1$. Llamando $x^2 = t$, tenemos que $t + (t - a)^2 = 1$ y ambas líneas serán tangentes cuando $t$ tome sólo un valor positivo, que corresponderá a 2 valores de $x$.
Ello ocurrirá cuando el discriminante de dicha ecuación sea 0, es decir, cuando $(2a - 1)^2 - 4(a^2 - 1) = 0$, o lo que es igual, $a = \frac{5}{4}$.

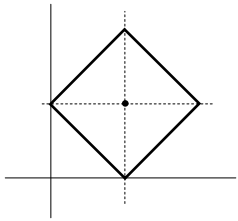
Así pues, si $a < \frac{5}{4}$, la circunferencia se saldrá de la región de la parábola y si $a \geq \frac{5}{4}$, caerá dentro, por lo que $N \subset M$ y la respuesta es A.

**24. (E)** Añadiendo a cada uno de los triángulos *AED* y *BEC* el triángulo *AEB*, resultará que ambos tendrían igual área cuando los nuevos triángulos, *ABD* y *ABC*, tengan igual área, y ello sólo ocurrirá cuando las alturas, tomando como base *AB*, sean iguales, es decir, cuando *AB* sea paralela a *DC* o, lo que es lo mismo, cuando el cuadrilátero *ABCD* sea un trapecio.




Así pues, nos dicen que en el trapecio *ABCD*, de bases $AB = 9$ y $CD = 12$, una diagonal mide 14. La situación es, pues, como indica la figura, en la que los triángulos *ABE* y *DCE* son semejantes, de razón de semejanza $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, por lo que llamando $x$ a *AE* y $14 - x$ a *EC*, sigue que $\frac{x}{14 - x} = \frac{3}{4}$, es decir, $4x = 42 - 3x$, $x = 6$ y la respuesta es E.

**25. (A)** Dibujemos la curva dada:
Si $x, y \geq 1$, estamos en $x - 1 + y - 1 = 1$, $x + y = 3$.
Si $x < 1$, $y \geq 1$ tenemos $1 - x + y - 1 = 1$, $-x + y = 1$.
Si $x \geq 1$, $y < 1$, es $x - 1 + 1 - y = 1$, $x - y = 1$.
Si $x < 1$, $y < 1$ resulta $1 - x + 1 - y = 1$, $-x - y = -1$.
Así pues, la curva dada es la de la figura, que encierra un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ y área, por tanto, 2.



# Participantes y relación de ganadores del XIV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

La distribución por niveles y la relación de los ganadores de cada uno de los cuatro niveles, en la 2ª Fase, fue la siguiente:

| | **NIVEL I** | | **NIVEL II** | | **NIVEL III** | | **NIVEL IV** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **5º Prim** | **6º Prim** | **1º ESO** | **2º ESO** | **3º ESO** | **4º ESO** | **1º Bach** | **2º Bach** |
| Inscritos II Fase | 297 | 486 | 484 | 628 | 444 | 496 | 378 | 187 |
| **TOTAL INSCRITOS** | **3400** | | | | | | | |
| Participantes II Fase | 275 | 449 | 421 | 547 | 350 | 397 | 285 | 136 |
| **TOTAL PARTICIPANTES** | **2860** | | | | | | | |
| Puntuación máxima | 92 | 102 | 104 | 110 | 105 | 107 | 90 | 100 |
| Puntuación media | 53,9 | 57,2 | 56,2 | 58,5 | 52,6 | 53,8 | 52,1 | 55,3 |
| Nº estud. > 85 puntos | 4 | 11 | 14 | 16 | 4 | 9 | 2 | 4 |
| Nº estad. < 50 puntos | 95 | 129 | 124 | 130 | 125 | 146 | 123 | 51 |
| Nº Centros participantes | 167 | | 285 | | 256 | | 166 | |
| **TOTAL CENTROS** | **404** | | | | | | | |

Los ganadores fueron:

**NIVEL I**

1. Daniel Alonso González (6º Primaria) Colegio SEK El Castillo
2. Elena Fernández Rodríguez (5º Primaria) CP Miguel de Cervantes
3. Daniel Puignau Chacón (6º Primaria) C.E.I.P. Ciudad de Guadalajara. Madrid

**NIVEL II**

1. Miguel Barrero Santamaría (2º ESO) IES Alameda de Osuna. Madrid
2. Álvaro Robledo Vega (1º ESO) Colegio Peñalar. Madrid
3. Ángel Prieto Naslin (2º ESO) Lycée Français. Madrid

**NIVEL III**

1. Lorenzo Esteban de la Iglesia (4º ESO) Colegio Fray Luis de León
2. Paula Sardinero Meirás (3º ESO) Colegio Virgen de Europa. Madrid
3. Federico Espósito Bacigalupo (4º ESO) Colegio Alemán de Madrid
4. Víctor García Herrero 84º ESO) IES Ortega y Gasset

**NIVEL IV**

1. Javier García Gómez (2º Bchto.) IES Ramiro de Maeztu
2. Daniel Henry Mantilla (1º Bchto.) Lycée Français. Madrid
3. Alberto Merchante González (2º Bchto.) IES Ramiro de Maeztu

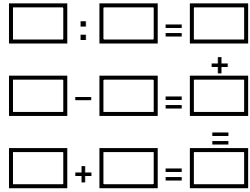
## X Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

20 de noviembre de 2010

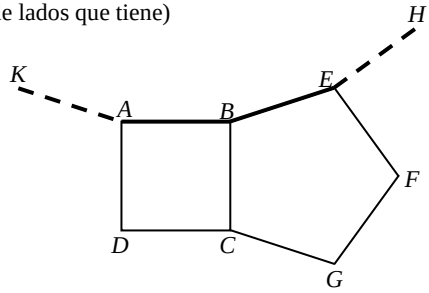
PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

**1º y 2º de E.S.O.**

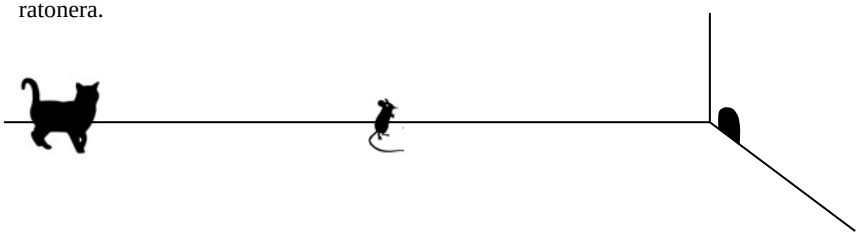
**1.-** Coloca en las nueve casillas del diagrama los enteros positivos del 1 al 9 de manera que se verifiquen las cuatro igualdades, tres horizontales y una vertical.



**2.-** En la figura adjunta se muestra un cuadrado *ABCD* y un pentágono regular *BEFGC*. Si *KA, AB, BE, EH,…* son lados de otro polígono regular, ¿de qué polígono se trata? (Indica el número de lados que tiene)

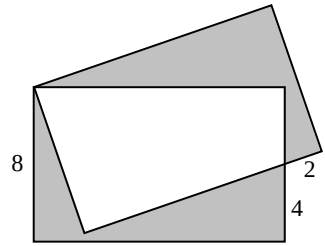



**3.-** Un ratón está a 20 pasos de su ratonera y un gato está a 5 saltos del ratón. Mientras el gato da un salto el ratón da tres pasos. Un salto de gato equivale a 10 pasos de ratón. Justifica si el gato podrá, o no podrá, alcanzar al ratón antes de que éste entre en su ratonera.



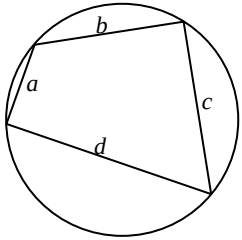
**3º y 4º de E.S.O.**

**1.-** Los dos rectángulos de la figura son iguales. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?




**2.-** Sea $p$ un número primo mayor que 3. Pon varios ejemplos y observa el resto de la división de $p^2$ entre 12. Justifica que siempre ocurre lo que has observado en esos ejemplos.

**3.-** En un círculo hay inscrito un cuadrilátero en el que los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados consecutivos son: $a^2 = 23$, $b^2 = 50$, $c^2 = 58$ y $d^2 = 85$. Calcula el área del círculo.

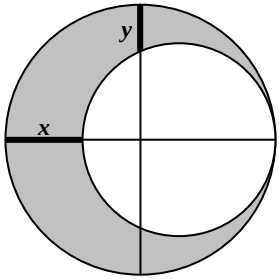


**Bachillerato.**

**1.-** Representa gráficamente la función $f(x) = \big|\,|x| - 3\big| - 2\big|$

Determina el número de soluciones de la ecuación $\big|\,|x| - 3\big| - 2\big| = \cos x$

**2.-** En la figura se muestran dos circunferencias tangentes interiores y dos diámetros de la mayor. Si $x$ = 16 e $y$ = 10, calcula el área de la región sombreada.

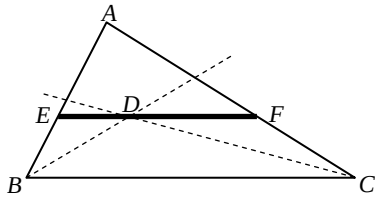



**3.-** Justifica que un triángulo en el que las distancias de cada uno de sus vértices a dos rectas perpendiculares vengan dadas por números enteros, no puede ser equilátero.

PRUEBA INDIVIDUAL (90 minutos)

**1º y 2º de E.S.O.**

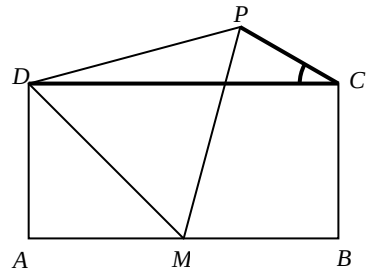
**1.** En el triángulo *ABC* las bisectrices interiores de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ se cortan en el punto *D*. Por *D* se traza la paralela al lado *BC* y corta al lado *AB* en *E* y al lado *AC* en *F*. Si *BE* = 4,5 cm y *CF* = 6,7 cm ¿cuánto mide el segmento *EF*?




**2.** Quiero elegir una lista de *n* números diferentes de entre los 20 números: 1, 2, 3, …19, 20 de manera que no haya en mi lista ninguna pareja de números cuya diferencia sea 5. ¿Cuál es el mayor valor de *n* para el que esto es posible? Muestra una lista con esa cantidad de números?

**3.** Calcula el menor entero posible *k* para el que cada uno de los tres números 24, 42 y *k* sea divisor del producto de los otros dos.

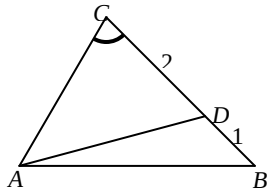
**4.** En el rectángulo *ABCD* de la figura *AB* es el doble de *AD*, *M* es el punto medio del lado *AB* y el triángulo *MDP* es equilátero. Calcula la medida del ángulo $P\hat{C}D$.




**5.** Dispones de 10 cajas y 44 monedas. En cada caja pones las monedas que quieras (incluso ninguna). ¿Hay alguna forma de repartir las monedas de manera que no haya dos cajas con igual número de monedas?
Si tu respuesta es afirmativa indica cómo has hecho el reparto y si es negativa justifica por qué no es posible.

**3º y 4º de E.S.O.**

**1.-** En el triángulo *ABC*, como muestra la figura, el punto *D* divide al lado *BC* en dos segmentos de longitudes *BD* = 1 y *DC* = 2. Si los ángulos $A\hat{B}C$ y $A\hat{D}C$ miden 45º y 60º, respectivamente, Calcula la medida del ángulo $A\hat{C}B$ .

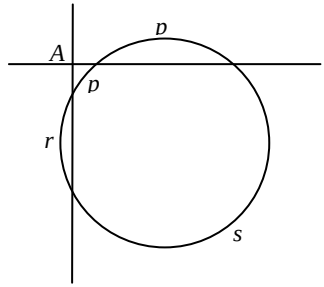



**2.-** ¿Cuántos números de 4 cifras, todas impares y distintas, son múltiplos de 9?

**3.-** Contador sale de su casa y va en bicicleta a casa de Perico Delgado a una velocidad media de 24 km/h. Al comprobar que Perico no está, se vuelve a su casa sin perder nada de tiempo. ¿Qué velocidad media debe conseguir a la vuelta si quiere que la velocidad media del viaje completo sea de 30 km/h?

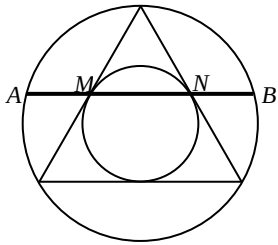
**4.-** Disponemos de un acuario cúbico con un poco de agua. Sumergiendo un cubito de hierro de 3 cm de arista, el agua llega justamente hasta la cara superior del cubito. Sacamos el cubito de hierro e introducimos otro de aluminio de 10 cm de arista y ¡sorpresa!, el nivel del agua asciende justamente hasta la cara superior del cubito. ¿Hasta qué altura llegaría el nivel del agua si se introdujera un cubito de 7 cm de arista?

**5.-** La circunferencia de la figura está dividida en cuatro arcos de longitudes *p, q, r* y *s* mediante dos rectas perpendiculares. Expresa *s* en términos de *p, q* y *r*.



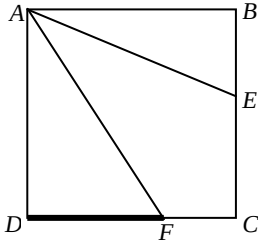
**Bachillerato**

**1.** En la figura observas un triángulo equilátero, la circunferencia inscrita y la circunscrita al mismo. La cuerda *AB* de la circunferencia circunscrita pasa por los puntos *M y N* que son los de tangencia de la circunferencia inscrita con el triángulo. Calcula $\frac{MN}{AM}$.




**2.** Dos lados consecutivos de un paralelogramo tienen longitudes 9 y 7. Si las longitudes de las diagonales vienen dadas por números enteros, calcula dichas longitudes.

**3.** La longitud del lado del cuadrado *ABCD* es 1. Elegimos un punto *E* en el lado *BC* para que $AE + EB = \frac{3}{2}$ y un punto *F* en el lado *CD* para que *AF* sea la bisectriz del ángulo $D\hat{A}E$. Calcula la longitud *DF*.




**4.** Si *a* y *b* son números reales tales que $a + b = 1$, prueba que $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

**5.** Halla todas las soluciones del sistema $\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)xz = 4 \\ (z+1)xy = 4 \end{cases}$

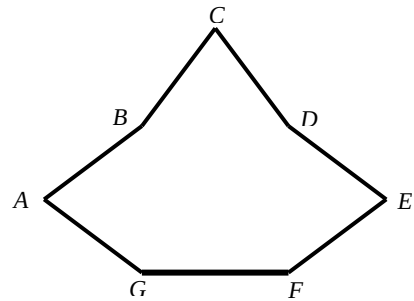
## **PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

1A.- ¿Cuántos números de tres cifras (iguales o distintas) verifican que el producto de ellas es 6?
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

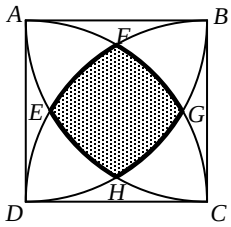
1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
María sale en coche hacia el Pirineo a una velocidad constante de 2"T" km/h. Diez minutos más tarde sale Luisa desde el mismo punto y en el mismo sentido y tarda 1 hora y 40 minutos en alcanzar a María. Si Luisa iba también con velocidad constante, ¿a qué velocidad circulaba?
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
El dibujo muestra un heptágono *ABCDEFG* en el que *FG* mide "T" cm. Los restantes lados son todos iguales entre sí. Si *BDFG* resulta ser un cuadrado cuya área es la mitad del área del polígono entero, calcula el perímetro del heptágono.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**



**3º y 4º de ESO.-**

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
Haciendo centro en cada uno de los vértices del cuadrado de la figura de lado "T" - $3\sqrt{3}$ hemos trazado cuatro arcos de radio el lado del cuadrado, formando el cuadrilátero curvilíneo *EFGH*. Calcula el área de este cuadrilátero.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

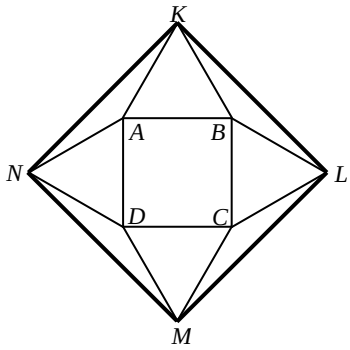



2B.- Ricardo mide los seis ángulos de dos triángulos, uno de ellos obtusángulo y el otro acutángulo, pero sólo recuerda la medida de cuatro de ellos: 120º, 80º, 55º y 10º.
¿Cuál es la medida del menor de los ángulos del triángulo acutángulo?
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

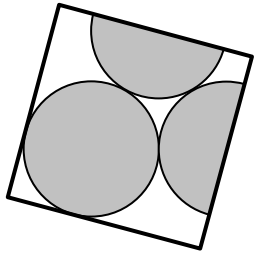
2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.
Marta tiene "T" cartas rojas numeradas 1, 2, 3,…, T y (T – 1) cartas azules numeradas, también correlativamente, pero a partir del 3. Las coloca alternando los colores pero de manera que el número de cada carta azul es múltiplo de los números de sus dos cartas vecinas rojas. Calcula la suma de los números de todas las cartas salvo las de los extremos.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**Bachillerato.-**

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En la figura puedes observar un cuadrado *ABCD* y cuatro triángulos equiláteros: *AKB*, *BLC*, *CMD*, y *DNA*. Si el área del cuadrado es $\frac{1}{3}$ T, calcula el área del polígono *KLMN*.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**




3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
El círculo y los dos semicírculos de la figura tienen radio $r = \frac{1+T}{100}$. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**



3C.- Recuerda que n! se define como n! = 1 · 2 · 3 ·…· (n – 1) · n.
Es evidente que el número n! + 1 no tiene ningún divisor primo menor que n.
La proposición, "Si n es primo entonces n! + 1 es también primo", es falsa, aunque efectivamente el número 11! + 1 = 39916801 es también primo. Encuentra el menor primo para el que la proposición anterior es evidentemente falsa.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

## CENTROS GANADORES

1. Colegio Alemán de Madrid
2. IES San Juan Bautista
3. IES Ramiro de Maeztu

## ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1 Roberto Nares Alcalá (IES Herrera Oria).
2. Carlos Caro Álvarez (Colegio SEK El Castillo)

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1. Miguel Barrero Santamaría (IES Alameda de Osuna)
2. Guillermo Pascual Pérez (Colegio Fray Luis de León)

NIVEL III (Bachillerato)

1. Xi Chen (IES Vallecas 1)
2. Pablo Boixeda (Colegio Alemán de Madrid)

## RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

1. Colegio Alemán de Madrid …….. 56,5
2. IES San Juan Bautista-B …….. 49,9
3. IES Ramiro de Maeztu-B …… 47,6
4. Liceo Francés-A……..…….. 41
5. Colegio SEK Ciudalcampo-A.…….. 40,5
6. Colegio Retamar-A..…….……. 40,1
7. Colegio Fray Luis de León-A...…… 39,8
8. Colegio San José del Parque-A …… 37,2
9. IES Alameda de Osuna-B …… 37
10. IES Ramiro de Maeztu-A …… 36,3

**XXVIII CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**
**"SOCIEDAD PUIG ADAM"**
**Facultad de Matemáticas U.C.M.**
**Madrid, 12 de junio de 2010**

## NIVEL I (3º de E.S.O.)

### Problema 1.

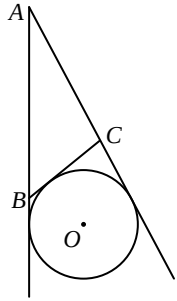
Consideremos en un círculo dos diámetros perpendiculares entre sí. Con centro en un extremo de uno de ellos trazamos un arco que pasa por los extremos del otro diámetro. Calcula el cociente entre el área de la región mayor y el área de la región menor en las que este arco divide al círculo.

### Problema 2.

Los dígitos de un entero *n* de cuatro cifras son cuatro enteros consecutivos que están en orden decreciente cuando se lee de izquierda a derecha. ¿Cuál es la suma de todos los restos posibles de la división de *n* entre 37?

### Problema 3.

En la figura se observa un triángulo *ABC* y una circunferencia de centro *O* tangente al lado *BC* y a las prolongaciones de los lados *AB* y *AC*. Si el ángulo en *A* es de 22º, calcula el valor del ángulo *BÔC*.




### Problema 4.

El director de una banda de música observa que si pone a todos sus músicos, que son más de 40, formando el mayor cuadrado posible, le sobran 5 músicos, pero, en cambio, si los pone en disposición rectangular, con 7 filas más que columnas, puede colocarlos a todos. Calcula el número de músicos de la banda.

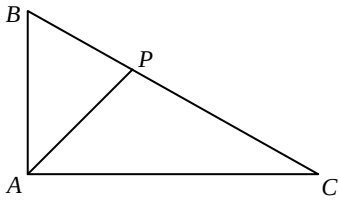
## NIVEL II (4º de E.S.O.)

### Problema 1.

Encuentra razonadamente todas las soluciones enteras de la ecuación $x! + 24 = y^2$

### Problema 2.

En el triángulo rectángulo *ABC*, sea *P* el punto común a la hipotenusa *BC* y a la bisectriz del ángulo Â. Si $AP = 20\sqrt{2}$ , calcula la suma de los inversos de las longitudes de los catetos.

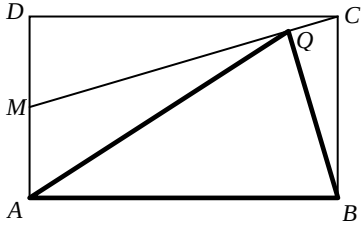



### Problema 3.

Sea *n* un entero positivo. Demuestra que el máximo común divisor de los números $(3n - 1)$ y $(2n - 3)$ es múltiplo de 7 si al dividir *n* entre 7 se obtiene de resto 5 y que en cualquier otro caso, $(3n - 1)$ y $(2n - 3)$ son primos entre sí.

### Problema 4.

En el rectángulo *ABCD*, sea *M* el punto medio del lado *AD* y *Q* el punto del segmento *MC* tal que *BQ* es perpendicular al segmento *MC*. Demuestra que el triángulo *AQB* es isósceles.



# NIVEL III (1º de Bachillerato)

## Problema 1.

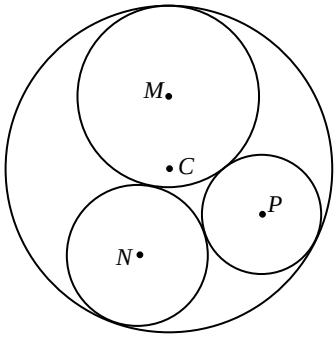
Encuentra todos los enteros positivos $m$ y $n$, con $n$ impar, tal que $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$.

## Problema 2.

En el triángulo $ABC$ con $AB = 6$, $BC = 4$ y $AC = 3$, las bisectrices interior y exterior del ángulo Â cortan a la recta $BC$ en los puntos $P$ y $Q$. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $APQ$.

## Problema 3.

En la figura observas tres circunferencias de centros, $M$, $N$ y $P$, tangentes exteriores dos a dos y otra circunferencia de centro $C$ tangente a las tres y que las contiene. Demuestra que los triángulos $CMN$, $CMP$ y $CNP$ tienen todos de perímetro $2r$, siendo $r$ el radio de la circunferencia de centro $C$.




## Problema 4.

Una persona visita el Casino de juego en las ciudades por las que pasa. Destina 20 € en cada visita como cantidad máxima a perder. Lo hace en la ruleta a PAR-IMPAR (con probabilidad 1/2 de ganar en cada jugada). Procede así: Apuesta sus 20 € y si pierde se retira a pasear. Si gana, apuesta los 40 € y si los pierde se retira a pasear, pero si vuelve a ganar se juega 60 de los 80 € que ha reunido. Ahora, si gana, se retira con los 140 € que tiene y si pierde está como al principio, con 20 €. Así procede hasta que o bien pierde los 20 € o bien sale con 140 €. ¿Cuál es la probabilidad de salir del Casino con 140 €?
Explica si, a la larga, esta persona ganará o perderá dinero.

# XLV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## 2ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

**Primera sesión, viernes 15 de enero de 2010**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

**Problema 1**

Determina todos los posibles números de seis cifras distintas *abcdef*, formados con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, que tienen la propiedad de que los números de tres cifras *abc*, *bcd*, *cde* y *def* son divisibles por 4, 5, 3 y 11 respectivamente.

**Problema 2**

Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \frac{96}{5}$.

**Problema 3**

Dado el polinomio $P(x) = x^4 + ox^3 + ox^2 + ox + o$, en el que cada rectángulo representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

**Segunda sesión, sábado 16 de enero de 2010**

**Problema 4**

Se consideran un triángulo *ABC*, de perímetro 18cm, y su circunferencia inscrita *K*. La tangente a *K* paralela al lado *AC* corta a los lados *AB* y *BC* en puntos *D* y *E*, respectivamente. Si *DE* = 2cm, determina los posibles valores de la medida de *AC*.

**Problema 5**

Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se pueden eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

**Problema 6**

Decimos que un conjunto *E* de números naturales es *especial* cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto *ab*.

(a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.

(b) ¿Existe algún conjunto especial formado por cuatro números naturales que estén en progresión aritmética?

# XLVII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA
## Fase local-Comunidad de Madrid

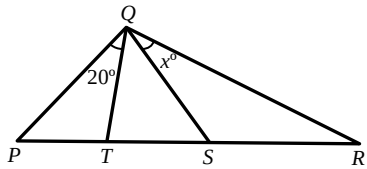
**Primera sesión, viernes 26 de noviembre de 2010**

- **En la hoja de respuestas, escribe la letra que corresponde a la opción que creas correcta en cada pregunta. Si decides cambiarla, táchala con una cruz y escribe otra.**
- **Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea, 0 puntos.**
- **No están permitidas calculadoras ni ningún instrumento de medida.**
- **Tiempo: 3 horas.**

**1** En una lista de siete números, cualesquiera cuatro adyacentes suman 16 y cualesquiera cinco adyacentes suman 19. ¿Cuál es la suma de esos siete números?

**A)** 21 **B)** 25 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 35

**2** En el dibujo de la derecha, que no está hecho a escala, se verifica que $PT = QT = TS$, $QS = SR$ y el ángulo $P\hat{Q}T = 20^\circ$. ¿Cuál es el valor de $x$?



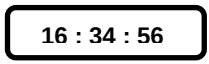

**A)** 20 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40

**3** En este cuadrado mágico, el producto de los números de cada fila, columna y diagonal es el mismo. ¿Cuál es valor de $r + s$?

| | | |
|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $r$ |
| $s$ | 1 | $t$ |
| $u$ | 4 | 1/8 |

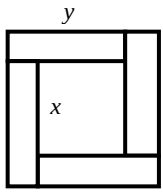
**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** $\frac{33}{16}$ **E)** 24

**4** En un reloj digital, como el del dibujo, en el que aparecen las horas, minutos y segundos, ¿cuántas veces cambian los seis dígitos simultáneamente en 24 horas?



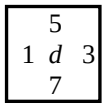

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**5** El diagrama muestra un cuadrado de lado $y$ que se ha dividido en un cuadrado de lado $x$ y cuatro rectángulos iguales. ¿Cuál es la longitud del lado largo del rectángulo?




**A)** $\frac{y-x}{2}$ **B)** $\frac{y+2x}{3}$ **C)** $y-x$ **D)** $\frac{2y}{3}$ **E)** $\frac{y+x}{2}$

**6** En el diagrama que ves, podemos leer dos números de tres cifras cada uno: leyendo de izquierda a derecha y leyendo de arriba a abajo. Hay un único valor del dígito $d$ para el que ambos números son primos. ¿Cuál es este valor?




**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**7** Una lista de diez números está formada por 0, 1, 2, 3, 4, cada uno de ellos dos veces. Los ceros están juntos; los unos separados por 1 número; los doses separados por 2 números; los treses separados por 3 números; y los cuatros separados por 4 números. Si la lista empieza por 3, 4, …, ¿qué número aparece en último lugar?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**8** Las páginas de un libro están numeradas 1, 2, 3, … Si se han empleado 852 dígitos para numerarlas, ¿cuál es el número de la última página?

**A)** 215 **B)** 314 **C)** 320 **D)** 329 **E)** 422

**9** ¿Para cuántos valores de $n$ se verifica que $\frac{n}{2}$ y $2n$ son números de tres cifras?

**A)** 0 **B)** 150 **C)** 200 **D)** 300 **E)** 500

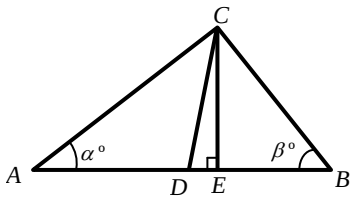
**10** Si la suma de tres números primos diferentes es 40, ¿cuál es la diferencia entre los dos mayores?

**A)** 8 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

**11** En un festival de Navidad, la entrada infantil cuesta 4,20 € y la de adulto 7,70 €. Un grupo de niños y adultos fue al festival y pagaron entre todos $c$ €. De los siguientes números, ¿cuál de ellos es un posible valor para $c$?

**A)** 91 **B)** 92 **C)** 93 **D)** 94 **E)** 95

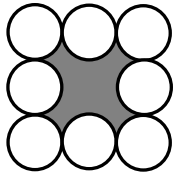
**12** En el triángulo *ABC* de la figura, se verifica que $B\hat{A}C = \alpha^o$ y $A\hat{B}C = \beta^o$, donde $\alpha < \beta$. Si *CD* es la bisectriz del ángulo $A\hat{C}B$ y *CE* es perpendicular a *AB*, ¿cuál es el valor del ángulo $D\hat{C}E$ ?




**A)** $\frac{180-(\alpha+\beta)}{2}$ **B)** $\frac{\beta-\alpha}{2}$

**C)** $\frac{\alpha+2\beta}{2}$ **D)** $\frac{360-\alpha-2\beta}{2}$ **E)** $\frac{\alpha+\beta}{2}$

**13** Con centro en los vértices y puntos medios de los lados de un cuadrado de perímetro 8, hemos construido la región sombreada que observas, en la que todas las circunferencias son iguales. ¿Cuál es el perímetro de dicha región?



**A)** $\pi$ **B)** $2\pi$ **C)** 8 **D)** $3\pi$ **E)** $4\pi$

**14** ¿Cuántos conjuntos de tres primos distintos tienen la propiedad de que el producto de los tres es cinco veces su suma?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 7

**15** *F* es el conjunto de todos los números de cinco cifras en los que el producto de éstas es 15. *T* es el conjunto de todos los números de cinco cifras en los que el producto de éstas es 25.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

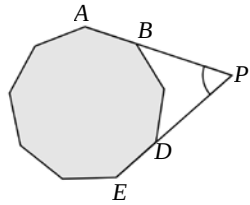
**A)** El conjunto *F* tiene el doble de elementos que el conjunto *T*.
**B)** El conjunto *F* tiene la mitad de elementos que el conjunto *T*.
**C)** El conjunto *F* tiene 5/3 de los elementos del conjunto *T*.
**D)** El conjunto *F* tiene 3/5 de los elementos del conjunto *T*.
**E)** Ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos.

**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**16** En una clase el número de chicas es más del 45% pero menos del 50% del total. ¿Cuál es el menor número posible de chicas en esa clase?

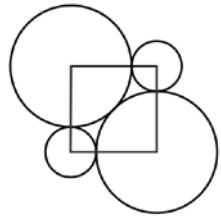
**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**17** La figura muestra un polígono regular de nueve lados en el que hemos prolongado los lados *AB* y *DE* hasta que se junten en el punto *P*. ¿Cuál es el valor del ángulo $B\hat{P}D$ ?




**A)** 40º **B)** 45º **C)** 50º **D)** 55º **E)** 60º

**18** El dibujo muestra cuatro circunferencias, iguales dos a dos, con centros en los vértices de un cuadrado y tangentes entre sí. Si el radio de las circunferencias pequeñas es 1 cm, ¿cuál es, en cm, el radio de las grandes?



**A)** $1+\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{4\pi}{3}$

**19** ¿Cuántos números hay, de 10 cifras cada uno, formados solamente por unos, doses y treses y tal que cualquier par de cifras adyacentes difieran en 1?

**A)** 16 **B)** 32 **C)** 64 **D)** 80 **E)** 100

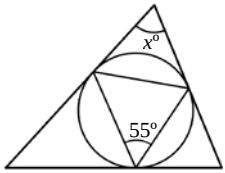
**20** ¿Cuál es el máximo número de cifras que puede tener un número si cualquier número formado por dos cifras consecutivas es un cuadrado perfecto?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 10

**21** En un triángulo, dos de sus medianas, de longitudes 8 y 12 cm, son perpendiculares. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área de dicho triángulo?

**A)** 24 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 96

**22** En la figura observas una circunferencia inscrita en un triángulo y circunscrita en otro. ¿Cuál es el valor de *x*?




**A)** 55 **B)** 60 **C)** 65 **D)** 70 **E)** 75

**23** En una circunferencia de centro *O* marco los puntos *A* y *B* siendo el ángulo $A\hat{O}B = 60º$ . Una segunda circunferencia es tangente interior a aquella y además tangente a los segmentos *OA* y *OB*. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de los círculos pequeño y grande?

**A)** $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{4}$

**24** ¿Cuál es el área de la región formada por los puntos $(x, y)$ tales que $|3x-18|+|2y+7|\le 3$?

**A)** 3 **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** 4 **D)** $\frac{9}{2}$ **E)** 5

**25** ¿Cuál es el coeficiente de $x^{28}$ en el producto de polinomios $\left(1+x+x^2+\ldots+x^{27}\right)\cdot\left(1+x+x^2+\ldots+x^{14}\right)^2$?

**A)** 195 **B)** 196 **C)** 224 **D)** 378 **E)** 405

**26** Colocamos alineadas y al azar tres bolas rojas, dos blancas y una azul. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos del mismo color juntas?

**A)** $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{10}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**27** En el interior de un rectángulo de dimensiones $a$ y $b$, enteros, con $a > b$, coloreamos otro rectángulo de lados paralelos a los de aquel y que deja un pasillo sin colorear de anchura uniforme de 1 cm. Si el rectángulo coloreado tiene la mitad de área del rectángulo original, ¿cuántas posibilidades hay para el par ordenado $(a, b)$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**28** En el cuadrilátero $ABCD$ con $AB = BC = CD$, los ángulos en $B$ y en $C$ miden 70º y 170º respectivamente. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo en $A$?

**A)** 75 **B)** 80 **C)** 85 **D)** 90 **E)** 95

**29** Una encuesta demuestra que el 70% de los encuestados aprueban una determinada medida del gobierno. En tres ocasiones, elegimos un encuestado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que solo en una de estas tres ocasiones el encuestado sea de los que aprueban la medida del gobierno?

**A)** 0,063 **B)** 0,189 **C)** 0,233 **D)** 0,333 **E)** 0,441

**30** El cuadrado $ABCD$, de área 36, verifica que el lado $AB$ es paralelo al eje horizontal. Si los vértices $A$, $B$ y $C$ están respectivamente en las gráficas de $y=\log_a x$, $y=2\log_a x$ e $y=3\log_a x$, ¿cuál es el valor de $a$?

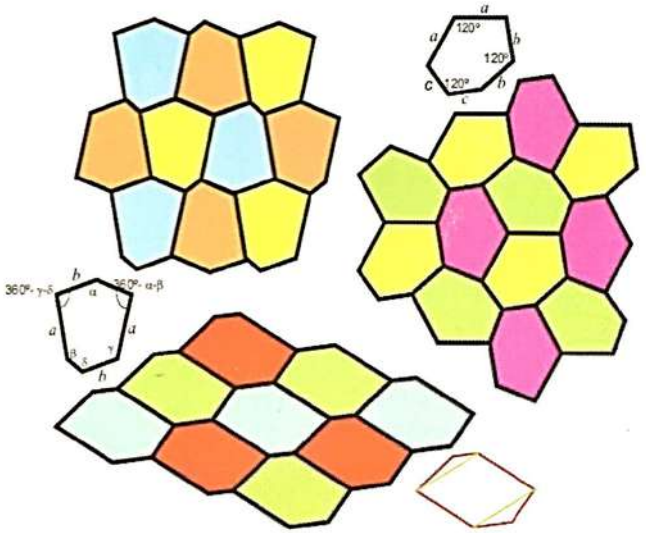
**A)** $\sqrt[6]{3}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\sqrt[3]{6}$ **D)** $\sqrt{6}$ **E)** 6

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
**Comunidad de Madrid**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

EDUCAMADRID

# XVI concurso de primavera

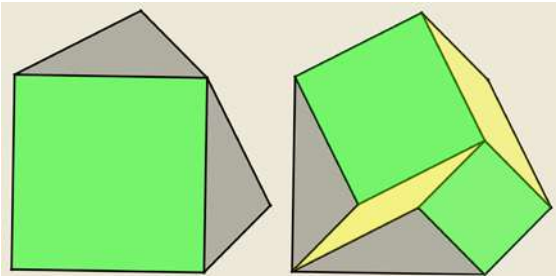



## MATEMÁTICAS 2012

Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alfredo Martínez Sanz*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*María Gaspar Alonso-Vega,*
*María Moreno Warleta*
*María Olbés Fernández*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pilar Ruiz Cervigón*
*Víctor Manuel Sánchez González*



Teorema del coseno para un ángulo obtuso

## *Presentación*

Preguntaron a la rana viajera por el número 16, y ella respondió que era el tercer número.

- Cuando yo iba por la escuela siempre oía contar a algún chico: Tres, catorce, dieciséis, ...

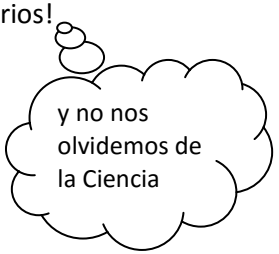
Y dando tres saltos proporcionales se zambulló en la charca.

El sombrerero loco comentó que él nunca pedía opinión a alguien que hablaba de oídas, y se fue al tijerero a preguntarle si su sombrero necesitaba algún recorte.

¡Que esta crisis nos haga más solidarios!

.

Comité Organizador



## AGRADECIMIENTOS

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A la librería Aviraneta

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 23 de febrero de 2011**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

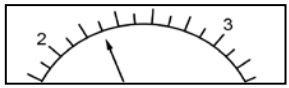
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** ¿Qué número marca la flecha en esta balanza?

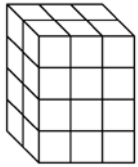



**A)** 2,03 **B)** 2,15 **C)** 2,25 **D)** 2,3 **E)** 2,51

**2** La suma de las cifras de 2011 es 4. ¿Cuántos números de cuatro cifras cumplen que la suma de sus cifras es 4?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 20

**3** Con 24 cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando 42 cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del ortoedro de Santiago?

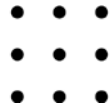


**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

**4** Tengo un montonazo de caramelos. Si los repartiera entre mis treinta y cinco amigos del cole, me sobrarían diecisiete. ¿Cuántos me sobrarían si los repartiera entre mis siete primos?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**5** ¿Cuál es el menor número de puntos que hay que quitar del diagrama para que no haya tres puntos alineados?



**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 7

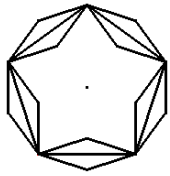
**6** ¿Qué valor es el más próximo al resultado de la multiplicación $3{,}75 \times 0{,}28$?

**A)** 10000 **B)** 100 **C)** 1 **D)** 0,1 **E)** 0,01

**7** Mi chinchilla, Bernie, se come cinco paquetes de alfalfa en dos meses. ¿Cuántos paquetes de alfalfa se comerá en un año?

**A)** 60 **B)** 45 **C)** 30 **D)** 20 **E)** 10

**8** En un decágono regular hemos inscrito un pentágono regular y dentro de éste una estrella pentagonal. Si el área del decágono es 25,95 $cm^2$ y el de la estrella 16,05 $cm^2$, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del pentágono?



**A)** 20,4 **B)** 20,45 **C)** 20,5 **D)** 21

**E)** 21,1

**9** Ana le debe veintitrés euros a Emilio; Emilio le debe doce a Inés; Inés le debe diecinueve a Olivia; Olivia le debe quince a Ulises y Ulises le debe diez a Ana. Para saldar sus deudas y quedar en paz, Ana le da cuatro euros a Emilio, otros cuatro a Olivia y cinco a Ulises. ¿Qué les falta hacer para terminar de arreglar este embrollo?

**A)** Ana le da dos euros a Inés **B)** Emilio le da dos euros a Ulises
**C)** Inés le da siete euros a Emilio **D)** Inés le da tres euros a Ulises
**E)** Olivia le da un euro a Ulises

**10** Si sustituimos cada una de las letras de la suma OMAR + AMOR + ROMA por los números 1, 3, 8 y 9, distintas letras corresponden a distintos números, ¿cuál es el máximo valor posible de la suma?

**A)** 21 294 **B)** 19 710 **C)** 22 585 **D)** 14 805 **E)** 29 493

**11** En un triángulo isósceles cada uno de los ángulos iguales mide 75º. ¿Cuánto mide el ángulo desigual?

**A)** 30º **B)** 75º **C)** 90º **D)** 105º **E)** 210º

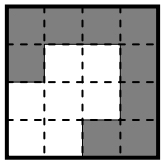
**12** El rey del castillo ha recibido la visita de príncipes y caballeros. Cada príncipe trajo de regalo tres cofres de oro y uno de plata; y cada caballero trajo un cofre de oro y dos de plata. Si en total el rey recibió 34 cofres de oro y 33 de plata, ¿cuántas personas visitaron al rey?

**A)** 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

**13** Tras un año ahorrando, Juanito ha decidido abrir su hucha y se ha encontrado con dos billetes de diez euros, tres de cinco euros, seis monedas de dos euros, cinco de un euro, siete de cincuenta céntimos, cuatro de veinte, veintitrés de diez céntimos y varias monedas de cinco, de dos y de un céntimo. Si en total tiene 59,08 €, ¿cuál es el número máximo de monedas de cinco céntimos que puede tener?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 21

**14** El cuadrado grande tiene 16 $cm^2$ de área. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de la zona sombreada?



**A)** 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 18
**E)** 9

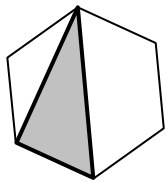
**15** Fernando ha medido los ángulos de dos triángulos, uno obtusángulo y el otro acutángulo pero solo recuerda cuatro de las medidas: 120º, 80º, 55º y 10º. ¿Cuál es, en grados, la medida del ángulo menor del triángulo acutángulo?

**A)** 5º **B)** 10º **C)** 15º **D)** 45º **E)** 55º

**16** Diez niños se han presentado a un concurso en el que la máxima nota es 100. Si la media de las diez notas es 92, ¿cuál es la menor nota posible?

**A)** 0 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 90 **E)** 92

**17** Si el triángulo sombreado tiene 24 $cm^2$ de área, el área, en $cm^2$, del hexágono regular es:



**A)** 90 **B)** 80 **C)** 72 **D)** 68 **E)** 64

**18** El abuelo ha traído pasteles para sus cuatro nietos. El mayor se come la mitad y medio pastel más, el segundo la mitad de los que quedan y medio pastel más, el tercero hace lo mismo y para el cuarto quedan cinco pasteles. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de pasteles que trajo el abuelo?

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 15

**19** En un espectáculo, las entradas de 3 adultos y 2 niños cuestan 26 € y las de 2 adultos y 3 niños cuestan 24 €. ¿Cuál es la diferencia de precio, en euros, entre la entrada del adulto y la del niño?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**20** Cuando Irene llora se desbordan los ríos. Un lagrimón de Irene llena hasta el borde un dedal de 2 mililitros de capacidad. Un día que estaba muy, muy triste, lloró durante tres horas seguidas y llenó con sus lágrimas una botella de un litro y un tazón de 44 centilitros. ¿Cuántos lagrimones le cayeron a Irene ese día?

**A)** 7200 **B)** 720 **C)** 522 **D)** 72 **E)** 52

**21** Hemos dividido un rectángulo en nueve rectangulitos como ves en la figura (no está a escala). Los números indican el área de algunos de los rectangulitos. ¿Cuánto vale *x*?

| | | |
|---|---|---|
| **2** | **3** | |
| | **6** | **8** |
| ***x*** | | **20** |

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8

**E)** 10

**22** Si en la numeración azteca = 2420 y = 4020, ¿cómo se escribe 4620?

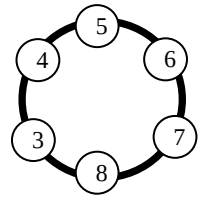
**A)** **B)** **C)**

**D)** **E)**

**23** En la secuencia *ABCDEABCDEABCDE*… ¿qué letra aparecerá en la 2011ª posición?

**A)** *A* **B)** *B* **C)** *C* **D)** *D* **E)** *E*

**24** Seis personas están sentadas en una mesa redonda. Cada persona piensa un número y se lo susurra a las dos que tiene a su lado. Ahora cada uno dice en voz alta la media de los dos números que le han susurrado y estos son los resultados. ¿Cuál fue el mayor número pensado?

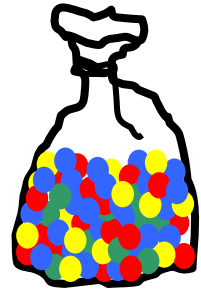



**A)** 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10

**E)** 9

**25** En una bolsa hay varias bolas de colores: rojas, azules, verdes y amarillas. Ainhoa ha realizado lo siguiente: saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa. Estos son los resultados de 100 extracciones:

| | |
|---|---|
| BOLA ROJA | 25 |
| BOLA AZUL | 50 |
| BOLA VERDE | 10 |
| BOLA AMARILLA | 15 |



Si en la bolsa hubiera 40 bolas, ¿cuál es el número más probable de bolas rojas que contiene?

**A)** 25 **B)** 15 **C)** 10 **D)** 5 **E)** 20

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 23 de febrero de 2011**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

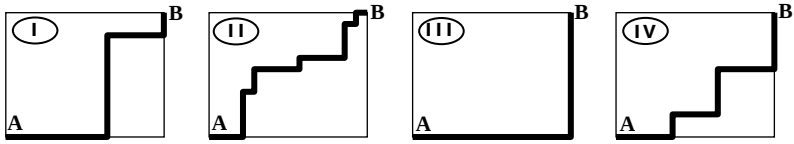
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

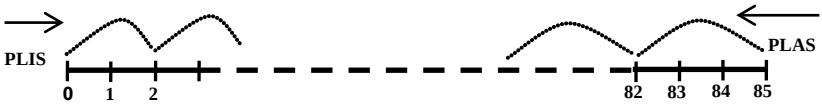
**1** Para ir de **A** a **B**, una hormiga duda entre estos cuatro caminos:




¿Cuál de ellos es el más corto?

**A)** I **B)** II **C)** III **D)** IV **E)** Todos son iguales

**2** Plis y Plas son dos pulgas que van como locas la una al encuentro de la otra. Plis empieza en el número 0 y da brincos de longitud 2 y Plas empieza en el número 85 y da saltos de longitud 3. Si empiezan a la vez a saltar y dan los saltos a la vez, ¿en qué número se encontrarán?

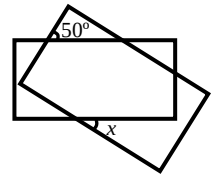



**A)** 32 **B)** 34 **C)** 38 **D)** 40 **E)** 42

**3** Rosa coge un folio y lo parte en cinco trozos; coge uno de estos trozos y lo parte en cinco trocitos; coge uno de estos trocitos y lo parte en cinco mini-trocitos; y coge un mini-trocito y lo parte en cinco micro-trocitos. ¿En cuántos cachitos ha quedado dividida la hoja de Rosa?

**A)** 17 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 14 **E)** 12

**4** Dos rectángulos descansan uno sobre otro como muestra el dibujo. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?



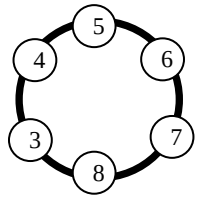

**A)** 50º **B)** 45º **C)** 40º **D)** 30º

**E)** 25,5º

**5** Rosa hace pulseras de bolitas y tiene un cajón con miles de bolitas de 30 colores diferentes. Decide sacar bolitas sin mirar hasta conseguir tener 68 del mismo color. ¿Cuál es el número mínimo de bolitas que debe coger para estar absolutamente segura de que tendrá 68 bolitas de igual color?

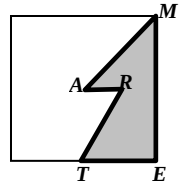
**A)** 31 **B)** 69 **C)** 98 **D)** 2011 **E)** 2040

**6** Seis personas están sentadas en una mesa redonda. Cada persona piensa un número y se lo susurra a las dos que tiene a su lado. Ahora cada uno dice en voz alta la media de los dos números que le han susurrado y estos son los resultados. ¿Cuál fue el mayor número pensado?




**A)** 13 **B)** 12 **C)** 11 **D)** 10 **E)** 9

**7** Dentro del cuadrado de centro *A* está *MARTE*. *T* es el punto medio de un lado y *R* está a igual distancia de *A* que del lado *ME*.
Si el área del cuadrado es 1, ¿qué área tiene *MARTE*?




**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{5}{16}$ **E)** $\frac{2}{5}$

**8** Don Retorcido os pregunta: ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
PRIMERA: En todo triángulo rectángulo siempre hay dos ángulos que suman 90º.
SEGUNDA: El área de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto de los dos lados menores.
TERCERA: No existen triángulos rectángulos equiláteros.
CUARTA: Si divides un rectángulo por una de sus diagonales, se obtienen dos triángulos rectángulos iguales.

**A)** Ninguna **B)** Sólo una **C)** Sólo dos **D)** Sólo tres **E)** Las cuatro

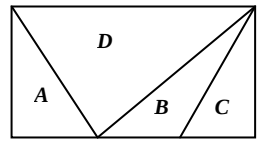
**9** ¿Cuántos números enteros puedes escribir en lugar de la *n* para que se cumpla que $\frac{1}{5} < \frac{n}{15} < \frac{11}{12}$?

**A)** 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

**10** Un periódico tiene 56 páginas. Si retiras la hoja que contiene a la página 16, ¿qué otras tres páginas se retiran también?

**A)** 15-43-44 **B)** 15-41-42 **C)** 17-42-43 **D)** 17-41-42 **E)** 17-43-44

**11** Hemos dividido un rectángulo en cuatro triángulos de áreas ***A, B, C*** y ***D***.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



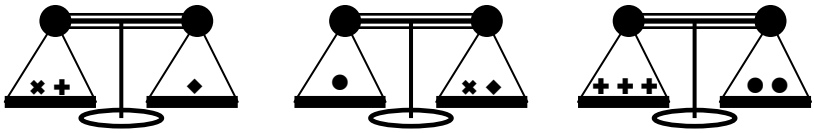

**A)** $D = B + C$ **B)** $D = 2\cdot(A + B + C)$

**C)** $2D = A + B + C$ **D)** $D = A + B + C$ **E)** $A + D = B + C$

**12** ¿Cuántos minutos son la quinta parte de la mitad de un tercio de hora?

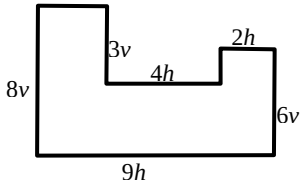
**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**13** Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



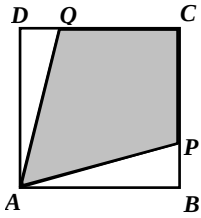
**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**14** La figura que ves tiene lados paralelos y lados perpendiculares. Sabiendo que $h \cdot v = 2$, ¿qué área tiene la figura?




**A)** 112 **B)** 120 **C)** 128 **D)** 130 **E)** 144

**15** Queremos pintar de blanco dos triángulos iguales (*ABP* y *ADQ*) en el cuadrado *ABCD* para que el área de la zona gris sea el triple que el área de la zona blanca. Si el lado del cuadrado mide 8, ¿a qué distancia de *B* debemos situar *P* para conseguir nuestro propósito?

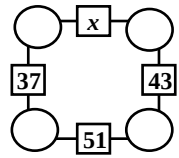



**A)** 3 **B)** 2,5 **C)** 2,25 **D)** 2 **E)** 1

**16** Los bombones favoritos de don Retorcido se venden en cajas de 30 y de 59 unidades. Si quiere conseguir exactamente 2011 bombones, ¿cuántas cajas tendrá que comprar?

**A)** 41 **B)** 31 **C)** 27 **D)** 35 **E)** 39

**17** En los círculos que están en los vértices del cuadrado tienes que escribir cuatro números de forma que el número que aparece en el medio de cada lado sea igual a la suma de los números escritos en sus vértices correspondientes.
¿Cuál debe ser el valor de *x* para que esto sea posible?

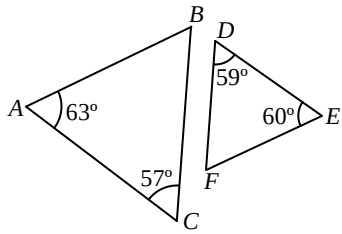



**A)** 8 **B)** 29 **C)** 31 **D)** 40 **E)** Hay más de uno

**18** Doña Paca tiene tres hijos en edad escolar. El producto de las edades de Doña Paca y sus tres hijos es 16 555. La diferencia entre las edades del hijo mayor y el menor es:

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**19** Los triángulos de la figura están a distinta escala pero sabemos que los lados *BC* y *DF* miden lo mismo. ¿Cuál de los siguientes segmentos es mayor?




**A)** *AB* **B)** *AC* **C)** *DE*

**D)** *EF* **E)** *BC*

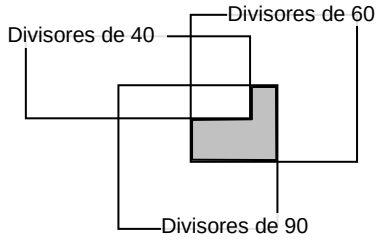
**20** ¿Cuántos triángulos isósceles distintos cuyos lados son números enteros tienen perímetro 25?

**A)** Ninguno **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 12

**21** Cada mochuelo en su olivo, pero hay un mochuelo que no tiene olivo. Si se colocan dos mochuelos en cada olivo queda un olivo sin mochuelo. ¿Cuántos olivos hay?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**22** Si rellenas correctamente el diagrama que te mostramos, ¿cuántos números deberás colocar en la zona sombreada?




**A)** Ninguno **B)** Uno **C)** Dos

**D)** Tres **E)** Cuatro

**23** ¿Cuál de los siguientes enteros se aproxima más a $\sqrt{123456}$ ?

**A)** 134 **B)** 245 **C)** 350 **D)** 450 **E)** 617

**24** En una cuadrícula $3 \times 3$, en cada casilla puedes poner una **S** o una **O**. ¿Cuál es el número máximo de veces que puede aparecer la palabra **OSO** en horizontal, vertical o diagonal?

**A)** Tres **B)** Cuatro **C)** Seis **D)** Ocho **E)** Nueve

**25** La media de una lista de cinco números enteros positivos diferentes es 20. ¿Cuál es el mayor número entero que podría aparecer en esa lista?

**A)** 100 **B)** 99 **C)** 96 **D)** 92 **E)** 90

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 23 de febrero de 2011**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

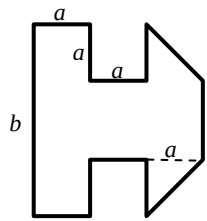
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** El dibujo de la derecha muestra el plano de una habitación en la que cualesquiera de las paredes que se juntan forman un ángulo múltiplo de 45º. Si las longitudes de algunas paredes son $a$ y $b$, ¿cuál es el área de la habitación?

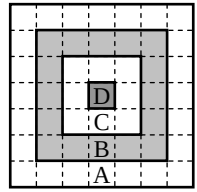



**A)** $3a(b-a)$ **B)** $8a+2b$ **C)** $3ab-a^2$ **D)** $b^2-a^2$ **E)** $ab-3a^2$

**2** Cada mochuelo en su olivo, pero hay un mochuelo que no tiene olivo. Si se colocan dos mochuelos en cada olivo queda un olivo sin mochuelo. ¿Cuántos olivos hay?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**3** Considera una diana para dardos como se muestra en la figura. La puntuación es inversamente proporcional al área de cada región. Si un impacto en la región B supone obtener 10 puntos, ¿cuántos puntos se obtienen al impactar en la región C?




**A)** 5 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

**4** Un grupo de compañeros de clase está planificando un viaje. Si cada uno de ellos hiciera una aportación de 14 € para los gastos del viaje, faltarían 4 €, pero si cada uno de ellos aportara 16 €, sobrarían 6 €. ¿Qué cantidad debería aportar cada uno para reunir el precio exacto del viaje?

**A)** 14,40 € **B)** 14,60 € **C)** 14,75 € **D)** 14, 80 € **E)** 14,90 €

**5** Las longitudes de los lados de un triángulo, expresadas en centímetros, vienen dadas por tres números pares consecutivos. Si su perímetro es mayor que 2011 cm, ¿cuál es la menor medida posible del perímetro?

**A)** 2012 cm **B)** 2013 cm **C)** 2014 cm **D)** 2016 cm **E)** 2018 cm

**6** La media de una lista de cinco números enteros positivos diferentes es 20. ¿Cuál es el mayor número entero que podría aparecer en esa lista?

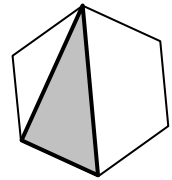
**A)** 100 **B)** 99 **C)** 96 **D)** 92 **E)** 90

**7** El conjunto de todos los números $x$, tales que, $2x-7<3x+3<5-x$ es:

**A)** $-2<x<\frac{1}{2}$ **B)** $-10<x<\frac{1}{2}$ **C)** $-2<x<2$ **D)** $-10<x<2$

**E)** Nada de lo anterior

**8** Si el perímetro del hexágono regular de la figura mide 24 cm, el perímetro, en cm, del triángulo sombreado es:



**A)** 20 **B)** $12+3\sqrt{2}$ **C)** $12+3\sqrt{3}$ **D)** 21

**E)** $12+4\sqrt{3}$

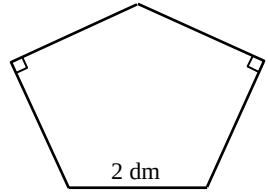
**9** El resultado de $\frac{0{,}0025\cdot 0{,}3051493}{0{,}00021476}$ es un número comprendido entre:

**A)** 0 y 2 **B)** 2 y 6 **C)** 6 y 10 **D)** 10 y 14 **E)** Más de 14

**10** ¿Cuál es la cantidad de euros más cercana a 2750 que se puede repartir inversamente proporcional a 1, 3, 9 y 27, de forma que todas las partes tengan un número entero de euros?

**A)** 2700 **B)** 2727 **C)** 2748 **D)** 2752 **E)** 2760

**11** El pentágono de la figura es equilátero de lado 2 dm y como puede apreciarse en la figura, tiene dos ángulos rectos. ¿Cuál es, en dm, su área?




**A)** $4+\sqrt{7}$ **B)** $4+\sqrt{10}$ **C)** $\frac{20}{3}$

**D)** $\sqrt{56}$ **E)** $4+2\sqrt{2}$

**12** Un número formado por tres cifras distintas, *abc*, verifica que $3\cdot abc = bbb$. ¿Cuál es el valor de $a+b+c$?

**A)** 6 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 17

**13** ¿Cuántos números de tres cifras distintas hay en los que una de las cifras sea la suma de las otras dos?

**A)** 48 **B)** 50 **C)** 60 **D)** 66 **E)** 96

**14** En la siguiente sucesión de números enteros, ¿cuál es el que ocupa la posición 497?
**11, 16, 17, 22, 23, 28, 29, 34, …**

**A)** 1499 **B)** 2011 **C)** 2501 **D)** 2573 **E)** 2591

**15** Si ordenamos de menor a mayor todos los números de cuatro cifras, todas impares, ¿qué posición ocupa el 5111?

**A)** 200ª **B)** 251ª **C)** 280ª **D)** 300ª **E)** 3000ª

**16** El 80 % de los accidentes suceden al aire libre y el 20 % dentro de los edificios. Si el número de accidentes al aire libre se redujera en un 40 %, ¿en qué porcentaje disminuiría el número total de accidentes?

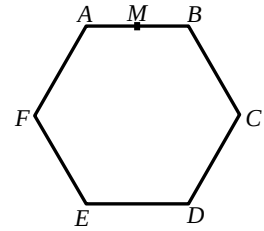
**A)** 68 % **B)** 52 % **C)** 48 % **D)** 40 % **E)** 32 %

**17** Si $a(a-1) \neq 0$ entonces $\dfrac{a(a^3+2a^2-a-2)+a^2-1}{a(a-1)}$ es igual a:

**A)** $\dfrac{(a+1)^3}{a}$ **B)** $a+2$ **C)** $a^3+2a^2-a-1$ **D)** $a^3+2a^2-a-2$

**E)** $\dfrac{a^3+3a^2-a-3}{a^2-1}$

**18** La longitud del lado del hexágono regular *ABCDEF* de la figura es 2 cm. Si *M* es el punto medio de *AB*, ¿cuál de los siguientes segmentos tiene por longitud $\sqrt{13}$ cm?

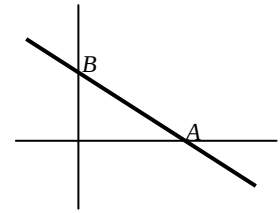



**A)** *BD* **B)** *BE* **C)** *EM* **D)** *FM*

**E)** Ninguno de los anteriores

**19** La recta *AB* de la figura tiene pendiente $-\dfrac{1}{k}$ con $k > 1$.

Si la ordenada de *B* es *k*, ¿cuál es la abscisa de *A*?




**A)** $\dfrac{1}{k^2}$ **B)** $\dfrac{1}{k}$ **C)** 1 **D)** $k$

**E)** $k^2$

**20** Si $n$ es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que $n$?

**A)** $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** $n^2+1$ **D)** $n^2+n$ **E)** $n^2+2n+1$

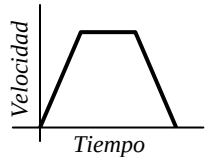
**21** Juan compra y vende coches de segunda mano. En la última operación compró dos coches y los vendió al mes siguiente por 9999 € cada uno. Si en uno de ellos ganó un 10 % y en el otro perdió un 10 %, ¿cómo le fue la operación?

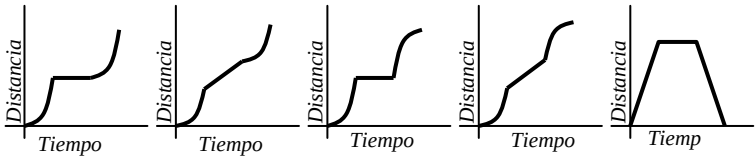
**A)** Perdió 202 € **B)** Perdió 101 € **C)** Ganó 101 € **D)** Ganó 202 €
**E)** Ni ganó ni perdió

**22** Durante cierto experimento, el radio de una placa circular de metal creció un 3 %. ¿Cuál fue aproximadamente el porcentaje de crecimiento del área?

**A)** 0,09 % **B)** 6 % **C)** 9 % **D)** 3π % **E)** 9π %

**23** El dibujo de la derecha muestra la gráfica, tiempo-velocidad de un viaje de un tren entre dos estaciones. ¿Cuál de las siguientes gráficas puede describir la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por el tren en ese viaje?



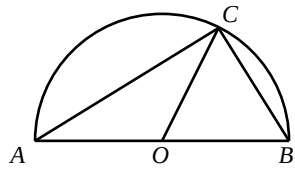




**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**24** ¿Cuántas cifras tiene el menor número formado exclusivamente por cincos y que sea múltiplo de 99?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 45

**25** El dibujo muestra una semicircunferencia de centro $O$ y radio 1 cm. Si $C$ es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?




**A)** El ángulo $A\hat{C}B$ es recto

**B)** El triángulo $AOC$ es isósceles

**C)** El área del triángulo $ABC$ es menor o igual que 1 $cm^2$

**D)** El área del triángulo $AOC$ es igual a la del triángulo $OBC$

**E)** $AO^2 + OB^2 = AC^2 + BC^2$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 23 de febrero de 2011**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** En el triángulo *ABC*, la bisectriz del ángulo *B* corta al lado *AC* en el punto *D*. Si el ángulo $B\hat{D}C$ mide 68º, ¿cuál es la diferencia entre los ángulos *C* y *A*?

**A)** 44º **B)** 120º **C)** 24º **D)** 30º **E)** Es imposible determinarlo

**2** En una caja hay 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Antonio y Beatriz sacan cada uno una tarjeta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la tarjeta de Antonio sea el doble o más que el número de la tarjeta de Beatriz?

**A)** $\frac{7}{18}$ **B)** $\frac{4}{9}$ **C)** $\frac{28}{81}$ **D)** $\frac{5}{18}$ **E)** $\frac{1}{3}$

**3** Si *a* y *b* son los catetos de un triángulo rectángulo y *d* y *D* los diámetros de las circunferencias inscrita y circunscrita, $d + D$ es igual a:

**A)** $a + b$ **B)** $2(a + b)$ **C)** $\frac{a+b}{2}$ **D)** $\sqrt{ab}$ **E)** $\sqrt{a^2+b^2}$

**4** El conjunto de todos los números reales *x* que verifican la desigualdad $2^{4^x} < 4^{2^x}$ es:

**A)** $(-\infty, 1)$ **B)** $(0, 1)$ **C)** $(0, +\infty)$ **D)** $\mathbb{R}$ **E)** $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$

**5** Empezamos con un número, lo duplicamos y luego le restamos 1. Después de aplicar sucesivamente este procedimiento 99 veces se obtiene $2^{100} + 1$. ¿Con qué número empezamos?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

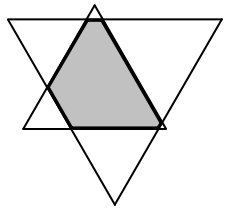
**6** ¿Cuántos números formados por tres cifras consecutivas (no necesariamente ordenadas) tienen un número impar de divisores?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**7** El 80 % de los accidentes suceden al aire libre y el 20 % dentro de los edificios. Si el número de accidentes al aire libre se redujera en un 40 %, ¿en qué porcentaje disminuiría el número total de accidentes?

**A)** 68 % **B)** 52 % **C)** 48 % **D)** 40 % **E)** 32 %

**8** Dos triángulos equiláteros de lados paralelos, de perímetros 2011 y 1121 cm, se solapan como se muestra en la figura. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del hexágono, común a ambos triángulos?



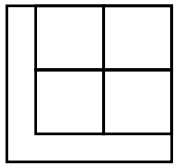
**A)** 1040 **B)** 1041 **C)** 1042 **D)** 1043

**E)** 1044

**9** La suma de las cifras del mayor número en el que cualquier pareja de cifras consecutivas es un cuadrado perfecto es:

**A)** 45 **B)** 36 **C)** 28 **D)** 27 **E)** 22

**10** Un cuadrado de área 125 cm$^2$ se divide en cinco trozos de igual área, cuatro cuadrados y un trozo en forma de L como se indica en la figura. La longitud, en cm, del lado más corto de la L es:

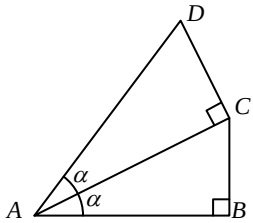


**A)** 1 **B)** 1,2 **C)** $2\left(\sqrt{5}-2\right)$ **D)** $3\left(\sqrt{5}-1\right)$ **E)** $5\left(\sqrt{5}-2\right)$

**11** ¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**12** En la figura adjunta, *AB* tiene longitud 1. ¿Cuál es la longitud de *AD*?




**A)** $\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$ **B)** $\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$ **C)** $\cos^2\alpha$

**D)** $\cos 2\alpha$ **E)** $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

**13** Tres números primos, *a*, *b* y *c*, con $a < b < c$, suman 78. Si $c - a - b = 40$, $c + 3b$ es igual a:

**A)** 100 **B)** 110 **C)** 120 **D)** 130 **E)** 140

**14** ¿Cuál de las siguientes funciones tiene el eje *OY* como eje de simetría?

**A)** $y = x^2 + x$ **B)** $y = x^2 \operatorname{sen} x$ **C)** $y = x \cos x$ **D)** $y = x \operatorname{sen} x$ **E)** $y = x^3$

**15** El año pasado, en el Bachillerato de mi centro había 30 chicos más que chicas. Este año, ha aumentado en un 10% el número de estudiantes de Bachillerato, un 20% el número de chicas y un 5% el de chicos. ¿Cuántos estudiantes hay este año en Bachillerato en mi centro?

**A)** 88 **B)** 99 **C)** 110 **D)** 121 **E)** 132

**16** ¿Para cuántos valores del número real *b* se verifica que la ecuación $x^2 + bx + 80 = 0$ tiene dos soluciones distintas que son números enteros positivos pares?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Infinitos

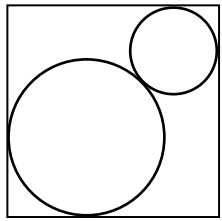
**17** Para obtener el número $8^8$ debemos elevar el número $4^4$ al exponente

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 8 **E)** 16

**18** En un examen de Matemáticas de 1º de Bachillerato, el número de chicos que resolvieron el último problema coincide con el número de chicas que no lo resolvieron. ¿Qué hay más: chicas o estudiantes que han resuelto el problema?

**A)** Chicas **B)** Estudiantes que resolvieron el problema **C)** Son los mismos
**D)** Faltan datos para poder contestar **E)** No se puede dar esa situación

**19** Dos circunferencias están dentro de un cuadrado de lado 1 y son tangentes entre sí y al cuadrado como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los radios de las circunferencias?



**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{2}-1$ **D)** $2-\sqrt{2}$
**E)** Depende del tamaño de cada una

**20** Las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$ son $a$ y $b$. El valor de $a^3 + b^3$ es:

**A)** 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

**21** Ana nació el día en que su primo Pablo cumplía 20 años. ¿Cuántas veces la edad de Ana será un divisor de la edad de Pablo si ambos viven muchos años?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**22** Si $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$ y $f\left(g(x)\right) = x$, entonces la función g($x$) es.

**A)** $g(x) = \frac{3x+4}{2x}$ **B)** $g(x) = \frac{3x}{2x+4}$ **C)** $g(x) = \frac{2x+4}{4x}$

**D)** $g(x) = \frac{4x}{2-3x}$ **E)** Nada de lo anterior

**23** Ana, Beatriz y Carlos lanzan un dado. Ana gana si sale 1, 2 ó 3; Beatriz gana si saca 4 ó 5 y Carlos gana si saca 6. El dado va pasando de Ana a Beatriz, de Beatriz a Carlos, de Carlos a Ana,…, hasta que alguien gane. ¿Cuál es la probabilidad de que Carlos gane?

**A)** $\frac{1}{18}$ **B)** $\frac{1}{13}$ **C)** $\frac{1}{11}$ **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{1}{6}$

**24** Las longitudes de las aristas de un ortoedro vienen dadas, en cm, por números enteros y forman una progresión geométrica de razón $q = 2$. ¿Cuál puede ser el volumen del ortoedro?

**A)** 120 $cm^3$ **B)** 188 $cm^3$ **C)** 216 $cm^3$ **D)** 350 $cm^3$ **E)** 500 $cm^3$

**25** Si $x + y + z = 1$ y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $x^2 + y^2 + z^2$ es igual a:

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Faltan datos para saberlo

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 9 de abril de 2011**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

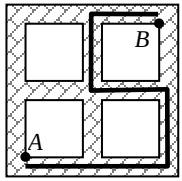
**1** ¿Qué número debes escribir en el cuadradito para que se cumpla la siguiente igualdad? $60 \times 60 = 30 \times 20 \times \square$

**A)** 60 **B)** 40 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 4

**2** Elenita tiene seis cajas con igual número de cochecitos de juguete. Rebuscando, ha encontrado seis cochecitos más debajo de la cama y ha visto que en total tiene 30 cochecitos. ¿Cuántos cochecitos hay en cada caja?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 24

**3** En el centro de la cuidad, la zona peatonal consta de cuatro manzanas. Inés suele recorrerla para ir desde su casa, en el punto *A*, a casa de su abuela, en el punto *B*, y cada día hace un trayecto distinto para ver los escaparates. Hoy ha seguido el camino que ves en la figura. ¿Cuántos recorridos distintos puede hacer Inés si en ninguno quiere pasar dos veces por el mismo tramo?




**A)** 6 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

**4** En el primer tiempo de un partido entre el Real Club Primavera y el Atlético Matemático iban 1 a 0 a favor del Real Club Primavera. Si en el segundo tiempo se metieron en total tres goles, ¿cuál de estos no puede ser el resultado final del partido?

**A)** El Atlético ganó por dos goles **B)** El Real ganó por cuatro goles
**C)** El Real ganó por dos goles **D)** El Real ganó por un gol **E)** Empataron

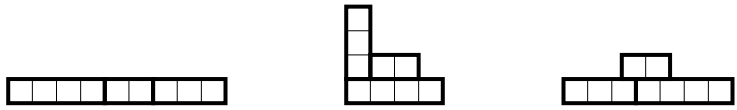
**5** Don Caracol parte hacia la costa a visitar a Doña Caracola. Si cada día recorre exactamente 325 metros y sale un lunes, ¿qué día de la semana llegará a la costa que está a 3 km?

**A)** Martes **B)** Miércoles **C)** Jueves **D)** Viernes **E)** Sábado

**6** Un teatro consta de butacas colocadas en filas de igual longitud. Ana tiene tres butacas delante y dieciocho detrás y Juanito tiene ocho butacas a su derecha y once a su izquierda. ¿Cuántas butacas hay en el teatro?

**A)** 399 **B)** 400 **C)** 418 **D)** 420 **E)** 440

**7** Sofía tiene tres rectángulos de madera de 2×1, 3×1 y 4×1 y con ellos hace figuras poniéndolos uno al lado del otro como en estos ejemplos:



Después, Sofía pasa el lápiz por el borde de sus figuras para dibujar sus contornos. ¿Cuánto mide el contorno más corto que puede conseguir utilizando los tres rectángulos?

**A)** 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

**8** Elvira tiene una memoria prodigiosa. Todos los años felicita a sus 46 amigos en el día de su cumpleaños. Si ninguno de ellos nació en 29 de febrero, ¿cuántos días, como máximo, Elvira no felicitará a ninguno de sus amigos en 2011?

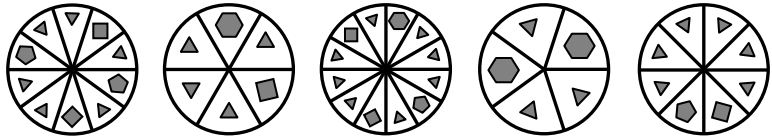
**A)** 365 **B)** 364 **C)** 342 **D)** 319 **E)** 46

**9** ¿Cuál de las siguientes expresiones da como resultado el número menor?

**A)** $5 + 4 - 3 \times (2 - 1)$ **B)** $5 - 4 + 3 \times 2 + 1$ **C)** $5 + 4 - 3 \times 2 + 1$
**D)** $5 + 4 - 3 \times 2 \times 1$ **E)** $5 \times (4 + 3) - 21$

**10** Cada una de estas ruletas está dividida en partes iguales. ¿Con cuál de ellas es más probable que te salga un triángulo?

**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**



**11** En una danza tradicional todos los bailarines están colocados uniformemente alrededor de un círculo. Si los numeramos por orden de colocación con los números 1, 2, 3, etc, el bailarín 3 está justo enfrente del bailarín 15. ¿Cuántos bailarines hay en total?

**A)** 18 **B)** 20 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 26

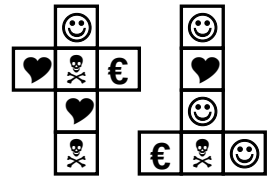
**12** Paz y Puri juegan a lanzar tres dados. Paz multiplica los tres números obtenidos y Puri los suma. Si Paz ha conseguido un 24, ¿cuál es el mayor número que puede haber obtenido Puri en esa jugada?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**13** En un zoo, la dieta para cada animal es la misma todos los días del año. Furia, el caballo, come al día tantas zanahorias como Tambor, el conejo, en una semana. Si entre los dos juntos se comen 56 al día. ¿Cuántas zanahorias se come Tambor al día?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**14** Un adivino de pacotilla lanza los dos dados que ves y dice que así adivina tu futuro.



¿Qué probabilidad hay de que salga el fatídico ☠ ☠?

**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{18}$ **E)** $\frac{1}{36}$

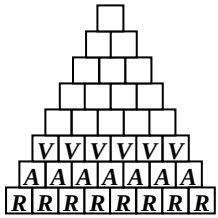
**15** ¿Qué método es el correcto para repartir a partes iguales siete barras de pan idénticas entre doce personas?

**A)** Cortar cinco barras en cuartos y dos en tercios
**B)** Cortar tres barras en tercios y cuatro en cuartos
**C)** Cortar cinco barras en tercios y dos en cuartos
**D)** Cortar tres barras en cuartos y cuatro en tercios
**E)** Cortar cinco barras por la mitad y dos en tercios

**16** Olivia se ha inventado una nueva operación: $a \,\&\, b = a \cdot (a + b)$.
¿Cuántas parejas de números naturales hay para los que la operación & da como resultado 12?

**A)** Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

**17** Marta está haciendo una torre con sus 36 cubos de colores. Tiene igual número de cubos rojos (*R*), azules (*A*) y verdes (*V*) y quiere que en cada piso haya cubos de un solo color y que dos pisos seguidos tengan colores distintos. ¿De qué color será el cubo de arriba?



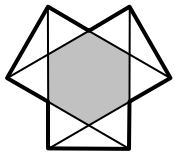

**A)** Rojo **B)** Azul **C)** Verde
**D)** Puede ser rojo o verde **E)** Puede ser azul o verde

**18** Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.
- El Sr. A habla solo español e italiano.
- El Sr. C habla solo inglés e italiano.
- El Sr. E habla solo italiano y francés.
- La Sra. B habla solo español e inglés.
- La Sra. D habla solo francés y español.
- La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos de forma que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 12 **D) 16** **E)** 24

**19** La figura está formada a partir de una estrella de seis puntas y segmentos que unen algunos de sus vértices. Si el área total de la figura es 40 $cm^2$, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del hexágono regular interior?



**A)** 12 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

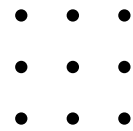
**20** Al Sr. Naranjo le encanta la fruta. Por cuatro manzanas y dos peras pagó 1,54 € y por dos peras y cuatro plátanos, 1,70 €. ¿Cuántos céntimos le costarán una manzana, una pera y un plátano?

**A)** 77 **B)** 78 **C)** 79 **D)** 80 **E)** 81

**21** Ana, Bea, Carlos, Dani y Elena juegan a un juego que consiste en sacar dos cartas de entre diez. En cada carta hay un número del 1 al 10 y gana el que sume más. Si Ana suma 4, Bea 11, Carlos 12; Dani 13 y Elena 15, ¿quién ha sacado la carta con el número 9?

**A)** No se puede saber **B)** Bea **C)** Carlos **D)** Dani **E)** Elena

**22** ¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar cuyos vértices sean puntos de esta cuadrícula?



**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

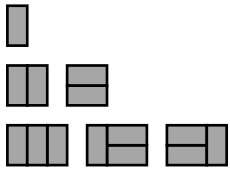
**23** El diagrama de sectores representa la cantidad de helados de cada sabor que se vendieron en una heladería el año pasado. Si se vendieron sesenta helados de fresa y la misma cantidad de helados de vainilla que de chocolate, ¿cuántos helados de chocolate se vendieron?

**A)** 90 **B)** 99 **C)** 100 **D)** 120 **E)** 135

**24** Un libro tiene doscientas cincuenta y seis páginas. En cada página hay, por término medio, treinta y tres líneas y en cada línea, unas nueve palabras. ¿Cuál de estas cifras aproxima mejor el número de palabras que hay en el libro?

**A)** 64 000 **B)** 68 000 **C)** 72 000 **D)** 76 000 **E)** 80 000

**25** Si queremos construir una pared de dos centímetros de alto con ladrillos que miden 2 cm × 1 cm, podemos hacerlo de distintas maneras según el largo de la pared. Si queremos que sea de 1 cm de largo, solo podemos hacerlo de una forma. Si la queremos hacer de 2 cm de largo, tenemos dos opciones. ¿Cuántas maneras hay de hacer un muro de 6 centímetros de largo?



**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 9 de abril de 2011**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

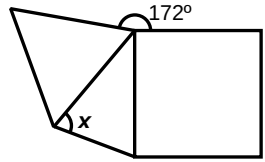
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** Sobre los lados iguales de un triángulo isósceles hemos dibujado un triángulo equilátero y un cuadrado, como se aprecia en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?




**A)** 38º **B)** 42º **C)** 68º **D)** 71º **E)** 72º

**2** Al pobre Jacinto siempre se le olvidaba atar la vaca y su padre inventó este acertijo para que no le volviera a ocurrir. Si letras diferentes representan números diferentes, ¿qué número corresponde a la letra **E** en esta resta?

$$\begin{array}{r} A\ M\ A\ R \\ -\quad\ R\ A \\ \hline R\ E\ S \end{array}$$

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

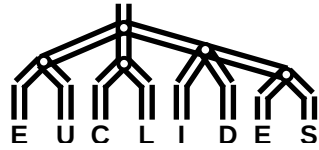
**3** Lucía se encarga de la iluminación de la obra de teatro. Tienen tres focos alineados y cada uno de ellos puede dar luz roja, verde o azul. Si ninguno puede estar apagado y además, dos focos contiguos no pueden lucir el mismo color, ¿de cuántas maneras diferentes pueden iluminar la obra?

**A)** 12 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 27

**4** Laura elige un número y suma los diez resultados de su tabla de multiplicar. Patricia suma los diez resultados de la tabla de multiplicar del número siguiente al de Laura. ¿Cuál es la diferencia entre el resultado de Patricia y el de Laura?

**A)** 10 **B)** 55 **C)** 100 **D)** Cada vez dará una resta distinta **E)** No se puede saber si no conocemos el número de Laura

**5** He diseñado la bonita fuente EUCLIDES de tal manera que el agua que llega a un nudo se reparte equitativamente por las tuberías que parten de él. Si una mañana entran 108 litros de agua por el canalón superior, ¿cuántos litros llegarán a la **S** de EUCLIDES?




**A)** 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 18 **E)** 27

**6** Raúl ha cogido tres números $p$, $q$, $r$ y con ellos ha realizado esta cuenta: $p - (q - r)$, obteniendo como resultado un número secreto. Después ha aumentado $p$ en 7 unidades; ha disminuido $q$ en 3 unidades y ha aumentado $r$ en 2 unidades. Entonces, el nuevo número secreto…

**A)** Aumenta en 12 **B)** Aumenta en 2 **C)** Disminuye en 2
**D)** Aumenta en 6 **E)** Aumenta en 8

**7** En una gran caja hay 1000 garbanzos, 200 lentejas y 360 guisantes. El afamado mago Hortalizo convierte, en cada golpe de tambor, tres garbanzos en dos lentejas y un guisante. ¿En qué golpe de tambor conseguirá Hortalizo tener el mismo número de cada una de las tres legumbres?

**A)** 150 **B)** 155 **C)** 156 **D)** 158 **E)** 160

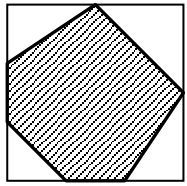
**8** Según don Retorcido el número 2011 es *veinte-once* porque sus dos primeras cifras forman un múltiplo de 20 y sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 11. También es *veinte-once* el número 4000 porque sus dos primeras cifras forman un múltiplo de 20 y sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 11.¿Cuántos números de cuatro cifras son *veinte-once*?

**A)** 18 **B)** 27 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 40

**9** Dos hormigas caminan alrededor del reloj de la torre de la iglesia, en sentidos contrarios y aunque a velocidades diferentes, cada una mantiene su ritmo constantemente. La primera vez que se encontraron fue en la marca de las 3; y la segunda vez en la marca de las 10. Cuando se volvieron a ver dijeron: "pararemos cuando nos hayamos cruzado 100 veces en total". ¿En qué marca se pararon?

**A)** 12 **B)** 11 **C)** 9 **D)** 6 **E)** 4

**10** Hemos hecho algunas marcas en los lados de un cuadrado de área 1. Unas dividen el lado en dos partes iguales y otras en tres partes iguales. Después, aprovechando estas marcas, hemos dibujado un hexágono como ves en la figura. ¿Qué área tiene este hexágono?



**A)** $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{21}{36}$ **C)** $\frac{47}{72}$ **D)** $\frac{15}{36}$
**E)** $\frac{31}{72}$

**11** A Francisco solo le gustan los rectángulos cuyos lados miden un número entero de centímetros. Con esta condición, se ha propuesto dibujar todos los rectángulos de perímetro 890 cm. ¿Cuántos rectángulos distintos tendrá que dibujar Francisco?

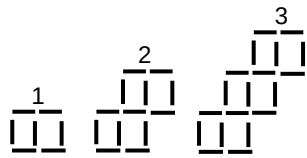
**A)** 221 **B)** 222 **C)** 223 **D)** 889 **E)** 890

**12** Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

**UNA:** Vaqueros y corbata **DOS:** Vaqueros sin corbata
**TRES:** Sin vaqueros y con corbata **CUATRO:** Sin vaqueros y sin corbata

**A)** La UNA y la DOS **B)** Solo la DOS **C)** Solo la TRES
**D)** La TRES y la CUATRO **E)** La DOS y la TRES

**13** Juan Jesús está construyendo una gran escalera con palitos y en el dibujo se observa cómo está levantando la escalera. ¿Cuántos palitos necesitará Juan Jesús para formar una escalera con 148 escalones?




**A)** 1036 **B)** 900 **C)** 889 **D)** 872 **E)** 836

**14** Si $A=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2}$ y $B=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{3}$, ¿cuánto vale $\dfrac{A-B}{A\cdot B}$?

**A)** 3 **B)** $\dfrac{13}{6}$ **C)** 2 **D)** $\dfrac{1}{6}$ **E)** $\dfrac{1}{18}$

**15** Cuatro parejas de novios fueron a comprar pasteles para una fiesta. Ana compró tres pasteles, Bárbara compró dos, Cati compró cuatro y Daniela solo uno. Eugenio compró tantos pasteles como su novia, Fermín compró el doble que la suya, Gerardo el triple que la suya y Héctor el cuádruple que la suya. Sabiendo que en total compraron 32 pasteles, ¿cuál de estas parejas es una pareja de novios?

**A)** Cati y Héctor **B)** Cati y Gerardo **C)** Ana y Fermín
**D)** Ana y Eugenio **E)** Daniela y Héctor

**16** Ana Sarai ha cogido una rabieta y ha sacado unas cuantas hojas centrales del periódico. En concreto se ha llevado todas las páginas que van desde la 11 hasta la 26. ¿Cuántas páginas tenía el periódico?

**A)** 36 **B)** 38 **C)** 34 **D)** 40 **E)** 52

**17** TRES anillos, DOS pendientes y CINCO collares pesan lo mismo que DOS anillos, TRES pendientes y TRES collares. UN anillo, DOS pendientes y TRES collares pesan lo mismo que DOS anillos, DOS pendientes y UN collar. Si ordenas los pesos de un anillo (a), un pendiente (p) y un collar (c) en orden creciente, ¿cuál es la ordenación correcta?

**A)** $c < p < a$ **B)** $p < c < a$ **C)** $c < a < p$ **D)** $p < a < c$ **E)** $a < c < p$

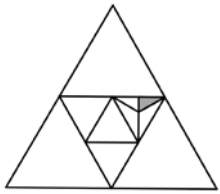
**18** Raúl se ha inventado este sencillo programa: introduce un número entero positivo, lo multiplica por su siguiente y halla la mitad de este producto. Si el resultado es par le suma cuatro y si es impar le resta cuatro. Al terminar este proceso, ¿cuál de estos números no puede ser el resultado final?

**A)** 10 **B)** 11 **C)** 41 **D)** 46 **E)** 51

**19** Los siete enanitos han ido a un karaoke para celebrar un concurso de dúos entre ellos. Para ser justos, deciden formar todas las parejas posibles y que cada una de ellas cante una canción diferente. ¿Cuántas canciones necesitan para celebrar el concurso?

**A)** 13 **B)** 21 **C)** 41 **D)** 42 **E)** 49

**20** Hemos conseguido un retrato de la cara de don Retorcido y parece que os está guiñando un ojo. ¿Qué fracción de su cara representa la parte sombreada?



**A)** $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{48}$ **C)** $\frac{1}{64}$ **D)** $\frac{1}{72}$ **E)** $\frac{1}{96}$

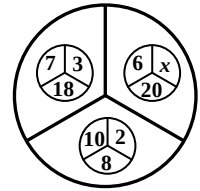
**21** Queremos dividir un rectángulo en 108 partes iguales. ¿Cuál es el menor número de rectas paralelas a los lados del rectángulo que hay que dibujar para conseguirlo?

**A)** 23 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 54 **E)** 24

**22** Dados tres números, $a$, $b$, $c$, hemos inventado la operación tricírculo.

$= \boldsymbol{a \cdot b - c}$

Estudia el gran tricírculo que te mostramos y averigua cuál debe ser el valor de la $x$ para que el gran tricírculo valga 0.




**A)** 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

**23** Una pirámide tiene 28 aristas. ¿Cuántos vértices tiene esa pirámide?

**A)** 28 **B)** 27 **C)** 15 **D)** 14 **E)** No existe una pirámide con 28 aristas

**24** ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número capicúa, ambos de cuatro cifras, con la particularidad de que los dos tienen que ser múltiplos de cuatro?

**A)** 6776 **B)** 6666 **C)** 8888 **D)** 4444 **E)** 8448

**25** Ya estás a punto de terminar el decimoquinto Concurso de Primavera y sabes que se celebran dos fases. Cada una de las fases tiene cuatro niveles diferentes y cada nivel consta de veinticinco problemas. Un robot se ha propuesto resolver todos los problemas de los quince concursos y ha calculado que emplea una media de cinco minutos por problema. ¿Cuántos días tardará en completar su reto?

**A)** Entre 6 y 7 **B)** Entre 7 y 8 **C)** Entre 8 y 9 **D)** Entre 9 y 10 **E)** Entre 10 y 11

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 9 de abril de 2011**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** Aumentamos en un 10% una de las medidas de un rectángulo y disminuimos en un 10% la otra. ¿Qué porcentaje del área original es la nueva área?

**A)** 90% **B)** 99% **C)** 100% **D)** 101% **E)** 110%

**2** ¿Cuál es la probabilidad de que un cuadrado del ajedrez, escogido al azar entre los 64, no toque a ningún lado del tablero?

**A)** $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{7}{16}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{49}{64}$

**3** Con las cifras 1, 2, 3 y 5, ¿cuántos números de tres cifras distintas hay que sean múltiplos de tres?

**A)** 9 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

**4** Los enteros positivos $x$ e $y$ son los más pequeños que verifican que $360 \cdot x$ es un cuadrado perfecto y $360 \cdot y$ es un cubo perfecto. ¿Cuál es la suma de $x$ e $y$?

**A)** 80 **B)** 85 **C)** 115 **D)** 165 **E)** 610

**5** Antonio y David están jugando con su calculadora. Tienen delante de ellos una tabla de 3 000 números, ordenados en 40 filas y 75 columnas. Antonio suma los de cada fila, siendo $A$ la media de sus cuarenta sumas. Beatriz suma los de cada columna, siendo $B$ la media de sus 75 sumas. ¿Cuál es el valor de $\frac{A}{B}$?

**A)** $\frac{64}{225}$ **B)** $\frac{8}{15}$ **C)** 1 **D)** $\frac{15}{8}$ **E)** $\frac{225}{64}$

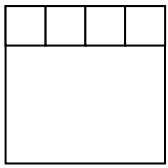
**6** Las letras $A$, $B$, $C$ y $D$ representan cifras distintas. Si se verifica que

$$\begin{array}{r} A\ B \\ +\ C\ A \\ \hline D\ A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} A\ B \\ -\ C\ A \\ \hline A \end{array}$$

¿qué cifra representa la letra $D$?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** **9**

**7** Colocamos cuatro cuadrados idénticos y un rectángulo para formar un cuadrado como se muestra en la figura. ¿Cuál es el cociente entre el lado mayor y el menor del rectángulo?



**A)** $\frac{5}{4}$ **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 2 **E)** 3

**8** Si el área de un círculo cuya circunferencia mide $24\pi$ es $t\pi$, ¿cuál es el valor de $t$?

**A)** 6 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 36 **E)** 144

**9** Cada día que Ingo colabora en las tareas domésticas recibe tantos euros como años tiene. Durante un periodo de 6 meses trabajó 50 días y ganó 630 €. ¿Qué edad tenía al final del sexto mes?

**A)** 9 años **B)** 11 años **C)** 12 años **D)** 13 años **E)** 14 años

**10** Si $x$ es un número capicúa de tres cifras y $(x + 32)$ es otro número capicúa de cuatro cifras, ¿cuál es la suma de las cifras de $x$?

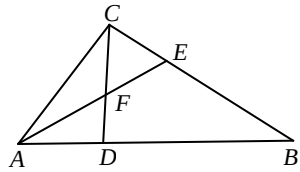
**A)** 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

**11** Alicia conduce a una velocidad media de 80 km/h y luego se detiene 20 minutos para echar gasolina y comprar unas galletas. Después de la parada conduce otro rato a una media de 100 km/h. Al final resulta que ha hecho 250 km en un total de 3 horas, contando la parada que hizo. ¿Qué ecuación deberías utilizar para obtener el tiempo $t$, en horas, que condujo antes de la parada?

**A)** $80t + 100\left(\frac{8}{3} - t\right) = 250$ **B)** $80t = 250$ **C)** $100t = 250$

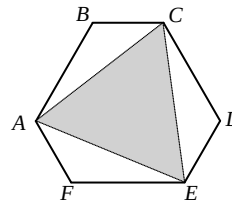
**D)** $90t = 250$ **E)** $80\left(\frac{8}{3} - t\right) + 100t = 250$

**12** En el triángulo $ABC$, la longitud del lado $AB$ es doble que la del lado $AC$. Sean $D$ y $E$ puntos de los lados $AB$ y $BC$ respectivamente, para los que $B\hat{A}E = A\hat{C}D$ y sea $F$ el punto de corte de los segmentos $AE$ y $CD$. Si el triángulo $CFE$ es equilátero, ¿cuánto mide el ángulo $A\hat{C}B$? (El dibujo es orientativo)




**A)** 60º **B)** 75º **C)** 90º **D)** 105º **E)** 120º

**13** Los ángulos del hexágono *ABCDEF* son todos iguales y los lados verifican que *AB* = *CD* = *EF* = 1 y *BC* = *DE* = *FA* = *r*. Si el área del triángulo *ACE* es el 70% del área del hexágono, ¿cuál es la suma de todos los posibles valores de *r*?




**A)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{17}{4}$ **E)** 6

**14** Un mes de 31 días tienen el mismo número de lunes que de miércoles. ¿Cuántos de los siete días de la semana podrían ser el primer día de ese mes?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**15** Las longitudes de los lados de un triángulo son 10, 10 y 12. Un rectángulo de anchura 4 tiene la misma área que el triángulo. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?

**A)** 16 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 36

**16** La entrada para un recital de rock en el instituto cuesta *x* €, siendo *x* un número entero. Un grupo de estudiantes de 3º asistió al recital y pagaron entre todos 48 €, y un grupo de estudiantes de 4º pagaron entre todos 64 €. ¿Cuántos valores de *x* puede haber?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**17** Nico es un estudiante de 3º con mucha suerte. Un día le propuso su profe que sustituyera las letras *a, b, c, d* y *e* en la expresión $a-(b-(c-(d+e)))$ por los números que él quisiera y que obtuviera el resultado. Nico olvidó los paréntesis, sumó y restó como si no los hubiera pero, por casualidad, el resultado obtenido coincidió con el correcto. Si las letras *a, b, c* y *d* las sustituyó por 1, 2, 3 y 4 respectivamente, ¿por qué número sustituyó la letra *e*?

**A)** –5 **B)** –3 **C)**0 **D)** 3 **E)** 5

**18** Miguel conduce una vespa a 45 km/h cuando no llueve y a 30 km/h cuando llueve. Hoy, hacía sol por la mañana y llovía por la tarde e hizo un total de 24 km en 40 minutos. ¿Cuántos minutos condujo por la tarde?

**A)** 18 **B)** 21 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 30

**19** A comienzo de curso María preguntó a sus estudiantes "*¿Os gustan las Mates?*". La mitad de los estudiantes respondieron sí y la otra mitad no. A final de curso, ante la misma pregunta, el 70% respondió sí y el 30% no. Si hubo un $x$% de estudiantes que dio respuesta diferente al principio y al final, ¿cuál es la diferencia entre el máximo y el mínimo de todos los valores posibles de $x$?

**A)** 0 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 60 **E)** 80

**20** ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación $x = \left|2x - \left|60 - 2x\right|\right|$ ?

**A)** 32 **B)** 60 **C)** 92 **D)** 120 **E)** 124

**21** Un cuadrado de lado 1 y un círculo de radio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tienen el mismo centro. ¿Cuál es el valor del área de la superficie interior al círculo pero exterior al cuadrado?

**A)** $\frac{\pi}{3} - 1$ **B)** $\frac{2\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{\pi}{18}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{25}{90}$

**22** En Matematilandia se ha organizado un concurso de Matemáticas y participan ¡todos los centros de esa ciudad! Cada uno envía un equipo de tres estudiantes y en la primera edición del concurso todos los estudiantes obtuvieron diferente puntuación. La puntuación de Alicia fue la mediana de las puntuaciones y fue la más alta de la puntuaciones de su equipo. Sus compañeras de equipo Beatriz y Carolina quedaron en los puestos 37º y 64º respectivamente. ¿Cuántos centros hay en Matematilandia?

**A)** 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 26

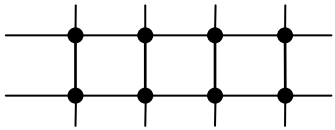
**23** Elegimos al azar un capicúa entre 1000 y 10000. ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 7?

**A)** $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{5}$

**24** Si $x < 0$, ¿cuál de los siguientes números es positivo?

**A)** $\dfrac{x}{|x|}$ **B)** $-x^2$ **C)** $-2^x$ **D)** $-x^{-1}(1-x)$ **E)** $\sqrt[3]{x}$

**25** ¿Cuántos triángulos distintos tienen sus vértices en tres de los ocho vértices de esta cuadrícula?



**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 9 de abril de 2011**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***2 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** Cuando dividimos los números 272 758 y 273 437 por un determinado número *N*, de dos cifras, obtenemos como restos 13 y 17 respectivamente. La suma de los dígitos de *N* es:

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**2** ¿Cuál es el valor de la suma $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+.....+\frac{99}{100!}$ ?

**A)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{100!}$ **B)** $1-\frac{1}{100!}$ **C)** $1-\frac{1}{99!}$ **D)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{99!}$ **E)** 1

**3** Si $\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}$, *x* es igual a:

**A)** $\sqrt{2}-2$ **B)** $\sqrt{2}+2$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{2}+1$ **E)** $\sqrt{2}-1$

**4** La suma y el producto de dos números coinciden. Si uno de ellos es *x*, ¿cuál es el valor de la suma?

**A)** $\frac{x^2+1}{x-1}$ **B)** $\frac{x^2+1}{x+1}$ **C)** $\frac{x^2}{x+1}$ **D)** $\frac{x^2}{x-1}$ **E)** $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

**5** ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0$ ?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**6** Supón que sustituimos *a*, *b* y *c* por enteros positivos (no necesariamente distintos). De las siguientes expresiones, ¿cuál no puede representar al número 24?

**A)** $ab^3$ **B)** $a^2b^3$ **C)** $a^cb^c$ **D)** $ab^2c^3$ **E)** $a^bb^cc^a$

**7** Si *x*, *y*, *z* son números reales arbitrarios, el menor valor posible de la expresión $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(y-x)^2+4}+\sqrt{(z-y)^2+1}+\sqrt{(10-z)^2+9}$ es:

**A)** 7 **B)** 13 **C)** $4+\sqrt{109}$ **D)** $3+\sqrt{2}+\sqrt{90}$ **E)** $\sqrt{149}$

**8** Hoy es el cumpleaños de Alicia, Beatriz y Carlos. La suma de sus edades es 23 y el producto de sus edades supera en 113 al producto de sus edades hace justamente un año. ¿Cuál es la suma de los cuadrados de sus edades?

**A)** 209 **B)** 185 **C)** 189 **D)** 241 **E)** 259

**9** Si $f(11)=11$ y $f(n+3)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

**A)** 11 **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $-\dfrac{6}{5}$ **D)** $-\dfrac{1}{11}$ **E)** 2011

**10** La función $y = f(x)$ verifica que $f(f(x)) = 6x - 2011$ para cualquier número real $x$. Si el número $t$ verifica la igualdad $f(t) = 6t - 2011$, el valor de $t$ es:

**A)** $\dfrac{2011}{5}$ **B)** 0 **C)** 2011 **D)** $\dfrac{2011}{2}$ **E)** Nada de lo anterior

**11** En cierta sucesión, la suma $S_n$ de los $n$ primeros términos viene dada por $S_n = n^3+3$. El décimo término de la sucesión es:

**A)** 1000 **B)** 1003 **C)** 271 **D)** 274 **E)** 997

**12** Cada signo ♣ en la expresión 1♣2♣3♣4♣5♣6♣7♣8♣9♣10 se sustituye por un signo "más" (+) o por un signo "por" (×) obteniéndose una expresión aritmética cuyo mayor valor posible es $N$. ¿Cuál es el menor divisor primo de $N$?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** Nada de lo anterior

**13** Sea $n$ el menor entero positivo que es divisible por 20, con $n^2$ cubo perfecto y además $n^3$ cuadrado perfecto. ¿Cuántas cifras tiene $n$?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**14** ¿Para qué valor de $x$ se verifica que

$$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x}+\log_2 x+\log_4 x^2+\log_8 x^3+\log_{16} x^4=40\,?$$

**A)** 8 **B)** 16 **C)** 32 **D)** 256 **E)** 1024

**15** En el triángulo *ABC* se verifica que $\cos(2A-B)+sen(A+B)=2$. Si el lado *AB* mide 4, ¿cuánto mide el lado *BC*?

**A)** $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 2 **D)** $2\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{3}$

**16** Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son *a*, 9, 3*a*–*b* y 3*a*+*b*. ¿Cuál es el número que ocupa el lugar 2011 en esta progresión?

**A)** 8041 **B)** 8043 **C)** 8045 **D)** 8047 **E)** 8049

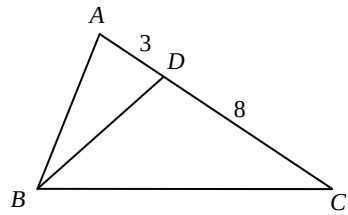
**17** Escribimos la solución de la ecuación $7^{x+7}=8^x$ como $x=\log_b 7^7$. ¿Cuál es el valor de *b*?

**A)** $\frac{7}{15}$ **B)** $\frac{7}{8}$ **C)** $\frac{8}{7}$ **D)** $\frac{15}{8}$ **E)** $\frac{15}{7}$

**18** ¿Para cuántos valores enteros de *k* resulta que las gráficas de $x^2+y^2=k^2$ y $xy=k$ no se cortan?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 8

**19** En el triángulo *ABC* de la figura, *BD* es la bisectriz del ángulo *B*. Si *AD* = 3, *DC* = 8 y las longitudes de todos los lados del triángulo vienen dadas por números enteros, ¿cuál es el menor valor posible para el perímetro del triángulo *ABC*?




**A)** 30 **B)** 33 **C)** 35 **D)** 36 **E)** 37

**20** Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara al lanzarla es menor que $\frac{1}{2}$. Si la probabilidad de obtener igual número de caras que de cruces al lanzarla 4 veces es $\frac{1}{6}$, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara?

**A)** $\frac{\sqrt{15}-3}{6}$ **B)** $\frac{6-\sqrt{6\sqrt{6}+2}}{12}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **D)** $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

**21** Sean $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$ enteros positivos tales que $a + b + c + d + e = 2011$ y sea $M$ la mayor de las sumas $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + e$. ¿Cuál es el menor valor posible para $M$?

**A)** 503 **B)** 671 **C)** 802 **D)** 803 **E)** 804

**22** En una progresión geométrica $(a_n)$ se verifica que $a_1 = \text{sen}x$, $a_2 = \cos x$ y $a_3 = \text{tg}x$ para algún número $x$. ¿Para qué valor de $n$ es $a_n = 1+\cos x$?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**23** ¿Cuántas ternas ordenadas $(x, y, z)$ de enteros no negativos menores que 20 verifican que hay justamente dos elementos distintos en el conjunto $\left\{i^x, (1+i)^y, z\right\}$, siendo $i^2 = -1$

**A)** 149 **B)** 205 **C)** 215 **D)** 225 **E)** 235

**24** En el interior de un cuadrado de lado 1 se escoge al azar un punto $P$. Sea $d(P)$ la distancia de $P$ al lado del cuadrado que se encuentre más cerca. La probabilidad de que $\frac{1}{5} \le d(P) \le \frac{1}{3}$ es:

**A)** $\frac{56}{225}$ **B)** $\frac{53}{225}$ **C)** $\frac{49}{225}$ **D)** $\frac{47}{225}$ **E)** Nada de lo anterior

**25** Escribimos en la pizarra los números 1, 2, 3,……, 100. ¿Cuántos hay que borrar, como poco, para que el producto de los que queden termine en 2?

**A)** 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **E** | 1 | **A** | 1 | **A** |
| 2 | **E** | 2 | **B** | 2 | **B** | 2 | **D** |
| 3 | **B** | 3 | **A** | 3 | **D** | 3 | **A** |
| 4 | **D** | 4 | **C** | 4 | **D** | 4 | **A** |
| 5 | **C** | 5 | **D** | 5 | **D** | 5 | **C** |
| 6 | **C** | 6 | **D** | 6 | **E** | 6 | **B** |
| 7 | **C** | 7 | **D** | 7 | **B** | 7 | **E** |
| 8 | **D** | 8 | **E** | 8 | **E** | 8 | **E** |
| 9 | **C** | 9 | **B** | 9 | **B** | 9 | **C** |
| 10 | **A** | 10 | **B** | 10 | **E** | 10 | **E** |
| 11 | **A** | 11 | **D** | 11 | **A** | 11 | **B** |
| 12 | **D** | 12 | **B** | 12 | **D** | 12 | **E** |
| 13 | **B** | 13 | **C** | 13 | **E** | 13 | **B** |
| 14 | **C** | 14 | **A** | 14 | **A** | 14 | **D** |
| 15 | **D** | 15 | **D** | 15 | **B** | 15 | **B** |
| 16 | **B** | 16 | **E** | 16 | **E** | 16 | **D** |
| 17 | **C** | 17 | **B** | 17 | **A** | 17 | **B** |
| 18 | **C** | 18 | **E** | 18 | **C** | 18 | **C** |
| 19 | **B** | 19 | **C** | 19 | **E** | 19 | **D** |
| 20 | **B** | 20 | **C** | 20 | **B** | 20 | **D** |
| 21 | **E** | 21 | **B** | 21 | **A** | 21 | **C** |
| 22 | **E** | 22 | **E** | 22 | **B** | 22 | **D** |
| 23 | **A** | 23 | **C** | 23 | **D** | 23 | **B** |
| 24 | **D** | 24 | **C** | 24 | **C** | 24 | **C** |
| 25 | **C** | 25 | **E** | 25 | **E** | 25 | **B** |

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **D** | 1 | **B** | 1 | **B** |
| 2 | **B** | 2 | **B** | 2 | **D** | 2 | **B** |
| 3 | **E** | 3 | **A** | 3 | **B** | 3 | **E** |
| 4 | **D** | 4 | **B** | 4 | **B** | 4 | **D** |
| 5 | **B** | 5 | **A** | 5 | **D** | 5 | **B** |
| 6 | **E** | 6 | **A** | 6 | **E** | 6 | **B** |
| 7 | **B** | 7 | **E** | 7 | **B** | 7 | **E** |
| 8 | **B** | 8 | **E** | 8 | **E** | 8 | **E** |
| 9 | **D** | 9 | **A** | 9 | **D** | 9 | **C** |
| 10 | **E** | 10 | **C** | 10 | **E** | 10 | **A** |
| 11 | **D** | 11 | **B** | 11 | **A** | 11 | **C** |
| 12 | **D** | 12 | **E** | 12 | **C** | 12 | **E** |
| 13 | **C** | 13 | **C** | 13 | **E** | 13 | **E** |
| 14 | **D** | 14 | **A** | 14 | **B** | 14 | **D** |
| 15 | **D** | 15 | **D** | 15 | **D** | 15 | **C** |
| 16 | **D** | 16 | **A** | 16 | **E** | 16 | **C** |
| 17 | **A** | 17 | **C** | 17 | **D** | 17 | **C** |
| 18 | **B** | 18 | **D** | 18 | **C** | 18 | **C** |
| 19 | **C** | 19 | **B** | 19 | **D** | 19 | **B** |
| 20 | **E** | 20 | **E** | 20 | **C** | 20 | **D** |
| 21 | **A** | 21 | **C** | 21 | **B** | 21 | **B** |
| 22 | **C** | 22 | **D** | 22 | **B** | 22 | **E** |
| 23 | **A** | 23 | **C** | 23 | **E** | 23 | **D** |
| 24 | **D** | 24 | **A** | 24 | **D** | 24 | **A** |
| 25 | **D** | 25 | **E** | 25 | **D** | 25 | **B** |

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel I*

**1. (D)** Entre el 2 y el 3 hay 10 divisiones. Por tanto, la flecha de la balanza marca 2,3.

**2. (E)** La primera cifra deberá ser forzosamente 1, 2, 3 o 4. Si es 1, la suma de las otras cifras será 3, y tres se puede obtener como suma de (3, 0, 0), (2, 1, 0) o (1, 1, 1): la primera forma proporciona 3 números, la segunda 6 y la tercera 1.
Si la primara cifra es un 2, la suma de las otras tres es 2, que puede obtenerse como suma de (2, 0, 0) o (1, 1, 0) y cada una de esas dos formas proporciona 3 números más. Si es 3, la suma de las otras cifras será 1, que solo pude obtenerse como suma de (1, 0, 0), lo que da 3 números más. Por último, si es un 4 las otras tres cifras deben ser cero, es decir únicamente proporciona un número.
Tenemos pues, $(3+6+1)+(3+3)+(3)+(1)=20$ números.

**3. (B)** Si el perímetro de la base es 18, la suma de los dos lados de la base será 9. Por otra parte, descomponiendo 42 en factores primos tenemos: $42=2\times3\times7$. Como la suma de los lados de la base es 9 y el producto de los lados de la base por la altura debe ser 42, los lados de la base serán necesariamente 2 y 7, y la altura 3.

**4. (D)** El número de caramelos será: (múltiplo de 35) + 17, pero como 35 es múltiplo de 7, también será igual a (múltiplo de 7) + 17 = (múltiplo de 7) + $2\times7+3=$
= (múltiplo de 7) + 3. Por lo tanto, si los reparte entre sus 7 primos, le sobrarán 3 caramelos.

**5. (C)** Si quito los tres puntos de una diagonal ya no quedan tres puntos alineados, pero si quito solo dos puntos –cualesquiera, tanto de una diagonal como de un lado- siempre quedan tres puntos alineados. Por consiguiente el mínimo número de puntos que hay que quitar es tres.

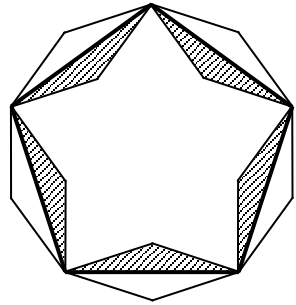
**6. (C)** $3{,}75\times0{,}28=1{,}0500=1{,}05$. Como consecuencia, difiere de 1 en cinco centésimas. Claramente es menor que la diferencia con cualquiera de los otros números. Luego el valor más próximo es 1.

**7. (C)** Dado que se come 5 paquetes en dos meses, en un mes consumirá $\frac{5}{2}$ paquetes y en 12 meses se comerá $12\times\frac{5}{2}=30$ paquetes de alfalfa.

**8. (D)** Según se desprende de la figura, el área del pentágono es igual a la de la estrella más la mitad de la diferencia entre la del decágono y la de la estrella, es decir:

$$16{,}5+\frac{25{,}95-16{,}06}{2}=\frac{16{,}05+25{,}95}{2}=\frac{42}{2}=21$$

Que como puede observarse es la media aritmética de las áreas de los dos decágonos, el estrellado y el convexo.



**9. (C)** Ana debe pagar 23 € y recibe 10, es decir, debe 13. Emilio debe recibir 23 € y paga 12, en consecuencia se le deben 11. De igual modo podemos ver que a Inés se le deben 7 €, que a Olivia se le deben 4 y que, finalmente, a Ulises se le deben 5.

Como Ana paga 4 € a Olivia y 5 a Ulises, estos dos quedan en paz. Dado que además paga 4 € a Emilio, a este todavía se le deben 7 y ella (Ana) queda en paz pues ha pagado en total 13 €, que es lo que debía. Tenemos ahora que todos están en paz, menos Inés que debe 7 € y Emilio, al que se le deben 7. Por tanto, el embrollo se arreglará si Inés paga 7 € a Emilio.

**10. (A)** Desarrollando nuestros "números" tenemos:

$$OMAR = O\times 1000 + M\times 100 + A\times 10 + R$$

$$AMOR = A\times 1000 + M\times 100 + O\times 10 + R$$

$$ROMA = R\times 1000 + O\times 100 + M\times 10 + A$$

Y efectuando la suma:

$$OMAR + AMOR + ROMA = O\times 1110 + A\times 1011 + R\times 1002 + M\times 210.$$

A la vista de este resultado, es claro que se obtendrá el valor máximo asignando a las letras los siguientes valores: $O = 9$, $A = 8$, $R = 3$ y $M = 1$.

Ahora, para obtener la suma máxima, basta sustituir dichos valores en la expresión de la suma: $9\times 1110 + 8\times 1011 + 3\times 1002 + 1\times 210 = 21\,294$.

Esta suma corresponde a 9183 + 8193 + 3918 = 21 294

**11. (A)** El ángulo desigual medirá: $180^\circ - 2\times 75^\circ = 30^\circ$.

**12.(D)** Designemos por $P$ al número de príncipes y por $C$ al número de caballeros. Queremos averiguar cuántas personas visitaron al rey, es decir, $P$ + C.
El número de cofres de oro, que es 34, se obtiene así: $3P + C = 34$.

Si cada uno de los visitantes hubiera traído el doble de cofres de plata, es decir, cada príncipe 2 y cada caballero 4, la cantidad de cofres de plata sería el doble. Esto lo podemos expresar así: $2P + 4C = 66$.
En este caso el total de cofres contando los de oro y los de plata sería:
$(3P + C) + (2P + 4C) = 34 + 66$, es decir, $5P + 5C = 100$. Dividiendo entre 5 se obtiene que $P + C = 20$.
Este resultado también puede obtenerse resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones, pero que no es propio de este nivel.

$$\left.\begin{array}{l} 3p+c=34 \\ p+2c=33 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p=7 \\ c=13 \end{array} \Rightarrow p+c=20$$

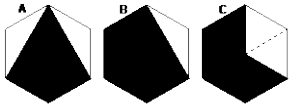
**13. (B)** En la hucha hay $2\times10+3\times5+6\times2+5\times1+7\times0{,}5+4\times0{,}2+23\times0{,}1=58{,}6$ euros más cierta cantidad de monedas de 5, de 2 y de 1 céntimo, haciendo un total de 59,08 euros.
Tenemos entonces que entre las monedas de 5, de 2 y de 1 céntimo suman $59{,}08-58{,}6=0{,}48$ euros $=48$ céntimos. Como 48 entre 5 da 9 de cociente y 3 de resto, se sigue que el máximo número de monedas de 5 céntimos que puede haber en la hucha es 9.

**14. (C)** Si el área del cuadrado mide 16 $cm^2$ su lado medirá 4 cm, lo que implica que el lado de cada cuadradito mide 1 cm. Solamente resta ahora contar el número de lados de los cuadraditos sombreados que tienen frontera con el exterior (16 – 4 =12) y con el interior (8). La respuesta es: 20 cm.

**15. (D)** De entrada, por definición, el ángulo de 120º pertenece al triángulo obtusángulo. El ángulo de 80º pertenece al triángulo acutángulo, pues no puede pertenecer al obtusángulo porque 120 + 80 es superior a 180. El ángulo de 10º pertenece al obtusángulo, pues de no ser así el otro triángulo sería rectángulo. Tenemos entonces que 120º, 10º y 60º son los ángulos del triángulo obtusángulo. Por tanto los del acutángulo serán: 80º, 55º y $180º-80º-55º=45º$. Entonces, 45º será el menor de sus ángulos.

**16. (B)** Como 92 es igual a la suma de las 10 notas dividido entre 10, la suma de todas las notas será 920. Uno de los niños tendrá la menor nota posible si los otros nueve tienen la mayor posible, es decir 100, lo que implica que el décimo niño habrá obtenido 20 puntos, la menor nota posible.

**17. (C)** En A, el área sombreada mide 48 $cm^2$ y en B el área sombreada más oscura también tiene un área de 48 $cm^2$, pues T y T´ son iguales. En C se ha



dividido esta última superficie en 4 triángulos iguales de área 48/4 = 12 $cm^2$ cada uno. Por tanto, el área del hexágono es $6 \times 12 = 72\ cm^2$.

**18.(C)** Primer método. (Planteando y resolviendo una ecuación de primer grado)

Si hay N pasteles, el mayor come $\frac{N}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{2}$ y quedan $N - \frac{N+1}{2} = \frac{N-1}{2}$.

El segundo come $\frac{N-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{4}$ y quedan $\frac{N-1}{2} - \frac{N+1}{4} = \frac{N-3}{4}$.

El tercero come $\frac{N-3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{N+1}{8}$ y quedan $\frac{N-3}{4} - \frac{N+1}{8} = \frac{N-7}{8}$.

Para el cuarto quedan $\frac{N-7}{8} = 5$, de donde $N = 47$. La suma de sus cifras es 11.

Segundo método.

Empezando por el final, es decir, por el cuarto nieto que se comió 5 pasteles. El tercero de los nietos se encontró con 11 pasteles. La mitad es 5,5 y como se comió medio más, resulta que se comió 6 y dejó 5.

Puesto que el segundo dejó 11 pasteles eso nos indica que se encontró con 23. Se comió la mitad de los pasteles (11,5) y medio más. En total 12 y dejó 11.

De manera análoga deducimos que cuando el primero empezó a comer había 47, se comió 23,5 + 0,5 = 24 y dejó 23.

Luego la respuesta es $N = 47$ y la suma de sus cifras 4 + 7 = 11.

**19. (B)** Si resto 26 menos 24, estoy restando lo que pagan 2 adultos más 3 niños a lo que pagan 3 adultos más 2 niños, es decir, obtengo lo que paga un adulto (3 – 2) menos lo que paga un niño (2 – 3). Por consiguiente, la diferencia es de 2 euros.

**20. (B)** Irene logró ocupar con sus lágrimas de 2 mililitros, por una parte, 1000 mililitros y por otra, 44 centilitros o, lo que es lo mismo, 440 mililitros. Un total de 1440 mililitros. Basta pues dividir 1440 entre 2 para encontrar los 720 lagrimones que ese día le cayeron.

**21. (E)** Como el rectángulo central tiene área doble del rectángulo que tiene encima (6 = 2×3), significa que la segunda fila de rectángulo es el doble de alta que la primera. Comparando después los rectángulos de la primera columna con los de la tercera, se deduce que $x$ es la mitad de 20. Es decir, $x$ = 10. Las áreas quedarán así

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 |
| 4 | 6 | 8 |
| 10 | 15 | 20 |

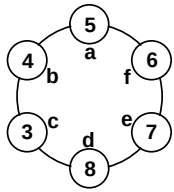
**22. (E)** Si escribimos 2420 como $2000+200+200+20$ y si en la numeración azteca, ese número, se representa como:

y, si hacemos lo mismo con 4020: $4020 = 2000+2000+20 =$
es inmediato identificar los símbolos
con 2000, 200 y 20 respectivamente.

Entonces, $4620 = 2000+2000+200+200+200+20$ se escribirá:
Por lo tanto, la solución es la E.

**23.(A)** Como el patrón que se repite, *ABCDE*, tiene 5 letras y la división de 2011 entre 5 da 402 de cociente y 1 de resto, vemos que tras 402 repeticiones se alcanza la 2010ª posición con la letra *E*. La siguiente letra, en la 2011ª posición, será la *A*.

**24. (D)** Llamando *a, b, c, d, e , f* a los números que han pensado, de manera correlativa, tenemos que: $\frac{a+c}{2}=4 \Rightarrow a+c=8$ ; análogamente $c + e = 12$; $e + a = 16$. Sumando las tres igualdades se obtiene: $2(a + c + e) = 36 \Rightarrow a + c + e = 18$. Si a esta igualdad la restamos la primera se obtiene $e = 10$ y como consecuencia $c = 2$, $a = 6$. Procediendo de manera análoga (aunque no hace falta ya que su suma es menor) se obtienen los otros valores, $b = 5$, $d = 1$, $f = 9$. El mayor valor es 10.




**25. (C)** Llamemos R al número de bolas rojas entre las 40 de la bolsa. Si $\frac{R}{40}$ fuese igual a $\frac{25}{100}$, entonces, R sería el número de bolas rojas tal que la probabilidad de extraer una bola roja entre las 40 fuese $\frac{25}{100}$, es decir, de cada 100 extracciones, lo más probable es que 25 fuesen de bola roja. Ahora bien, como $\frac{25}{100}=\frac{5}{20},=\frac{10}{40}$, tendremos que R = 10.

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

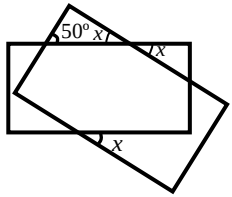
*Soluciones 1ª Fase Nivel II*

**1. (E)** Son todos iguales ya que la suma de todos los tramos horizontales es el lado mayor del rectángulo y la suma de todos los tramos verticales es el lado menor del rectángulo. Por lo tanto cada uno de los caminos es el semiperímetro del rectángulo.

**2. (B)** En cada salto se aproximan la una a la otra 5 unidades (2 + 3 = 5). Como están a 85 unidades de distancia, cada una de ellas tendrá que dar 85 : 5 = 17 brincos. Plis empieza en el cero y después de 17 brincos se encontrará en el 34.

**3. (A)** Quedan: 4 trozos, 4 trocitos, 4 mini-trocitos y 5 micro-trocitos. Total 17.

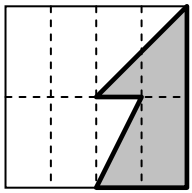
**4. (C)** Los ángulos marcados con $x$ son iguales entre sí por ser opuestos por el vértice y correspondientes entre paralelas. Además $x$ es complementario de 50º, por lo tanto $x = 40º$.




**5. (D)** La peor de las situaciones que se le pueden presentar a Rosa es tener 67 bolitas de cada uno de los 30 colores, es decir, sacar $67 \cdot 30 = 2010$. Al sacar una más, coincidirá necesariamente con uno de los 30 colores y habrá 68 de ese color. Por lo tanto necesita sacar 2011 bolitas para estar completamente segura.

**6. (D)** Llamando $a, b, c, d, e, f$ a los números que han pensado, de manera correlativa, tenemos que: $\frac{a+c}{2} = 4 \Rightarrow a + c = 8$; análogamente $c + e = 12$; $e + a = 16$. Sumando las tres igualdades se obtiene: $2(a + c + e) = 36 \Rightarrow a + c + e = 18$. Si a esta igualdad la restamos la primera se obtiene $e = 10$ y como consecuencia $c = 2$ $a = 6$. Procediendo de manera análoga (aunque no hace falta ya que su suma es menor) se obtienen los otros valores, $b = 5$, $d = 1$, $f = 9$. El mayor valor es 10.

**7. (D)** Descomponiendo la figura como se muestra, tenemos que el área sombreada es: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$



**8. (E)** La primera es cierta porque la suma de los 3 ángulos de un triángulo es 180º; y al ser uno de ellos de 90º, los otros dos tienen que sumar 90º. La segunda es cierta, pues si tomamos como base uno de los catetos, la altura será el otro cateto, y, como sabemos, el área de un triángulo es igual a la mitad de la base por la altura. Por otra parte, cada uno de los catetos es menor que la hipotenusa. La tercera es cierta porque cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60º, y los triángulos rectángulos, por definición, tienen que tener un ángulo de 90º. La cuarta, evidentemente, también es cierta. Conclusión: las cuatro afirmaciones son verdaderas.

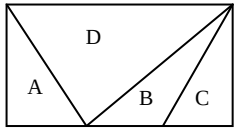
.

**9. (B)** Reduciendo a común denominador las tres fracciones se obtiene: $\frac{12}{60} < \frac{4n}{60} < \frac{55}{60}$

Por lo tanto $12 < 4n < 55 \Rightarrow 3 < n < 13{,}75$.
Los únicos valores enteros de *n* son: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y 13. Hay 10 valores posibles de *n.*

**10.(B)** En la primera hoja, la exterior, están las páginas 1-2-55-56. En la siguiente 3-4-53-54. Si nos fijamos, la suma de las dos páginas que hay en cada una de las caras de todas las hojas es 57. En la hoja que tiene la página 16 estarán: 16 y (57 – 16) = 41 y por la otra cara 15-42.

**11.(E)** El triángulo de área **D** tiene la mitad del área del rectángulo, ya que tiene la misma base y la misma altura. Por lo tanto **A + B + C** es la otra mitad y se concluye que **D = A + B + C.**



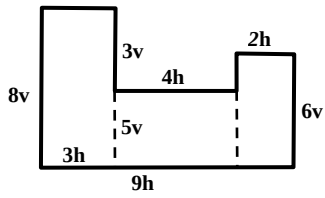

**12.(D)** $\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(60)\right]\right\} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}(20)\right] = \frac{1}{5}(10) = 2$ También $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 60 = \frac{1}{15}\cdot 60 = 2$.

**13.(C)** ◆◆◆◆ ↔ ◆◆(✖✚)(✖✚) ↔ (✖◆)(✖◆)✚✚ ↔ ●●✚✚ ↔ ✚✚✚✚✚
Luego 4 rombos equivalen a 5 signos ✚.

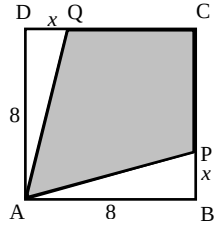
**14.(A)** Se ha descompuesto la figura inicial en tres rectángulos tal como se ve aquí:

Área = $3h\cdot 8v + 4h\cdot 5v + 2h\cdot 6v =$

$= 24h\cdot v + 20h\cdot v + 12h\cdot v = 56h\cdot v = 56\cdot 2 = 112$.



**15.(D)** Si llamamos *x* al segmento *BP*, podemos escribir:



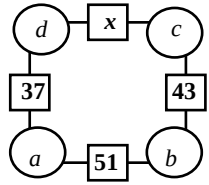

$$A_{\text{zona gris}} = 8^2 - 2\cdot\frac{8\cdot x}{2} = 3\cdot 2\cdot\frac{8\cdot x}{2}$$

$64 - 8x = 24x$; $64 = 24x + 8x$; $64 = 32x$; $x = 64 : 32 = 2$

**16.(E)** 2011 = múltiplo de 30 + múltiplo de 59 [I]

Como los múltiplos de 30 terminan en cero, para que la cifra de las unidades de la suma anterior sea 1, será necesario que el múltiplo de 59 termine en 1. Podría ser:
$59 \cdot 9 = 531$, $59 \cdot 19 = 1121$, $59 \cdot 29 = 1711$.
De [I]: múltiplo de 30 = 2011 – múltiplo de 59
Si probamos cada uno de los múltiplos de 59 anteriores, tendremos:
$2011 - 531 = 1480$, $2011 - 1121 = 890$, $2011 - 1711 = 300$.
El único resultado de los anteriores que es múltiplo de 30 es 300, luego don Retorcido tendrá que comprar $300 : 30 = 10$ cajas de 30 unidades y $1711 : 59 = 29$ cajas de 59 unidades, lo que hace un total de 39 cajas.

**17.(B)** Llamando *a*, *b*, *c*, *d* a los números, tal como aparece en la figura, podemos escribir:




$$\left.\begin{array}{l}(\text{I})\ \ a+b=51\\(\text{II})\ \ b+c=43\\(\text{III})\ c+d=x\\(\text{IV})\ d+a=37\end{array}\right\}\begin{array}{l}b=51-a\\c=43-b\end{array}\Bigg\}$$ Sustituyendo en (III) tenemos:

$$x=c+d=43-b+d=43-(51-a)+d=43-51+a+d==43-51+37=29.$$

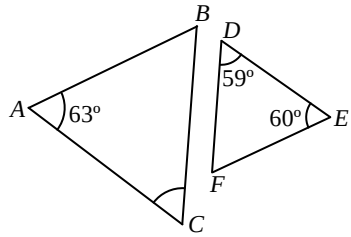
Otra forma de resolverlo: $(\text{I})-(\text{II})+(\text{III})-(\text{IV})$

$a+b-(b+c)+c+d-(d+a)=51-43+x-37\Rightarrow x=29.$

**18.(E)** Descomponiendo el número 16 555 en factores:

$16\,555 = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 43$, luego la diferencia entre las edades del hijo mayor y el menor es $11 - 5 = 6$ años.

**19.(C)** Calculamos los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{F}$:




$\hat{B} = 180º - (63º + 57º) = 60º$

$\hat{F} = 180º - (59º + 60º) = 61º$

En el triángulo *ABC*, el lado mayor es *BC*, pues a mayor ángulo se opone mayor lado.

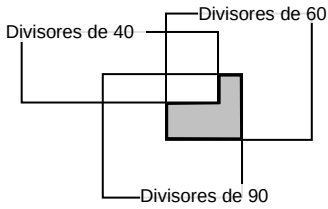
Se nos dice que *DF* es igual a *BC*. El lado mayor en el triángulo *DEF* es *DE*, luego éste es el mayor de todos los segmentos.

**20.(C)** Hay 6 triángulos que cumplen las condiciones del problema; sus lados miden: (1, 12, 12), (3, 11, 11), (5, 10, 10), (7, 9, 9), (9, 8, 8), (11, 7, 7).

**21.(B)** Si llamamos *x* al número de mochuelos e *y* al número de olivos, escribiremos:

$$\left.\begin{array}{l} x = y+1 \\ 2(y-1) = x \end{array}\right\} 2y-2 = y+1;\ 2y-y = 1+2;\ y = 3.$$

**22.(E)** En la zona sombreada estarán los números que son divisores de 60 y de 90 (a la vez) pero que no sean divisores de 40.
div. 60 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}
div. 90 = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90}
div. 40 = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}
Luego en la zona sombreada estarán los números 3, 6, 15 y 30.




**23.(C)** Método 1º.- Calculamos la raíz cuadrada entera de 123 456 y se obtiene 351 con un resto de 255.

Método 2º.- Elevamos al cuadrado las opciones propuestas como respuesta:
A) $134^2 = 17956$, B) $245^2 = 60025$, C) $350^2 = 122500$, D) $450^2 = 202500$,
E) No hace falta probarlo.

Método 3º.- Si nos fijamos en las dos primeras cifras del número dado, se observa que $3^2 < 12 < 4^2$, por lo que las únicas opciones posibles son 350 ó 450. Bastaría calcular $350^2 = 122\,500$ y $450^2 = 202\,500$.

**24.(C)** Como la **S** es la letra central de la palabra, se deduce inmediatamente que en la casilla central deberá ponerse una **S**. En las esquinas que son los extremos de las posibles líneas pondremos la O. Finalmente en las casillas que nos quedan, casillas centrales de cuatro líneas pondremos la **S**. Se obtiene 6 veces la palabra **OSO**.

| | | |
|---|---|---|
| **O** | **S** | **O** |
| **S** | **S** | **S** |
| **O** | **S** | **O** |

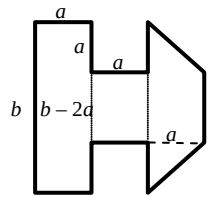
**25.(E)** Para obtener el mayor número entero que cumpla las condiciones del problema podemos escribir:

$$\frac{1+2+3+4+x}{5} = 20, \text{ y de aquí: } \frac{10+x}{5} = 20;\ 10+x = 20\cdot 5;\ 10+x = 100;$$

$$x = 100-10;\ x = 90.$$

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* III




**1. (A)** Podemos dividir la figura en dos rectángulos y un trapecio. El área buscada es

$$A = a \cdot b + a \cdot (b - 2a) + \frac{b + b - 2a}{2} \cdot a = 3a(b - a)\,.$$

**2. (B)** Aunque es muy fácil resolver el problema tanteando, podemos plantear una ecuación. Si llamamos $x$ al número de mochuelos, sabemos que hay $x - 1$ olivos.

Además, $x - 1 = \frac{x}{2} + 1$, luego $x = 3$.

**3. (D)** Como la zona B ocupa el doble de la zona C, su puntuación es la mitad de la de la zona C. Luego, al impactar en la zona C se obtienen 20 puntos.

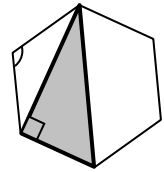
**4. (D)** Si llamamos $x$ al número de compañeros, por un lado sabemos que el precio del viaje es $14x + 4$ y, por el otro que es $16x - 6$. Luego, $14x + 4 = 16x - 6$. Así pues, hay $x = 5$ compañeros, el precio es $14 \cdot 5 + 4 = 74$ euros y cada uno debe aportar $74/5 = 14{,}80$ euros.

**5. (D)** Si los lados miden $2x$, $2x + 2$ y $2x + 4$, por un lado sabemos que $6x + 6 > 2011$ luego, $x > 334$. Así pues, el menor valor entero para $x$ es 335 y el perímetro será $6 \cdot 335 + 6 = 2016$ cm.

**6. (E)** Para que la media de cinco números sea 20, su suma debe ser $20 \cdot 5 = 100$.
El mayor valor del quinto número se alcanzará si los otros cuatro son lo más pequeños posibles, esto es, 1, 2, 3, 4 y, en ese caso, el quinto número valdría $100 - (1 + 2 + 3 + 4) = 90$.

**7. (B)** Por un lado se debe cumplir que $2x - 7 < 3x + 3$, luego $-10 < x$. Por otro, $3x + 3 < 5 - x$, luego $4x < 2$; $x < \frac{1}{2}$. Así pues, debe ser $-10 < x < \frac{1}{2}$.

**8. (E)** Todo consiste en darse cuenta de que el triángulo es rectángulo pues, como los ángulos de un hexágono regular miden 120º y el triángulo blanco es isósceles, sus otros dos ángulos miden 30º. Como el triángulo gris (30º, 60º, 90º) es la "mitad" de un equilátero, deducimos que su hipotenusa mide 8 cm. El otro cateto mide $x = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ y, por tanto, el perímetro es $12 + 4\sqrt{3}$ cm.



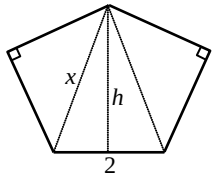
**9. (B)** Por el método del sándwich:

$$2 = \frac{2{\cdot}10^{-3}{\cdot}3{\cdot}10^{-1}}{3{\cdot}10^{-4}} < \frac{0{,}0025{\cdot}0{,}3051493}{0{,}00021476} < \frac{3{\cdot}10^{-3}{\cdot}4{\cdot}10^{-1}}{2{\cdot}10^{-4}} = 6$$

Luego el número está entre 2 y 6.

**10.(E)** Como el primero recibirá $\frac{x}{1+3+9+27} = \frac{x}{40}$ y, el resto, un múltiplo de ese número, la cantidad debe ser divisible entre 40 y solo 2760 lo es.

**11.(A)** Dividimos el pentágono en tres triángulos, dos de ellos rectángulos de área 2 dm$^2$. Para calcular el área del tercero, debemos aplicar Pitágoras dos veces: una para calcular el lado y la otra para la altura.




$x^2 = 2^2 + 2^2$; $x = 2\sqrt{2}$ . $h^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 1^2 = 7$ , $h = \sqrt{7}$ .

Así pues, el área del pentágono es

$$A = 2 + 2 + \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{2} = 4 + \sqrt{7} \text{ dm}^2.$$

**12.(D)** Lo primero que observamos es que $a$ debe ser menor que 4 para que el producto tenga tres cifras.

Si $a = 1$, $b$ puede ser 3, 4 o 5.

Si $b = 3$, entonces c = 1 no puede ser pues deben ser cifras distintas.

Si $b = 4$, entonces $c = 8$ y $148 \cdot 3 = 444$ y $a + b + c = 13$.

Animamos al estudiante a que verifique que el resto de los casos, $a = 2$ y $a = 3$, dan a lugar a casos que no verifican las condiciones del problema.

**13.(E)** Si las cifras menores son $a$ y $b$ (con $a < b$), la tercera debe ser $a + b$. Como son cifras distintas, $a$ y $b$ no pueden ser cero y $a + b$ debe ser menor que 10. Además, por cada combinación de cifras tendremos 6 números posibles. Por ejemplo, si $a = 1$, $b = 3$, $a + b = 4$ y tendremos los números 134, 143, 314, 341, 413, 431.

Para $a = 1$ habrá 7 valores de $b$: 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, lo que hacen $7 \cdot 6 = 42$ números distintos.

Para $a = 2$ hay 5 valores de $b$ y $5 \cdot 6 = 30$ números.

Para $a = 3$ hay 3 valores de $b$ y $3 \cdot 6 = 18$ números.

Y para $a = 4$ solo hay un valor de $b$ y 6 números.

En total hay 42 + 30 + 18 + 6 = 96 números que cumplen la condición.

**14.(A)** Si dividimos la sucesión en términos impares y términos pares, vemos que los términos impares forman una progresión aritmética de diferencia 6 comenzando con el 11: $a_1 = 11$, $a_3 = 17$, $a_5 = 23$, …. La fórmula general es $a_{2n-1} = 11 + 6(n - 1)$.

Como $497 = 2 \cdot 249 - 1$, $a_{497} = a_{2\cdot 249 - 1} = 11 + 6\cdot(249 - 1) = 1499$.

**15.(B)** Contemos los números que empiezan con 1: eso es equivalente a contar cuántos números de tres cifras se pueden formar con los números 1, 3, 5, 7 y 9; y eso da $5^3 = 125$ . Que empiecen con 3 hay otros 125 y 5111 es el primero de los que empiezan con 5 así que ocupa la posición 125 + 125 +1 = 251.

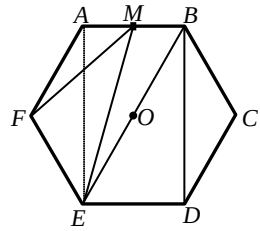
**16.(E)** En total se han reducido el 40% del 80% = 32% de los accidentes

**17.(A)** Lo mejor es operar en el numerador y factorizar el polinomio obtenido:

$$\frac{a(a^3+2a^2-a-2)+a^2-1}{a(a-1)} = \frac{a^4+2a^3-2a-1}{a(a-1)} = \frac{(a-1)(a^3+3a^2+3a+1)}{a(a-1)}$$

$$= \frac{a^3+3a^2+3a+1}{a} = \frac{(a+1)^3}{a}$$

**18.(C)** *BE* mide 4 cm (porque es igual a dos lados, podemos calcular *BD* aplicando Pitágoras como ya se hizo en el problema 8: $BD = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ cm.




Una vez visto esto, nuestro candidato es *EM*. Comprobémoslo:

Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo *AME*, donde $AE = BD = \sqrt{12}$ tenemos que

$EM = \sqrt{1^2 + \sqrt{12}^2} = \sqrt{13}$ cm.

Si te quedas con las ganas de saber cuánto mide *FM*, considera el triángulo rectángulo isósceles *FOM* y aplica Pitágoras, $FM = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ cm.

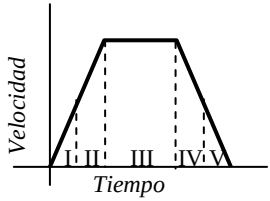
**19.(E)** La pendiente de la recta que corta a los ejes en $B(0, k)$ y $A(a, 0)$ es $-\frac{k}{a}$, que debe ser igual a $-\frac{1}{k}$. Es decir, $-\frac{k}{a}=-\frac{1}{k}$, de donde $a=k^2$.

**20.(B)** El número $n$ es el cuadrado de $\sqrt{n}$ que es un número entero. El siguiente cuadrado perfecto será el cuadrado de $\sqrt{n}+1$, esto es $\left(\sqrt{n}+1\right)^2=n+2\sqrt{n}+1$

**21.(A)** El primer coche le costó 9999:0,9 = 11110 euros y el segundo, 9999:1,1 = 9090 euros. Así pues, invirtió 11110 + 9090 = 20200 euros y obtuvo 2·9999 = 19998 euros de la venta por lo que perdió 20200 – 19998 = 202 euros.

**22.(B)** Si el radio se multiplica por 1,03, el área queda multiplica por $(1{,}03)^2 \cong 1{,}06$ así pues, el área aumenta un 6% aproximadamente.

**23.(D)** Dividimos la gráfica en 5 tramitos. Comenzamos con el tramos III. Como allí la velocidad es constante y no nula, la gráfica tiempo-espacio debe ser una recta no horizontal. Eso elimina las gráficas **A)**, **C)** y **E)**. Como en las gráficas **B)** y **D)** los tramos I y II son iguales, nos fijamos en los tramos IV y V: en el tramo IV la velocidad es mayor y, por tanto el espacio recorrido también debe ser mayor. Esto elimina la gráfica **B)** Así pues, la gráfica tiempo-espacio es la **D)**.




**24.(C)** Para ser múltiplo de 99 debe serlo de 9 y de 11. Si llamamos $n$ al número de cifras: para ser múltiplo de 9, la suma de sus cifras ($5n$) debe ser múltiplo de 9 por lo que $n$ tiene que ser múltiplo de 9. Por otro lado, un número formado por cifras iguales es múltiplo de 11 si tiene un número par de cifras, así pues $n$ debe ser par. El menor número par que es múltiplo de 9 es 18.

**25.(E)** **A)** es verdadera pues el ángulo $A\hat{C}B$ abarca media circunferencia.
**B)** es verdadera pues $AO$ y $CO$ son radios.
**C)** Es verdadera pues la base del triángulo es 2 cm y la altura es menor o igual que 1 cm.
**D)** Es verdadera pues las bases miden 1 cm y las alturas coinciden.
Así pues, por descarte, **E)** debe ser falsa. Comprobémoslo:

Como el triángulo *ABC* es rectángulo, sabemos que $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Y, sustituyendo $AB = AO + OB$,

$AB^2 = (AO + OB)^2 = AO^2 + 2AO \cdot OB + OB^2 = AC^2 + BC^2$, como $2AO \cdot OB = 2$, obtenemos la igualdad $AO^2 + OB^2 + 2 = AC^2 + BC^2$ **.**

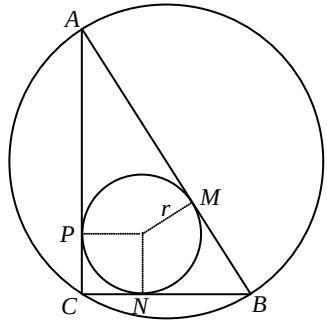
# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* IV

**1. (A)** Sea α la mitad del ángulo $\hat{B}$. En el triángulo *BDC*, se tiene que $\hat{C}+\alpha=180^o-68^o=112^o$, mientras que en el triángulo *BDA* se tiene que $\hat{A}+\alpha=180^o-112^o=68^o$, de donde se sigue que $\hat{C}-\hat{A}=112^o-68^o=44^o$.

**2. (D)** En total hay 72 (9×8) posibles resultados. De ellos hay 8 en los que la tarjeta de Beatriz es 1 y la de Antonio mayor o igual que 2; 6 en los que la tarjeta de Beatriz es 2 y la de Antonio mayor o igual que 4; 4 en los que la tarjeta de Beatriz es 3 y la de Antonio mayor o igual que 6 y por último 2 en los que la tarjeta de Beatriz es 4 y la de Antonio mayor o igual que 8. $p(A\geq 2B)=\dfrac{8+6+4+2}{72}=\dfrac{5}{18}$.

**3. (A)** Por ser el incentro el punto de corte de las bisectrices interiores del triángulo, los segmentos *AP* y *AM* son iguales, así como los segmentos *BN* y *BM*.
Como *AM* + *BM* = *D*, y *AP* = *b* – *r* así como *BN* = *a* – *r*, tenemos que *b* – *r* + *a* – *r* = *D* y por tanto *a* + *b* = *D* + 2*r* = *D* + *d*.




**4. (A)** $2^{4^x}<4^{2^x}\Leftrightarrow 2^{4^x}<2^{2^{x+1}}\Leftrightarrow 4^x<2^{x+1}\Leftrightarrow 2x<x+1\Leftrightarrow x<1$.

**5. (C)** Sea *x* el número del comienzo. Después de 99 repeticiones habremos obtenido el número $2^{99}x-2^{98}-2^{97}-\ldots-1=2^{99}x-\left(2^{99}-1\right)=2^{99}(x-1)+1$. Si este número es igual a $2^{100}+1$, $x-1=2$, y $x=3$.

**6. (B)** Sólo tienen un número impar de divisores los cuadrados perfectos. Y cuadrados perfectos formados por tres cifras consecutivas sólo hay dos: 324 y 576.

**7. (E)** El total de accidentes se reduce en un 40% del 80%, es decir, en un 32%.

**8. (E)** El perímetro del hexágono común a ambos triángulos coincide con la suma de los lados de los dos triángulos, es decir, $\frac{2011}{3}+\frac{1121}{3}=\frac{3132}{3}=1044$.

**9. (C)** Los cuadrados perfectos de dos cifras son 16, 25, 36, 49, 64 y 81. El mayor número que se puede formar con ellos es 81649, cuyas cifras suman 28.

**10. (E)** Como el lado del cuadrado es $5\sqrt{5}$ cm y cada uno de los dos lados de los cuadrados pequeños miden 5 cm, el lado corto de la L mide $5\sqrt{5}-10=5\left(\sqrt{5}-2\right)$.

**11. (B)** En el producto de los 2011 primeros primos sólo hay un 2 y un 5. Por tanto sólo hay un 0 en el final del producto.

**12. (E)** $AD=\frac{AC}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{AB}{\cos(\alpha)}}{\cos(\alpha)}=\frac{AB}{\cos^2(\alpha)}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$.

**13. (B)** . Ahora, como la suma de tres enteros sólo puede ser par si al menos uno $\left.\begin{array}{l}a+b+c=78\\ c-a-b=40\end{array}\right\}\Rightarrow 2c=118\Rightarrow c=59$ y $a+b=19$ de ellos es par, y son primos, el menor de los tres números, a, debe ser necesariamente 2, y entonces $b$ = 17, por lo que $c + 3b = 59 + 3 \cdot 17 = 110$.

**14. (D)** La función $f(x)=x\cdot sen(x)$ es la única de las cinco que es par, es decir, que cumple $f(-x)=f(x),\forall x\in\Re$, que es la condición para que resulte simétrica respecto del eje OY.

**15. (B)** Sea $n$ el número de chicas en bachillerato en mi centro el año pasado; el número de chicos era $30 + n$, y el número total de estudiantes era $30 + 2n$.
Así podemos plantear la ecuación: $1{,}05\cdot(30+n)+1{,}2n=1{,}1\cdot(30+2n)$, de donde se despeja $n$ = 30. El número de estudiantes que había el año pasado es 90, y el de este año es 99.

**16. (D)** El coeficiente $b$ coincide con la suma de las soluciones de la ecuación cambiada de signo, y el término independiente, 80, con el producto. Como 80 tiene diez divisores de los cuales tres parejas de ellos son pares y complementarios (2 y 40, 4 y 20, 8 y 10), hay tres posibles valores para $b$ (– 42, – 24 y –18).

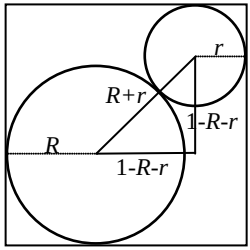
**17. (D)** $\left(4^4\right)^x = 8^8 \;\Rightarrow\; 2^{8x} = 2^{24} \;\Rightarrow\; 8x = 24 \;\Rightarrow\; x = 3$.

**18. (C)**

| | **Resuelven** | **No resuelven** | |
|---|---|---|---|
| **Chicas** | *y* | *x* | ***x + y*** |
| **Chicos** | *x* | | |
| | ***x + y*** | | |

**19. (D)** Obsérvese en la figura el triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden $1-(R+r)$ y cuya hipotenusa mide $R+r$.

Por tanto $R+r = [1-(R+r)]\sqrt{2}$, y despejando $R+r$, tenemos, $R+r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1} = 2-\sqrt{2}$




**20. (D)** Si *a* y *b* son las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 1 = 0$, entonces se cumple que $a^2 = 3a - 1$, $b^2 = 3b - 1$, $a + b = 3$ y $a \cdot b = 1$, de modo que

$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = 3(3a - 1 - 1 + 3b - 1) = 3(3 \cdot 3 - 3) = 18$.

**21. (C)** Si *n* es la edad de Ana, la edad de Pablo será múltiplo de la de Ana tantas veces como *n* sea divisor de 20, es decir, 6, que es el número de divisores de 20. Obsérvese que $\dfrac{n+20}{n} = 1 + \dfrac{20}{n}$.

**22. (D)** Si $f(g(x)) = x$ entonces $\dfrac{2g(x)}{3g(x)+4} = x \;\Rightarrow\; 2g(x) = 3xg(x) + 4x \;\Rightarrow\; g(x) = \dfrac{4x}{2-3x}$.

**23. (B)** La probabilidad de que gane cada uno de los tres se puede calcular sumando los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón es, para los tres, $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{18}$. En el caso de Ana el primer término es $\dfrac{1}{2}$, y la probabilidad de que gane es $\dfrac{\dfrac{1}{2}}{1 - \dfrac{5}{18}} = \dfrac{9}{13}$. En el caso de Beatriz, el primer término es $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$ y su

probabilidad es $\dfrac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{18}}=\dfrac{3}{13}$. Por último en el caso de Carlos, el primer término es $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$ y la probabilidad de que gane es $\dfrac{\frac{1}{18}}{1-\frac{5}{18}}=\dfrac{1}{13}$.

**24. (C)** Si las aristas del ortoedro forman una progresión geométrica de razón $q=2$, las aristas serán, $a, a\cdot q, a\cdot q^2$; es decir, $a, 2a, 4a$, y el volumen será $8a^3$, siendo $a$ entero. El resultado debe ser un cubo perfecto, y el único cubo perfecto que aparece entre las soluciones es $216 = 6^3$.

**25. (B)** Si $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=0$ entonces $yz+xz+xy=0$

Como $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$, tenemos que

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2=1^2=1$.

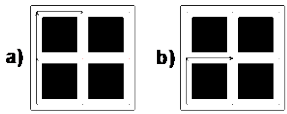
# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* I

**1. (D)** $60 \times 60 = (30 \times 2) \times (20 \times 3) = 30 \times 20 \times (2 \times 3)$.

**2. (B)** En las cajas tendrá $30 - 6 = 24$ cochecitos, de modo que en cada una de las 6 cajas habrá 4 cochecitos.

**3. (E)** Notemos en primer lugar que, por razones de simetría respecto a la diagonal *AB*, no es necesario calcular mas que la mitad de los recorridos. Nosotros elegiremos los que comienzan hacia arriba y, además tomaremos dos formas *fundamentales* de empezar:




a) Da origen a: 1) $\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow$ 2) $\uparrow\uparrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\uparrow$ y 3) $\uparrow\uparrow\rightarrow\downarrow\downarrow\rightarrow\uparrow\uparrow$

b) Da origen a: 4) $\uparrow\rightarrow\uparrow\rightarrow$ 5) $\uparrow\rightarrow\rightarrow\uparrow$ 6) $\uparrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\uparrow\uparrow$ 7) $\uparrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\uparrow\leftarrow\uparrow\rightarrow$ y 8) $\uparrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\uparrow\uparrow\rightarrow$

En consecuencia, Inés puede hacer 16 recorridos distintos.

**4. (D)** Los posibles resultados del segundo tiempo son:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Real Primavera | 3 | 2 | 1 | 0 |
| Atlético Matemático | 0 | 1 | 2 | 3 |

y como en el primer tiempo iban 1 a 0 a favor del Real, los posibles resultados finales son:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Real Primavera | 4 | 3 | 2 | 1 |
| Atlético Matemático | 0 | 1 | 2 | 3 |

Por lo que el Real no pudo ganar por un gol.

**5. (B)** Teniendo en cuenta que 3000 dividido entre 325 da 9 de cociente y 75 de resto, don Caracol emplea 9 días en recorrer 3 km menos 75 metros. Por tanto necesitará un día más para completar los 3000 m y como sale un lunes y emplea, en el recorrido, 9 días y parte del décimo, entonces llegará un miércoles.

**6. (E)** Si Ana tiene 3 butacas delante y 18 detrás, quiere decir que hay $3 + 1 + 18 = 22$ filas y como Juanito tiene 8 butacas aun lado y 11 al otro, tendremos $8 + 1 + 11 = 20$ columnas, es decir, habrá $20 \times 22 = 440$ butacas.

**7. (B)** Está claro que se conseguirá el contorno más corto uniendo los bloques por su lado más largo y logrando, además, la máxima longitud de contacto bloque con bloque. Dado que las respectivas longitudes de los bloques son 2, 3 y 4, tendremos que el máximo contorno que podremos ocultar, poniendo las piezas en contacto, es:
$2 \times 2 + 3 \times 2 = 10$.
Como, por otra parte, la suma total de los contornos es 6 + 8 + 10 = 24, tendremos que el contorno más corto es 24 – 10 = 14.

**8. (B)** Dado que ninguno nació el 29 de febrero, es posible, aunque poco probable, que todos hayan nacido el mismo día. En cuyo caso no felicitará a nadie 364 días que, obviamente, es el máximo número posible de no felicitaciones.

**9. (D)** Se trata de usar correctamente la jerarquía de las operaciones. La D) proporciona el menor valor (3).

**10. (E)** Contando triángulos y divisiones de las ruletas obtenemos, respectivamente, las siguientes probabilidades:
$\frac{6}{10}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}, \frac{3}{5}$ y $\frac{6}{8}$ o, lo que es igual: $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$.
Si una de ellas es la mayor, ésta debe ser forzosamente $\frac{3}{4}$, no obstante vamos a comprobarlo: es evidente que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{3}{5}$ y, reduciendo a común denominador $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ obtenemos: $\frac{9}{12}$ y $\frac{8}{12}$, por lo que, como era de esperar, la ruleta E da la máxima probabilidad.

**11. (D)** Contando los bailarines en el sentido numérico creciente, tenemos que entre el 3 y el 15 habrá $15-3-1=11$ bailarines. Simétricamente, entre el bailarín 15 y el 1 tendremos otros 11. Por tanto, en total tendremos $11+11+2=24$ bailarines.

**12.(D)** Como Paz consigue un 24 y $24=2\times2\times2\times3$, el resultado de los tres dados sólo puede ser o (2, 4, 3) ó ( 2, 2, 6) ó (4, 6, 1), con lo que Puri obtendría respectivamente: $2+4+3=9$ ó $2+2+6=10$ ó $4+6+1=11$. El mayor número que puede obtener Puri es 11.

**13. (C)** Si el conejo come $x$ zanahorias en un día, el caballo, en el mismo tiempo, debe comer $7x$, con lo que entre los dos comerán diariamente $8x$. Dado que entre ambos comen diariamente 56 zanahorias, el conejo comerá $\frac{56}{8} = 7$.

**14.(D)** El número de casos posibles es $6 \times 6 = 36$ y el de casos favorables $2 \times 1 = 2$. Por consiguiente, la probabilidad pedida será: $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

**15. (D)** Si cortamos tres barras en cuartos y cuatro en tercios, tendremos doce trozos iguales de un cuarto y otros doce de un tercio, con lo que el reparto entre doce es inmediato; un trozo de un cuarto y otro de un tercio para cada uno de los doce. El método correcto es el D.

**16. (D)** Nos dicen que el producto de dos números naturales, $a$ y $(a + b)$ da como resultado 12, pero 12 se puede poner como producto de dos números únicamente de las tres formas siguientes:

$1 \cdot (12) = 12$, $2 \cdot (6) = 12$ y $3 \cdot (4) = 12$, que escritos en la forma $a \cdot (a + b)$ quedan como:

$1 \cdot (1 + 11) = 12$, $2 \cdot (2 + 4) = 12$ y $3 \cdot (3 + 1) = 12$, es decir, solo con las tres parejas, (1, 11), (2, 4) y (3, 1), la operación, da como resultado 12.

**17. (A)** Como Marta tiene 12 cubos de cada color, para completar los 5 pisos superiores, dispone todavía de 4 cubos rojos, 5 azules y 6 verdes. Para el 4º piso tiene que emplear, necesariamente, 5 cubos azules, con lo que le quedan solo 4 rojos y 6 verdes. Para el 5º piso podría usar los 4 rojos, pero entonces no podría completar la construcción, así que debe utilizar 4 cubos verdes, y le quedan 4 rojos y 2 verdes. Para el 6º piso gastará forzosamente 3 rojos; para el 7º, los 2 verdes que le restan y, finalmente, terminará el 8º piso con el cubo rojo que le sobraba.

**18. (B)** Para empezar construimos una tabla con los datos del problema; ponemos SI cuando ambos hablan un idioma común y NO en caso contrario.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | | |
| B | **SI** | | | | | |
| C | **SI** | **SI** | | | | |
| D | **SI** | **SI** | **NO** | | | |
| E | **SI** | **NO** | **SI** | **SI** | | |
| F | **NO** | **SI** | **SI** | **SI** | **SI** | |
| | A | B | C | D | E | F |

La tabla proporciona todas las parejas posibles, de forma que puedan hablar entre si las dos personas de cada pareja.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (A, B) | | | | | |
| (A, C) | (B, C) | | | | |
| (A, D) | (B, D) | (C, E) | (D, E) | | |
| (A, E) | (B, F) | (C, F) | (D, F) | (E, F) | |

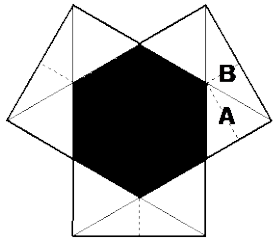
Ahora no queda sino rastrear sistemáticamente esta tabla de parejas, para separar a las seis personas, en tres grupos de dos, de todas las formas posibles.

*Comenzando con (A, B)*: (A, B), (C, E), (D, F) y (A, B), (C, F), (D, E)
*Con (A, C)*: (A, C), (B, D), (E, F) y (A, C), (B, F), (D, E)
*Con (A, D)*: (A, D), (B, C), (E, F) y (A, D), (B, F), (C, E)
*Con (A, E)*: (A, E), (B, C), (D, F) y (A, E), (B, D), (C, F)

Tenemos pues, ocho formas de separarlos.

Nota. Se puede llegar a esta solución, de forma menos explícita, teniendo en cuenta que uno de los ejecutivos, por ejemplo el A, sólo puede estar con otro de cuatro casos posibles; en este caso con B, C, D y E. En cada uno de estos casos quedan dos formas de agrupar los cuatro restantes. En total $4 \times 2 = 8$.

**19. (C)** Seccionando la figura como se ve en la imagen, observamos en primer lugar que los triángulos equiláteros, A, tienen la misma área que los triángulos isósceles, B. Contemos entonces los triángulos que forman la figura; 6 en el hexágono, más $3\times3 = 9$ en el exterior, lo que arroja 15 triángulos de igual área en total. Tenemos entonces que cada triángulo tiene un área de $\frac{40}{15}$ cm$^2$, por lo que el área del hexágono será: $\frac{40}{15}\times 6 = 16$ cm$^2$.



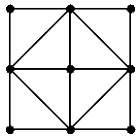

**20. (E)** Basta darse cuenta de que el señor Naranjo compra, en total, 4 manzanas, 4 peras y 4 plátanos y paga por ellos $154+170 = 324$ céntimos. Por lo tanto, por una pera, una manzana y un plátano, pagará $\frac{324}{4} = 81$ céntimos.

**21. (A)** Construyamos una tabla con todos los resultados y las distintas posibilidades de obtenerlos.

| | Suma | Posibilidades |
|---|---|---|
| Ana | 4 | 1+3 |
| Bea | 11 | 2+9, 3+8 … |
| Carlos | 12 | 3+9 … |
| Dani | 13 | 4+9… |
| Elena | 15 | 6+9… |

Vemos que, con estos resultados, cualquiera menos Ana ha podido sacar la carta con el 9 o, incluso, no sacarla nadie. En consecuencia, no se puede saber.

**22. (C)** En la figura se muestran los 6 cuadrados que se pueden dibujar: el cuadrado mayor, el formado con lo puntos medios de los lados del anterior y los cuatro pequeños.

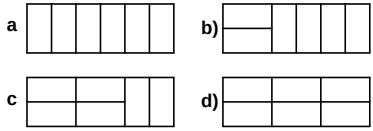


**23.(A)** Según muestra el diagrama, la cuarta parte de los helados eran de fresa, por lo que en total se vendieron 240 ($4 \times 60$). De los 180 restantes la mitad eran de vainilla y la otra mitad, 90, de chocolate.

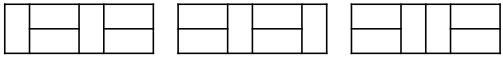
**24. (D)** El número de palabras del libro será aproximadamente: $256 \times 33 \times 9 = 76\,000$, de modo que la respuesta es la D.

**25. (D)** Comencemos por las cuatro formas básicas de conseguir un muro de 6 cm de largo:

a) todos los ladrillos verticales
b) 2 ladrillos horizontales
c) 4 ladrillos horizontales
d) los 6 ladrillos horizontales.




Vemos que a) y d) solo se pueden colocar de una forma. Sin embargo, b) se puede colocar de 5 formas distintas; intercalando los 2 ladrillos horizontales entre los verticales hasta llegar a colocarlos a la derecha del muro y, por último, c) se puede poner de 3 formas; intercalando, juntos, los 4 horizontales entre los 2 verticales hasta llegar a colocarlos a la derecha del muro y, de otras 3 más, si permitimos separar los ladrillos horizontales según la figura siguiente:

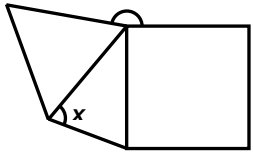


Por lo tanto, tenemos $2 + 5 + 6 = 13$ maneras distintas de hacer el muro.

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel II*

**1. (D)** El ángulo de 172º junto con uno de 60º, uno de 90º y el ángulo desigual de nuestro isósceles suma 360º. Así el ángulo desigual mide 38º, y por tanto 2x =180º-38º = 142º, siendo x = 71º.



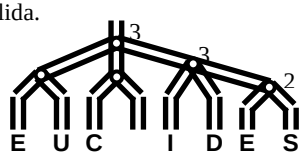

**2. (B)** Primero deducimos que **A** es 1, **M** es 0 y **R** es 9, ya que al quitar un número de dos cifras a uno de cuatro se obtiene uno de tres. Así **R** – **A** = 8 = **S** y E es el resultado de restar 11 menos 9.

$$\begin{array}{r} \mathbf{A\ M\ A\ R} \\ - \quad\ \mathbf{R\ A} \\ \hline \mathbf{R\ E\ S} \end{array}$$

**3. (A)** El primer foco puede dar luz de tres colores diferentes. Encendido el primero, el segundo puede tener dos colores solamente para no coincidir con aquel. Y el tercero también puede lucir de los dos colores que no sean el del segundo. Así tenemos tres comienzos que pueden bifurcarse en dos continuaciones y a su vez volverse a bifurcar en otras dos. Luego hay $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ "caminos".

**4. (B)** Laura suma los números $a$, $2a$, $3a$,..., $9a$, $10a$. Patricia los números $(a + 1)$, $2(a + 1)$, $3(a + 1)$,…, $9(a + 1)$, $10(a + 1)$. Las diferencias uno a uno son 1, 2, 3, …, 9, 10; ; luego la diferencia de las sumas es: $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = 55$.

**5. (A)** Asignamos a cada nudo relacionado con S el número de caños que salen de él. Después basta con ir dividiendo los caudales de entrada por esos números hasta llegar a la salida.




Así los 108 litros después del trayecto se habrán dividido por $(3 \cdot 3 \cdot 2)$.

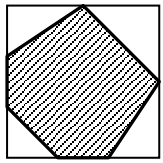
**6. (A)** El nuevo número secreto es $p + 7 – (q – 3 – (r + 2))$ que puede ser separado como $p – (q – r) + 7 + 3 + 2$, luego este número es 12 unidades mayor.

**7. (E)** El número de piezas leguminosas se mantiene constante con los redobles del tambor. Como hay 1560, cuando se igualen tendremos 520 de cada tipo. Pero los guisantes aumentan de uno en uno y empiezan en 360. Luego habrá que dar 160 golpes de tambor.

**8. (E)** Para ser *veinte-once* tenemos cuatro posibilidades para las dos primeras cifras (20, 40, 60 y 80) y diez para las dos últimas (los múltiplos de 11 de dos cifras, incluyendo al 00), luego en total hay $4 \cdot 10 = 40$ *veinte-onces.*

**9. (A)** En el tiempo que tardan en encontrarse, una hormiga (la que camina en el sentido de las agujas del reloj avanza siete "horas" y la otra retrocedido cinco. Después de 99 encuentros después del primero habrá avanzado 693 "horas" que divididas entre 12 dan un resto de 9. Así como en el primer encuentro estaba en las tres, en el centésimo estará en las doce

**10.(C)** Como el cuadrado tiene una unidad de área, el lado del cuadrado tiene una unidad de longitud. Buscaremos el área del hexágono como complementaria a la de los triángulos rectángulos exteriores a aquel. Así:

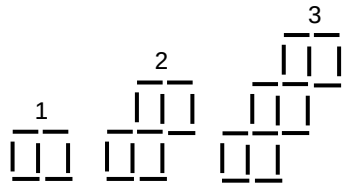


$$A = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{47}{72}.$$

**11.(B)** Francisco tendrá que dibujar rectángulos de lados $a$ y $b$, siendo $a + b = 445$. Para ello tendrá que dibujar desde que el lado menor valga 1 hasta que valga 222.

**12.(E)** Podemos parafrasear las decisiones de don Retorcido. Impar significa que lleva corbata y vaqueros, y par que no lleva corbata ni vaqueros. Es decir o las dos piezas a la vez o ninguna de las dos. Luego no son posibles las combinaciones DOS y TRES.

**13.(C)** Fijémonos que una escalera añade a la anterior un escalón que se traduce en seis palillos. Cuando tengamos 148 escalones habremos añadido $147 \cdot 6 = 882$ palillos a los 7 iniciales.



**14.(A)** Uno menos un tercio son dos tercios y la mitad es un tercio, luego A es un tercio. Uno menos un medio es un medio y la tercera parte un sexto. Así B es un sexto.

$$\frac{A-B}{A\cdot B}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{18}}=3$$

**15.(D)** Las chicas compraron 10 pasteles y por tanto los chicos 22. Se trata de emparejar los números del 1 al 4 con ellos mismos, calcular el producto de cada pareja y sumar los resultados para obtener suma 22. Habrá que tantear un poco. Por tamaño un 4 no puede emparejarse consigo mismo ni con el 3. Con, $4\cdot1+3\cdot3+2\cdot4+1\cdot2=23$ nos pasamos y con $4\cdot1+3\cdot2+2\cdot4+1\cdot3=21$ no llegamos. $4\cdot2+3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3=22$, y las parejas de novios son: Bárbara y Héctor, Cati y Fermín, Ana y Eugenio, Daniela y Gerardo (el poder resolver el problema conlleva la simetría de la solución).

**16.(A)** Al llevarse desde la 11 hasta la 26, se ha llevado las dos de en medio, que son las medias por defecto y exceso de 11 y 26; es decir 18 y 19. Luego la mitad del periódico es hasta la página 18, y tiene por tanto 36 hojas.

**17.(C)** Traducimos a ecuaciones las condiciones del problema y simplificamos:

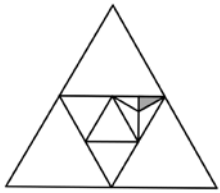
$$\begin{cases}3a+2p+5c=2a+3p+3c\\1a+2p+3c=2a+2p+1c\end{cases};\qquad\begin{cases}a+2c=p\\2c=a\end{cases}.$$

La segunda ecuación dice que un anillo pesa el doble que un collar, y la primera que un pendiente pesa igual que un anillo y dos collares.

**18.(D)** Los números obtenidos, si son pares, al quitarles 4 y multiplicarles por 2 deben ser producto de consecutivos, e igual los impares, al sumarles 4 y multiplicarles por 2. $10-4=6$; $6\cdot2=3\cdot4$; $11+4=15$; $15\cdot2=5\cdot6$; $41+4=45$; $45\cdot2=10\cdot9$; $46-4=42$; $42\cdot2=84$; $51+4=55$; $55\cdot2=10\cdot11$.

**19.(B)** Hay que contar el número de parejas distintas a formar. Cada enanito puede formar pareja con otros seis, y así parece que hay $7\cdot6=42$ parejas, pero hemos contado de más pues cada pareja ha sido contada dos veces.

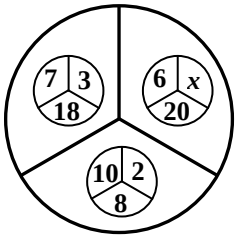
**20.(E)** La cara de don Retorcido se ha obtenido empezando por dividir un triángulo equilátero en cuatro iguales. El triángulo central se ha vuelto a dividir en cuatro partes iguales y la zona sombreada es un sexto de una de ellas. Así que le corresponde: $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{96}$



**21.(C)** Se trata de obtener 108 como producto de dos naturales lo más parecido posible. Descomponemos 108 en factores primos: $108=2^2\cdot 3^3$. La factorización más equilibrada en dos factores es $12 \cdot 9$. Hay que dividir el rectángulo en doce filas y 9 columnas (o viceversa). Para ello emplearemos 11 rectas paralelas a un lado y ocho al otro. En total 19 rectas.

**22.(D)** $= a \cdot b - c$; $= 7 \cdot 3 - 18 = 3$; $= 6x - 20$;

$= 10 \cdot 2 - 8 = 12$;

 $= 3 \cdot (6x\text{-}20) - 12 = 18x - 72 = 0;\ x = 4$

**23.(C)** Si la base de una pirámide tiene n vértices, la pirámide tiene 2n aristas y viceversa. Luego si tiene 28 aristas su base es un polígono de 14 vértices. La pirámide, al añadir la cúspide, tiene 15 vértices.

**24.(A)** El menor número capicúa de cuatro cifras múltiplo de 4 acabará en 2 (la menor terminación par no nula). Luego vemos que la terminación debe ser 12 y el número es 2112. El mayor número capicúa de cuatro cifras acabará en 8, y después debe hacerlo en 88, siendo el número 8888. la diferencia de ambos números es 6776.

**25.(E)** El robot tardará $15 \cdot 2 \cdot \cdot 4 \cdot 25 \cdot 5 = 15\,000$ minutos.
15 000 minutos = 250 horas = 10 días y 10 horas.

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* III

**1. (B)** Si las dimensiones del rectángulo inicial son $a \times b$, las del nuevo rectángulo serán $1{,}1 \cdot a \times 0{,}9 \cdot b$ y su área $0{,}99 \cdot ab$ lo que supone un 99% del área original.

**2. (D)** De las 64 casillas del tablero 28 están en el borde. La probabilidad de escoger una de las 36 restantes es $\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$.

**3. (B)** Un número es múltiplo de 3 si lo es la suma de sus cifras. Así pues, debemos escoger tres de esos números de forma que su suma sea múltiplo de 3: (1, 2, 3) y (1, 3, 5). Como con cada una de las ternas podemos formar 6 números distintos, habrá 12 números en total.

**4. (B)** Observa que en la descomposición en factores primos de un cuadrado todos los primos deben estar elevados a una potencia par y, en la de un cubo, todas las potencias deben ser múltiplos de 3.
Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, para completar al menor cuadrado hacen falta un 2 y un 5 y para el menor cubo, un 3 y dos 5.
Así pues, $x = 2 \cdot 5 = 10$, $y = 3 \cdot 5^2 = 75$ y $x + y = 85$.

**5. (D)** Si llamamos $N$ a la suma de los 3000 números, $A = \frac{N}{40}$ y $B = \frac{N}{75}$.

Así pues $\frac{A}{B} = \frac{N}{40} : \frac{N}{75} = \frac{75}{40} = \frac{15}{8}$.

**6. (E)** Observando las unidades de la suma, como $B + A = A$, deducimos que $B = 0$. Ahora, de las unidades de la resta deducimos que $A = 5$ y, de las decenas de la resta, que $C = 4$. Por lo tanto, $D = 9$.

**7. (B)** Si llamamos $a$ al lado de los cuadrados pequeños, el lado del cuadrado grande, que coincide con el lado mayor del rectángulo, es $4a$ y el lado pequeño del rectángulo es $4a - a = 3a$. El cociente pedido es 4/3.

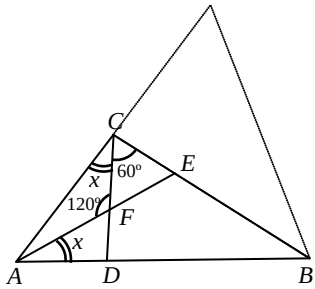
**8. (E)** Como $2\pi r = 24\pi$, el radio de la circunferencia es 12 y su área, $12^2\pi = 144\pi$. Así pues, $t = 144$.

**9. (D)** Si durante todo el periodo hubiera tenido la misma edad, esta sería 630: 50 = 12,6. Como esto no es posible, en el primer periodo tenía 12 años y en el segundo, 13 años.

**10.(E)** Como $x + 32$ tiene cuatro cifras, $x \geq 968$ y. por tanto es de la forma $9a9$ donde $a$ puede valer 6, 7, 8 ó 9. Probando, vemos que $x + 32$ es capicúa sólo si $a = 6$. Por tanto, $x = 969$ y la suma de sus cifras es 24.

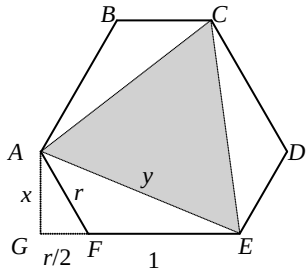
**11.(A)** Como paró 20 minutos, que son 1/3 de hora, en total Alicia estuvo conduciendo $3 - 1/3 = 8/3$ de hora. En el primer tramo recorrió $80t$ kilómetros y, tras la parada, $100\left(\frac{8}{3}-t\right)$. Así pues, $80t+100\left(\frac{8}{3}-t\right)=250$.

**12.(C)** Llamamos $x$ al ángulo $A\hat{C}D$ y anotamos en un dibujo los datos que nos dan. El ángulo $A\hat{F}C=120^\circ$ por ser el suplementario de $C\hat{F}E=60^\circ$. Observando el triángulo $ACF$ deducimos que $C\hat{A}F=60^\circ-x$, por tanto, $C\hat{A}B=60^\circ$. Ya casi estamos. Como $AB$ es el doble de $AC$ y $C\hat{A}B=60^\circ$, el triángulo $ABC$ es "la mitad" de un triángulo equilátero cortado por su altura. Así pues, $A\hat{C}B=90^\circ$ **.**




**13.(E)** Todos los ángulos del hexágono miden 120º y el triángulo gris es equilátero. Además, los tres triángulos blancos son iguales y el área del triángulo gris es 7 veces mayor que el área de los triángulos blancos.

Calculemos dichas áreas. En primer lugar calculamos la altura $x$ del triángulo $AEF$ aprovechando que el triángulo $AGF$ es la mitad de un triángulo equilátero (pues el ángulo



$A\hat{F}G = 180º - 120º = 60º$). $x = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ y el área de los triángulos blancos es $\frac{\sqrt{3}}{4}r$. Utilizando ahora el triángulo rectángulo *AEG* podemos calcular el lado del triángulo gris y su área: $y^2 = \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}r\right)^2 = r^2 + r + 1$. El área del triángulo equilátero gris es $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(r^2 + r + 1\right)$.

Finalmente planteamos la ecuación $7\frac{\sqrt{3}}{4}r = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(r^2 + r + 1\right) \Rightarrow r^2 - 6r + 1 = 0$. La suma de sus soluciones es 6.

**14.(B)** En un mes de 31 días hay cuatro semanas completas (con sus lunes y sus miércoles) y tres días más. Para que el lunes y el miércoles aparezcan la misma cantidad de veces en el mes, deben aparecer ambos una vez o ninguna en los tres últimos días. Si el mes empieza en lunes, el 29 será lunes y el 31 miércoles. Si empieza en jueves o viernes, entre el 29 y el 31 no habrá ni lunes, ni miércoles. Sin embargo, si empieza en martes o miércoles habrá cinco miércoles y cuatro lunes y si empieza en sábado o domingo, habrá cinco lunes y cuatro miércoles. Así pues, el mes debe empezar en lunes, jueves o viernes.

**15.(D)** Aplicando Pitágoras, obtenemos que la altura sobre el lado desigual del triángulo isósceles es 8 y, por tanto, su área es 48.
El otro lado del rectángulo debe ser 48:4 = 12 y su perímetro es 32.

**16.(E)** Como tanto el precio de la entrada como el número de alumnos que asisten son números enteros, el precio de la entrada debe ser un divisor común de 48 y 64. La lista de todos los divisores comunes es: 1, 2, 4, 8 y 16. Así pues, hay 5 valores posibles para *x*.

**17.(D)** La expresión sin paréntesis es $a - b - c - d + e$ y, si aplicamos la propiedad distributiva para quitar paréntesis, tenemos $a - \left(b - \left(c - \left(d + e\right)\right)\right) = a - b + c - d - e$. Para que $a - b - c - d + e = a - b + c - d - e$ debe ser $e = c$ y, por tanto, $e = 3$.

**18.(C)** Comencemos pasando los minutos a horas: 40 minutos = 2/3 de hora. Si llamamos *t* al tiempo (en horas) que Miguel condujo con lluvia, tenemos que $45\left(\frac{2}{3}-t\right)+30t=24$ cuya solución es $t=\frac{2}{5}=\frac{24}{60}$ horas, es decir, 24 minutos.

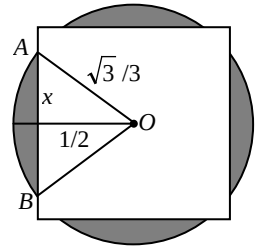
**19.(D)** Pensemos que hay 100 alumnos. El máximo número de cambios se dará si todos los que dijeron que *no* después dicen que *sí* y 30 de los que dijeron que *sí* dicen que *no*, esto es: 80. El mínimo número se dará si todo los que dijeron que *sí* se mantiene y 20 de los que dijeron que *no* ahora dicen *sí*. Entonces, la diferencia es 80 – 20 = 60.

**20.(C)** Comencemos estudiando $|60-2x|=\begin{cases}60-2x & \text{si } x<30\\ 2x-60 & \text{si } x\geq 30\end{cases}$

Por tanto, $|2x-|60-2x||=\begin{cases}|4x-60| & \text{si } x<30\\ 60 & \text{si } x\geq 30\end{cases}=\begin{cases}60-4x & \text{si } x<12\\ 4x-60 & \text{si } 12\leq x<30\\ 60 & \text{si } x\geq 30\end{cases}$

De la primera parte obtenemos $x = 60 - 4x$ si $x < 30$, que nos da la solución x = 12.
De la segunda, $x = 4x - 60$ y $12 \leq x < 30$, nos da la solución $x = 20$.
De la tercera, $x = 60$ si $x \geq 30$ tenemos $x = 60$.
La suma de todas las soluciones es 12 + 20 + 60 = 92.

**21.(B)** La situación es la que muestra la figura y debemos hallar el área de la zona gris. Comenzamos calculando el valor de *x*:




$x^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$. Así pues,

$x=\sqrt{\frac{1}{12}}=\sqrt{\frac{12}{12^2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. ¡Estamos de suerte! El triángulo *AOB* es equilátero y, por tanto, el área del sector circular *AOB* es 1/6 del área del círculo.

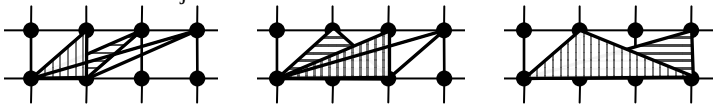
El área gris es $4\cdot\left(\frac{1}{6}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{\sqrt{3}/3\cdot 1/2}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)=\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**22.(B)** Si hay $N$ centros, en total participan $3N$ estudiantes.
Como Carolina ocupa la 64ª posición, debe ser $3N \geq 64$, es decir, $N > 21$.
$N$ debe ser impar pues todas las puntuaciones son distintas y una de ellas es la mediana. Así pues, Alicia ocupa el puesto $\frac{3N+1}{2}$ y, como obtuvo más puntos que Beatriz, debe ser $\frac{3N+1}{2} < 37$ por lo que $N \leq 24$.
Solo el 23 cumple las tres condiciones: es impar y $21 < N \leq 24$.

**23.(E)** Los capicúas de cuatro cifras son de la forma "*abba*" donde *a* puede tomar valores del 1 a 9 y *b* del 0 a 9. En total hay 90 números capicúas entre 1000 y 10000.
Para ver cuántos son múltiplos de 7 escribamos el valor del número
$1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 7\cdot 143a + (7\cdot 15 + 5)b =$
$= 7\cdot 143a + 7\cdot 15b + 5b$. Para que este número sea múltiplo de 7, $5b$ debe ser 0 o múltiplo de 7. Es decir $b = 0$ o $b = 7$. En total hay 18 números con esta condición.
Así pues, la probabilidad de que sea múltiplo de 7 es $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$.

**24.(D)** Los números $-x^2$ y $-2^x$ son negativos para cualquier valor de *x*. Los números $\frac{x}{|x|}$ y $\sqrt[3]{x}$ tiene el mismo signo de *x*, luego, en nuestro caso, son negativos. Así que solo nos queda $-x^{-1}(1-x)$. Comprobemos que es cierto: Si *x* es negativo $x^{-1} = \frac{1}{x}$ es negativo y $1 - x$, positivo. Por tanto $-x^{-1}(1-x)$ es positivo.

**25.(D)** Lo más fácil es dibujarlos todos ordenadamente comenzando con los de base 1:



En total hay 3 + 3 + 2 =8 posibilidades.

# XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* IV

**1. (B)** En primer lugar obsérvese que N ha de ser múltiplo de 675.

En efecto: $\left.\begin{array}{l} 272758 = k \cdot N + 13 \\ 273437 = k' \cdot N + 17 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 679 = k'' \cdot N + 4 \quad \Rightarrow \quad N \cdot k'' = 675$

Como N es un divisor de dos cifras de 675 mayor que 17, las posibilidades son 25, 27, 45 y 75. Pero si fueran 25 ó 75, los restos no podrían ser 13 y 17, sino 8 y 12 para 25, y 58 y 62 para 75. Por tanto N sólo puede ser 27 ó 45, y en los dos casos la suma de sus cifras es 9

**2. (B)** Si añadimos $\frac{1}{100!}$ a la suma pedida resulta 1, ya que

$$\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{98}{99!}+\frac{99}{100!}\right)+\frac{1}{100!}=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{100}{100!}=$$

$$=\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{98}{99!}\right)+\frac{1}{99!}=\ldots=\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}=1$$

Por tanto nuestra suma vale $1-\frac{1}{100!}$

**3. (E)** $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}=1+\dfrac{2+x}{4+2x+1}=\dfrac{3x+7}{2x+5} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{7-5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}=\sqrt{2}-1.$

**4. (D)** Recordando que conocidas la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de 2º grado, *s* y *p*, podemos escribir la ecuación de la forma $x^2 - sx + p = 0$, si llamamos *s* a la suma de los dos números, que, como nos indican, coincide con su producto, *x* debe verificar la ecuación $x^2 - sx + s = 0$. Y de aquí, $s = \dfrac{x^2}{x-1}$

**5. (B)** $x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+1}}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+\sqrt{x^3+1}=(-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^3+1}=0$, que tiene una única solución real, $x = -1$.

**6. (B)** $ab^3 \to 3 \cdot 2^3 = 24$

$a^2b^3 \to ?$

$ab^2c^3 \to 3\cdot 1^2\cdot 2^3 = 24$
$a^cb^c \to 3^1\cdot 8^1 = 24$
$a^bb^cc^a \to 1^2\cdot 2^3\cdot 3^1 = 24$.

**7. (E)** Sean los puntos O(0,0), P($x$,1), Q($y$,3), R($z$,4) y S(10,7). La expresión pedida coincide con la suma de las distancias d(O,P) + d(P,Q) + d(Q,R) + d(R,S), que es mínima cuando los cinco puntos están alineados. En ese caso la suma coincide con la distancia entre O y S, es decir $d(O,S) = \sqrt{(10-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{149}$

**8. (E)** Si el producto de las edades supera en 113 el producto de las edades hace un año, llamando $x$, $y$, $z$ a las edades de los tres tenemos:
$xyz = (x-1)(y-1)(z-1)+113 \Rightarrow xy + xz + yz = x + y + z + 112$.
Como nos indican que $x + y + z = 23$
y sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz)$,
podemos escribir $x^2 + y^2 + z^2 = 23^2 - 2\times(23+112) = 529 - 270 = 259$

**9. (C)** En primer lugar observamos que 2012 es el 668º término de una progresión aritmética que comienza en 11 y tiene diferencia 3: $2012 = 11 + 667\cdot 3$.
Por otro lado $f(11) = 11;\ f(14) = \frac{5}{6};\ f(17) = \frac{-1}{11};\ f(20) = \frac{-6}{5};\ f(23) = 11 ...etc$
Esto implica que si $a_n$ es un término de la p. a. 11, 14, 17, 20,…

$$f(a_n) = \begin{cases} 11 & si\ n = 4k-3 \\ \frac{5}{6} & si\ n = 4k-2 \\ \frac{-1}{11} & si\ n = 4k-1 \\ \frac{-6}{5} & si\ n = 4k \end{cases} \quad k \in N\ .$$

Como $2012 = a_{668}$ y $668 = 4\cdot k$ ($k = 167$), $f(2012) = \frac{-6}{5}$

**10. (A)** Si $f(f(x)) = 6x - 2011$ entonces $f(x) = 6f^{-1}(x) - 2011$.
Como $f(t) = 6t - 2011$ entonces $t = f^{-1}(t) = \frac{t + 2011}{6} \Rightarrow t = \frac{2011}{5}$

**11. (C)** Obsérvese que en cualquier sucesión, conocida la expresión general de la suma de los n primeros términos, es posible calcular $a_n$ restando $S_n$ – $S_{n-1}$. Si $S_n = n^3 + 3$ entonces $a_{10} = S_{10} - S_9 = 1003 - 732 = 271$.

**12. (E)** El mayor valor posible para la expresión se consigue sustituyendo el primer símbolo ♣ por un signo + y el resto de símbolos ♣ por el signo ×. El valor obtenido para N es 10! + 1, que no es divisible por 2 ni por 3 ni por 5 ni por 7, pues da resto 1 al dividirlo por cada uno de esos cuatro números primos.

**13. (E)** Si $n^2$ debe ser cubo perfecto y $n^3$ cuadrado perfecto y $n = 20 \cdot k$, el valor mínimo para $k$ es $2^4 \cdot 5^5$, de modo que $n = 2^6 \cdot 5^6 = 1000000$, que tiene 7 cifras.

**14. (D)** Obsérvese que $\log_{2^n} x^n = \dfrac{\log_2 x^n}{\log_2 2^n} = \dfrac{n \log_2 x}{n} = \log_2 x$. Así pues:

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} + \log_2 x + \log_4 x^2 + \log_8 x^3 + \log_{16} x^4 = 40 \;\Rightarrow$$

$$\log_2 x + \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x = 40 \;\Rightarrow$$

$$5 \log_2 x = 40 \;\Rightarrow\; \log_2 x = 8 \;\Rightarrow\; x = 2^8 = 256$$

**15. (C)** La suma de un seno con un coseno sólo puede valer 2 si ambos valen 1.Para el coseno implica que el ángulo ha de ser 0º, mientras que para el seno, el ángulo ha de ser 90º. Por tanto

$$\left.\begin{array}{l} 2A - B = 0^\circ \\ A + B = 90^\circ \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; A = 30^\circ \; y \; B = 60^\circ .$$

Como el triángulo ABC es rectángulo $BC = AC \cdot \cos(60^\circ) = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$.

**16. (C)** Observando los términos 3º y 4º, la diferencia de la progresión es 2$b$. Por tanto $\begin{cases} a + 2b = 9 \\ 9 + 2b = 3a - b \end{cases}$. De aquí deducimos $a = 5$ y $b = 2$, de modo que la progresión es 5, 9, 13, 17,…

El término que ocupa el lugar 2011 es $a_{2011} = 5 + 4 \cdot 2010 = 8045$

**17. (C)** $7^{x+7} = 8^x \;\Rightarrow\; 7^x \cdot 7^7 = 8^x \;\Rightarrow\; \dfrac{8^x}{7^x} = 7^7 \;\Rightarrow\; \log_{\frac{8}{7}} 7^7 = x \;\Rightarrow\; b = \dfrac{8}{7}$.

**18. (C)** Los puntos de intersección de las dos curvas se consiguen resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones: $\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=k^2 \\ x\cdot y=k \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{k^2}{x^2}=k^2 \quad \Rightarrow$ $x^4-k^2x^2+k^2=0$. Esta ecuación no tiene solución si su discriminante es negativo, $k^4-4k^2<0$, lo que se cumple para los valores de *k* que verifiquen $k^2-4<0$. Hay tres valores enteros que cumplen dicha condición: – 1, 0 y 1; pero para $k = 0$ no existen las curvas, por tanto sólo hay 2 valores enteros para los cuales las curvas no se cortan, – 1 y 1.

**19. (B)** Según el teorema de la bisectriz, los segmentos determinados por la bisectriz interior sobre su lado opuesto son proporcionales a los lados correspondientes. Así $\frac{3}{c}=\frac{8}{a} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{8c}{3}$.
Como nos piden que los lados sean enteros, el valor mínimo para *c* es 6. (3 no es posible porque no verifica la desigualdad triangular). Por tanto el valor mínimo posible para *a* es 16. Y el valor mínimo posible para el perímetro es:
11 + 6 + 16 = 33.

**20. (D)** Sea *p* la probabilidad de obtener cara con dicha moneda. La probabilidad de obtener en cuatro tiradas tantas caras como cruces es $p(2C,2X)=6\cdot p^2\cdot(1-p)^2$, que nos dicen vale $\frac{1}{6}$. Por tanto $p\cdot(1-p)=\frac{1}{6}$.

$6p^2-6p+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad p=\frac{6-\sqrt{36-24}}{12}=\frac{6-2\sqrt{3}}{12}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. Nota: En la solución de la ecuación se ha tenido en cuenta sólo el signo "–" porque el valor de *p* es menor que $\frac{1}{2}$.

**21. (B)** En primer lugar repartimos la mayor cantidad posible entre *a*, *c* y *e*. Para ello, dividimos 2011 entre 3, lo que da cociente 670 y resto 1. Como *b* y *d* deben ser positivos, asignamos 669 para *a*, *c* y *e* respectivamente y quedan 4 para repartir entre *b* y *d*. El mínimo valor del máximo de las sumas *a* + *b*, *b* + *c*, *c* + *d* y *d* + *e* resulta ser 669 + 2 = 671.

**22. (E)** La razón de la progresión se puede escribir como $\frac{\cos(x)}{sen(x)}$, y también como $\frac{tg(x)}{\cos(x)} = \frac{sen(x)}{\cos^2(x)}$. Por tanto, para el valor *x*, se cumple: $\frac{\cos(x)}{sen(x)} = \frac{sen(x)}{\cos^2(x)} \Rightarrow$

$\cos^3(x) = 1 - \cos^2(x) \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \cos(x)$.

Los primeros términos de la progresión geométrica, simplificados a potencias de *sen*(*x*) y *cos*(*x*) son:

$a_1 = sen(x), \quad a_2 = \cos(x), \quad a_3 = \frac{sen(x)}{\cos(x)}, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = \frac{\cos(x)}{sen(x)},$

$a_6 = \frac{1}{\cos(x)}, \quad a_7 = \frac{1}{sen(x)}, \quad a_8 = \frac{1}{\cos^2 x}$

Como el término 8º es $\frac{1}{\cos^2(x)}$, también es $1 + \cos(x)$.

**23. (D)**. Las ternas que cumplen que hay dos valores y sólo dos iguales son de cuatro formas:

$\{1, 1, z\}$ de las que hay un total de 5×19 = 95.

$\{1, y, 1\}$ de las que hay un total de 5×19 = 95.

$\{x, 1, 1\}$ de las que hay un total de 15 = 15.

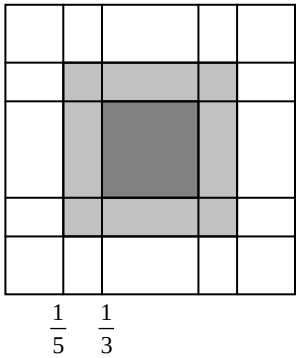
$\{x, 16, 16\}$ de las que hay un total de 20 = 20.

En total son 95 + 95 + 15 + 20 = 225 ternas

**24. (A)** .Obsérvese el cuadrado de la figura:

La probabilidad pedida es la probabilidad de que el punto se encuentre en la zona sombreada de color gris claro, que se puede calcular como cociente de áreas:

$$p = \frac{Area\ gris\ claro}{Area\ Total} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} = \frac{9}{25} - \frac{1}{9} = \frac{56}{225}$$



**25. (B)** Para que el producto termine en 2 hay que eliminar todos los múltiplos de 5, que "fuerzan" la terminación a 0 ó 5. Estos son 20. De este modo quedan 10 números que terminan en 1, 10 en 2, 10 en 3, 10 en 4, 10 en 6, 10 en 7, 10 en 8 y 10 en 9, por lo que el producto termina en 6. Es necesario quitar un número que termine en 3 para que el producto termine en 2. En total, hay que borrar como mínimo 21 números.

# Participantes y relación de ganadores del XV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En esta convocatoria del Concurso de Primavera la participación de estudiantes en la primera fase fue superior a 35000. De los 483 centros participantes se inscribieron 3679 estudiantes para la segunda fase aunque finalmente realizaron la prueba 3117. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | NIVEL 2 | NIVEL 3 | NIVEL 4 |
|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | 1º ESO, 2º ESO | 3º ESO, 4º ESO | 1º B, 2º B |
| nº de estudiantes | 773 | 1092 | 807 | 445 |

Los tres ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

1. Diego González Villar (5º Primaria) Colegio Mirabal. Boadilla del Monte
2. Andrés Ruiz Benito (6º Primaria) CEIP Federico García Lorca. Leganés
3. Hugo García González (5º Primaria) Colégio Padre Poveda. Madrid

**NIVEL II**

1. Álvaro Robledo Vega (2º ESO) Colegio Peñalar. Torrelodones
2. Berta García González (1º ESO) IES San Juan Bautista. Madrid
3. Álvaro Arenas González (1º ESO) Liceo Francés. Madrid

**NIVEL III**

1. Pablo Esteban de la Iglesia (4º ESO) Colegio Fray Luis de León. Madrid
2. Miguel Barrero Santamaría (3º ESO) IES Alameda de Osuna. Madrid
3. Guillermo Gutiérrez Cuenca (4º ESO) IES Ramiro de Maeztu. Madrid

**NIVEL IV**

1. Jaime Mendizábal Roche (1º Bchto) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
2. Pablo Boixeda Álvarez (2º Bchto) Colegio Alemán. Madrid
3. Diego Peña Castillo (2º Bchto) Colegio Santa María del Yermo. Madrid

## XI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2011

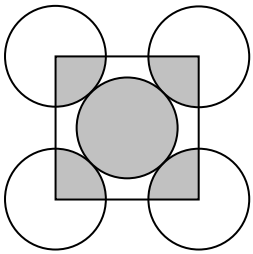
PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

**1º y 2º de E.S.O.**

**1.** Antonio escribe en la pizarra un número N de cinco cifras. Marta copia el número de Antonio y le añade un 1 a la derecha y obtiene un número de seis cifras. Elena toma también el número de Antonio y le añade un 1 a la izquierda, obteniendo otro número de seis cifras. Si resulta que el número que escribió Marta es el triple del que escribió Elena, ¿cuál era el número N que escribió Antonio?

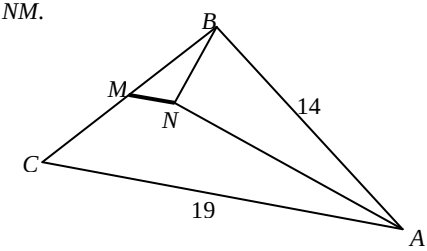
**2.** Encuentra todos los números enteros positivos "*a*", menores que 25, tales que $a \cdot (a+1) \cdot (a+2)$ sea múltiplo de 84.

**3.** Los cinco círculos de la figura tienen el mismo radio y se tocan como puedes observar. Los vértices del cuadrado son los centros de los cuatro círculos exteriores. ¿Cuál es el cociente entre el área de la zona sombreada y el área de la zona no sombreada ocupada por los cinco círculos?



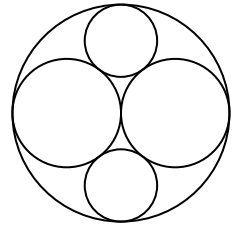
**3º y 4º de E.S.O.**

**1.** En el triángulo *ABC* de la figura, *M* es el punto medio del lado *BC*, *AN* es bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y *BN* es perpendicular a *AN*. Si los lados *AB* y *AC* miden 14 y 19, respectivamente, calcula la longitud de *NM*.




**2.** Si $16^x - 16^y = 192$ y $4^x - 4^y = 8$, calcula el par $(x, y)$.

**3.** En el dibujo de la figura hay cinco circunferencias: 2 pequeñas iguales, 2 medianas también iguales y una grande. Las dos medianas son tangentes entre sí, las dos pequeñas son tangentes a las medianas y la grande es tangente a las otras cuatro. Calcula el cociente entre el radio de las pequeñas y el radio de la grande.



**Bachillerato.**

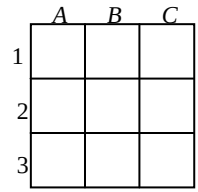
1. Calcula la siguiente suma de 2011 sumandos en los que únicamente se utiliza la cifra 7. Cada sumando tiene una cifra más que el anterior.

$$7 + 77 + 777 + 7\,777 + 77\,777 + \ldots + 777\ldots7$$

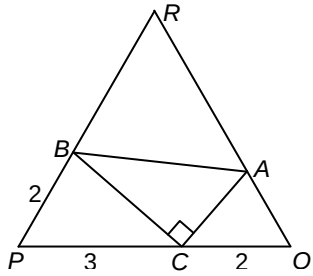
**2.** Completa este cuadro colocando en cada cuadrícula el dígito adecuado.
(Todas las respuestas son números de 3 cifras, por lo que no pueden empezar por cero)

Horizontales:
1. Múltiplo de 8.
2. Factorial de cierto número.
3. Producto de primos consecutivos.

Verticales:
*A*. Múltiplo de 11.
*B*. Potencia de 2. ($2^n$ en donde n es un entero positivo).
*C*. Múltiplo de 11.




**3.** El triángulo rectángulo *ABC*, de hipotenusa *AB*, está inscrito en el triángulo equilátero *PQR*, como se muestra en la figura. Si $PC = 3$, $BP = CQ = 2$, calcula $AQ$.

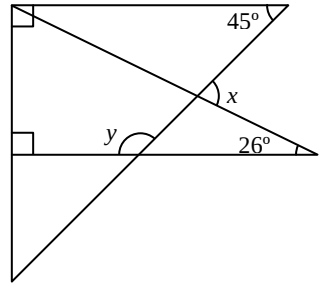


PRUEBA INDIVIDUAL (90 minutos)

**1º y 2º de E.S.O.**

**1.** En mi colegio hay un/a estudiante que se llama Yik. Deduce, de las siguientes pistas, si Yik es un chico o una chica.
Si Yik es un chico entonces es más joven que Joaquín.
Si Yik tiene 13 años entonces es una chica.
Si Yik no tiene 13 años entonces tiene más o el mismo número de años que Joaquín.
¿Es Yik un chico o una chica? Justifícalo.

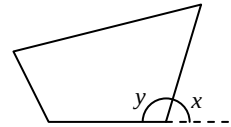
**2.** En el dibujo de la figura determina la medida de los ángulos *x* e *y*.




**3.** Encuentra todos los números de cuatro cifras de la forma *aabb*, (las dos primeas cifras iguales y las dos últimas también) que sean cuadrado perfecto. Si consideras que no hay ninguno debes justificar por qué.

**4.** En un polígono cualquiera, llamamos "*ángulo exterior*" del polígono al determinado por un lado y la prolongación de otro lado adyacente, es decir, al suplementario del interior correspondiente.

Por ejemplo, en la figura el ángulo *x* es exterior, pues es suplementario del ángulo interior *y*.



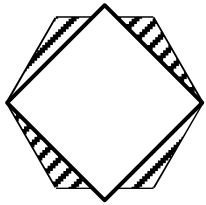

¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un polígono de 2011 lados?

**5.** Entre los 5000 primeros números enteros positivos, ¿cuántos son divisibles por 2, 3, 5 y 7 a la vez?

**3º y 4º de E.S.O.**

**1.** $N$ es un entero positivo que verifica $N^2 - 2000$ es un cuadrado perfecto. Halla todos los posibles valores de $N$.

**2.** En la figura se observa un hexágono regular y un cuadrado cuya diagonal coincide con la diagonal mayor del hexágono. ¿Qué fracción del área del hexágono no tapa el cuadrado?



**3.** ¿Cuál es el menor entero positivo que puede expresarse como suma de 9, de 10 y de 11 enteros consecutivos?

**4.** Un triángulo equilátero y un círculo tienen el mismo centro. Si el área de la parte del triángulo que cae fuera del círculo es igual que el área de la parte del círculo que cae fuera del triángulo, calcula el cociente entre el lado del triángulo y el radio del círculo.

**5.** $A$ es el menor entero positivo tal que $10 \cdot A$ es un cuadrado perfecto y $6 \cdot A$ es un cubo perfecto. ¿Cuántos divisores (positivos) tiene $A$?

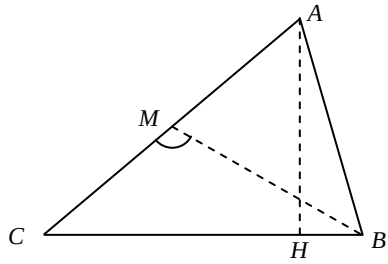
**Bachillerato**

**1.** ¿Hay algún triángulo rectángulo cuyos lados estén en progresión aritmética que no sea semejante al de lados 3, 4 y 5? Justifica la respuesta.

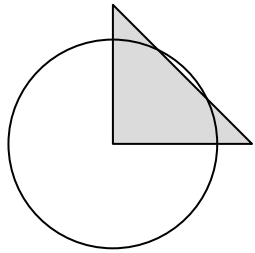
**2.** El número $N = 85^9 - 21^9 + 6^9$ es divisible por un entero comprendido entre 2000 y 3000. ¿De qué entero se trata?

**3.** Javier y su nieto celebran su cumpleaños el mismo día. Durante 6 años consecutivos la edad que cumple Javier es múltiplo de la edad que cumple su nieto. ¿Cuántos años le lleva Javier a su nieto?

**4.** En el triángulo *ABC* el ángulo $\hat{C}$ es de 40º y la altura *AH* mide lo mismo que la mediana *BM*. Calcula la medida del ángulo $B\hat{M}C$.




**5.** Una circunferencia de radio 10 tiene su centro en el vértice de un triángulo rectángulo isósceles correspondiente al ángulo recto. La circunferencia corta a la hipotenusa en dos puntos determinando tres segmentos de igual longitud. ¿Cuál es el área del triángulo?



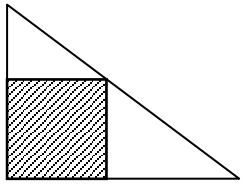
## **PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** ¿Cuál es el resto de la división del número $2011^{2011}$ entre 5?
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "T" la respuesta del problema 2B

¿Para cuántos enteros positivos $n$ se verifica que $\frac{37}{T}n$ y $\frac{T}{37}n$ son enteros de cuatro cifras?



**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "T" la respuesta del problema 2C.
En el triángulo rectángulo de hipotenusa $T$ cm y catetos de longitud entera, en cm, está inscrito un cuadrado, como se muestra en la figura. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área de este cuadrado?
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

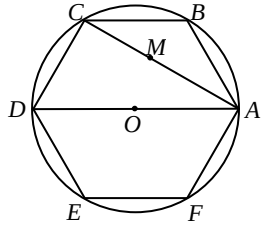
**3º y 4º de ESO.-**

**2A.-** Sea "T" la respuesta del problema 3A.

La respuesta *T* es de la forma $a - b\sqrt{2}$ .

En la circunferencia de centro *O* se ha inscrito un hexágono regular. *M* es un punto de la cuerda *AC* tal que $A\hat{M}O = 60º$ y *MO* = *a* + *b*. Calcula la longitud de *DC*.

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**




**2B.-** ¿Cuál es el valor del entero positivo *n* que verifica $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2n)^2$ ?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "T" la respuesta del problema 3C.

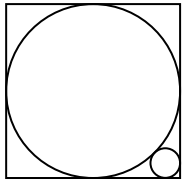
La media de los números *x*, 3, 4*x* – 3, *x* + 4, -16, 9, *x* – 4 es $\frac{5}{T}$ .

¿Cuál es la mediana de estos siete números?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "T" la respuesta del problema 1A.
Las dos circunferencias de la figura son tangentes entre sí y también tangentes al cuadrado de lado *2T*. Halla el radio de la circunferencia pequeña.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º-4º de ESO)**



**3B.-** Sea "T" la respuesta del problema 1B.
Sea *n* la suma de las cifras de *T*.
En una progresión aritmética de números reales la suma de los dos primeros términos es 7 y la suma de los seis primeros es 91. Calcula la suma de los *n* primeros términos de la progresión.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** La expresión $\log_c(a+b) = \log_c a + \log_c b$ suele ser una barbaridad pero hay un número *x* para el que $\log_{2011}(5+x) = \log_{2011} 5 + \log_{2011} x$ . Calcula ese número *x*.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**CENTROS GANADORES**

1. IES San Juan Bautista
2. Colegio Alemán de Madrid A
3. Colegio Fray Luis de León A

**ESTUDIANTES GANADORES**

NIVEL I (1º, 2º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Alberto Alonso González | Colegio SEK EL Castillo. |
| 2. | Berta García González | IES San Juan Bautista |
| 2. | Alfonso Olalla Santamaría | Colegio SEK EL Castillo |
| 2. | Daniel Puignau Chacón | IES Alameda de Osuna |

NIVEL II (3º, 4º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Álvaro Robledo Vega | Colegio Peñalar |
| 2. | Adrián Navarro Hernández | Colegio SEK EL Castillo. |

NIVEL III (Bachillerato)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Lorenzo Esteban de la Iglesia | Colegio Fray Luis de León |
| 2. | Javier Pliego García | IES San Juan Bautista |

**RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN**

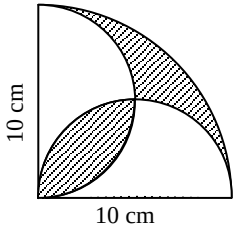
| | | |
|---|---|---|
| 1. | IES San Juan Bautista-A…….. | 57,8 |
| 2. | Colegio Alemán de Madrid A…….. | 48,5 |
| 3. | Colegio Fray Luis de León A……... | 43,2 |
| 4. | Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas……. | 38,8 |
| 5. | IES Ramiro de Maeztu A…….. | 37,7 |
| 6. | IES Alameda de Osuna A……. | 37,1 |
| 7. | Colegio Internacional SEK Ciudalcampo A.. | 34,2 |
| 8. | Colegio Alemán de Madrid B…….. | 34,1 |
| 9. | Colegio Marista San José del Parque A...…. | 32,5 |
| 10. | Colegio Peñalar A…….. | 31,1 |

**XXIX CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**
**"SOCIEDAD PUIG ADAM"**
**Facultad de Matemáticas U.C.M.**
**Madrid, 11 de junio de 2011**

## NIVEL I (3º de E.S.O.)

### Problema 1.

Calcula el área de la zona rayada en la que, como observas, los arcos son semicircunferencias y un cuarto de circunferencia.




### Problema 2.

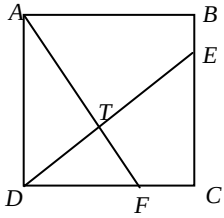
Encuentra, si existen, números enteros *x* e *y* tales que $7 + x^2 = 3y \cdot (y+1)$

### Problema 3.

Vidal intenta multiplicar un número de dos cifras por uno de tres, pero se le ha olvidado todo lo referente a la multiplicación y escribe, simplemente, el número de dos cifras seguido por el de tres, resultando un número de cinco cifras, que es exactamente 9 veces el producto que debería haber obtenido. ¿Cuál es la suma de los dos números que quería multiplicar?

### Problema 4.

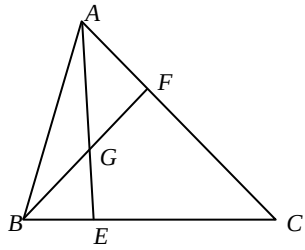
En el cuadrado *ABCD* de la figura, de lado *12 cm*, los puntos *E* y *F* son tales que *3BE = EC* y *2FC = DF*. Si *T* es el punto de intersección de *DE* y *AF*, calcula el área del triángulo *DFT*.



## NIVEL II (4º de E.S.O.)

### Problema 1.

En el triángulo *ABC*, el punto *F* verifica que $2AF = FC$. Si *G* es el punto medio del segmento *BF* y *E* es la intersección de las rectas *BC* y *AG*, calcula el cociente entre *BE* y *EC*.

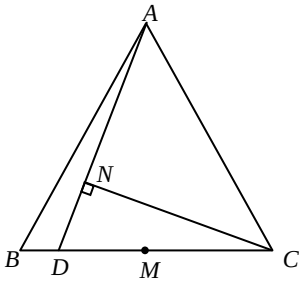



### Problema 2.

Hallar dos números primos *p* y *q* tales que $p - q = 436$ y la media aritmética de *p* y $(q - 4)$ sea el cubo de un entero.

### Problema 3.

En el triángulo isósceles *ABC*, con $AB = AC$, *M* es el punto medio de *BC*. El punto *D*, en el lado *BC*, verifica que $B\hat{A}D = \frac{1}{6}B\hat{A}C$. Además, la recta perpendicular a *AD* por *C*, corta a *AD* en *N*, verificándose que $DN = DM$. Calcula el valor de los ángulos del triángulo *ABC*.




### Problema 4.

Marta llega a un aeropuerto que tiene 12 puertas de acceso a vuelos, alineadas y a 100 m de distancia entre cada dos consecutivas. Le asignan una de las doce al azar y, después de estar esperando, le comunican que su vuelo ha cambiado a otra puerta de salida, también elegida con igual probabilidad entre las restantes. Calcula la probabilidad de que Marta tenga que recorrer una distancia inferior o igual a 400 m para llegar a su nueva puerta de salida.

# NIVEL III (1º de Bachillerato)

## Problema 1.

Encuentra todos los enteros positivos *m* y *n*, con *n* impar, tales que $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$

## Problema 2.

Todo número primo *p*, mayor que 2, se puede expresar como suma de dos enteros consecutivos (la mitad del anterior más la mitad del siguiente). Si el número no es primo hay más posibilidades, y muchos se pueden expresar, de varios modos, como suma de enteros consecutivos.
Encontrar todas las soluciones de este problema para $n = 300$.

## Problema 3.

En el triángulo *ABC*, con $AC = 450$ y $BC = 300$, marcamos los puntos *M* y *L* en los lados *AC* y *AB* respectivamente, siendo *M* el punto medio de *AC* y *L* el pie de la bisectriz del ángulo *C*. Sea *P* el punto de intersección de *BM* y *CL* y *K* el simétrico de *P* respecto de *M*. Si $AK = 180$, calcula *LP*.

## Problema 4.

Si *a*, *b*, *c* y *d* son números reales tales que $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ y $ac+bd=0$, determina el valor de $ab+cd$.

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**
**XLVII OLIMPIADA**
**MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

## FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

**Primera sesión, viernes 21 de enero de 2011**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

### Problema 1

Los vértices del cuadrilátero convexo *ABCD* son puntos de una circunferencia de centro *O*. Las diagonales *AC* y *BD* del cuadrilátero son perpendiculares. Demuestra que los cuadriláteros *AOCD* y *ABCO* tienen la misma área.

### Problema 2

Determina todos los números enteros *a*, *b* y *c* tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$.

### Problema 3

Un cuadrado *C* se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro del cuadrado tantos cuadrados de área 2 como sea posible con los lados paralelos a los lados de *C*, se pueden cubrir las 8 novenas partes de del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados *C*.

**Segunda sesión, sábado 22 de enero de 2011**

**Problema 4**

Consideramos un alfabeto de *n* letras con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADA contiene el palíndromo ADA. Siendo *k* un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud *k* se pueden formar, con nuestro alfabeto de *n* letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.

**Problema 5**

Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 2 | 3 | 4 | | | |
| | | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | |
| 17 | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | .... | ..... | ..... |

Diremos que la posición de un número *N* en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de la fila en que está *N* y el primer número de la columna en que está *N*. Por ejemplo, si $N = 15$, su posición es (10,9). Cuando un número *N*, en la posición $(n, m)$ verifica $N = n + m$ diremos que *N* está *bien colocado* en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados y 15 no lo está. ¿Está $2^{2011}$ bien colocado?

**Problema 6**

El punto *I* es el incentro del triángulo *ABC*. La recta *r* que pasa por *I* y es paralela a *AB* corta a los lados *AC* y *CB* en los punto $A_1$ y $B_2$, respectivamente; la recta *s* que pasa por *I* y es paralela a *CB* corta a los lados *BA* y *AC* en puntos $B_1$ y $C_2$ respectivamente; la recta *t* que pasa por *I* y es paralela a *CA* corta a los lados *CB* y *BA* en los puntos $C_1$ y $A_2$ respectivamente. Determina el valor de

$$\frac{A_1B_2}{AB}+\frac{B_1C_2}{BC}+\frac{C_1A_2}{CA}$$

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

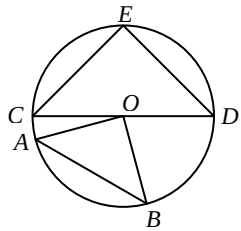
**XLVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: viernes 25 de noviembre de 2011**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 HORAS

1. En la figura adjunta, *CE* y *DE* son cuerdas de igual longitud de la circunferencia de centro *O* de la que *CD* es un diámetro. Si el arco *AB* es un cuarto de circunferencia, ¿cuál es el cociente entre las áreas de los triángulos *CED* y *AOB*?




A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 4 D) 3 E) 2

2. En una carrera de 10 km, Víctor supera a Segundo en 2 km y a Lentini en 4 km. Si los corredores mantienen una velocidad constante a lo largo de toda la prueba, ¿cuántos kilómetros le sacará Segundo a Lentini?

A) 2 B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{11}{4}$ E) 3

3. A partir de un triángulo rectángulo *ABC* de hipotenusa *AB*, construimos otro triángulo rectángulo *ABD* con la misma hipotenusa *AB*. Si $BC = 1$, $AC = b$ y $AD = 2$, *BD* es igual a:

A) $\sqrt{b^2+1}$ B) $\sqrt{b^2-3}$ C) $\sqrt{b^2+1}+2$ D) $b^2+5$ E) $\sqrt{b^2+3}$

4. Pedro anduvo una determinada distancia a velocidad constante. Si hubiera ido 0,5 km/h más rápido, habría recorrido la misma distancia en $\frac{4}{5}$ del tiempo original, pero si

hubiera ido 0,5km/h más despacio, habría tardado $\frac{5}{2}$ de hora más. ¿Cuál fue, en km, la distancia recorrida por Pedro?

A) $\frac{27}{2}$ B) 15 C) $\frac{35}{2}$ D) 20 E) 25

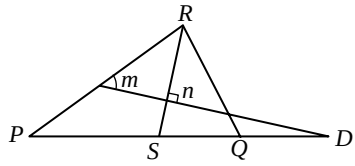
5. En el triángulo *ABC* de la figura, el ángulo *C* es de 90º, *D* es el punto medio de *AB*, *DE* es perpendicular a *AB* y *AB* = 20, *AC* = 12. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ADEC*?
A) 75 B) 58,5 C) 48 D) 37,5 E) Nada de lo anterior

6. Hay dos números positivos que, colocados entre el 3 y el 9, hacen que los tres primeros estén en progresión geométrica y los tres últimos en progresión aritmética. La suma de estos dos números positivos es:
A) $\frac{27}{2}$ B) $\frac{45}{4}$ C) $\frac{21}{2}$ D 10 E) $\frac{19}{2}$

7. Consideramos dos circunferencias: la mayor, de centro *P* y radio *R*; la otra, de centro *Q* y radio *r*, y dibujamos el segmento *PQ*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
*A) R – r* puede ser igual a *PQ*. B) *R + r* puede ser igual a *PQ*
C) *R + r* puede ser menor que *PQ* D) *R – r* puede ser menor que *PQ*
E) Nada de lo anterior.

8. Al colorear *n* bolas, numeradas de 1 a *n*, en rojo y en negro, resulta que entre las primeras 50 hay 49 rojas y entre las restantes 7 de cada 8 son rojas. Si el número de bolas rojas es mayor o igual que el 90% del total de bolas, el valor máximo de *n* es:
A) 225 B) 210 C) 200 D) 180 E) 175

9. En el triángulo *PQR* de la figura, *RS* es bisectriz del ángulo *R* y *D* está en la prolongación de *PQ* de modo que el ángulo *n* es recto. Entonces:




A) $m = \frac{1}{2}\left(\hat{P} - \hat{Q}\right)$ B) $m = \frac{1}{2}\left(\hat{P} + \hat{Q}\right)$

C) $\hat{D} = \frac{1}{2}\left(\hat{P} + \hat{Q}\right)$ D) $\hat{D} = \frac{1}{2}m$ E) Nada de lo anterior es correcto

10. El resto de la división del polinomio $p(x) = x^{100}$ entre $x^2 - 3x + 2$ es:
A) $2^{200} - 1$ B) $2^{100}(x-1) - (x-2)$ C) $2^{100}(x-3)$
D) $(2^{100} - 1)x + 2(2^{99} - 1)$ E) $2^{100}(x+1) - (x+2)$

11. En el rombo *ABCD* dibujamos segmentos paralelos a la diagonal *BD* y de extremos en los lados del rombo. Consideremos una gráfica que muestre la posible longitud de cada segmento en función de su distancia al vértice *A*. La gráfica es:
A) Una recta que pasa por el origen B) Una recta que corta a los semiejes positivos
C) Dos segmentos formando una V D) Dos segmentos formando una V invertida
E) Nada de lo anterior

12. ¿Cuál de los siguientes números es la suma de 11 enteros consecutivos?
A) 7 B) 77 C) 777 D) 7770 E) 7771

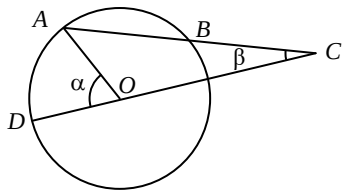
13. Si el cociente entre las medidas de los dos catetos de un triángulo es $\frac{1}{2}$, el cociente entre las medidas de los correspondientes segmentos de hipotenusa determinados por la altura sobre la misma es:
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{2\sqrt{5}-1}$ D) $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ E) $\frac{1}{5}$

14. Si *S* es la suma de los restos de la división de 30, 31, 32, 33, 34 y 35 entre 6, ¿cuál es el resto de la división de *S* entre 6?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

15. Isa sale de excursión cuando las agujas de su reloj están juntas entre las 8 y las 9 y llega a su destino entre las 2 y las 3, cuando las agujas forman un ángulo de $180^o$. ¿Cuánto duró su excursión?
A) 6 horas B) 6 horas y $43 + \frac{7}{11}$ minutos C) 5 horas y $16 + \frac{4}{11}$ minutos
D) 6 horas y media E) Nada de lo anterior

16. Si *x* e *y* son números reales con $|x| + y = 3$, $|x|y + x^3 = 0$, ¿cuál es el entero más próximo a $x - y$?
A) $-3$ B) $-1$ C) 2 D) 3 E) 5

17. En la circunferencia de la figura, de centro *O*, prolongamos la cuerda *AB* hasta que corte en *C* al diámetro *OD*, de manera que *BC* sea igual al radio, y llamamos $\alpha$ y $\beta$ a los ángulos que se indican. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones expresa la relación entre $\alpha$ y $\beta$?




A) $\alpha = 3\,\beta$ B) $\alpha = 2\,\beta$ C) $\alpha = 60^o$
D) No hay relación especial entre $\alpha$ y $\beta$
E) $\alpha = 3\,\beta$ o $\alpha = 2\,\beta$ según la longitud de *AB*

18. Si $1 < x < 10$, $1 < y < 10$, ¿qué afirmación de las siguientes es necesariamente verdadera?

A) $y < \frac{10}{x}$ B) $x > \frac{y}{10}$ C) $y < \frac{x}{10}$ D) $x < \frac{y}{10}$ E) $\frac{100}{x} < y$

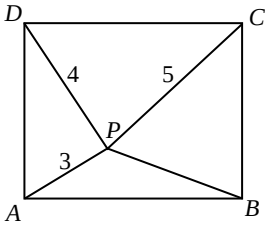
19. El número de triángulos con los tres lados desiguales, de longitud entera y de perímetro menor que 13 es:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 18

20. La función $f(n) = \frac{7n+18}{2n+3}$ toma valores enteros para ciertos valores enteros de *n*. La suma de todos estos $f(n)$ enteros es:

A) 14 B) 21 C) 24 D) 28 E) 30

21. Si *P* es un punto interior al rectángulo *ABCD* tal que *PA* = 3 cm, *PD* = 4 cm, *PC* = 5 cm, *PB*, en cm, es igual a:




A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{2}$ E) 2

22. Si *a*, *b*, *c*, *d* y *e* son enteros distintos y $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$, $a+b+c+d+e$ es igual a:

A) 12 B) 16 C) 17 D) 24 E)32

23. Si la base mayor de un trapecio isósceles es igual a la diagonal y la base más pequeña igual a la altura, el cociente entre la base pequeña y la grande es:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

24. Pedro tiene una caja fuerte con un código de tres cifras. Ha olvidado el código, pero sabe que las tres cifras son diferentes y que la primera cifra es igual al cuadrado del cociente de la segunda entre la tercera cifra. ¿Cuántas combinaciones deberá probar, en el peor de los casos, hasta encontrar el código?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

25. Dos segmentos verticales de 20cm y 80cm (están apoyados sobre el suelo) y separados 1 m. El punto de intersección de las rectas que unen el punto de más altura de un segmento con el más bajo del otro (el extremo superior de un segmento con el inferior del otro) está a una altura de

A) 50 cm B) 40 cm C) 16 cm D) 60 cm E) Nada de lo anterior

26. En una caja hay 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Antonio y Beatriz sacan cada uno al mismo tiempo una tarjeta de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de la tarjeta de Antonio sea el doble o más que el número de la tarjeta de Beatriz?

A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{28}{81}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{1}{3}$

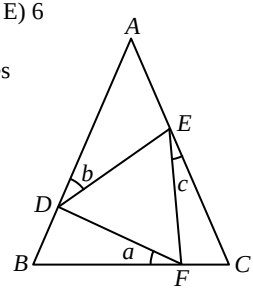
27. El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio tiene 3 unidades de longitud. Si la base mayor mide 97 unidades, la base menor mide:

A) 94 B) 92 C) 91 D) 90 E) 89

28. ¿Cuántos divisores de cuatro cifras tiene el número $102^2$?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

29. En el dibujo que ves, *AB* y *AC* son lados del triángulo isósceles *ABC* en el que inscribimos el triángulo equilátero *DEF*.
Si los ángulos *a*, *b* y *c* son los que hemos marcado, entonces:




A) $b=\frac{1}{2}(a+c)$ B) $b=\frac{1}{2}(a-c)$ C) $a=\frac{1}{2}(b-c)$

D) $a=\frac{1}{2}(b+c)$ E) Nada de lo anterior

30. Escribimos en la pizarra todos los enteros del 1 al 2011. María subraya los múltiplos de 2, luego los múltiplos de 3, y luego los múltiplos de 4. ¿Cuántos números ha subrayado exactamente dos veces?

A) 1005 B) 1004 C) 503 D) 336 E)169

# XLVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## 1ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

**Primera sesión, viernes 16 de diciembre de 2011**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

### Problema 1

Sean *a*, *b* y *c* tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

### Problema 2

En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de 30º, 60º y 90º, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio 3/10.

### Problema 3

Sea *P* un punto interior a un triángulo *ABC* y sean $H_A$, $H_B$, $H_C$ los ortocentros de los triángulos *PBC*, *PAC* y *PAB* respectivamente. Demostrar que los triángulos $H_AH_BH_C$ y *ABC* tienen igual área.

**Segunda sesión, sábado 17 de diciembre de 2011**

**Problema 4**

Dado un entero positivo *n*, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a 10*n* que no son múltiplos de 2 ni de 5.

**Problema 5**

Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo y *P* un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto *P* para que las áreas de los triángulos *PAB*, *PBC*, *PCD* y *PDA* sean iguales.

**Problema 6**

Sean *a*, *b* y *c* las longitudes de los lados de un triángulo *ABC*. Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b\left(a^2 + c^2\right) + c^3,$$

demostrar que la medida (en radianes) de los ángulos *A*, *B* y *C* cumple la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

**XVII$^a$ OLIMPIADA de MAYO**
**Primer Nivel**
**Mayo de 2011**

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

## PROBLEMA 1

Las cuatro palabras codificadas $\square * \otimes \quad \oplus \# \bullet \quad * \square \bullet \quad \otimes \blacklozenge \oplus$ son, en algún orden AMO SUR REO MAS. Descifrar $\otimes \blacklozenge \square * \oplus \# \square \bullet \otimes$.

## PROBLEMA 2

Utilizando una sola vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se escriben el cuadrado y el cubo de un número entero positivo. Determinar cuánto puede valer dicho número.

## PROBLEMA 3

En el rectángulo $ABCD$, $BC = 5$, $EC = \frac{1}{3}CD$ y $F$ es el punto donde se cortan $AE$ y $BD$. El triángulo $DEF$ tiene área 12 y el triángulo $ABF$ tiene área 27. Hallar el área del cuadrilátero $BCEF$.

## PROBLEMA 4

Utilizando varios cubitos blancos de arista 1 Guille arma un cubo grande. Luego elige cuatro caras del cubo grande y las pinta de rojo. Finalmente desarma el cubito y observa que los cubitos con al menos una cara pintada de rojo son 431. Halla la cantidad de cubitos que utilizó para armar el cubo grande. Analiza todas las posibilidades.

## PROBLEMA 5

Consideramos todos los números enteros positivos, de 14 dígitos, divisibles por 18, cuyos dígitos son exclusivamente 1 y 2, pero no hay dígitos 2 consecutivos. ¿Cuántos números de estos hay?

# XVII$^a$ OLIMPIADA de MAYO
## Segundo Nivel
## Mayo de 2011

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

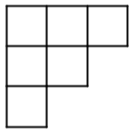
### PROBLEMA 1
Hallar un número entero positivo $x$ tal que la suma de los dígitos de $x$ sea mayor que 2011 veces la suma de los dígitos del número $3x$ (3 por $x$) .

### PROBLEMA 2
Decimos que un número de cuatro dígitos $abcd$ $(a \neq 0)$ es *porá* si se cumplen las siguientes condiciones: $a \geq b$ y $ab - cd = cd - ba$
Por ejemplo, 2011 es porá porque 20 – 11 = 11 – 02. Hallar todos los números porás.

### PROBLEMA 3
En un triángulo rectángulo $ABC$ tal que $AB = AC$, $M$ es el punto medio de $BC$. Sea $P$ un punto de la mediatriz de $AC$ que pertenece al semiplano determinado por $BC$ que no contiene a $A$. Las rectas $CP$ y $AM$ se cortan en $Q$. Calcular el ángulo que forman $AP$ y $BQ$.

### PROBLEMA 4
Dados $n$ puntos en una circunferencia se escribe al lado de uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto y también los números de sus dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha (donde hay 1 se escribe 0 y donde hay 0 se escribe 1).
a) Si $n$ = 101, mostrar que se puede lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que cada uno de los $n$ puntos tenga escrito un 0.
b) Si $n$ = 102, demostrar que es imposible lograr que todos los números escritos sean 0.

### PROBLEMA 5
Determinar para qué números naturales $n$ es posible cubrir completamente un tablero de $n \times n$, dividido en casillas de 1×1, con piezas como la de la figura, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero. Cada una de las piezas cubre exactamente seis casillas.
**Nota**: Las piezas se pueden girar.



# Relación de ganadores en la "XVII OLIMPIADA DE MAYO – 2011

**PRIMER NIVEL**

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Didirka Díaz, Alex | ORO |
| 2 | Mourel Serrano, Alberto | PLATA |
| 3 | García Miguel, Alejandro | PLATA |
| 4 | Puignau Chacón, Daniel | BRONCE |
| 5 | García González, Berta | BRONCE |
| 6 | Sánchez Ibáñez, Enrique | BRONCE |
| 7 | Olalla Santamaría, Alfonso | BRONCE |
| 8 | Carbajo Temprano, Miguel | MENCIÓN |
| 9 | Ramiro Aguirre, Miguel | MENCIÓN |
| 10 | Loureiro García, Santiago | MENCIÓN |

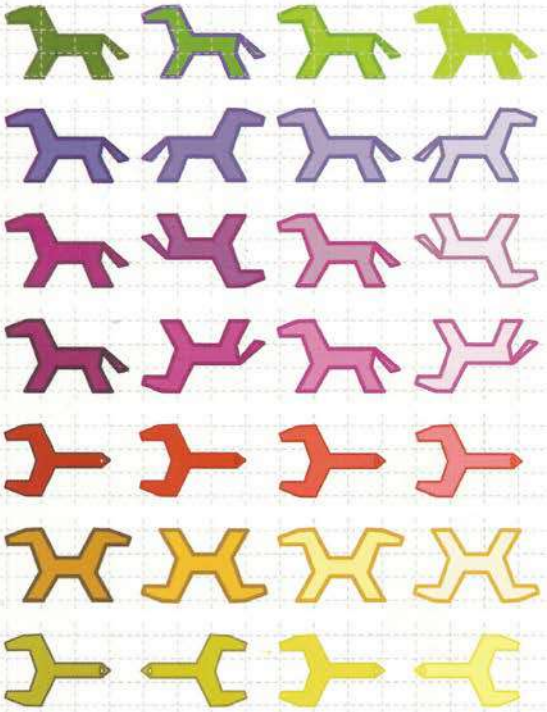
**SEGUNDO NIVEL**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Barrero Santamaría, Miguel | ORO |
| 2 | Peña Queralta, Laura | PLATA |
| 3 | Prieto Naslin, Ángel | PLATA |
| 4 | Isern Hacker, Marc | BRONCE |
| 5 | Musicó Cortés, Mario | BRONCE |
| 6 | Espa Torres, Carlos | BRONCE |
| 7 | Alonso Lorenzo, Izar | BRONCE |
| 8 | Yu, Ruizhe | MENCIÓN |
| 9 | Pascual Pérez, Guillermo | MENCIÓN |
| 10 | Navarro Hernández, Adrián | MENCIÓN |

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
**Comunidad de Madrid**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

# XVII concurso de primavera



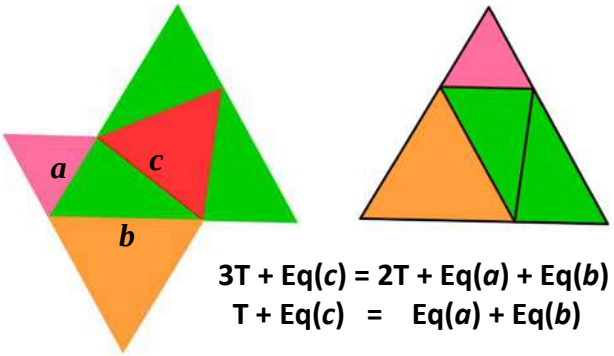
## MATEMÁTICAS 2013

Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alfredo Martínez Sanz*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Hugo Fernández Hervás*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*María Gaspar Alonso-Vega,*
*María Moreno Warleta*
*María Olbés Fernández*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pilar Ruiz Cervigón*
*Víctor Manuel Sánchez González*

*Poema para un triángulo* ***T***
*con un ángulo* $\gamma$ *de* $60^{o}$




**3T + Eq(*c*) = 2T + Eq(*a*) + Eq(*b*)**
**T + Eq(*c*) = Eq(*a*) + Eq(*b*)**

(Demostración visual original de Manuel Morán Cabré)

## *Presentación*

"El cambio es lo único que perdura"

Sí, Heráclito, tú siempre tan paradójico. Ya sé que no me bañaré dos veces en el mismo río, pero el problema es ya otro. No me apetece bañarme en él,... porque está contaminado.

El fin de la Educación no debe ser el adecuar los individuos al Sistema. La Educación debe servir para adecuar el Sistema a las personas.

Comité Organizador

**AGRADECIMIENTOS**

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A la librería Aviraneta.

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 29 de febrero de 2012**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** Bob Esponja vive en una piña a 1200 metros bajo el nivel del mar y justo por encima, Dora la exploradora está volando en globo a 35,4 hectómetros sobre el nivel del mar. Si Dora deja caer una piedra, ¿qué distancia recorre la piedra hasta llegar a Bob Esponja?

**A)** 2340 m **B)** 846 dam **C)** 4,74 km **D)** 1554 m **E)** 3,66 km

**2** ¿Cuánto vale B – A?

**A)** 0,12 **B)** 6,14 **C)** 0,15 **D)** 0,6 **E)** 0,18

**3** Esteban corrió la San Silvestre Vallecana del año 2011 en 49 minutos y 29 segundos. En el año 2010 tardó 54 minutos y 20 segundos. ¿En cuánto tiempo ha reducido su marca?

**A)** 4,09 min **B)** 5 min 9 s **C)** 201 s **D)** 4 min 51 s **E)** 103 min 49 s

**4** Ana y Bea tienen entre las dos 20 euros. Ana y Clara tienen 18. Ana y Dunia tienen 15. Bea, Clara y Dunia tienen entre las tres 29 euros. ¿Cuántos euros tiene Dunia?

**A)** 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

**5** Ana, Elena e Inés son tres amigas. Sus novios se llaman Andrés, Enrique e Ignacio y todas ellas tienen una mascota: una tiene una ardilla, otra un erizo y otra una iguana. Si las iniciales de cada chica, su novio y su mascota, son diferentes, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa sabiendo que la novia de Enrique no tiene una iguana?

**A)** Elena tiene una iguana **B)** Ana es novia de Ignacio **C)** La ardilla es de Inés
**D)** La novia de Ignacio tiene una ardilla **E)** Ana no tiene una iguana.

**6** Los números 343, 1221 y 37873 son capicúas porque se leen igual del derecho que del revés. ¿Cuál es la distancia mayor entre dos capicúas de tres cifras?

**A)** 10 **B)** 454 **C)** 888 **D)** 898 **E)** 999

**7** Seis leones se comen cuatro gacelas en dos días. ¿Cuántas gacelas se comerán tres leones en cuatro días?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**8** El hombre del saco ha metido en su saco los cincuenta primeros números, desde el 1 hasta el 50. María se coge todos los números cuyas cifras suman diez y también todos los que tengan un cero; a continuación Merche saca todos los números que tengan todas sus cifras pares; Pilar se coge los números que puedan dividirse entre tres sin sobrar nada. De los números que quedan, el hombre del saco te regala solo los que tienen la cifra 1. ¿Cuánto suman tus números?

**A)** 72 **B)** 127 **C)** 130 **D)** 144 **E)** 162

**9** Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del cuadrado?

**A)** 24 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

**10** En un reloj digital que indica horas, minutos y segundos, ¿cuántas veces cambian los seis dígitos a la vez en 24 horas?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 24

**11** ¿Cuántos números primos de dos cifras puedes formar usando las tarjetas?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

**12** Luca va al parque de la mano de su abuela María. A la ida, como va contento, Luca va dando saltitos y da dos saltitos por cada paso que da su abuela. A la vuelta, como está muy cansado, va dando pasitos y da tres pasitos por cada paso que da su abuela. Si María da los mismos pasos a la ida que a la vuelta y Luca hace 1860 movimientos en total entre saltos y pasos, ¿cuántos pasos da María para llegar al parque?

**A)** 93 B) 124 **C)** 186 **D)** 372 **E)** 465

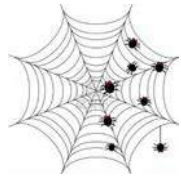
**13** Lucía se ha especializado en dibujar triángulos y cuadrados que pueden ser o bien verdes o bien naranjas. Una tarde dibuja un montón de figuras y al recontarlas observa que hay 13 triángulos; 16 cuadrados; 6 cuadrados verdes; 11 figuras verdes. ¿Cuántos triángulos naranjas dibujó Lucía esa tarde?

**A)** 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

**14** Andresito se ha obsesionado con la flor de la amapola y escribe sin parar esas siete letras: AMAPOLAAMAPOLAAMAPOLA... cientos y cientos de veces. Cuando había escrito 7004 letras, su madre le dijo que parara de una vez. ¿Cuál fue la última letra que escribió Andresito?

**A)** A **B)** M **C)** P **D)** O **E)** L

**15** En una tela de araña se han reunido ocho arañas.
Cada araña tiene ocho patas.
Cada pata, ocho pelos.
Y en cada pelo, ocho lazos.
¿Cuántos lazos había en tan ilustre reunión?

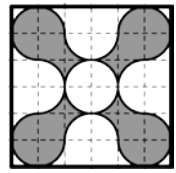


**A)** 8888 **B)** 32 **C)** $2 \cdot 8^8$ **D)** $8^4$ **E)** $4 \cdot 8^8$

**16** Ariel es pequeño y escribe algunos números al revés. Cuando quiere escribir un 2, escribe un Ƨ y cuando quiere escribir un 6, le sale un ∂, los demás los escribe bien. Su padre le ha pedido que escriba todos los números del 1 al 100. ¿Cuántos números estarán mal en esa lista?

**A)** 36 **B)** 34 **C)** 20 **D)** 38 **E)** 22

**17** ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?

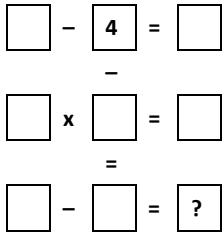


**A)** $\frac{7}{18}$ **B)** $\frac{15}{36}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**18** Marta es muy deportista y todos los días hace algo de ejercicio. Lo que más le gusta es nadar y lo que menos, correr. Para no tener que decidir a diario qué hacer, ha ideado una estrategia. Cada día tira un dado: si sale par, va a nadar y, si sale impar, vuelve a tirar el dado; si en el segundo lanzamiento sale par, va a nadar, si sale un cinco, va a correr y si no ocurre nada de lo anterior, va al gimnasio. ¿Qué probabilidad tiene Marta de ir a nadar?

**A)** $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{25}{36}$

**19** Víctor tiene nueve cartulinas numeradas desde el 1 hasta el 9 y debe colocarlas para que se cumplan las cuatro operaciones indicadas. ¿Qué número colocará en la interrogación?

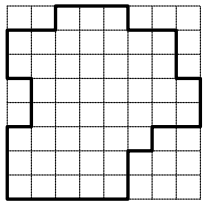



**A)** 7 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 3 **E)** 6

**20** Mi abuela dice que el abuelo es un glotón. Según ella, come el triple que mi madre y tanto como mi padre, mi hermano y yo juntos. Yo como el doble que mi hermano y mi padre come lo mismo que mi madre y yo juntos. Si mi hermano merienda dos galletas, ¿cuántas galletas merendará mi abuelo?

**A)** 15 **B)** 8 **C)** 20 **D)** 34 **E)** 12

**21** Ana ha construido esta figura con cuadrados de 4 y 9 $cm^2$. ¿Cuántos cuadrados como mínimo ha utilizado?



**A)** 8 **B)** 16 **C)** 5 **D)** 14 **E)** 64

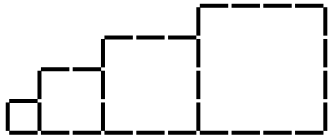
**22** Para celebrar la fiesta de mi cumpleaños compré caramelos. Pensé hacer bolsas con catorce caramelos y los diez caramelos que sobraran serían para mí. Como no vinieron dos niños, pude meter dos caramelos más en cada bolsa y ya solo sobraron cuatro para mí. ¿Cuántos niños vinieron a mi fiesta?

**A)** 22 **B)** 24 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 17

**23** En un triángulo cada ángulo mide 12 grados más que el anterior. ¿Cuánto mide el ángulo mayor de ese triángulo?

**A)** 36º **B)** 60º **C)** 68º **D)** 70º **E)** 72º

**24** A Mariquilla le han regalado una caja de palillos y se entretiene haciendo cuadrados cada vez más grandes, como los que ves en la figura. Cuando lleva 99 cuadrados se pregunta, ¿cuántos palillos más necesitaré para hacer el cuadrado número 100 y terminar mi gran obra?



**A)** 400 **B)** 301 **C)** 99 **D)** 299 **E)** 399

**25** Don Retorcido te ha pedido que le digas un número. A continuación él le suma 2; divide el resultado entre 3; suma 5; multiplica por 2 y, por último, resta 7. Don Retorcido dice: *Me ha salido 17, pero ¡ay! qué cabeza tengo, ya olvidé el número que me dijiste*. Por favor, aclárale cuál era tu número.

**A)** 1 **B)** 17 **C)** 30 **D)** 22 **E)** 19

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 29 de febrero de 2012**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** De una sola sentada Juanito se ha comido 3/5 de sus gominolas y Olivia, 5/8 de las suyas. Ahora cada uno tiene 18 gominolas y un fuerte dolor de barriga. ¿Cuántas gominolas tenían entre los dos antes del atracón?

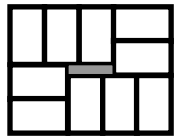
**A)** 93 **B)** 98 **C)** 100 **D)** 200 **E)** 234

**2** Casandra no se atrevía a pedir sal para la sopa, así que le propuso este acertijo al camarero. Si letras diferentes representan cifras también diferentes, ¿cuánto vale la letra **A**?

$$\begin{array}{r} \mathbf{M\ A\ S} \\ +\ \mathbf{S\ A\ L} \\ \hline \mathbf{S\ O\ S\ O} \end{array}$$

**A)** 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

**3** Con diez rectángulos iguales de 5 cm × 3cm hemos cubierto un gran rectángulo pero en el centro se nos ha quedado un rectangulito sin cubrir. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene ese rectangulito central?



**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

**4** ¡Las cinco ranitas ya están situadas en el punto CERO de la salida! La competición va a comenzar. La que caiga justo en el punto 2012 ganará la prueba. Bang da un salto de longitud 1 seguido de un salto de longitud 5, y así todo el rato; Beng da saltos de longitud 3; Bing da un salto de longitud 2 y luego otro de 4, y así siempre; Bong empieza con un salto de longitud 4 y luego uno de 2, y sigue así toda la carrera; Bung salta primero 5 unidades y luego 1 unidad, y así continúa. ¿Qué ranita ganará esta emocionante prueba?

**A)** Bang **B)** Beng **C)** Bing **D)** Bong **E)** Bung

**5** Ya sabemos que Don Retorcido es bastante especial. Resulta que ahora ha decidido que a partir de hoy, durante mil días se vestirá sin repetir combinación. En su armario tiene ocho pantalones y diez camisas ¿Cuál es el mínimo número de sombreros que debe comprar para asegurarse de que no repetirá combinación en los próximos mil días?

**A)** 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 982 **E)** 983

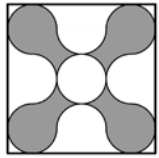
**6** Cada vez que Santiago recoge la cocina sus padres le dan 1,50 € y cuando tiende la ropa le dan 75 céntimos. El año pasado Santiago ganó en total 61,50 € haciendo esas tareas. Si recogió la cocina en cinco ocasiones más que las que tendió la ropa, ¿cuántas veces ayudó a sus padres en total?

**A)** 53 **B)** 27 **C)** 54 **D)** 45 **E)** 43

**7** La suma de cuatro números enteros positivos es 10. ¿Cuál es el mayor producto posible?

**A)** 100 **B)** 18 **C)** 14 **D)** 40 **E)** 36

**8** Para diseñar esta baldosa, todos los arcos que se han empleado corresponden a circunferencias de igual radio que la central. ¿Qué fracción de baldosa está sombreada?

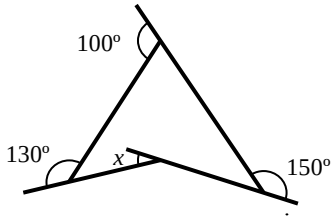


**A)** $\frac{7}{18}$ **B)** $\frac{15}{36}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**9** Ana, Bea, Clara y Dunia se quieren pesar de dos en dos. Ana y Bea pesan 88 kilos, Bea y Clara pesan 91, Clara y Dunia pesan 86. En ese momento, Dunia dice que no hace falta hacer más pesadas. ¿Cuánto pesan Ana y Dunia juntas?

**A)** 83 kg **B)** 84 kg **C)** 85 kg **D)** 87 kg **E)** 88 kg

**10** ¿Cuántos grados mide el ángulo $x$ de la figura?




**A)** 20º **B)** 24º **C)** 25º

**D)** 30º **E)** 35º

**11** Una fotocopia de una fotografía está hecha a tamaño doble del original, doble de ancha y doble de larga. Si la superficie que ocupa Ana en la fotografía es de 16 $cm^2$, ¿qué superficie, en $cm^2$, tendrá en la fotocopia?

**A)** 16 **B)** 32 **C)** 24 **D)** 144 **E)** 64

**12** Fíjate como se forma la siguiente serie:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | | 5 |
| 6 | 7 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | 10 | 11 |
| 12 | | 13 |
| 14 | 15 | 16 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 18 | 19 | … |
| 20 | | 21 | … |
| 22 | 23 | 24 | … |

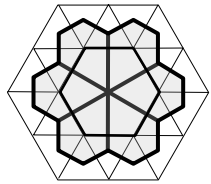
| | | |
|---|---|---|
| **A** | | |
| **B** | | **C** |
| | **D** | **E** |

Si continuamos colocando números, ¿en qué posición caerá el número 2012?

**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

**13** Marta es muy deportista y todos los días hace algo de ejercicio. Lo que más le gusta es nadar y lo que menos, correr. Para no tener que decidir qué hacer a diario, ha ideado lo siguiente: cada día tira un dado. Si sale par, va a nadar y si sale impar, vuelve a tirar el dado. Si en el segundo lanzamiento sale par, va a nadar, si sale un cinco, va a correr y si no ocurre nada de lo anterior, va al gimnasio. ¿Qué probabilidad tiene Marta de ir a nadar?

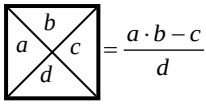
**A)** $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{25}{36}$



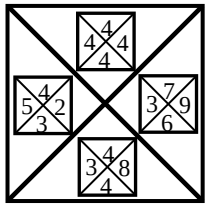
**14** Como se ve en la figura hemos rodeado un hexágono regular por triángulos equiláteros, y luego aprovechando sus centros hemos dibujado una flor de seis pétalos. Si el área de un triángulo es de 3 $dm^2$, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la flor?

**A)** 36 **B)** 42 **C)** 45 **D)** 54 **E)** 60

**15** Los habitantes de Cuadripón operan los números de cuatro en cuatro del siguiente modo:




$$= \frac{a \cdot b - c}{d}$$



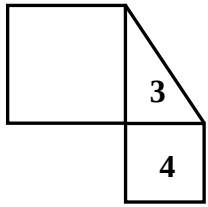

¿Qué resultado obtuvo Cuadripín cuando realizó la operación de la derecha?

**A)** 0 **B)** 4 **C)** 8 **D)** 16 **E)** 24

**16** Ana compra tres manzanas por 1 € y vende cinco manzanas por 2 €. ¿Cuántas manzanas tiene que comprar para que cuando las venda todas gane 10 €?

**A)** 250 **B)** 225 **C)** 150 **D)** 75 **E)** 100

**17** En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?

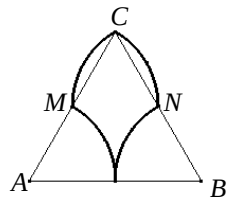



**A)** 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

**18** En el club de tenis hay ocho chicas y seis chicos. Si el club necesita elegir un equipo formado por dos chicos y dos chicas, el número de posibles equipos que se pueden formar es:

**A)** 480 **B)** 420 **C)** 560 **D)** 580 **E)** 620

**19** En un triángulo equilátero *ABC*, hemos dibujado una punta de lanza usando arcos con centros en los vértices *A* y *B*, y en los puntos medios, *M* y *N*, de los lados *AC* y *BC*. Todos los arcos tienen como radio la mitad del lado del triángulo. Si el triángulo tiene 12 $dm^2$ de área, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la punta de lanza?




**A)** 9 **B)** 7,5 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 3

**20** El equipo de ajedrez de mi barrio consta de cuatro jugadores. Como hemos ganado la competición nacional, nos han regalado cuatro bicicletas del mismo modelo, dos rojas, una verde y una azul. Dos niños del equipo son gemelos y quieren bicicletas de distinto color. ¿De cuántas formas diferentes podemos hacer el reparto?

**A)** 6 **B)** 24 **C)** 20 **D)** 10 **E)** 8

**21** Los casilleros del colegio tienen una etiqueta con el nombre de su propietario. Rafa es muy travieso y ha cambiado todos los libros de casillero, de manera que ahora nadie tiene sus libros donde corresponde.

| | | |
|---|---|---|
| Álvaro | Belén | Carlos |
| Dani | Elvira | Fátima |

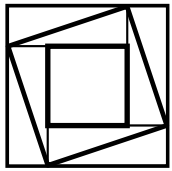
Elvira ha encontrado en su casillero los libros de Carlos; los de Álvaro se han intercambiado con los de una chica y los de Fátima están encima de los de Dani. ¿De quién son los libros que están en el casillero de Dani?

**A)** Álvaro **B)** Belén **C)** Carlos **D)** Fátima **E)** Elvira

**22** Blancanieves quiere regalar un montón de monedas a los siete enanitos siguiendo estas normas: la media de los siete ha de ser siete; todos recibirán una cantidad diferente; ninguno se quedará sin monedas; y Gruñón recibirá la máxima cantidad posible de monedas. ¿Cuántas monedas debe dar a Gruñón?

**A)** 14 **B)** 28 **C)** 49 **D)** 43 **E)** 77

**23** Con ocho triángulos rectángulos iguales hemos construido esta figura en la que se aprecian tres cuadrados. El lado del cuadrado mayor mide 17 cm y el del pequeño, 7cm. ¿Cuánto mide, en cm, el lado del cuadrado mediano?



**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

**24** ¿Cuál es la suma de las cifras del menor múltiplo de 24 que acaba en 24 y que no es 24?

**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

**25** Silencio en el estadio, escuchad lo que está diciendo Don Retorcido a sus alumnos: los 7/10 de vosotros me tenéis frito; los 7/8 habéis suspendido; los 13/18 no hacéis los deberes; y además, 44/45 de vosotros no vais a saber resolver este problema. ¿Cuántos alumnos tiene Don Retorcido si sabemos que tiene más de 2200 y menos de 2800?

**A)** 2520 **B)** 2400 **C)** 2360 **D)** 2600 **E)** 2850

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 29 de febrero de 2012**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

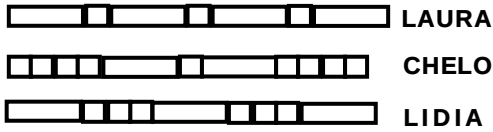
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

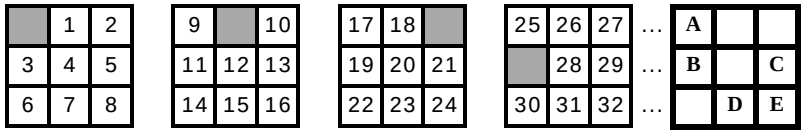
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** Tres amigas han diseñado sus cinturones con piezas de cuero de dos tamaños diferentes. Si el cinturón de Laura mide 102 cm y el de Chelo mide 96 cm, ¿cuántos cm mide el cinturón de Lidia?




**A)** 97 **B)** 98 **C)** 99 **D)** 100 **E)** 101

**2** Fíjate como se forma la siguiente serie:



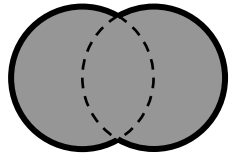

Si continuamos colocando números, ¿en qué posición caerá el número 2012?

**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

**3** Raúl completó el trayecto desde Principio a Final en tres horas. Su hermano Carlos empezó a la vez, pero como su velocidad era 5 km/h más lenta que la de Raúl, llegó a Final 20 minutos más tarde que su hermano. ¿Cuántos kilómetros separan Principio de Final?

**A)** 300 **B)** 250 **C)** 200 **D)** 150 **E)** 100

**4** En la figura se aprecian dos circunferencias de perímetro 6, colocadas de tal manera que cada una pasa por el centro de la otra. ¿Qué perímetro tiene la figura sombreada?



**A)** 12 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 9

**E)** 8

**5** ¡Maldita sea!, mi impresora ha soltado un manchón redondo en mi ecuación:

$\frac{x}{2} - \frac{x+\bullet}{4} = x - 10$ . Recuerdo que la solución era $x = 12$ y entonces, si pienso un poco, puedo asegurar que el número oculto por la mancha es el...

**A)** 4 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 14 **E)** 16

**6** Felisa elige seis números primos distintos y menores que 20: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$. Jugando con ellos observa que $A + B = C + D = E + F$.
¿Cuál es el valor de $E + F$?

**A)** 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 18 **E)** 17

**7** Para celebrar mi cumpleaños compré nueces, hice bolsas de quince y me sobraron diez. Como no vinieron dos amigos, repartí dos nueces más por cabeza y me comí las cuatro que quedaron. ¿Cuántos amigos vinieron a mi fiesta?

**A)** 25 **B)** 24 C) 22 **D)** 20 **E)** 18

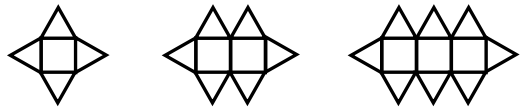
**8** Si $a$ y $b$son enteros positivos tales que $(a + 2b)(a – b) = 10$, ¿cuál es el valor de $(2a – b)$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**9** Merche reparte su fortuna de 192 euros en tres partes proporcionales a las edades de sus primos que tienen 2, 4 y 6 años. ¿Cuántos euros recibe el menor?

**A)** 7,50 **B)** 33 **C)** 32 **D)** 16 **E)** 22

**10** Juanje se ha jubilado y dedica su tiempo a hacer construcciones con palillos siguiendo la pauta que ves en la figura:



Una tarde construyó una inmensa, batiendo su propio récord. Francisco le preguntó: *¿Cuántos palillos has utilizado para batir tu récord?* Juanje, socarrón, contestó: *Adivínalo tú, la respuesta solo puede ser uno de estos cinco números.*

**A)** 7 165 **B)** 176 **C)** 3 514 **D)** 2 483 **E)** 10 000

**11** Las rectas $x – y = 2$ y $mx – y + 3 = 0$ se cortan en un punto cuyas coordenadas $(x, y)$ son ambas positivas. En este caso se puede asegurar que:

**A)** $m = 1$ **B)** $m < 1$ **C)** $m > \frac{-3}{2}$ **D)** $\frac{-3}{2} < m < 1$ **E)** $m = 2$

**12** Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

**a)** La que toca el clarinete tiene pecas.
**b)** Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
**c)** Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
**d)** Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

**A)** Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
**D)** Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

**13** Dos triángulos isósceles distintos tienen igual área. En ambos, sus lados iguales miden 26 cm. Si la base de uno de ellos mide 48 cm, la longitud de la base del otro, en cm, es:

**A)** 24 **B)** 22 **C)** 21 **D)** 20 **E)** 18

**14** ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que una de sus cifras es el producto de las otras dos?

**A)** 48 **B)** 49 **C)** 51 **D)** 52 **E)** 55

**15** De los siguientes números, $\frac{17}{2^{10}}$, $\frac{1001}{999}$, $\frac{7821}{110}$, $\frac{5^{-3}}{3^{-5}}$, $\frac{625}{85}$, ¿cuántos son decimales exactos?

**A)** 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

**16** Consideramos el primer número natural que es múltiplo de 36 y que la suma de sus cifras es 36. ¿Cuántas cifras impares tiene?

**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** Ninguna

**17** Esteban tira un dado y, a continuación, María vuelve a tirarlo. ¿Cuál es la probabilidad de que el número obtenido por Esteban sea mayor que el de María?

**A)** $\frac{5}{6}$ **B)** $\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{5}{18}$ **D)** $\frac{5}{24}$ **E)** $\frac{1}{6}$

**18** Los lados de un trapecio miden $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$. Si escribimos su área como $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, siendo *a*, *b* y *c* enteros positivos, *b* el menor posible y $\frac{a}{c}$ irreducible, entonces $a+b+c$ es:

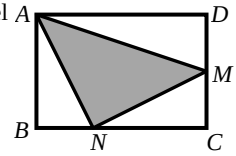
**A)** 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

**19** Si el cociente de $a+2b$ entre $5b-a$ es $\frac{3}{5}$, ¿cuánto vale el cociente $\frac{a}{b}$?

**A)** $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{7}{8}$

**20** El rectángulo *ABCD* tiene área 48; *M* es el punto medio del lado *CD*;

y $3 \cdot BN = BC$. ¿Cuál es el área del triángulo *AMN*?

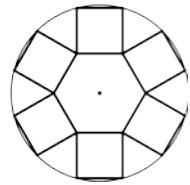



**A)** 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 18 **E)** 16

**21** Con esto de la crisis, los padres de Fernando le han bajado un 20% su paga mensual y los de Sofía, un 12% la suya. Si antes entre los dos sumaban 55 € al mes y ahora solo 46 €, ¿cuántos euros recibía Fernando más que Sofía antes de los recortes?

**A)** 2 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 25 **E)** 30

**22** Hemos pegado cuadrados exteriores a los lados de un hexágono regular. Si el perímetro del hexágono es 12 cm, ¿cuál es el radio de la circunferencia circunscrita a todos los cuadrados?



**A)** $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$ **B)** 4 **C)** $2\sqrt{3}+1$ **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $3+\sqrt{3}$

**23** Las caras de un cubo están marcadas con los seis divisores de 2012. Si lanzamos el dado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma obtenida sea también un divisor de 2012?

**A)** 0 **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{9}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{4}$

**24** ¿Cuál es la razón del área de un cuadrado inscrito en un semicírculo de radio $R$ y el área del cuadrado inscrito en un círculo completo con el mismo radio $R$?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{1}{4}$

**25** La fracción $\frac{61}{40}$ puede escribirse en cascada de esta manera:

$$\frac{61}{40} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{b}}}$$

en donde la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

**A)** 21 **B)** 20 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 17

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 29 de febrero de 2012**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** Si $X$ e $Y$ representan las siguientes sumas de progresiones aritméticas:

$$X = 10 + 12 + 14 + \ldots + 100, \qquad Y = 12 + 14 + \ldots + 102,$$

¿cuál es el valor de $Y - X$?

**A)** 92 **B)** 98 **C)** 100 **D)** 102 **E)** 112

**2** JOSÉ: He pensado tres números positivos y quiero que adivines su suma.

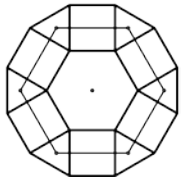
IVÁN: ¿Me darás alguna pista?

JOSÉ: Sí, si los multiplicas por parejas obtienes 156, 168 y 182.

IVÁN: (tic tac tic tac) Ya lo tengo, la suma de los tres es...

**A)** 34 **B)** 35 **C)** 36 **D)** 38 **E)** 39

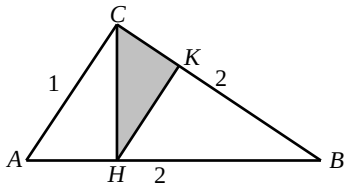
**3** Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm$^2$, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?



**A)** $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

**D)** 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

**4** En el triángulo rectángulo $ABC$ de lados 15, 20 y 25 cm, los segmentos $CH$ y $HK$ son perpendiculares a la hipotenusa $AB$ y al cateto $BC$, respectivamente. ¿Cuál es el área, en cm$^2$, del triángulo $CHK$?




**A)** 37,21 **B)** 34,56 **C)** 36

**D)** 37,5 **E)** 40

**5** En un triángulo acutángulo, un lado mide 7 m, su ángulo opuesto 60º y otro lado 8 m. ¿Cuántos metros mide el tercer lado?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**6** Escribimos de menor a mayor las claves formadas usando dos unos, un tres, y dos cincos. ¿Qué clave ocupa el lugar decimoquinto?

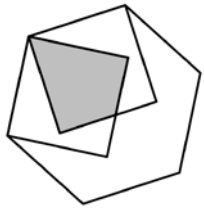
**A)** 15351 **B)** 31551 **C)** 35151 **D)** 35511 **E)** 55113

**7** Don Retorcido te pide que calcules esta suma $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2$ pero, consciente de su dificultad, te sopla esta fórmula $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

¿Cuánto vale la suma pedida?

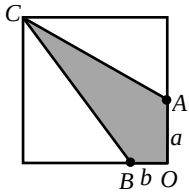
**A)** 250250 **B)** 198500 **C)** 187650 **D)** 166650 **E)** 156 650

**8** Sobre dos lados contiguos de un hexágono regular de lado 1 construimos dos cuadrados. ¿Qué área tiene la zona que comparten estos dos cuadrados?



**A)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**9** En un cuadrado de lado 1, los puntos $A$ y $B$ se mueven sobre sendos lados del cuadrado, determinando así dos segmentos $a = OA$ y $b = OB$. ¿Cuánto debe valer $a + b$ para que el área de la zona sombreada sea la mitad del área del cuadrado?




**A)** 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\sqrt{2}-1$

**10** El área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = |x-1|$ e $y = 2$ es:

**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** $\frac{1}{2}$

**11** En una prueba deportiva de mi instituto, estudiantes de 3º ESO, 4º ESO y 1º de Bachillerato, han obtenido una puntuación media de 12, 15 y 10, respectivamente. Si participaron el doble de estudiantes de 3º que de 4º y el doble de 4º que de 1º Bachillerato, ¿cuál es la puntuación media de los participantes?

**A)** 12 **B)** $\frac{37}{3}$ **C)** $\frac{88}{7}$ **D)** 13 **E)** 14

**12** Si un conjunto *A* tiene 20 elementos y otro conjunto *B* tiene 15 elementos, ¿cuál es el menor número posible de elementos del conjunto $A \cup B$, es decir, el conjunto unión de *A* y *B*?

**A)** 5 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 35 **E)** 300

**13** Una de las ecuaciones siguientes no tiene solución. ¿Cuál?

**A)** $(x+7)^2 = 0$ **B)** $|-3x|+5=0$ **C)** $\sqrt{-x}-2=0$

**D)** $\sqrt{x}-8=0$ **E)** $|-3x|-4=0$

**14** ¿Cuál de las siguientes funciones tiene el eje *OY* como eje de simetría?

**A)** $y = x^2 + x$ **B)** $y = x^2 \operatorname{sen} x$ **C)** $y = x \cos x$ **D)** $y = x \operatorname{sen} x$ **E)** $y = x^3$

**15** Las rectas $y = a$, $y = -b$, $x = -c$, $x = d$, con *a*, *b*, *c* y *d* números positivos, delimitan un rectángulo. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de dicho rectángulo?

**A)** $ac + ad + bc + bd$ **B)** $ac - ad + bc - bd$ **C)** $ac + ad - bc - bd$

**D)** $-ac - ad + bc + bd$ **E)** $ac - ad - bc + bd$

**16** Ya sabes que en un partido de baloncesto hay tiros de 3 puntos, tiros de 2 puntos y tiros libres, que valen 1 punto cada uno. En un extraño partido, un equipo hizo tantos puntos con tiros de 3 como con tiros de 2 puntos y el número de aciertos en tiros libres superó en 1 al número de aciertos en tiros de 2 puntos. Si al final sumaron 61 puntos, ¿cuántos tiros libres encestaron?

**A)** 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

**17** En la lista de ocho números, *A, B, C, D, E, F, G, H*, tres seguidos cualesquiera suman 30. Si $C = 5$, ¿cuál es el valor de $A + H$?

**A)** 17 **B)** 18 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 43

**18** ¿Qué número de los siguientes es $\sqrt{9-6\sqrt{2}} + \sqrt{9+6\sqrt{2}}$ ?

**A)** $3\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{6}$ **C)** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ **D)** $3\sqrt{3}$ **E)** 6

**19** Lanzamos dos dados. La suma de los números obtenidos determina el diámetro, en metros, que tendrá un círculo de $a$ m$^2$ de área y $b$ m de perímetro. ¿Cuál es la probabilidad de que $a$ sea menor que $b$?

**A)** $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{5}{18}$

**20** ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

**A)** $\cos 50^\circ$ **B)** $sen\,50^\circ$ **C)** $tg\,50^\circ$ **D)** $\frac{1}{sen\,50^\circ}$ **E)** $\frac{1}{\cos 50^\circ}$

**21** Si $x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y}$ y $x \neq y$, ¿cuál es el valor de $x \cdot y$?

**A)** 4 **B)** 1 **C)** – 1 **D)** – 4 **E)** Falta información

**22** En el triángulo *ABC*, las longitudes de los lados *AB*, *BC* y *AC* son 12, 24 y 18, respectivamente. La recta que pasa por su incentro y es paralela al lado *BC*, corta al lado *AB* en el punto *M* y al lado *AC* en el punto *N*. ¿Cuál es el perímetro del triángulo *AMN*?

**A)** 27 **B)** 30 **C)** 33 **D)** 36 **E)** 42

**23** Luisa ha decidido ir andando a la oficina. El camino desde casa es llano durante un trecho, donde va a 4 km/h, y termina en un repecho en el que va a 10/3 km/h. A la vuelta, por el mismo camino baja a 5 km/h y mantiene los 4 km/h en la parte llana. Si entre la ida y la vuelta tarda dos horas y media, ¿a qué distancia, en km, está la oficina de su casa?

**A)** 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

**24** Isa tiene un perro cuya edad actual, en meses, es la mitad que la edad de Isa, en años. Pero dentro de cinco años, la edad del perrito, en meses, será cinco unidades más que el doble de la edad de Isa, en años, en ese momento. ¿Cuál es la edad actual del perrito en meses?

**A)** 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

**25** En el rombo *ABCD*, de lado 2, el ángulo *B* mide 120º. ¿Cuál es el área de la región interior del rombo formada por los puntos que están más cerca del vértice *B* que de cualquier otro vértice?

**A)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D)** $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** 2

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2012**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** ¿Cuántos puntos ha obtenido Calamardo en esta prueba de hoy si ha contestado correctamente a doce preguntas y mal a siete?

**A)** 60 **B)** 67 **C)** 95 **D)** 73 **E)** 66

**2** ¿Cuál de estas operaciones da como resultado el número mayor?

**A)** $20 - 12$ **B)** $2 \times (0 + 1 + 2)$ **C)** $(2 + 0) \times (1 + 2)$

**D)** $2 \times 0 \times 1 \times 2$ **E)** $(2 + 0 + 1)^2$

**3** ¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?

**A)** $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

**4** Lucía tiene 600 € y cada semana recibe 25 €. Julián tiene 1200 € y gasta 25 € por semana. ¿Dentro de cuántas semanas, a partir de ahora, los dos tendrán la misma cantidad de dinero?

**A)** Menos de 3 **B)** Entre 3 y 7 **C)** Entre 7 y 11 **D)** Entre 11 y 15 **E)** Más de 15

**5** Don Retorcido es así, se ha inventado un doble Sudoku. En cada casilla hay que colocar una de las vocales, A, E, I, O y una de las consonantes, B, C, D, F, de tal manera que en cada fila y en cada columna aparezcan las cuatro vocales y las cuatro consonantes. Completa el doble Sudoku de don Retorcido y averigua qué combinación hay en la casilla gris.

| | | | |
|---|---|---|---|
| AB | EC | | |
| | | OD | |
| | | | AF |
| I | | | |

**A)** OB **B)** AD **C)** OF **D)** AF **E)** OD

**6** Fernando entró en un ascensor de unos grandes almacenes. El ascensor, primero bajó tres plantas, a continuación bajó dos, después subió siete plantas, bajó cuatro y subió seis. Si, tras todo esto, Fernando se bajó en la 3ª planta, ¿en qué planta tomó el ascensor?

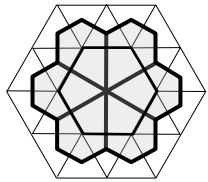
**A)** – 7 **B)** – 2 **C)** – 1 **D)** 1 **E)** 7

**7** Los hermanos Pepitón son muy chistosos. Cuando les pregunté cuál era el mayor, respondieron así:

Ángel: *Yo no soy el mayor.* Blas: *Carlos es mayor que yo.*
Carlos: *Dani es el mayor.* Dani: *En mi familia no hay gemelos.*
Esteban: *Ángel nació el primero.*
Si solo uno de ellos mintió, ¿cuál es el mayor?

**A)** Ángel **B)** Blas **C)** Carlos **D)** Dani **E)** Esteban

**8** Como se ve en la figura hemos rodeado un hexágono regular por triángulos equiláteros y luego, aprovechando sus centros, hemos dibujado una flor de seis pétalos. Si el área de un triángulo es de 3 $dm^2$, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la flor?

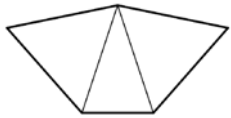


**A)** 54 **B)** 45 **C)** 42 **D)** 36 **E)** 30

**9** Pedro tiene siete caramelos más que Alicia y Luisa tiene el doble de caramelos que Pedro. Si $n$ representa el número de caramelos que tiene Alicia, ¿qué expresión representa el número de caramelos que tiene Luisa?

**A)** $(n+7)^2$ **B)** $2n+7$ **C)** $n^2+7$ **D)** $n^2+14$ **E)** $2n+14$

**10** Ana dibuja dos triángulos equiláteros sobre los dos lados iguales de un triángulo isósceles obteniendo así un pentágono. Si el perímetro del triángulo isósceles es 18 cm y el perímetro del pentágono es 32 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro de uno de esos triángulos equiláteros?



**A)** 28 **B)** 20 **C)** 25 **D)** 24 **E)** 21

**11** ¿Qué número se ha comido el Comenúmeros?

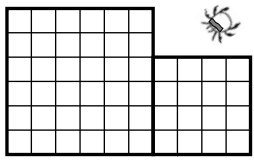
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{\quad}{4}+\frac{5}{12}$$

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

**12** Hemos juntado cuatro cuerdas que miden 4 metros, 33 decímetros, 222 centímetros y 1111 milímetros. ¿Cuántos milímetros nos faltan para llegar a 11 metros?

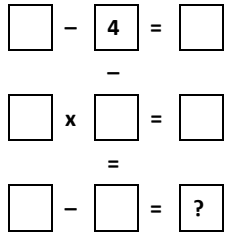
**A)** 369 **B)** 3690 **C)** 3,69 **D)** 36,9 **E)** 0,369

**13** Una pulga salta con los ojos vendados a una casilla de una figura formada por dos tableros. Uno es de $6 \times 6$ y el otro de $4 \times 4$. Hemos puesto comidita en un tercio de las casillas del tablero grande y en un cuarto de las del pequeño. ¿Qué probabilidad tiene la pulguita de encontrar comida?



**A)** $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{5}{12}$ **D)** $\frac{4}{13}$ **E)** $\frac{7}{24}$

**14** La tía de Ana y Martita les ha dado dinero para ir a merendar y les ha dicho que, como buenas hermanas, ambas deben gastar exactamente lo mismo. Se sabe que una hamburguesa y cinco refrescos cuestan lo mismo que cinco chocolatinas y que dos hamburguesas cuestan tanto como dos refrescos y una chocolatina. Si Martita sólo comió chocolatinas y Ana merendó una hamburguesa y un refresco, ¿cuántas chocolatinas se comió la golosa de Martita?




**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

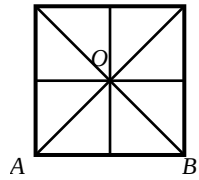
**15** En la sonata de las matemáticas, cada instrumento va entrando poco a poco y en el compás número doce suenan todos juntos por primera vez. El violín toca cada cuatro compases; la viola cada seis; el violonchelo cada ocho; y el contrabajo cada diez. Si la sonata termina cuando los cuatro instrumentos vuelven a sonar a la vez, ¿cuántos compases tiene la sonata?

**A)** 24 **B)** 60 **C)** 72 **D)** 120 **E)** 132

**16** El lagarto está llorando, la lagarta está llorando… Si por cada siete lágrimas que vierte el lagarto, la lagarta vierte cuatro, ¿cuántas lágrimas ha vertido la lagarta si entre los dos llevan 5533 lágrimas?

**A)** 503 **B)** 2011 **C)** 2012 **D)** 1006 **E)** 3521

**17** Echando un vistazo a la figura enseguida vemos ocho triángulos, pero si seguimos observando, descubrimos otros más grandes, como por ejemplo, el *OAB*. ¿Cuántos triángulos hay en total?




**A)** 12 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

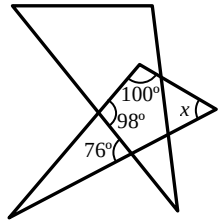
**18** Todos en mi familia hemos nacido un 21 de abril. Si mi madre nació cuando mi abuela tenía 25 años, yo nací cuando mi madre tenía 36 años y hoy cumplo 11 años, ¿en qué año nació mi abuela?

**A)** 1925 **B)** 1940 **C)** 1937 **D)** 1929 **E)** 1951

**19** ¿Cuántos números menores de mil cumplen que la suma de sus cifras es tres?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**20** ¿Cuánto mide el ángulo $x$ en la figura de la derecha?

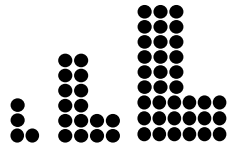



**A)** 58º **B)** 80º **C)** 56º **D)** 42º **E)** 52º

**21** Se sabe que las gallinas viven diez años y que su corazón late 400 veces por minuto. ¿Cuál de estas cantidades se aproxima más al número de veces que late el corazón de una gallina a lo largo de su vida?

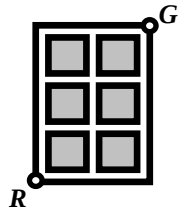
**A)** Veinte mil millones **B)** Dos mil millones **C)** Quinientos millones **D)** Mil doscientos millones **E)** Doscientos millones

**22** Lucía hace *eles* con moneditas de un céntimo. Primero hizo una pequeña, después otra un poco más grande y siguiendo este diseño una tercera… ¿Cuántas monedas necesitará para hacer la quinta **L**?



**A)** 100 **B)** 68 **C)** 125 **D)** 96 **E)** 250

**23** Un gato quiere ir de $G$ a $R$ por el camino más corto recorriendo un segmento cada segundo y un ratón quiere ir de $R$ a $G$ de la misma forma. Si los dos comienzan su recorrido en el mismo instante y ninguno sabe por dónde va el otro, ¿en cuántos puntos del recorrido pueden encontrarse para desgracia del ratón?

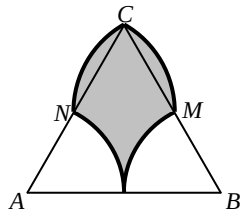



**A)** 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

**24** Santi va a repartir chucherías entre sus cinco primos. A Laura le dio el doble que a Carolina; a Pablo cuatro más que a Laura; y a Manolo le dio el doble que a Elvira. Si en total repartió cuarenta chuches, veinte para las primas y otras veinte para los primos, ¿cuántas chuches se llevó Pablo?

**A)** 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 16

**25** En un triángulo equilátero $ABC$, hemos dibujado una punta de lanza usando arcos con centros en los vértices $A$ y $B$, y en los puntos medios, $M$ y $N$, de los lados $AC$ y $BC$. Todos los arcos tienen como radio la mitad del lado del triángulo. Si el triángulo tiene 12 $dm^2$ de área, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la punta de lanza?




**A)** 9 **B)** 7,5 **C)** 6 **D)** 4 **E)** 3

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2012**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** En el concurso del año pasado, por cada respuesta correcta obtenías 5 puntos; 2 si la dejabas en blanco; y cero si fallabas. Como ves, este año ha cambiado el sistema de puntuación. Carmencita ha salido contenta de la prueba de hoy porque sabe que ha obtenido 88 puntos. Su profesora le ha dicho que con el sistema del pasado año hubiera llegado a 91 puntos. ¿Cuántas preguntas ha dejado en blanco Carmencita?

**A)** 5 **B)** 0 **C)** 9 **D)** 7 **E)** 3

**2** Hace muchos años, el primer día de curso y antes de que don Retorcido entrara en clase, los estudiantes del Club de Matemáticas de su Instituto hicieron cábalas sobre su edad, escribiendo en la pizarra: 24, 28, 30, 32, 36, 39, 42, 44, 47 y 49. Cuando don Retorcido apareció en el aula y encontró las predicciones en la pizarra dijo: "la mitad por lo menos me creéis más joven; dos os habéis equivocado por un año; ah, y mi edad es un número primo". ¿Qué edad tenía don Retorcido en aquel curso?

**A)** 29 **B)** 31 **C)** 37 **D)** 43 **E)** 48

**3** Los números $a$, $b$ y $c$ verifican $0 < a < b < c$. De las siguientes desigualdades, ¿cuál es imposible que se dé?

**A)** $a \cdot b < c$ **B)** $a \cdot c < b$ **C)** $a + b < c$ **D)** $b : c < a$ **E)** $a + c < b$

**4** ¿De cuántas formas puede escribirse el número 100 001 como suma de dos números primos?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**5** La base menor de un trapecio mide 50 cm, la altura 12 cm y los lados no paralelos miden 15 cm y 20 cm. ¿Cuál es su área en $cm^2$?

**A)** 600 **B)** 650 **C)** 700 **D)** 750 **E)** 800

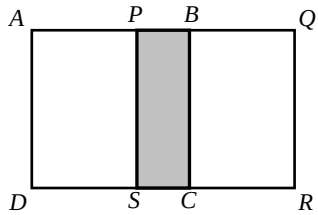
**6** El cepillo de dientes del ratoncito Pérez está fabricado con el mismo material y tiene idéntica forma que el de Súper Ratón. Si el cepillo de Súper Ratón pesa 54 gramos y es tres veces más largo que el de Pérez, ¿cuántos gramos pesa el cepillito de Pérez?

**A)** 10 **B)** 18 **C)** 51 **D)** 2 **E)** 1

**7** María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

**8** Los cuadrados *ABCD* y *PQRS* son iguales, de lado 15. Si las dimensiones del rectángulo *AQRD* son 25 y 15, ¿qué porcentaje del área de dicho rectángulo representa la figura sombreada?




**A)** 15% **B)** 18% **C)** 20%
**D)** 24% **E)** 25%

**9** Don Retorcido ha pedido a cada uno de sus diez millones de alumnos que traiga un cubito de un milímetro de arista lleno de agua. Les hace vaciarlos en un gran cubo de un metro de arista. ¿A qué altura llega el agua en el gran cubo?

**A)** 1 mm **B)** 1 cm **C)** 1 dm **D)** 1 m **E)** El agua rebosa

**10** Juanje mide uno de los ángulos de un triángulo isósceles y le sale 70º. Francisco mide otro ángulo. ¿Cuál es la suma de los tres posibles valores del ángulo medido por Francisco?

**A)** 180º **B)** 165º **C)** 140º **D)** 125º **E)** 95º

**11** En un sombrero hay cuatro tarjetas numeradas: 1, 2, 3, 4. Sacamos a la vez tres de ellas y formamos un número de tres cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea múltiplo de tres?

**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

**12** En un cubo que contiene 30 litros de pintura, el 25% es pintura roja, el 30% pintura amarilla y el 45% agua. Si añadimos 5 litros de pintura amarilla, ¿cuál es el porcentaje de pintura amarilla en la nueva mezcla?

**A)** 25% **B)** 35% **C)** 40% **D)** 45% **E)** 50%

**13** ¿Cuántos números enteros de cuatro cifras diferentes verifican que son múltiplos de 5 y que la mayor de sus cifras es un 5?

**A)** 24 **B)** 48 **C)** 60 **D)** 84 **E)** 108

**14** Si *A*, *B*, *C* y *D* son cifras diferentes y el producto del número de tres cifras *ABA* por el número de dos cifras *CD* es el número de cuatro cifras *CDCD*, entonces $A + B$ es igual a...

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**15** Con los números 1, 2, 3, 4 y 6, ¿cuántas fracciones distintas (es decir, que no sean equivalentes) puedes formar?

**A)** 25 **B)** 21 **C)** 18 **D)** 15 **E)** 13

**16** Si $x$ e $y$ son números enteros positivos, lo más pequeños posibles para que $360 \cdot x$ sea un cuadrado perfecto y $360 \cdot y$ sea un cubo perfecto, entonces $x + y$ debe ser igual a:

**A)** 80 **B)** 85 **C)** 115 **D)** 165 **E)** 610

**17** Un distribuidor vende cajas de bolígrafos a 5 euros y para aumentar la venta hace las siguientes ofertas: "A partir de 20 cajas, te cobro 4 euros por cada caja extra y, además, por cada seis cajas que compres te regalo una más". ¿Cuántas cajas de bolígrafos conseguirás por 228 euros?

**A)** 52 **B)** 60 **C)** 57 **D)** 66 **E)** 45

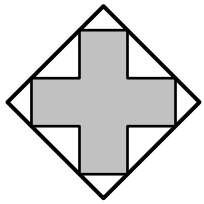
**18** Al dividir un número entre 60 obtenemos cociente impar y 12 de resto. Si dividimos el mismo número por 120, el resto será:

**A)** 12 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 72

**19** Al tirar un dado normal dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el primer número sea mayor o igual que el segundo?

**A)** $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{7}{12}$ **E)** $\frac{5}{6}$

**20** Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita en un cuadrado. Si el área de la cruz es de 25 $cm^2$, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del cuadrado?



**A)** 30 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

**21** ¿Cuál es el dígito de las unidades del número $7^{2012}$?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 7

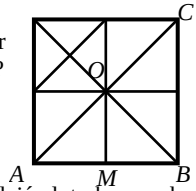
**22** El resto que queda al dividir $2 \cdot 10^{10} + 1$ entre 6 es:

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

**23** Rubén se ha encontrado un cajón lleno de palillos y se ha puesto a construir una cuadrícula de dos filas para colocar su colección de insectos, como puedes apreciar en la figura. Cuando haya colocado el palillo número 2012, ¿cuántos insectos podrá guardar?

**A)** 2012 **B)** 402 **C)** 2005 **D)** 4024 **E)** 804

**24** Al observar la figura, vemos muchos triángulos, como por ejemplo, *AMO*, *ABC* y *ABO*. ¿Cuántos triángulos hay en total?




**A)** 18 **B)** 20 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 26

**25** Don Retorcido quiere despedirse hasta el próximo concurso dejándote buen sabor de boca. Te regala una cesta con fresas. Fíjate, faltan 132 fresas para que el número de fresas sea múltiplo de 195 y sobran 5 para que sea múltiplo de 37. Si la respuesta correcta es una de estas cinco, ¿cuántas fresas te ha regalado don Retorcido?

**A)** 2208 **B)** 2013 **C)** 1855 **D)** 1818 **E)** 1781

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2012**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

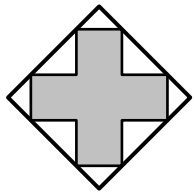
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** ¿Cuántas parejas de enteros $(m, n)$ satisfacen la ecuación $m + n = mn$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Más de 4

**2** Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el área de la cruz es de 40 $cm^2$, ¿cuál es, en cm, el perímetro del cuadrado?



**A)** 30 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

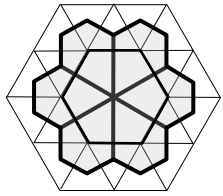
**3** El precio de un piso ha tenido las siguientes variaciones en los últimos 5 años: sube el 10%, sube el 20%, baja el 5%, baja el 10%, baja el 5%. ¿Qué porcentaje se aproxima mejor a la variación total?

**A)** Sube el 5 % **B)** Sube el 10 % **C)** Baja el 20 %
**D)** Baja el 2 % **E)** Sube el 7 %

**4** Ángel, Bea y Carlos tienen entre los tres 37 euros. Ángel y Dani tienen 20. Carlos y Dani 25. Bea, Carlos y Dani tienen 43 euros. ¿Cuántos euros tiene Ángel?

**A)** 7 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 18

**5** Como se ve en la figura hemos rodeado un hexágono regular por triángulos equiláteros, y luego aprovechando sus centros hemos dibujado una flor de seis pétalos. Si el área del hexágono interior de partida es de 24 $dm^2$, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la flor?



**A)** 42 **B)** 45 **C)** 48 **D)** 56 **E)** 60

**6** Si $m$ y $n$ son las soluciones de $2x^2 - 12x + 3 = 0$, el valor de $\frac{n}{m} + \frac{m}{n}$ es:

**A)** 11 **B)** $\frac{9}{4}$ **C)** 22 **D)** 2 **E)** $\frac{4}{9}$

**7** El patio de una casa andaluza mide 10 m × 6 m. Queremos cubrirlo con baldosines cuadrados de igual tamaño. ¿Qué número mínimo de éstos habría que emplear si los hay de las siguientes medidas: 5, 6, 7, 8, 9 y 12 cm de lado?

**A)** 6000 **B)** 9375 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 60

**8** Si $a$ y $b$ son números positivos tales que $a < b$, $a \cdot b = 6$ y $a + b = 5$, la suma de las cifras del resultado de $a^a\left(\left(a^b\right)^b - b^a\right)$ es:

**A)** 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

**9** Una esfera de volumen $a\pi$ m$^3$ tiene una superficie exterior de $b\pi$ m$^2$, donde $a$ y $b$ son números enteros de cuatro cifras cada uno. ¿Cuál es el radio de dicha esfera?

**A)** 18 **B)** 17 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 9

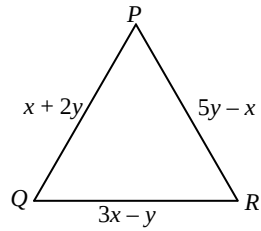
**10** La solución entera de la ecuación $2^{2x^2-9x+4} = 5^{x^2-x-12}$ es:

**A)** 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 0

**11** Hay solamente dos números de dos cifras que son el triple del producto de sus cifras. ¿Cuál es el producto de estos dos números?

**A)** 300 **B)** 360 **C)** 420 **D)** 540 **E)** 288

**12** Las longitudes de los lados del triángulo equilátero $PQR$ son las que se muestran en la figura. ¿Cuál de las siguientes parejas **no** es posible que represente a valores de $x$ e $y$?




**A)** $x = 18, y = 12$ **B)** $x = 15, y = 10$

**C)** $x = 12, y = 8$ **D)** $x = 10, y = 6$

**E)** $x = 3, y = 2$

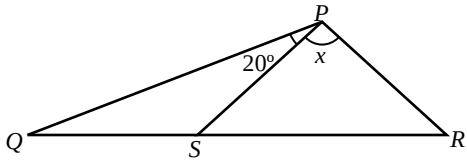
**13** ¿Cuál es valor de la suma $P + Q + R$ en la multiplicación de la derecha?

$$\begin{array}{cccccc} & P & Q & P & Q \\ \times & & R & R & R \\ \hline 6 & 3 & 9 & 0 & 2 & 7 \end{array}$$

**A)** 13 **B)** 12 **C)** 11

**D)** 10 **E)** 9

**14** En el triángulo $PQR$, $S$ es un punto del lado $QR$ tal que $QS = SP = PR$. Si el ángulo $QPS = 20^\circ$, ¿cuál es el valor del ángulo marcado con $x$?

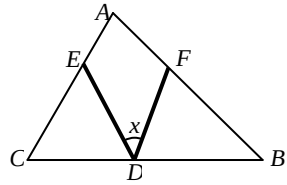



**A)** 80º **B)** 85º **C)** 90º **D)** 95º **E)** 100º

**15** Si $4x - y = 5$, $4y - z = 7$ y $4z - x = 18$, ¿cuál es el valor de $x + y + z$?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**16** En el triángulo $ABC$, el ángulo $A = 80º$. Si los puntos $D$, $E$ y $F$, en los lados $BC$, $AC$ y $AB$ respectivamente verifican que $CE = CD$ y $BF = BD$, el ángulo $x$ es igual a:




**A)** 30º **B)** 40º **C)** 50º

**D)** 65º **E)** 70º

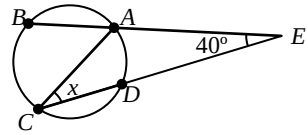
**17** Si $x$ e $y$ son positivos, entonces $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\cdot\left[(2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right]$ es igual a:

**A)** 1 **B)** $xy^{-1}$ **C)** $x^{-1}y$ **D)** $(xy)^{-1}$ **E)** $x + y^{-1}$

**18** Si $a\cdot b\cdot c$ K 0, el conjunto de los valores que puede tomar el número $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ es:

**A)** {0} **B)** {–4, 0, 4} **C)** {–4, –2, 0, 2, 4} **D)** {–4, –2, 2, 4} **E)** {–2, 0, 2}

**19** En la figura que ves, el ángulo $E$ es de 40º y los arcos $AB$, $BC$ y $CD$ son de igual longitud. ¿Cuál es el valor del ángulo $x$?




**A)** 10º **B)** 15º **C)** 20º

**D)** 22,5º **E)** 30º

**20** Si $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces la suma de los coeficientes $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ es igual a:

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 64 **D)** –64 **E)** 128

**21** Dentro de unos meses, la edad de Joaquín será 16 años más que la suma de las edades de María y Mar y además el cuadrado de la edad de Joaquín será 1632 más que el cuadrado de la suma de las edades de María y Mar. ¿Cuál será, en ese momento, la suma de las edades de Joaquín, María y Mar?

**A)** 64 **B)** 94 **C)** 96 **D)** 102 **E)** 140

**22** El resto de dividir $7^{25}$ entre 9 es

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

**23** Las gráficas de $y = -|x + 8| + 6$, $y = 0$ e $y = x + k$ determinan en el segundo cuadrante un trapecio. Si el área de dicho trapecio es 20, el valor de $k$ es:

**A)** 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

**24** En el rectángulo $ABCD$, de lados $AB = 12$ y $BC = 8$, elegimos al azar un punto $P$. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo $PBC$ sea mayor que 20?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{7}{12}$ **C)** $\frac{19}{24}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** 1

**25** La suma de los 50 primeros términos de la sucesión 1, 3, –5, 7, 9, –11, 13, 15, –17, 19,… es:

**A)** 101 **B)** 799 **C)** 900 **D)** 775 **E)** 250

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2012**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Educamadrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
www.profes.net

**1** Al intentar multiplicar los enteros positivos $a$ y $b$, siendo $a$ un número de dos cifras, Errol cambió el orden de las cifras de $a$ y obtuvo como resultado 161. ¿Cuál es el resultado correcto de $a \cdot b$?

**A)** 116 **B)** 161 **C)** 204 **D)** 214 **E)** 224

**2** Si $f(x) = 3^x + 5$, el dominio de $f^{-3}$ es:

**A)** $(0, +\infty)$ **B)** $(5, +\infty)$ **C)** $(8, +\infty)$ **D)** $(-\infty, +\infty)$ **E)** $(3, +\infty)$

**3** ¿Cuál es el producto de las soluciones de la ecuación $\sqrt{5|x|+8} = \sqrt{x^2-16}$ ?

**A)** – 64 **B)** – 24 **C)** – 9 **D)** 24 **E)** 576

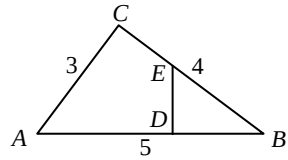
**4** Sea $f(x)$ una función tal que $f(x) + 2f(-x) = sen\, x$ para todo número real $x$. ¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ?

**A)** –1 **B)** $-\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 1 **E)** 2

**5** De una larga lista de problemas, los alumnos de Marta hicieron en clase un tercio del total y dos más en casa. Al día siguiente volvieron a hacer en clase un tercio de los que les quedaban y en casa otros cuatro más. Si para el tercer día solamente quedaban ocho problemas por hacer, ¿cuántos problemas había en la lista?

**A)** 30 **B)** 39 **C)** 48 **D)** 57 **E)** 66

**6** En el triángulo $ABC$ de la figura, de lados 3, 4 y 5, el segmento $DE$ es perpendicular al segmento $AB$. Si el área del triángulo $EBD$ es un tercio del área del triángulo $ABC$, ¿cuál es la longitud del segmento $DB$?




**A)** $\frac{4}{3}$ **B)** 5 **C)** $\frac{9}{4}$ **D)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

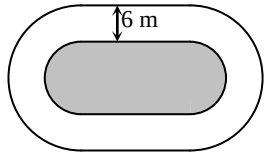
**7** Considera el conjunto de números $\{1, 10, 10^2, \ldots, 10^{10}\}$. ¿Cuál es el entero más próximo al cociente entre el mayor elemento del conjunto y la suma de los diez restantes?

**A)** 1 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 101

**8** En una reunión de 52 personas, ¿cuál es el mayor valor de $n$ para el que la afirmación "Al menos $n$ personas de esta reunión cumplen años el mismo mes" sea siempre verdadera?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 12

**9** Esteban corre cada día, siempre a la misma velocidad, dando vueltas a una pista como la de la figura, de 6 m de ancha, rectangular y cerrada por semicircunferencias. Si corre "por fuera" tarda 6 segundos más que si lo hace "por dentro" en dar una vuelta completa. ¿Cuál es la velocidad de Esteban en m/s?




**A)** $\pi$ **B)** $2\pi$ **C)** $\frac{7\pi}{3}$ **D)** $\frac{8\pi}{3}$ **E)** $3\pi$

**10** Seleccionamos al azar dos números reales del intervalo [–20, 10]. ¿Cuál es la probabilidad de que su producto sea positivo?

**A)** $\frac{1}{9}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{4}{9}$ **D)** $\frac{5}{9}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**11** ¿Cuál es el perímetro de un parking rectangular de 25 m de diagonal y 168 $m^2$ de área?

**A)** 52 m **B)** 58 m **C)** 62 m **D)** 68 m **E)** 70 m

**12** Representamos con @ la operación $a@b = \frac{a+b}{2}$ siendo $a$ y $b$ números reales cualesquiera. De las siguientes propiedades, ¿cuáles verifica esta operación?

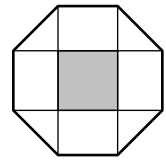
I: $x@(y+z) = (x@y) + (x@z)$; II: $x + (y@z) = (x+y)@(x+z)$;

III: $x@(y@z) = (x@y)@(x@z)$

**A)** Solamente I **B)** Solamente II **C)** Solamente III

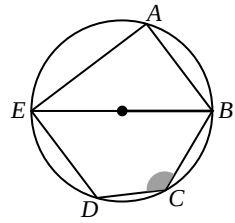
**D)** Solamente I y III **E)** Solamente II y III

**13** En una tirada de dardos, la diana tiene forma de octógono regular. Si el dardo puede caer con igual probabilidad en cualquier punto de la diana, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en el cuadrado sombreado?



**A)** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **E)** $2-\sqrt{2}$

**14** En la circunferencia de diámetro $EB$ las cuerdas $AB$ y $ED$ son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\frac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?




**A)** 120º **B)** 125º **C)** 130º **D)** 135º **E)** 140º

**15** Las rectas $r_1$ y $r_2$ son simétricas respecto de la recta $y = x$. Si la ecuación de $r_1$ es $y = ax + b$ con $a \neq 0$, la ecuación de $r_2$ es:

**A)** $y = \frac{1}{a}x + b$ **B)** $-y = -\frac{1}{a}x + b$ **C)** $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

**D)** $y = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a}$ **E)** $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

**16** Si las longitudes de los tres lados de un triángulo rectángulo vienen dadas por números enteros en progresión aritmética, la longitud de uno de ellos podría ser:

**A)** 22 **B)** 58 **C)** 81 **D)** 91 **E)** 361

**17** Si $p$, $q$ y $M$ son números positivos y $q < 100$, el número obtenido al crecer $M$ el $p$ % y, posteriormente, bajar el resultado en el $q$ %, es mayor que $M$ si y solo si:

**A)** $p > q$ **B)** $p > \frac{q}{100 - q}$ **C)** $p > \frac{q}{1 - q}$ **D)** $p > \frac{100q}{100 + q}$

**E)** $p > \frac{100q}{100 - q}$

**18** Si $b > 1$, $x > 0$ y $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, $x$ es igual a:

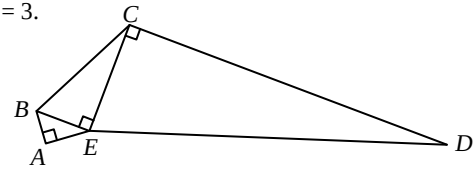
**A)** $\frac{1}{216}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** 1 **D)** 6

**E)** No se puede determinar

**19** En un triángulo de lados $a$, $b$ y $c$ se verifica que $(a + b + c)\cdot(a + b - c) = 3ab$. El valor del ángulo opuesto al lado $c$ es:

**A)** 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 150º

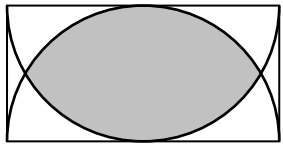
**20** En la figura se ven tres triángulos rectángulos. Ninguno de estos triángulos es semejante a ninguno de los otros dos y todos los segmentos de la figura tienen longitud entera, siendo $AB = 3$.




Si el área del pentágono $ABCDE$ viene dada por un número de tres cifras, la suma de las cifras de dicho número es:

**A)** 6 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

**21** Si la base del rectángulo mide 4 y la altura 2, ¿cuál es el área de la región sombreada limitada por dos semicircunferencias?



**A)** $\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}$ **B)** $\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$ **C)** $\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

**D)** $\frac{8\pi}{3}+2\sqrt{3}$ **E)** $\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}$

**22** En el rectángulo $ABCD$ con $AB = 6$ y $BC = 3$, elegimos un punto $M$ en el lado $AB$ de forma que el ángulo $A\hat{M}D$ sea igual que el ángulo $C\hat{M}D$. ¿Cuánto mide este ángulo?

**A)** 71º **B)** 72º **C)** 73º **D)** 74º **E)** 75º

**23** El área de la corona circular determinada por las circunferencias inscrita y circunscrita al cuadrado cuyos vértices son los afijos de raíces cuartas de – 4 es:

**A)** $2\pi$ **B)** 2 **C)** $\frac{2\pi}{3}$ **D)** $\pi$ **E)** $\frac{3\pi}{2}$

**24** En un torneo de tenis en el que participan $N$ jugadores, el número de jugadores de élite viene dado por la fórmula $2^{1+[\lg_2(N-1)]} - N$, donde $[x]$ significa el mayor entero menor o igual que $x$. Si en dicho torneo hay 19 jugadores de élite y el número total de jugadores es menor que 120, calcula la suma de todos los posibles valores de $N$.

**A)** 38 **B)** 90 **C)** 154 **D)** 406 **E)** 1024

**25** Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a$, $b$ y $c$ enteros. Si $f(1) = 0$, $50 < f(7) < 60$, $70 < f(8) < 80$ y $5000k < f(100) < 5000(k + 1)$ para algún entero $k$, el valor de $k$ es:

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **C** | 1 | **A** | 1 | **C** | 1 | **A** |
| 2 | **E** | 2 | **E** | 2 | **B** | 2 | **E** |
| 3 | **D** | 3 | **B** | 3 | **D** | 3 | **C** |
| 4 | **D** | 4 | **C** | 4 | **E** | 4 | **B** |
| 5 | **D** | 5 | **B** | 5 | **A** | 5 | **D** |
| 6 | **D** | 6 | **A** | 6 | **A** | 6 | **B** |
| 7 | **C** | 7 | **E** | 7 | **E** | 7 | **D** |
| 8 | **D** | 8 | **C** | 8 | **E** | 8 | **D** |
| 9 | **B** | 9 | **A** | 9 | **C** | 9 | **A** |
| 10 | **D** | 10 | **A** | 10 | **D** | 10 | **A** |
| 11 | **B** | 11 | **E** | 11 | **D** | 11 | **C** |
| 12 | **D** | 12 | **B** | 12 | **B** | 12 | **C** |
| 13 | **A** | 13 | **A** | 13 | **D** | 13 | **B** |
| 14 | **C** | 14 | **B** | 14 | **D** | 14 | **D** |
| 15 | **D** | 15 | **D** | 15 | **C** | 15 | **A** |
| 16 | **A** | 16 | **C** | 16 | **C** | 16 | **A** |
| 17 | **C** | 17 | **A** | 17 | **B** | 17 | **C** |
| 18 | **A** | 18 | **B** | 18 | **E** | 18 | **B** |
| 19 | **A** | 19 | **C** | 19 | **C** | 19 | **B** |
| 20 | **A** | 20 | **D** | 20 | **C** | 20 | **E** |
| 21 | **A** | 21 | **E** | 21 | **B** | 21 | **C** |
| 22 | **E** | 22 | **B** | 22 | **A** | 22 | **B** |
| 23 | **E** | 23 | **D** | 23 | **C** | 23 | **C** |
| 24 | **B** | 24 | **C** | 24 | **C** | 24 | **C** |
| 25 | **E** | 25 | **A** | 25 | **A** | 25 | **C** |

# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **E** | 1 | **E** | 1 | **B** | 1 | **E** |
| 2 | **E** | 2 | **D** | 2 | **B** | 2 | **B** |
| 3 | **B** | 3 | **E** | 3 | **E** | 3 | **A** |
| 4 | **D** | 4 | **A** | 4 | **A** | 4 | **A** |
| 5 | **C** | 5 | **D** | 5 | **D** | 5 | **A** |
| 6 | **C** | 6 | **D** | 6 | **C** | 6 | **D** |
| 7 | **D** | 7 | **B** | 7 | **B** | 7 | **B** |
| 8 | **C** | 8 | **C** | 8 | **E** | 8 | **D** |
| 9 | **E** | 9 | **B** | 9 | **A** | 9 | **B** |
| 10 | **E** | 10 | **B** | 10 | **D** | 10 | **D** |
| 11 | **C** | 11 | **C** | 11 | **B** | 11 | **C** |
| 12 | **A** | 12 | **C** | 12 | **D** | 12 | **E** |
| 13 | **D** | 13 | **D** | 13 | **A** | 13 | **A** |
| 14 | **B** | 14 | **A** | 14 | **E** | 14 | **C** |
| 15 | **E** | 15 | **E** | 15 | **C** | 15 | **E** |
| 16 | **C** | 16 | **B** | 16 | **C** | 16 | **C** |
| 17 | **D** | 17 | **B** | 17 | **D** | 17 | **E** |
| 18 | **B** | 18 | **E** | 18 | **B** | 18 | **B** |
| 19 | **C** | 19 | **D** | 19 | **B** | 19 | **D** |
| 20 | **A** | 20 | **D** | 20 | **E** | 20 | **B** |
| 21 | **B** | 21 | **B** | 21 | **D** | 21 | **C** |
| 22 | **A** | 22 | **D** | 22 | **D** | 22 | **E** |
| 23 | **C** | 23 | **E** | 23 | **A** | 23 | **D** |
| 24 | **E** | 24 | **C** | 24 | **B** | 24 | **C** |
| 25 | **C** | 25 | **D** | 25 | **C** | 25 | **C** |

# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel I*

**1. (C)** Expresamos todas las longitudes en la misma unidad.
35,4 hm = 3,54 km 1200 m = 1,2 km
Por lo tanto la distancia que recorre la piedra es 3,54 + 1,2 = 4,74 km..

**2. (E)** 3,22 – 3,07 = 0,15 es el valor que corresponde a cinco intervalos.
0,15: 5 = 0,03 es el valor de cada intervalo de la recta.
Desde el punto A hasta el punto B hay 6 intervalos, luego B – A = 0,03 G 6 = 0,18.

**3. (D)** 54 min 20 s es lo mismo que 53 min 80 s.
53 min 80 s – 49 min 29 s = 4 min 51 s ha reducido su marca.

**4. (D)** Designemos a cada niña con la letra de su nombre y realicemos esta suma:
Entre Ana y Bea tienen 20 € → A + B = 20 €
Entre Ana y Clara tienen 180 € → A + C = 18 €
Entre Ana y Dunia tienen 15 € → + A + D = 15 €
3 A + B + C + D = 53 €
Entre Bea, Clara y Dunia tienen 29 € → B + C + D = 29 €
Por lo tanto 3A + 29 = 53. Es decir, tres veces la cantidad que tiene Ana es:
53 – 29 = 24 € , luego Ana tiene 24: 3 = 8 € tiene Ana.
Como entre Ana y Dunia tienen 15 € resulta que Dunia tiene 15 – 8 = 7 €.

**5. (D)** Una tabla de doble entrada facilita la resolución del problema.
Empezamos a elaborar la tabla buscando la novia de Enrique que tiene una mascota que no es una iguana y su inicial no puede ser una E, es decir una ardilla, por lo tanto su novia ha de ser Inés.
Si continuamos buscando el novio de Ana deducimos que es Ignacio y su mascota tiene que ser un erizo. La tabla queda así:

| | novios | | | mascotas | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ANDRÉS | ENRIQUE | IGNACIO | ARDILLA | ERIZO | IGUANA |
| ANA | no | no | SI | no | SI | no |
| ELENA | SI | no | no | no | no | SI |
| INÉS | no | SI | no | SI | no | no |

La única respuesta correcta es la D: “La novia de Ignacio tiene una ardilla”

**6. (D)** El menor número capicúa de tres cifras es 101.
El mayor número capicúa de tres cifras es 999.

La diferencia es: 999 – 101 = 898.

**7. (C)** Si 6 leones se comen 4 gacelas en dos días, la mitad de leones con el doble número de días se comerán la misma cantidad de gacelas.
Tres leones se comerán 4 gacelas en cuatro días.

**8. (D)** Primero, eliminamos los números que cogen María, Merche y Pilar.
- María coge los números: 19, 28, 37, 46, 10, 20, 30, 40, 50
- Merche coge los números: 4, 6, 8, 22, 24, 26, 42, 44, 48
- Pilar coge los números: 3, 9, 12, 15, 18, 26, 27, 33, 36, 39, 45

Después, buscamos los números que lleven la cifra 1, que son los que regala el hombre del saco, y los sumamos.
1 + 11 + 13 + 14 + 16 + 17 + 31 + 41 = 144
La suma de los números que regala el hombre del saco es 144.

**9. (B)** El área del cuadrado es igual a la suma de las áreas de estas figuras:

- Los 5 cuadrados que forman la cruz.
- Los 4 triángulos rectángulos (grandes) cuyos catetos son segmentos de la cruz.
- Los 4 triángulos rectángulos (pequeños) cuya hipotenusa es un segmento de la cruz.

Cada uno de los segmentos de la cruz mide 24 : 12 = 2 cm
El área de la cruz es: $2 \times 2 \times 5 = 20$ cm$^2$
El área de los 4 triángulos grandes es $[(2 \times 2): 2] \times 4 = 8$ cm$^2$
El área de cada uno de los 4 triángulos pequeños es 1/4 del área de un cuadrado de la cruz; es decir, 1 cm$^2$ .
El área de los 4 triángulos pequeños es: 1 cm$^2$ × 4 = 4 cm$^2$
El área del cuadrado es: 20 + 8 + 4 = 32 cm$^2$.

**10. (D)** De 09:59:59 a 10:00:00 cambian las seis cifras.
Lo mismo ocurre con 19:59:59 y 23:59:59 que cambian, respectivamente a 20:00:00 y 00:00:00.

**11. (B)** Sólo se pueden formar dos números primos: el 23 y el 53.

**12.(D)** Designemos por $x$ al número de pasos que da la abuela a la ida. A la vuelta da los mismos.
A la ida Luca dará $2x$ saltitos y a la vuelta $3x$ pasitos, en total $5x$ movimientos.
$5x = 1860$ movimientos $\rightarrow x = 1860 : 5 = 372$.
María da 372 pasos.

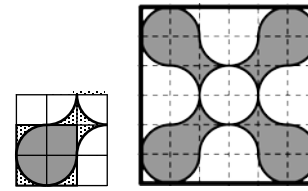
**13.(A)** 11 figuras verdes – 6 cuadrados verdes = 5 triángulos verdes.
13 triángulos – 5 triángulos verdes = 8 triángulos naranjas.

**14.(C)** La palabra AMAPOLA tiene 7 letras y como $7004 = 7 \times 1000 + 4$, escribirá 1000 veces la palabra AMAPOLA completa y 4 letras más de la siguiente palabra.
La última letra escrita es la 4ª, que corresponde a la letra P.

**15.(D)** 8 arañas × 8 patas por araña × 8 pelos por pata × 8 lazos por pelo = $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$ lazos.

**16.(A)** Los números con la cifra 2 son:
2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.
En total 19 números.
Los números con la cifra 6 son:
6, 16, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, 60, 61, 63, 64, 65, 67, 68, 69.
En total 17 números.
19 + 17 = 36 números mal escritos.

**17.(C)** El cuadrado está dividido en 36 casillas.
Si nos fijamos en la figura observamos que cada una de las aspas cubre 4 casillas.
Las 4 aspas cubren $4 \times 4 = 16$ casillas.
16 casillas son $\frac{16}{36}$ del cuadrado y simplificando:
$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.



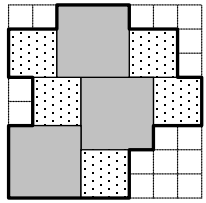
**18.(A)** Irá a nadar si ocurre una de estas dos cosas:
En la 1ª tirada sale un número par o en la 1ª tirada sale número impar y en la 2ª par.
Por lo tanto la probabilidad de ir a nadar es: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

**19.(A)** Utilizando la estrategia de ensayo y error se obtiene esta solución:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | – | 4 | = | 5 |
| – | | – | | |
| 2 | × | 3 | = | 6 |
| = | | = | | |
| 8 | – | 1 | = | 7 |

**20.(A)** El abuelo ($a$) come el triple que mi madre ($m$) → $a = 3m$
El abuelo come lo mismo que mi padre ($p$), mi hermano ($h$) y yo ($y$) → $a = p + h + y$
Yo como el doble que mi hermano → $y = 2h$
Mi padre come lo mismo que mi madre y yo → $p = m + y$
Si mi hermano merienda 2 galletas yo meriendo 4 galletas → $h = 2$; $y = 4$
$a = p + h + y$ → $a = p + 2 + 4$ → $a = p + 6$
$p = m + y$ → $p = m + 4$; como $a = 3m$ y $a = p + 6$, entonces $3m = p + 6$, sustituyendo $p$ por su valor obtenemos: $3m = m + 4 + 6$ → $2m = 10$ → $m = 5$
Como $a = 3m$, entonces el abuelo merienda $3 \times 5 = 15$ galletas.

**21.(A)** Ana ha utilizado 5 cuadrados de 4 $cm^2$ y 3 de 9 $cm^2$, en total 8 cuadrados. Ver figura.



**22.(E)** Aplicamos la propiedad de la división entera:
Dividendo (D) = divisor (d) × cociente (c) + resto (r)
$D = d \times 14 + 10$ $D = (d - 2) \times 16 + 4$
Como el dividendo (D) es la cantidad de caramelos que se reparten, igualamos
$D \times 14 + 10 = (d - 2) \times 16 + 4$ → $d \times 14 + 10 = d \times 16 - 32 + 4$ → $d = 38 : 2 = 19$.
$19 - 2 = 17$ niños vinieron a la fiesta.

**23.(E)** Si $x$ es la medida del ángulo menor, los otros dos ángulos medirán, uno $x + 12$, y el otro $x + 24$. Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180 grados, planteamos: $x + x + 12 + x + 24 = 180$ → $3x = 144$ → $x = 144 : 3 = 48$.
El ángulo menor mide 48 grados, el ángulo mayor mide $48 + 24 = 72$ grados.

**24.(B)** Para el primer cuadrado se necesitan 4 palillos, Cada uno de los siguientes cuadrados se forman multiplicando la medida del lado por 3 y añadiendo una unidad. Así, para formar el segundo cuadrado se necesitan 7 palillos ($3 \times 2 + 1$), para formar el tercer cuadrado se necesitan 10 palillos ($3 \times 3 + 1$, para formar el cuarto cuadrado se necesitan 13 palillos ($4 \times 3 + 1$), ..., para formar el cuadrado número 100 se necesitan 301 palillos ($100 \times 3 + 1$).

**25.(E)** Si hacemos el proceso inverso llegaremos al número inicial.

| | |
|---|---|
| Sumamos 7. | $17 + 7 = 24$ |
| Dividimos entre 2. | $24 : 2 = 12$ |
| Restamos 5. | $12 - 5 = 7$ |
| Multiplicamos por 3. | $7 \times 3 = 21$ |
| Restamos 2. | $21 - 2 = 19$ |

De donde se deduce que el número que le dijiste es 19.

También podemos plantear la igualdad $[(x + 2): 3 + 5] \times 2 - 7 = 17$ y de aquí deducir el valor de $x$.

# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel II*

**1. (A)** Después del banquete de chuches, a Juanito le quedan 2/5 de sus gominolas que son 18 gominolas. De aquí deducimos que 1/5 de sus gominolas iniciales son 9 gominolas, por lo que al principio Juanito tenía un total de 45 gominolas. De manera similar podemos deducir: 3/8 de las gominotas de Olivia suponen 18 gominolas; 1/8 de sus gominotas son 6 gominolas; Olivia acudió con 48 gominolas. En total tenían 93 gominolas.

**2. (E)** La letra S corresponde a la cifra 1 ya que al sumar dos cifras como máximo puedo "llevarme una". La suma quedaría pues como se muestra a la derecha.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | M | A | 1 |
| + | | 1 | A | L |
| | 1 | O | 1 | O |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 8 | 5 | 1 |
| + | | 1 | 5 | 9 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 |

La letra A ya solo puede ser 0 o 5 y además habernos "llevado una" de la suma precedente. Pero 0 no puede ser porque de esta manera la M sería 9 y la O sería también cero. Así pues, la letra A es 5 y la suma final queda como se ve a la izquierda.

**3. (B)** El área del rectangulito central es la resta entre el área del gran rectángulo y de los diez rectángulos iguales. La base del rectángulo grande mide $3 \cdot 3 + 5 = 14$ y la altura $2 \cdot 3 + 5 = 11$. Así, el gran rectángulo tiene área $14 \times 11 = 154$ cm$^2$ y cada rectángulo tiene área $5 \times 3 = 15$ cm$^2$. El área del rectangulito es $154 - 150 = 4$ cm$^2$.

**4. (C)** ¡Qué extraña competición! No tan extraña si se observa que todas las ranitas caen cada dos saltos en un punto que es múltiplo de 6. Aquí está la clave: en los múltiplos de 6. ¿Cuál es el múltiplo de 6 menor y más cercano a 2012? Si divides 2012 entre 6, podrás encontrarlo.

| | |
|---|---|
| 2012 | 6 |
| 2 | 335 |

El múltiplo que buscamos es $335 \times 6 = 2010$. Es decir, en el punto 2010 coinciden todas las ranitas y en el próximo salto la que caerá justo en el 2012 será Bing ya que su siguiente salto es de dos unidades y ¡zas! cae en el 2012.

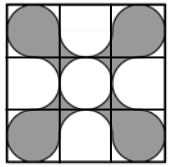
**5. (B)** Con ocho pantalones y diez camisas Don Retorcido puede combinarse de $8 \times 10 = 80$ maneras diferentes. Para llegar a mil utilizando sombreros, tendrá que buscar el menor número que multiplicado por 80 llegue o se pase de mil. Este número se calcula dividiendo $1000 : 80 = 12{,}5$. El menor número es 13. (Observa que $12 \times 80 = 960$ y $13 \times 80 = 1040$).

Don Retorcido debe comprarse un mínimo de trece sombreros.

**6. (A)** Las cinco ocasiones de más en las que Santi recogió la cocina suponen 5 × 1,50 = 7,50 euros. De esta manera, el resto de la ganancia, 61,50 – 7,50 = 54 euros, se obtuvo recogiendo la cocina y tendiendo la ropa el mismo número de veces. Como por estas dos tareas Santiago se lleva 1,50 + 0,75 = 2,25 euros, si dividimos, 54 : 2,25 = 24, concluimos que Santiago tendió la ropa 24 veces y recogió la cocina 29 veces, lo que hacen un total de 53 tareas.

**7. (E)** Parece lógico pensar que para obtener productos altos ninguno de los cuatro números debe ser 1.Busquemos ahora los grupos de cuatro números positivos distintos de 1 que sumen 10:
2, 2, 2, 4, su producto es 32.
2, 2, 3, 3, su producto es 36. ¡Este es el mayor producto!
Si te quedas con dudas por si algún cuarteto con unos tiene producto mayor...
1, 1, 1, 7, su producto es 7.
1, 1, 2, 6, su producto es 12.
1, 1, 3, 5, su producto es 15.
Los demás casos los dejamos para ti.

**8. (C)** Trazando unos segmentos auxiliares que dividen a los lados en tres partes iguales, vemos que ya es facilísimo resolver el problema. Cada una de las cuatro ánforas ocupa uno de los nueve cuadraditos interiores que se nos han formado. Como hay cuatro ánforas, la respuesta es 4/9.

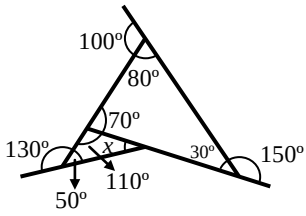


**9. (A)** Representando el peso de cada niña por su inicial podemos formar estas igualdades:

$$\left.\begin{aligned} A+B&=88\\ B+C&=91\\ C+D&=86 \end{aligned}\right\}$$

Queremos averiguar el valor de $A + D$ y, ¿cómo podemos deducirlo de las tres igualdades anteriores? A ver, hum,..., ¡ya está!, sumaremos la primera y la tercera igualdad y luego les restaremos la segunda igualdad:
$A+B+C+D-B-C=88+86-91$, es decir:
$A+D=83$. Ana y Dunia pesan juntas 83 kilogramos.

**10.(A)** En muchos problemas en los que piden calcular el valor de un ángulo cuando conocemos otros es muy socorrido formar triángulos ya que sabemos que los tres ángulos de un triángulo suman siempre 180º. Hagamos pues caso a este buen consejo prolongando un segmento como se muestra en el dibujo.



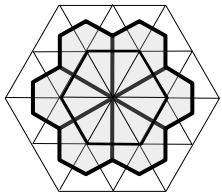
Y ya vamos calculando el valor de los ángulos interiores de esos dos triángulos formados hasta llegar a *x*, que vale 20º (180º – 50º –110º).

**11.(E)** Podemos razonar así: si la fotografía de Ana ocupa 16 $cm^2$, puede medir, por ejemplo, 8 cm de largo y 2 cm de ancho ya que 8 cm × 2 cm = 16 $cm^2$. La fotocopia tendrá medidas duplicadas, es decir, 16 cm de largo y 4 cm de ancho, lo que supone una superficie de 16 cm × 4 cm = 64 $cm^2$.
Observa que si supones otras medidas para la foto de 16 $cm^2$, como por ejemplo, 4 cm de largo y 4 cm de ancho, también vale el razonamiento. La superficie de la fotocopia es la de la fotografía multiplicada por $2^2$. ¿Y si la fotocopia hubiera sido el triple de tamaño? Pues su superficie quedaría multiplicada por $3^2$.

**12.(B)** En la cuadrícula inferior derecha de cada cuadrado caen siempre los múltiplos de ocho ordenados: 8, 16, 24, ... ¡Ya tenemos la pista! El múltiplo de ocho más cercano a 2012 y menor que él es 2008 = 251 × 8. Así pues, 2008 cae en la esquina inferior derecha, y basta con ir colocando 2009, 2010, 2011 y 2012, que cae en la casilla B

**13.(A)** Como en el peor de los casos Marta debe lanzar dos dados para decidir la actividad física que va a realizar, podemos suponer que Marta lanza siempre dos dados y actúa en consecuencia. (Puede que digas "pero si sale par el primero ya no hace falta lanzar el segundo" y es cierto, pero también aceptarás que no pasa nada por lanzar el segundo dado ya que no influye si salió par el primero. De esta manera pueden salir 36 resultados y nos aseguramos de que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir.) Y ya podemos trabajar como sabemos, contaremos los casos totales (que son 36 = 6 × 6) y los casos favorables y responderemos. Los casos favorables empiezan por estos: (1,2) (1,4) (1,6) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6).... y ya vemos que van a salir 27 casos favorables, así que la probabilidad de que Marta vaya a nadar es $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

**14.(B)** En este tipo de problemas siempre buscamos subdividir la figura en partes iguales y luego basta con contar cuántas partes hay. Añadiendo las pocas líneas que mostramos vemos que la parte interior de la flor es un hexágono formado por seis triángulos, por lo que tiene 18 $dm^2$ de área. Y los pétalos de la flor lo forman 24 cuadriláteros como este: ⏢. Además cada tres de estos pétalos ocupan un triángulo, por tanto, los 24 pétalos ocuparán 8 triángulos, es decir, 24 $cm^2$. Así pues, el área de la flor es 24 + 18 = 42 $cm^2$.



**15.(D)** Hagamos primero cada una de las cuatro operaciones que aparecen en el cuadrado grande:

$$= \frac{5\cdot 4-2}{3} = 6$$

$$= \frac{3\cdot 7-9}{6} = 2$$

$$= \frac{4\cdot 4-4}{4} = 3$$

$$= \frac{3\cdot 4-8}{4} = 1$$

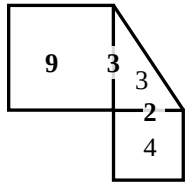
Por último, Cuadripín tuvo que hacer la operación final:

$$= \frac{6\cdot 3-2}{1} = 16$$

**16.(C)** Cada manzana que compra Ana le cuesta 1/3 de euro y luego vende cada manzana por 2/5 de euro, así pues en cada manzana gana 1/15 de euro (es la resta del precio de venta menos el precio de coste). Por tanto para ganar un euro debe comprar y vender 15 manzanas y para ganar los diez euros necesitará comprar y vender 150 manzanas,

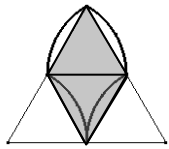
**17.(A)** Como el área del cuadrado chico es 4, su lado (que coincide con la base del triángulo) es 2. Por tanto, la altura del triángulo debe ser 3 para que su área $\frac{2\times 3}{2}$ sea 3, como indica el problema.

Ya está: el área del cuadrado grande es $3^2$, es decir, 9.




**18.(B)** Vamos a calcular cuántas parejas distintas pueden formarse con ocho chicas. La primera chica puede emparejarse con las siete restantes; la segunda chica con las seis restantes ya que ya estaba emparejada con la primera; la tercera con las cinco restantes; etc. Así se forman 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 parejas.
Con razonamiento similar vemos que pueden formarse 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 parejas con seis chicos.
Por tanto, podrán formarse un total de 28 × 15= 420 equipos.

**19.(C)** Si cogemos los dos lóbulos de la punta exteriores al triángulo y los colocamos en el interior del triángulo, vemos que la lanza ocupa justo la mitad del triángulo.
Así pues, el área de la lanza es 6 $dm^2$.



**20. (D)** Lo mejor es buscar con orden todos los posibles repartos respetando las condiciones del problema:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Gemelo 1** | **A** | **A** | **A** | **R** | **R** | **R** | **R** | **V** | **V** | **V** |
| **Gemelo 2** | **R** | **R** | **V** | **A** | **A** | **V** | **V** | **A** | **R** | **R** |
| **Jugador 3** | **R** | **V** | **R** | **R** | **V** | **A** | **R** | **R** | **A** | **R** |
| **Jugador 4** | **V** | **R** | **R** | **V** | **R** | **R** | **A** | **R** | **R** | **A** |

Hay un total de diez posibles repartos.

**21.(E)** En el casillero de Elvira están los libros de Carlos, así que ya podemos asignar con seguridad el primer casillero:

| | | |
|---|---|---|
| (F) Álvaro<br>(V) | (F) Belén<br>(V) | (F) Carlos<br>(V) |
| (F) Dani<br>(V) | (F) Elvira<br>(V) Carlos | (F) Fátima<br>(V) |

En el casillero de Álvaro pueden estar los libros de Fátima o Belén pero examinando la última pista, deducimos que debemos descartar la opción de Fátima porque dice que sus libros están encima de los de Dani y si Fátima se coloca donde Álvaro quedaría ya encima de Dani pero Dani no puede estar en un casillero correcto. ¿Se entendió?

| | | |
|---|---|---|
| (F) Álvaro<br>(V) Belén | (F) Belén<br>(V) Álvaro | (F) Carlos<br>(V) |
| (F) Dani<br>(V) | (F) Elvira<br>(V) Carlos | (F) Fátima<br>(V) |

Así pues, tenemos:
Como los libros de Fátima deben quedar por encima de los de Dani, entonces:
De esta forma el casillero de Dani quedará ocupado por los libros de Elvira.

| | | |
|---|---|---|
| (F) Álvaro<br>(V) Belén | (F) Belén<br>(V) Álvaro | (F) Carlos<br>(V) Fátima |
| (F) Dani<br>(V) | (F) Elvira<br>(V) Carlos | (F) Fátima<br>(V) Dani |

**22.(B)** Como para que Gruñón tenga la máxima cantidad de monedas posibles, los otros seis de los enanitos deben recibir el menor número de monedas posible y además diferentes, éstos serán: 1, 2, 3, 4, 5 y 6, cuya suma es 21. Como la media de los siete debe ser 7, la suma total ha de ser 49, así pues, Blancanieves debe dar a Gruñón 28 monedas.

**23.(D)** Si llamamos $A$ al cateto mayor y $B$ al menor, los datos del problema nos aportan estas igualdades: $A + B = 17$ y $A - B = 7$. Si sumamos dichas igualdades vemos que: $A + B + A - B = 17 + 7$, es decir, $2A = 24$, o sea $A = 12$ y ya podemos deducir que $B = 5$.
El lado del cuadrado que nos piden es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm, que con el teorema de Pitágoras concluimos que mide 13 cm.

**24.(C)** Este problema puede resolverse rebuscando entre los números de tres cifras que acaban en 24 hasta encontrar alguno que sea múltiplo de 24. El único que encontramos es 624, cuyas cifras suman doce.

**25.(A)** El número total de alumnos debe ser múltiplo de todos los denominadores de las fracciones que aparecen, es decir múltiplo de su mcm (8, 10, 18, 45) = 360.
El único múltiplo de 360 comprendido entre 2200 y 2800 es $2520 = 7 \times 360$.

# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* III

**1. (C)** Si llamamos $x$ a la longitud de la pieza más larga e $y$ a la de la más corta, escribiremos:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 102 \\ 2x + 9y = 96 \end{array}\right\}$$ Resolviendo el sistema, resulta $x = 21$, $y = 6$.

El cinturón de Lidia mide: $3x + 6y = 3 \cdot 21 + 6 \cdot 6 = 99$.

**2. (B)** Vemos que en cada cuadrado hay 8 números consecutivos. Si dividimos 2012 entre 8 obtenemos 251 de cociente y 4 de resto, luego el número 2012 está en el cuadrado nº 252 en la posición 4ª o 5ª (en esta última si estuviese libre una posición entre la 1ª y la 4ª).

Veamos cuál es la casilla que está libre en el cuadrado nº 252. En el cuadrado nº 1 está libre la posición 1, en el nº 2 la posición 2,…, en el nº 9 la posición 9, y vuelta a repetirse la situación anterior en los cuadrados 10º al 18º, y así sucesivamente cada 9 cuadrados. Si dividimos 252 entre 9 obtenemos 28 de cociente y 0 de resto, lo que nos dice que tenemos exactamente 28 grupos de 9 cuadrados, de lo que se deduce que el cuadrado nº 252 tiene libre la posición 9ª. Por tanto el nº 2012 ocupa la posición B.

**3. (D)** Podemos escribir: $e = v_r \cdot t_r = v_c \cdot t_c$

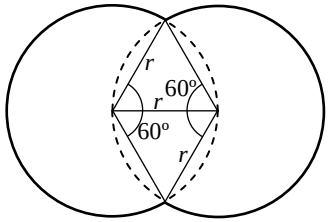
(los subíndices r y c corresponden a datos de Raúl y Carlos, respectivamente).

Con la información del problema, escribimos: $v_r \cdot 3 = (v_r - 5) \cdot (3 + 20/60)$

Resolviendo esta ecuación obtenemos: $v_r = 50$, luego $e = 50 \cdot 3 = 150$ km

**4. (E)** A la vista de la figura, el perímetro de la zona de trazo discontinuo (formada por 4 arcos de 60º) es:

$$\left.\begin{array}{l} 360^\circ \ \ldots\ldots\ 6 \\ 4 \cdot 60^\circ \ \ldots\ldots\ p \end{array}\right\} \ p = \frac{4 \cdot 60^\circ \cdot 6}{360^\circ} = 4$$




El perímetro de la zona sombreada lo obtenemos como diferencia entre el perímetro de las 2 circunferencias y el perímetro antes calculado: $2 \cdot 6 - 4 = 8$.

**5. (A)** Si sustituimos $x$ por 12 y manchón ● por $M$ tenemos:

$\frac{12}{2} - \frac{12+M}{4} = 12 - 10$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos: $M = 4$.

**6. (A)** Los números primos menores que 20 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.
Jugando con ellos, podemos escribir: 5+19 = 7+17 = 11+13, luego E + F = 24.

**7. (E)** Si llamamos $x$ al nº de amigos inicialmente previsto e $y$ al nº de nueces, escribiremos:

$$\left.\begin{array}{r} 15x + 10 = y \\ 17(x-2) + 4 = y \end{array}\right\}$$ Resolviendo el sistema por igualación, obtenemos $x = 20$.

Por tanto, el nº de amigos que vinieron a la fiesta fue: $x - 2 = 20 - 2 = 18$.

**8. (E)** De $(a+2b)(a-b)=10$, si $a$ y $b$ son enteros positivos, se tienen dos opciones:

1) $\left.\begin{array}{r} a + 2b = 10 \\ a - b = 1 \end{array}\right\}$ Resolviendo: $a = 4$, $b = 3$.

2) $\left.\begin{array}{r} a + 2b = 5 \\ a - b = 2 \end{array}\right\}$ Resolviendo: $a = 3$, $b = 1$.

El valor de $2a - b$, en la opción 1 es: $2 \cdot 4 - 3 = 5$; igual resultado se obtiene en la opción 2.

**9. (C)** El menor recibe $\frac{192}{2+4+6} \cdot 2 = 32$ €

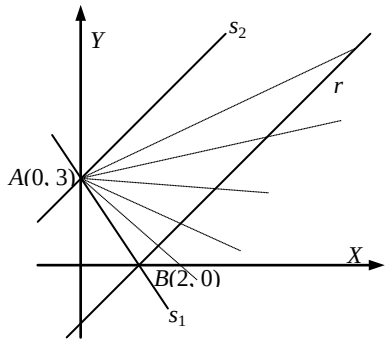
**10. (D)** De la observación de las tres construcciones Francisco ve que en la 1ª se han empleado 12 palillos, y que para obtener las siguientes se han añadido 7 palillos a la anterior:

Tenemos por tanto una progresión aritmética en la que $a_n = 12 + (n-1) \cdot 7$
Francisco prueba las cinco posibles respuestas que ofrece Juanje:

**A)** $7165 = 12 + (n-1) \cdot 7 \Rightarrow n - 1 = \frac{7165 - 12}{7} = 1021{,}8$

…, sólo en la opción **D** obtiene para n – 1, y por tanto para n, un valor entero, luego ésta es la única respuesta posible.

**11. (D)** Representamos la recta $r$: $y = x - 2$




Todas las rectas de ecuación $y = mx + 3$ pasan por el punto (0, 3).

Para que el punto de corte $(x, y)$ de estas dos rectas tenga ambas coordenadas positivas, dicho punto ha de pertenecer al primer cuadrante.

Las rectas $y = mx + 3$, que pasan por el punto $A(0, 3)$, serán cualquiera de las rectas cuyas pendientes estén comprendidas entre las de las rectas $s_1$ y $s_2$ de la figura.

La recta $s_1$ pasa por el punto $B(2, 0)$

$$\Rightarrow m \cdot 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

La recta $s_2$ es paralela a la recta $y = x - 2$, luego tiene la misma pendiente que ésta, es decir, $m = 1$.

Por tanto, $-3/2 < m < 1$.

**12. (B)** Analizamos las distintas afirmaciones:

**A.** Según **c** Ana tendría que tocar el clarinete o la guitarra. Por **b** no puede tocar la guitarra. Si fuese cierta **A,** por **a** no podría tocar el clarinete.

**B.** Según **d** Bárbara tendría que tocar un instrumento de viento (la flauta o el clarinete). Según **c** Ana tocaría el clarinete o la guitarra; esta última queda descartada por **b**, luego tocaría el clarinete, y por tanto Bárbara tocaría la flauta, siendo cierta la afirmación **B**.

Al ser cierta solo una de las afirmaciones, no sería necesario seguir probando.

No obstante, si seguimos analizando llegamos a las siguientes conclusiones:

**C.** Según **d** Clara no toca un instrumento de viento, luego la afirmación **C** no es cierta.

**D.** Según **c**, si **D** es cierta, Daniela tocaría la flauta o el violín. Según **d** Daniela tendría que tocar el violín o la guitarra; esta última no, por lo anterior, y Clara tocaría la guitarra, lo que contradice **b**.

**E.** No es cierta pues ya se vio que Bárbara toca la flauta.

**13. (D)** La altura del triángulo cuya base mide 48 cm es: $\sqrt{26^2 - 24^2} = 10$

Área de este triángulo: $\dfrac{48 \cdot 10}{2} = 240$

Como los dos triángulos tienen la misma área, la del 2º podemos expresarla como:

$\frac{b \cdot h}{2} = 240$, y de aquí : $b = \frac{480}{h}$

Como $h = \sqrt{26^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ , la expresión anterior queda: $b = \frac{480}{\sqrt{26^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}$.

De aquí se deduce que $b\sqrt{676 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 480 \Rightarrow b^2\left(676 - \frac{b^2}{4}\right) = 480^2$.

Operando nos queda: $b^4 - 676 \cdot 4\, b^2 + 230\ 400 \cdot 4 = 0$.

Resolviendo esta ecuación bicuadrada resulta: $b^2 = 400 \Rightarrow b = 20$.

**14. (D)** Elaboramos una tabla teniendo en cuenta cuál es la cifra producto.

| Cifra producto | Las otras cifras | Las tres cifras | Nº de casos |
|---|---|---|---|
| **0** | 01, 02,…, 09 | 100, 200,…, 900 | **9** |
| **1** | 11 | 111 | **1** |
| **2** | 12 | 212 {122, 212, 221} | **3** |
| **3** | 13 | 313 | **3** |
| **4** | 14, 22 | 414, 422 | 3 + 3 = **6** |
| **5** | 15 | 515 | **3** |
| **6** | 16, 23 | 616, 623 | 3 + 6 = **9** |
| **7** | 17 | 717 | **3** |
| **8** | 18, 24 | 818, 824 | 3 + 6 = **9** |
| **9** | 19, 33 | 919, 933 | 3 + 3 = **6** |

En total hay 9 + 1 + 3 + 3 + 6 + 3 + 9 + 3 + 9 + 6 = 52

**15. (C)** Veamos en qué casos el denominador de la fracción irreducible equivalente sólo tiene como factores primos el 2 y/o el 5:

$\frac{17}{2^{10}} = \frac{17 \cdot 5^{10}}{2^{10} \cdot 5^{10}} = \frac{17 \cdot 5^{10}}{10^{10}}$ es decimal exacto.

$\frac{1001}{999}$ no es decimal exacto porque el denominador es múltiplo de 3, pero no lo es el numerador.

$\frac{7821}{110} = \frac{11 \cdot 711}{11 \cdot 10} = \frac{711}{10}$ es decimal exacto.

$\dfrac{5^{-3}}{3^{-5}} = \dfrac{3^5}{5^3} = \dfrac{3^5 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 2^3} = \dfrac{3^5 \cdot 2^3}{10^3}$ es decimal exacto.

$\dfrac{625}{85} = \dfrac{125}{17}$ no es decimal exacto porque 125 no es múltiplo de 17.

La respuesta es 3.

**16. (C)** El menor número natural cuya suma de cifras es 36 es 9 999, pero no es múltiplo de 36, porque, a simple vista se ve, que no lo es de 4. El siguiente número a considerar sería el 19 998, pero tampoco es múltiplo de 4. Si ahora consideramos los números comprendidos entre 20 000 y 30 000, la suma de sus 4 últimas cifras tendrá que ser 34 y el número formado por sus dos últimas cifras tendrá que ser múltiplo de 4, condiciones que sólo cumple el número 29 988. Como este número tiene 2 cifras impares, la respuesta es 2.

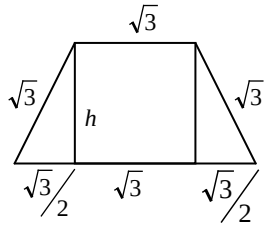
**17. (B)** Número de casos posibles: $6 \times 6 = 36$

Casos favorables: (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)

Número de casos favorables: 15

Probabilidad pedida: $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$.

**18. (E)** El trapecio tiene que ser isósceles como se muestra en la figura.




$h = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{3}{2}$.

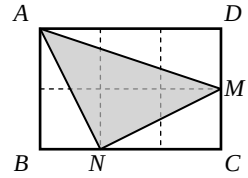
$\text{Área} = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{b}}{c}$.

Luego $a + b + c = 9 + 3 + 4 = 16$.

**19. (C)** $\dfrac{a+2b}{5b-a} = \dfrac{3}{5}$; $5a + 10b = 15b - 3a$; $8a = 5b$; $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{8}$.

**20. (C)** Área del triángulo $ANB = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 48 = 8$.

Área del triángulo $ADM = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 48 = 12$.



Área del triángulo $NMC$ = $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 48 = 8$.

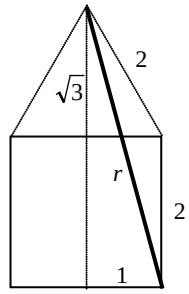
Área del triángulo $AMN$ = $48-(8+12+8)=48-28=20$.

**21. (B)** Llamando $F$ a la paga mensual de Fernando y $S$ a la de Sofía, antes de los recortes, podemos escribir:

$$\left\{\begin{array}{c} F+S=55 \\ \left(F-\frac{20F}{100}\right)+\left(S-\frac{12\cdot S}{100}\right)=46 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} F+S=55 \\ 100F-20F+100S-12S=4600 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} S=25 \\ F=30 \end{array}\right\}$$

Respuesta: $F-S=5$.

**22. (A)** Lado del hexágono = $\frac{12}{6}=2$ = Radio del hexágono.




Apotema del hexágono: $Ap=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

Radio de la circunferencia:

$r=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

**23. (C)** Como $2\,012=2\times 2\times 503$, los divisores de $2\,012$ son: 1, 2, 4, 503, $1\,006$ y $2\,012$

Número de casos posibles: $6\times 6=36$

Casos favorables: (1, 1), (2, 2), (503, 503) y $(1\,006, 1\,006)$

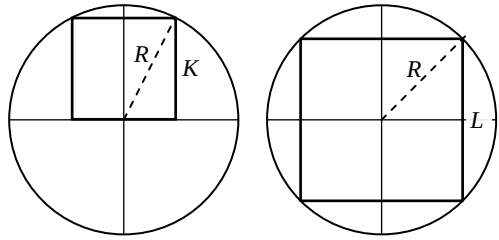
Número de casos favorables: 4

Probabilidad pedida $=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

**24. (C)** Como se observa en la primera figura,

$$R^2=K^2+\left(\frac{K}{2}\right)^2=\frac{5K^2}{4};$$

$$K^2=\frac{4R^2}{5}$$




Por lo tanto, el área del cuadrado inscrito en el

semicírculo es igual a $K^2 = \frac{4R^2}{5}$.

Observando la segunda figura, vemos que $R^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$; $L^2 = 2R^2$.

Por lo tanto, el área del cuadrado inscrito en el círculo es igual a $L^2 = 2R^2$.

La razón pedida es: $\frac{\frac{4}{5}R^2}{2R^2} = \frac{2}{5}$.

**25. (A)** Primer método.

$$\frac{61}{40} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}} = 1 + \frac{1 + \frac{a}{b}}{\left(1 + \frac{a}{b}\right) + 1} = \frac{2 + \frac{a}{b} + 1 + \frac{a}{b}}{2 + \frac{a}{b}} = \frac{2b + a + b + a}{2b + a} = \frac{3b + 2a}{2b + a};$$

$61(2b + a) = 40(3b + 2a);\ 2b = 19a;\ \frac{a}{b} = \frac{2}{19}$ .

Como estas dos fracciones son irreducibles, $a = 2$ y $b = 19$; por lo tanto $a + b = 21$.

Segundo método.
También puede obtenerse por sucesivas divisiones

$$\begin{array}{r|l} 61 & 40 \\ 21 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 21 \\ 19 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 19 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$$\frac{61}{40} = 1 + \frac{21}{40} = 1 + \frac{1}{\frac{40}{21}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{19}{21}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{21}{19}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{19}}}$$

Por lo tanto $a = 2$, $b = 19$ y $a + b = 21$.

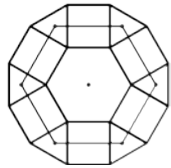
# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* IV

**1. (A)** Obsérvese que *X* e *Y* tienen los sumandos 12, 14, 16,... 100 en común, que al restar *Y* – *X* se cancelan, por lo que *Y* – *X* = 102 – 10 = 92.

**2. (E)** Sean *a*, *b* y *c* los números que ha pensado José. Descomponiendo en factores primos tenemos que $a\cdot b = 156 = 2^2\cdot 3\cdot 13$, $a\cdot c = 168 = 2^3\cdot 3\cdot 7$ y $b\cdot c = 182 = 2\cdot 7\cdot 13$. Multiplicando los tres números $(a\cdot b\cdot c)^2 = 2^6\cdot 3^2\cdot 7^2\cdot 13^2$ y tomando la raíz cuadrada $a\cdot b\cdot c = 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 13$. Con estos datos ya podemos hallar los números, $c = \dfrac{a\cdot b\cdot c}{a\cdot b} = \dfrac{2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 13}{2^2\cdot 3\cdot 13} = 2\cdot 7 = 14$ y de forma análoga $b = 13$ y $a = 12$, de modo que $a + b + c = 39$.

**3. (C)** La relación entre la apotema y el lado de un hexágono regular es la misma que entre la altura y el lado de un triángulo equilátero, esto es, $\cos 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Obsérvese que en la figura, la apotema del hexágono grande es una unidad mayor que la del pequeño. Como sabemos el lado del hexágono pequeño, podemos calcular el lado y la apotema del grande.



$A_P = L_P\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ y por tanto $A_G = A_P + 1 = \sqrt{3} + 1$, así que $L_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}}A_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}+1)$. Luego el área del hexágono es:

$$\frac{1}{2}Perimetro\cdot Apotema = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot L_G\cdot A_G = 3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}+1) =$$

$$= 2\sqrt{3}(3 + 2\sqrt{3} + 1) = 8\sqrt{3} + 12.$$

**4. (B)** Calculamos el área del triángulo *ABC* de dos maneras. Como es rectángulo:
$2\cdot Area(ABC) = BC\cdot AC = 15\cdot 20 = 300$
Tomando como base *AB* su altura es *CH* y por tanto:
$2\cdot Area(ABC) = AB\cdot CH = 25\cdot CH$
Igualando ambas expresiones deducimos que $CH = 12$ . Ahora bien, el triángulo *CHK* es semejante al *ABC* y la razón de semejanza es la razón de las hipotenusas,

esto es, $\frac{CH}{BC}=\frac{12}{25}$.

El área de *ABC* es 150 por lo que el área de *CHK* se obtiene multiplicando este valor por el cuadrado de la razón de semejanza.

$$Area(CHK)=150\cdot\left(\frac{12}{25}\right)^2=\frac{864}{25}=34{,}56\,.$$

**5. (D)** Sea *x* la longitud del tercer lado, por el teorema del coseno,

$7^2=x^2+8^2-2\cdot 8\cdot x\cdot\cos 60^o$

Reorganizando los términos y teniendo en cuenta que $\cos 60^o=\frac{1}{2}$ obtenemos la ecuación $0=x^2-8\cdot x+15=(x-3)(x-5)$ cuya única solución válida es $x=5$ pues $x=3$ resulta en un triángulo obtusángulo al ser $8^2>7^2+3^2$.

**6. (B)** Empezando con 11, hay tres claves, pues hay tres formas de colocar dos cincos y un tres.
Empezando con 13 hay tres claves, pues hay tres formas de colocar dos cincos y un uno.
Empezando con 15 hay seis claves, pues hay seis maneras de colocar un uno, un tres y un cinco.
Empezando con 31 hay tres claves, pues hay tres maneras de colocar dos cincos y un uno.
Por tanto, las 15 primeras claves se corresponden a las que empiezan con 11, 13 ,15 y 31 en ese orden, y la mayor de esas es 31551.

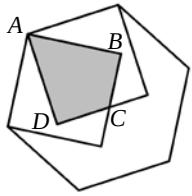
**7. (D)** Sea $S=(1^2+3^2+5^2+...+99^2)$

$$\frac{99\cdot 100\cdot(2\cdot 99+1)}{6}=1^2+2^2+3^2+...+99^2=S+(2^2+4^2+6^2+...+98^2)=$$

$$=S+4(1^2+2^2+...+48^2)=S+4\cdot\frac{48\cdot 49\cdot(2\cdot 48+1)}{6}$$

Despejando y calculando se obtiene fácilmente que $S=166\,650$.

**8. (D)** La figura sombreada es un cuadrilátero en el que *A* es un vértice del hexágono, *B* y *D* son vértices de los cuadrados y *C* es la intersección de ambos cuadrados. Obsérvese que los triángulos *CAB* y *CAD* son iguales, por lo que $Area(ABCD)=2\cdot Area(CAB)$

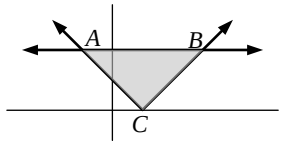



Como el ángulo interno de un hexágono regular es 120º, el ángulo *CAB* mide 30º. Así, *CAB* es un triángulo rectángulo

en *B*, en el que el ángulo en *A* mide 30º y el cateto contiguo mide 1. Así pues, el otro cateto mide $tg30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y por tanto $Area(ABCD) = 2\,Area(CAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**9. (A)** La altura de *OAC* sobre *OA* es 1, por lo que el área de este triángulo es $\frac{a}{2}$. Por la misma razón, el área de *OBC* es $\frac{b}{2}$. El área del cuadrado es 1. Así pues el área del cuadrilátero *OACB* es $\frac{1}{2}$ cuando $a+b=1$.

**10.(A)** El recinto limitado por las gráficas es un triángulo con vértices en *A*(-1, 2), *B*(3, 2) y *C*(1, 0). Si tomamos como base *AB*, cuya longitud es 4, su altura es 2, por lo que su área es 4.




**11.(C)** Sea *n* el número de alumnos de primero de bachillerato. El número de alumnos de 4º ESO es $2n$ y el de 3º ESO es $4n$. Como la media de las puntuaciones de los alumnos de 3º ESO es 12, la suma de todas sus puntuaciones es $12 \cdot 4n$. De manera análoga las sumas de las puntuaciones de 4º ESO y 1º de bachillerato son $15 \cdot 2n$ y $10n$ respectivamente. Solo queda sumar todas las puntuaciones y dividirlas por el número total de alumnos $\frac{48n+30n+10n}{4n+2n+n} = \frac{88n}{7n} = \frac{88}{7}$.

**12.(C)** Como *A* tiene 20 elementos, la unión de ambos conjuntos tendrá al menos 20 elementos. Esta cota se puede alcanzar si $B \subset A$, cosa posible pues *B* tiene menos elementos que *A*.

**13.(B)** Puesto que $|-3x| \geq 0$ se verifica que $|-3x|+5 > 5$ y la ecuación $|-3x|+5=0$ no puede tener solución.

**14.(D)** Una función *f*(*x*) tiene *OY* como eje de simetría si $f(x) = f(-x)$. La única función, de las propuestas, que lo cumple es $f(x) = x \cdot senx$ pues $sen(-x) = -sen(x)$ y por tanto $f(-x) = -x \cdot sen(-x) = -x \cdot (-senx) = x \cdot senx$.

**15.(A)** El lado paralelo al eje *OX* se corresponde con la distancia entre las rectas $x = d$ y $x = -c$ por lo que la longitud de dicho lado es $d - (-c) = d + c$, análogamente la longitud de su otro lado es $a + b$ y su área es por tanto $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

**16.(A)** Sea $x$ el número de triples, $y$ el número de canastas de dos y $z$ el número de tiros libres.
El número de puntos con triples $3x$, es igual al número de puntos con tiros de dos, es decir $3x = 2y$, por lo que $x = \frac{2}{3}y$ (1)
El número de aciertos en tiros libres $z$, superó en una unidad al número de aciertos en tiros de dos, luego $z = y + 1$ (2)
Como el número total de puntos es 61, $3x + 2y + z = 61$ (3).
Sustituyendo (1) y (2) en (3), obtenemos $61 = 3\frac{2}{3}y + 2y + y + 1 = 5y + 1 \Rightarrow y = 12$
Para terminar, usamos (3): $z = y + 1 = 13$ que es el número de tiros libres.

**17.(C)** $C + D + E = 30 = D + E + F$ por lo que $C = F = 5$.
$30 = F + G + H = 5 + G + H$ y por tanto $G + H = 25$.

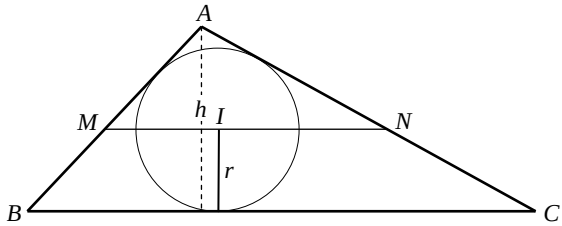
**18.(B)** Calculando y desarrollando:
$\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} = \sqrt{3(3 - 2\sqrt{2})} = \sqrt{3(2 - 2\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{3(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)$
De forma análoga $\sqrt{9 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)$.
Y la suma de ambos términos es $\sqrt{3}((\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1)) = 2\sqrt{6}$.

**19.(B)** Si $S$ es la suma de los puntos obtenidos en los dos dados, entonces el área de un círculo de diámetro $S$ es $a = \pi\left(\frac{S}{2}\right)^2$ y el perímetro es $b = \pi S$. Por lo que $a < b$ sí y sólo sí $\left(\frac{S}{2}\right)^2 < S \Leftrightarrow 0 < S < 4$. Ahora bien, al tirar dos dados sólo hay tres formas de que la suma sea menor que 4: (1,1), (1,2) y (2,1). Como hay 36 resultados posibles, la probabilidad es $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

**20.(E)** Obsérvese que como 50º > 45º, entonces
$1 > sen(50^\circ) > sen(45^\circ) = \cos(45^\circ) > \cos(50^\circ) > 0$.
Por lo que $\frac{1}{\cos(50^\circ)} > \frac{1}{sen(50^\circ)} > 1 > sen(50^\circ) > \cos(50^\circ)$. Además, al ser $sen(50^\circ) < 1$ tenemos que $\frac{1}{\cos(50^\circ)} > \frac{sen(50^\circ)}{\cos(50^\circ)}$ y por tanto $\frac{1}{\cos(50^\circ)}$ es el mayor de los valores.

**21.(C)** Como $x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y}$ entonces $x-y=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{x\cdot y}$. Puesto que $x\neq y$ podemos dividir entre $x-y$, y deducir que $x\cdot y=-1$.

**22.(B)** Como *MN* es paralelo a *BC* los triángulos *ABC* y *AMN* son semejantes. Sea *h* la altura de *ABC* sobre *BC*.




Como *MN* es paralelo a *BC* por el incentro de *ABC*, la altura de *AMN* sobre *MN* es $h-r$ siendo *r* el radio de la circunferencia inscrita. Por tanto, la razón de semejanza de ambos triángulos es $\frac{h-r}{h}$. Hallemos esta razón.

El perímetro del triángulo *ABC* es $2p = 12 + 24 + 18 = 54$ y su área $S = rp = 27r$.

Pero también $S=\frac{1}{2}BC\cdot h=12h$, por lo tanto $27r = 12h$ y como consecuencia $\frac{r}{h}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$. Entonces la razón de semejanza será, $\frac{h-r}{h}=1-\frac{r}{h}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Como el perímetro de *ABC* es 54, entonces el de *AMN* es $54\cdot\frac{5}{9}=30$.

**23.(C)** Sea *x* la longitud de la cuesta e *y* la longitud de la parte llana. Tanto a la ida como a la vuelta, la parte llana la recorre en $\frac{y}{4}$ horas, ahora bien, en el repecho tarda $\frac{x}{\frac{10}{3}}=\frac{3x}{10}$ horas a la ida mientras que a la vuelta tarda $\frac{x}{5}$ horas. Así pues el tiempo total es $\frac{y}{4}+\frac{y}{4}+\frac{x}{5}+\frac{3x}{10}=\frac{y}{2}+\frac{2x+3x}{10}=\frac{y}{2}+\frac{x}{2}$ que sabemos que es 2,5 horas y por tanto $x+y=5$ kilómetros.

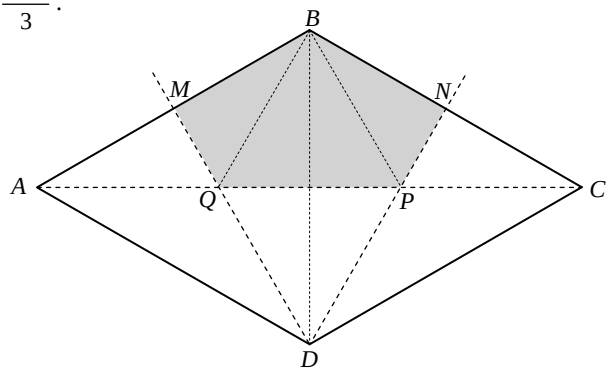
**24.(C)** Sea *P* la edad del perro en meses e *I* la edad de Isa en años. Como la edad actual en meses del perro es la mitad que la de Isa en años $I=2P$. Dentro de 5 años el perro

tendrá $P+5\cdot 12=P+60$ meses e Isa tendrá $I+5$ años. En ese momento la edad del perro (en meses) será cinco unidades mayor que el doble de la edad de Isa (en años). Es decir, $P+60=5+2\cdot(I+5)$ y sustituyendo $I=2P$ tenemos que $P+60=5+2\cdot(2\cdot P+5)=4P+15\Rightarrow 3P=45\Rightarrow P=15$.

**25.(B)** Las mediatrices de los segmentos *AB*, *BC* y *BD* determinan el conjunto de puntos que están más cerca de *B* que de cualquier otro vértice. Debemos hallar el área del pentágono *BNPQM*.

Como el ángulo en *B* es de 120º el rombo se compone de dos triángulos equiláteros de lado 2 y altura $\sqrt{3}$. Las diagonales del rombo son por lo tanto 2 y $2\sqrt{3}$ y su área $\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. Como *P* y *Q* son los baricentros de los triángulos equiláteros *BCD* y *BDA*, $PC=PD=PQ=\frac{1}{3}AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El área de $QPD=\frac{1}{3}ACD=\frac{1}{6}ABCD=\frac{1}{6}\cdot 2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. El área del pentágono *BNPQM*, como se observa fácilmente, es el doble del área del triángulo *QPD*, es decir, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



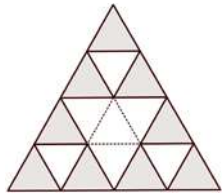
# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* I

**1.(E)** Como ha dejado en blanco $25 – (12 + 7) = 6$ problemas y contestado bien a 12, ha obtenido $12 \times 5 + 6 \times 1 = 66$ puntos.

**2.(E)** Se trata de respetar la jerarquía de las operaciones. El número mayor se obtiene con $(2 + 0 + 1)^2 = 9$.

**3.(B)** El triángulo original está dividido en 4 triángulos de igual área y, cada uno de los 4 puede ser dividido en 16 pequeños triangulitos iguales. Así mismo vemos que el central tiene sus 16 triangulitos pintados de blanco, mientras que los otros tres, que son como el de esta figura, solo tienen 7 blancos cada uno. Tenemos pues $4 \times 16 = 64$ triangulitos, de los que $16 + 7 \times 3 = 37$ son blancos. En consecuencia, la fracción pintada de blanco es: 37⁄64.



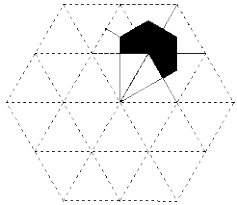
**4.(D )** Para lo que nos interesa todo sucede como si Julián regalase a Lucía 25 € por semana hasta que los dos tuviesen la misma cantidad de dinero. Dado que en total tienen 1800 €, al final cada uno tendrá 900. Lucía tiene 300 más que al principio y Julián 300 menos, por lo que, a razón de 25 € por semana, tenemos 300/25 = 12 semanas.

**5.(C)** Comencemos por las vocales. La casilla gris tendrá que tener una A o una O. Supongamos que es la A. Entonces en la segunda columna tendríamos, forzosamente, de arriba abajo: E, I, O, A, lo que nos conduciría a no poder colocar la O en la primera columna, luego en la casilla gris está la O. Para las consonantes parece más sencillo completar el cuadro, así que describiremos esquemáticamente el camino seguido: en la 1ª fila colocamos la F y la D; en la 3ª columna la B; en la 4ª columna la C y la B; en la 2ª fila la F y la B; en la 3ª fila la C y la D y, por fin, en la 4ª fila la D y la F, quedando OF en la casilla gris.

**6.(C)** Si tomó el ascensor en la planta $x$ tendremos: $x – 3 – 2 + 7 – 4 + 6 = 3$, es decir, $x + 4 = 3$ y $x = – 1$.

**7.(D)** Carlos dice que Dani es el mayor. Por el contrario, Esteban afirma que Ángel es el mayor. Uno de los dos miente y todos los demás dicen la verdad. Como ahora sabemos que Ángel dice la verdad, él no es el mayor, Esteban miente y Carlos dice verdad, por tanto Dani es el mayor.

**8.(C)** En la figura hemos resaltado uno de los 6 pétalos y la división en tres trapezoides de uno de los triángulos equiláteros. El pétalo se compone de 4 trapezoides y dos triángulos rectángulos. Por razones de simetría deducimos que cada cuadrilátero mide $1\text{dm}^2$ y, por otra parte, vemos que cada uno de los dos triángulos rectángulos es la mitad de un triángulo equilátero. Se deduce que el área de un pétalo es de $4 + 3 = 7\ \text{dm}^2$, con lo que el área de la flor será de $42\ \text{dm}^2$.



**9.(E)** Pedro tiene $7 + n$ caramelos. Como Luisa tiene el doble que Pedro, tendrá $2(7+n) = 14 + 2n$. .

**10.(E)** Si resto el perímetro del triángulo al del pentágono, le estoy quitando a éste dos lados iguales y el lado desigual, con lo que quedan dos lados iguales (dos lados de triángulo equilátero). Es decir dos lados miden 32 – 18 = 14 cm y el perímetro de uno de los triángulos será $3 \times 7 = 21$ cm.

**11.(C)** Por comodidad designaremos con $C$ al número que se comió el comenúmeros. La igualdad quedará $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{C}{4}+\frac{5}{12}$ que equivale a $\frac{7}{6}=\frac{3C+5}{12}$ lo que nos dice que $3C + 5 = 14$ y de aquí $C = 3$.

**12.(A)** Si expresamos todas las longitudes en milímetros tenemos:
4000 + 3300 + 2220 + 1111 = 10631 milímetros entre las cuatro cuerdas.
11000 – 10631 = 369 milímetros.

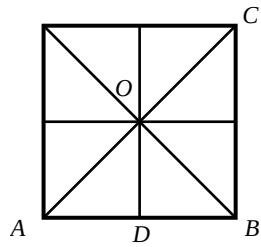
**13.(D)** En total hay 36 + 16 = 52 casillas, de las cuales $\frac{1}{3}\cdot 36+\frac{1}{4}\cdot 16 = 16$ tienen comida.
Por lo tanto la probabilidad de que caiga en una casilla con comida es $\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$.

**14.(A)** Designamos por sus iniciales, H, R y C el precio de las hamburguesas, refrescos y chocolatinas, respectivamente.
Podemos escribir: $1H + 5R = 5C$ y $2H = 2R + 1C$. Si consideramos el doble de la primera igualdad tenemos que $2H + 10R = 10C$ y mediante la segunda sabemos que $2H = 2R + 1C$, luego $2R + 1C + 10R = 10C$ que equivale a $12R = 9C$ o bien $4R = 3C$.
Retomando la primera igualdad, $1H + (1R + 4R) = 5C$ resulta que $1H + 1R + 3C = = 5C$, es decir, $1H + 1R = 2C$.

**15.(E)** El mínimo común múltiplo de 4, 6, 8 y 10 es 120 luego 120 compases después del 12 termina la sonata que tiene en total 132 compases.

**16.(C)** De cada 11 lágrimas 7 son del lagarto y 4 de la lagarta. Dividimos las 5533 lágrimas en bloques de 11 lágrimas. 5533 : 11 = 503 bloques de 11 lágrimas. Como en cada bloque la lagarta vierte 4, en total habrá vertido 503 × 4 = 2012.

**17.(D)** En efecto hay 8 triángulos pequeños como el *ADO*. Hay otros 4 como el *ABO* y otros 4 grandes como el *ABC*, en total hay 8 + 4 + 4 = 16.



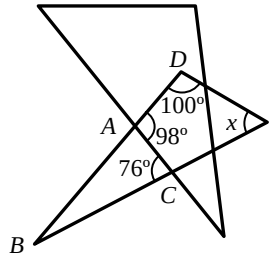

**18.(B)** El problema está propuesto el 21 de abril de 2012. La persona que habla nació en 2001, su madre 36 años antes y su abuela, 25 + 36 = 61 años antes. Por lo tanto su abuela nació en 2001 – 61 = 1940.

**19.(C)** De una cifra solamente el 3.
De dos cifras, 12, 21 y 30.
De tres cifras, 102, 111, 120, 201, 210 y 300.
En total 10.

**20.(A)** El ángulo en *A* es $B\hat{A}C = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

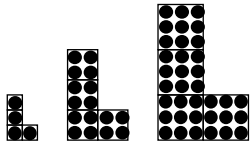
El ángulo en *B* es $A\hat{B}C = 180^\circ - (82^\circ + 76^\circ) = 22^\circ$.

Como $x + \hat{D} + \hat{B} = 180^\circ$ deducimos que
$x = 180^\circ - (22^\circ + 100^\circ) = 58^\circ$

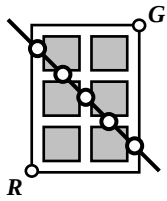



**21.(E)** Si consideramos todos los años de 360 días, el número aproximado de latidos será: 360 × 24 × 60 × 400 = 207 360 000. Aproximadamente doscientos millones.

**22.(A)** Cada una de las eles está formada por cuatro bloques cuadrados de lados, 1, 2, 3,… monedas, es decir, los bloques de cada letra tienen $1^2$, $2^2$, $3^2$,… monedas. En la quinta L, habrá por lo tanto cuatro bloques de $5^2$ monedas. En total $4 \times 5^2 = 100$.

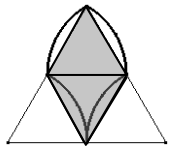


**23.(C)** Entre los dos tienen que recorrer en total 5 segmentos y como los dos llevan la misma velocidad recorrerán dos segmentos y medio cada uno. Basta buscar los puntos a los que se puede llegar recorriendo dos segmentos y medio desde *R* o desde *G*, da lo mismo.
La figura adjunta nos ayuda a encontrarlos, en total 5.




**24.(E)** Designamos mediante las iniciales de sus nombres a las cantidades de chucherías que Santi reparte entre sus primos. Entonces podemos escribir:
L = 2C, P = 4 + L o lo que es lo mismo P = 4 + 2C y M = 2E.
Como P + M = 20 resulta que 4 + 2C + 2E = 20. Dividiendo entre 2 los dos miembros obtenemos 2 + C + E = 10 luego C + E = 8.
Pero también L + C + E = 20, de donde L = 12 y entonces P = 16.

**25.(C)** Si cogemos los dos lóbulos de la punta exteriores al triángulo y los colocamos en el interior del triángulo, vemos que la lanza ocupa justo la mitad del triángulo.
Así pues, el área de la lanza es 6 $dm^2$.



# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel II*

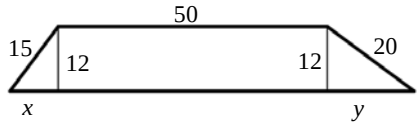
**1. (E)** Las respuestas acertadas no han variado su puntuación, siguen contando cinco puntos. La única diferencia es que este año cada respuesta en blanco vale un punto menos que el año pasado, Carmencita ha dejado en blanco 91 – 88 = 3 respuestas.

**2. (D)** Como al menos la mitad lo cree más joven, Don Retorcido tiene más de 36 años. Como dos de ellos se han equivocado por un año, podría tener 43 o 48 años pero como es un número primo, Don Retorcido tiene 43 años.

**3. (E)** No te dejes engañar y vamos poco a poco:
A) Está claro que $a \cdot b < c$ sí es posible, por ejemplo si $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$.
B) Tal vez esta te cueste más pero si $a = 0{,}1$; $b = 1$ y $c = 2$, se cumple $a \cdot c < b$.
C) $a + b < c$ es fácil de conseguir, por ejemplo, si $a = 1$, $b = 2$ y $c = 5$.
D) También es fácil ver que $b : c < a$ puede ser cierta, basta tomar $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$.
E) La única que es imposible es $a + c < b$, pues si $c > b$ y $a > 0$, $a + c > 0 + b = b$.

**4. (A)** Como todos los números primos son impares salvo el 2 y la suma de dos impares es par, tendremos que usar el 2. Pero 100 001 – 2 = 99 999 que es múltiplo de 9. Así pues 100 001 no puede escribirse como suma de dos primos.

**5. (D)** Hagamos un dibujito.



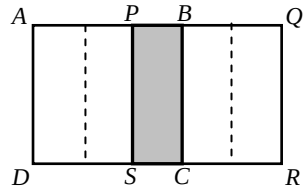

Si conoces la terna pitagórica (3, 4, 5) te será fácil deducir que $x = 9$ e $y = 16$ y el área es: $\frac{9 \cdot 12}{2} + 50 \cdot 12 + \frac{16 \cdot 12}{2} = 54 + 600 + 96 = 750$ cm$^2$.

Si no conocías la terna (3, 4, 5), también pueden calcularse los valores de $x$ e $y$ sin más que aplicar el teorema de Pitágoras.

**6. (D)** En el cálculo del volumen intervienen las tres dimensiones y como cada una de ellas se multiplica tres, el volumen ha quedado multiplicado por 3·3·3=27. Así pues, el cepillo del ratón Pérez pesa $\frac{54}{3^3} = 2$ gr.

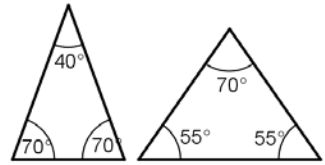
**7. (B)** Carmen puede estar a la derecha de Esteban, a su izquierda o enfrente de él. Como para cada una de estas posiciones hay dos posiciones posibles para María y Joaquín, la probabilidad de que esté enfrente es 1/3.

**8. (C)** Como $AQ = 25$ y $AB = PQ = 15$, entonces
$AP = BQ = AQ - AB = 10$ y $PB = 5$.
El rectángulo gris es la quinta parte del rectángulo $AQDR$ luego representa 1/5 =20/100 = 20% del área total.




**9. (B)** Si todos los alumnos hacen sus deberes, Don Retorcido tendrá 10 000 000 $mm^3$ de agua que son 10 litros. Pero hagamos el cambio de unidades poco a poco:
10 000 000 $mm^3$ = 10 000 $cm^3$ = 10 $dm^3$ = 0,01 $m^3$
Como el cubo de Don Retorcido es de 1 m de lado, el agua alcanzará una altura de 0,01 m = 1 cm.

**10.(B)** Pueden ocurrir tres cosas:
Que el ángulo de 70º sea el desigual, en cuyo caso Juanje habrá medido uno de los iguales que miden 55º.
Que el ángulo de 70º sea uno de los iguales. Entonces Juanje puede medir el otro igual y obtendría 70º o puede medir el desigual, que mide 40º.
La suma de todos los valores posibles es 55 + 70 + 40 = 165º




**11.(C)** Un número es múltiplo de tres si la suma de sus cifras lo es. Es fácil ver que las tarjetas que nos valen para formar múltiplos de tres son: (1, 2, 3) y (2, 3, 4).
Para calcular la probabilidad de sacar esos tríos vamos a pensar "al revés". Elegir tres tarjetas es equivalente a descartar una. Como hay cuatro posibilidades de descartar una tarjeta y solo nos valen dos de ellas (descartar el 4 o descartar el 1), la probabilidad de obtener esas ternas es 2/4 = 1/2.

**12.(C)** Antes había el 30% de 30 = 9 litros de pintura amarilla en un total de 30 litros.
Ahora hay 9 + 5 = 14 litros de pintura amarilla de un total de 30 + 5 = 35 litros.
14/35 = 2/5 = 40/100 = 40%.

**13.(D)** Pensemos un momento antes de empezar. Solo podemos usar las cifras 0, 1, 2, 3, 4 y 5 sin repetir. Para ser múltiplo de 5 la última cifra tendrá que ser 0 o 5. Además, la primera cifra no puede ser 0 y como la mayor de sus cifras tienen que ser 5, todos ellos deben tener un 5.

Si acaba en 5 es fácil pues ya nos aseguramos que está el 5: ._ _ _ 5 para la primera cifra tenemos 4 posibilidades (1, 2, 3 y 4). Una vez elegida la primera, para la segunda volvemos a tener 4 posibilidades (ahora sí vale el 0) y para la tercera tenemos 3. En total $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ posibilidades acabando en 5.
Si acaba en 0: _ _ _ 0 comencemos colocando el 5 que es obligatorio. Tengo 3 posibles posiciones para ponerlo. Un vez colocado el 5, me quedan 4 posibles números para colocar en una de las posiciones que aún está libre y, después me quedarán 3 posibles números para la otra posición. En total ay $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ posibilidades acabando en 0.
Así pues, hay en total $48 + 36 = 84$ números que cumplen esas condiciones.

**14.(A)** Como $CDCD = 101 \cdot CD$, entonces, $ABA = 101$ y, por tanto, $A = 1$, $B = 0$ y la suma pedida es $A + B = 1$.

**15.(E)** Debemos contar con cuidado:
Si el denominador es 1 tenemos cinco fracciones diferentes:
$\frac{1}{1} = 1;\quad \frac{2}{1} = 2;\quad \frac{3}{1} = 3;\quad \frac{4}{1} = 4;\quad \frac{6}{1} = 6.$
Si el denominador es 2 tenemos dos nuevas fracciones diferentes:
$\frac{1}{2};\ \cancel{\frac{2}{2} = 1};\ \frac{3}{2};\ \cancel{\frac{4}{2} = 2};\ \cancel{\frac{6}{2} = 3}.$
Si el denominador es 3 obtenemos otras tres:
$\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \cancel{\frac{3}{3} = 1};\ \frac{4}{3};\ \cancel{\frac{6}{3} = 2}.$
Si el denominador es 4 obtenemos dos más:
$\frac{1}{4};\ \cancel{\frac{2}{4} = \frac{1}{2}};\ \frac{3}{4};\ \cancel{\frac{4}{4} = 1};\ \cancel{\frac{6}{4} = \frac{3}{2}}.$
Por último, si el denominador es 6 solo obtenemos una nueva fracción:
$\frac{1}{6};\ \cancel{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}};\ \cancel{\frac{3}{6} = \frac{1}{2}};\ \cancel{\frac{4}{6} = \frac{2}{3}};\ \cancel{\frac{6}{6} = 1}.$
Así pues, podemos formar 13 fracciones distintas.

**16.(B)** En la descomposición en factores primos de un cuadrado perfecto todos los exponentes deben ser pares y en la de un cubo perfecto todos deben ser múltiplos de tres.
Como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$:
- para lograr un cuadrado debemos añadir un 2 y un 5, entonces $x = 2 \cdot 5 = 10$ y el cuadrado perfecto es 3600.
- para lograr un cubo debemos añadir un 3 y dos 5, entonces $y = 3 \cdot 5^2 = 75$ y el cubo perfecto es 27000.

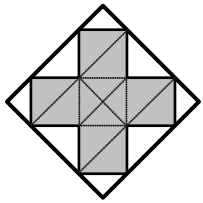
El número pedido es $x + y = 10 + 75 = 85$.

**17.(B)** Por las primeras veinte cajas pago $5 \cdot 20 = 100$. Me quedan 128 con las que puedo comprar las cajas a 4 € así que compraré $128 : 4 = 32$ cajas más.
En total pagaré $20 + 32 = 52$ cajas. Además, por cada seis me regalan una. Como $52 : 6 = 8{,}66\ldots$ me regalarán 8 cajas.
En total me llevaré $52 + 8 = 60$ cajas de bolígrafos.

**18.(E)** Un número impar tienen la forma $2k + 1$, así que nuestro número se puede escribir como $60 \cdot (2k + 1) + 12 = 120k + 60 + 12 = 120k + 72$. Así pues, si lo dividimos entre 120 el resto será 72.

**19.(D)** Al lanzar dos dados hay 36 casos posibles. Contemos los casos favorables:
Si en el primer dado sale un 1, solo hay un caso favorable: (1, 1).
Si en el primer dado sale un 2, hay dos casos favorables (2, 1) y (2, 2).
Igualmente, si en el primer dado sale un 3, hay tres casos favorables, si sale un 4, hay cuatro, si sale un 5, hay cinco y, por último, si sale un 6, hay seis.
Así pues, hay $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ casos favorables de 36 posibles y, por tanto, la probabilidad pedida es $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

**20.(D)** Tracemos algunas líneas estratégicas. Se observa sin dificultad que la cruz está compuesta de cinco cuadrados iguales, cada uno de ellos de $25:5 = 5$ cm$^2$ y que el en el cuadrado hay 8 de esos cuadrados (los cinco de la cruz, uno que se forma con los cuatro triangulitos blancos de los vértices y otros dos que se forman con los cuatro triángulos blancos de los lados). Luego el área del cuadrado es $5 \cdot 8 = 40$ cm$^2$.



**21.(B)** Calculemos las unidades de las primeras potencias de 7 para ver si observamos alguna pauta:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $7^1 = 7$ | $7^2 = *9$ | $7^3 = **3$ | $7^4 = ***1$ |
| $7^5 = ****7$ | $7^6 = *****9$ | $7^6 = *****3$ | $7^8 = ******1$ |
| $7^9 = *\ldots*7$ | $7^{10} = *\ldots*9$ | $7^{11} = *\ldots*3$ | $7^{12} = *\ldots*1$ |

Las unidades se van repitiendo en bloques de 4, así que solo nos resta ver qué lugar ocupa $7^{2012}$ en esta distribución.
Observa que en la primera columna están las potencias cuyo exponente da resto 1 al dividirlo entre 4, en la segunda las que dan resto 2, en la tercera las que dan resto 4, y en la cuarta, las que dan resto 0 al dividirlas entre 4. Como $2012 = 4 \cdot 503$, el resto de la división es 0 y, por tanto, la cifra de las unidades de $7^{2012}$ es 1.

**22.(D)** Comenzamos a hacer la división y observamos qué pasa:

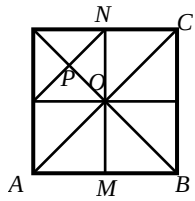
```
20000000001 | 6
 20           33… 3
  20
  ……
        21
         3
```

Es fácil darse cuenta de lo que pasa y, por tanto, sabemos que la última cifra que tendremos que dividir es 21, por tanto, el resto será 3.

**23.(E)** Imagina que empiezas con los dos palillos de la izquierda. Para hacer la primera columna de dos casillas tendrás que añadir 5 palillos (2 + 5), para la segunda, otros 5, (2 + 5 + 5= 2 + 5 · 2), para la tercera, otros 5 palillos (2 + 5 + 5 + 5 = 2 + 5 · 3) y así sucesivamente.

Así pues, para hacer la enésima casilla usaremos 2 + 5$n$ palillos. Si hemos usado 2012 palillos, como 2 + 5$n$ = 2012, 5$n$ = 2010 y, por tanto $n$ = 402 lo que significa que hemos hecho 402 columnas de dos filas cada una y, por tanto, podremos guardar 2 · 402 = 804 insectos.

**24.(C)** Tenemos que contar con cuidado. Hay 4 triángulos de pequeños (como el *ONP*), 10 triángulos medianos (como el *AMO*), otros 4 algo más grandes (como el *ABO*) y 4 cuadrados muy grandes (como el *ABC*). Así pues, en total hay 4 + 10 + 4 + 4 = 22 triángulos.



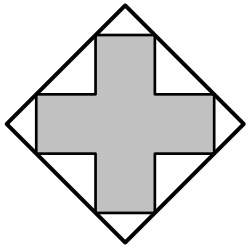

**25.(D)** Primero observamos que 195 = 3 · 5 · 13 así que para ser múltiplo de 195 hay que serlo de 3, de 5 y de 13. Ahora vamos probando con cada una respuestas:
Como 2208 + 132 = 2340 que es múltiplo de 3 y 5 (se ve a ojo) y también lo es de 13 de manera que la opción **A)** que cumple la primera condición.
Pero 2208 – 5 = 2203 no es múltiplo de 37, de manera que no nos sirve.
El número 2013 + 132 = 2145 también cumple la primera condición pero no la segunda pues el resto de 2013 entre 37 es 15 así que tampoco vale.
1855 + 132 = 1987 que no es múltiplo de 5.
1818 + 132 = 1950 = 195 · 10 y 1818 – 5 = 1813 = 37 · 49 de manera que sí nos vale.
Por último comprobamos que la opción **E**) no cumple la condición puesto que 1781 + 132 = 1913 no es múltiplo de 5.
La única opción posible es la **D**).
Agradecemos a Don Retorcido el dulce final.

# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* III

**1. (B)** Tenemos que $m + n = m \cdot n$, y así, $n = mn - m = m \cdot (n-1)$, y así $n$ es 0 (0 es un número especial en la teoría de la divisibilidad) o es divisible por $n - 1$, lo cual obliga a que $n - 1 = \pm 1$, y de ahí $n = 2$ o de nuevo $n = 0$. El ser $n = 0$ conlleva que también $m = 0$. Si $n = 2$ entonces $m + 2 = 2m$, y de ahí, $m = 2$. Luego hay dos soluciones.

**2. (B)** El área de uno de los cuadraditos que forman la cruz es de 8 cm$^2$**.** Para llenar el cuadrado circunscrito debemos añadir los cuatro triángulos esquinas que equivalen a un cuadradito y los cuatro triángulos intermedios que ocupan como otros dos cuadraditos. Luego el área del cuadrado es de $8 \cdot 8 = 64$ cm$^2$**.** Luego el lado es 8 y el perímetro 32 cm.



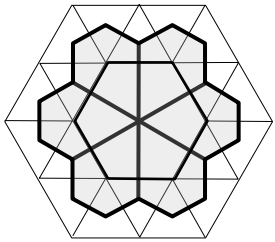
**3. (E)** El precio del piso ha sido multiplicado por $1{,}1 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 = 1{,}07217$, luego su precio ha aumentado un poco más del 7%.

**4. (A)** Llamando $a$ al dinero que tiene Ángel, y $b$, $c$, $d$ a los dineros de Bea, Carlos y Dani, tenemos el sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 37 \\ a + d = 20 \\ c + d = 25 \\ b + c + d = 43 \end{cases}$$

Echando una ojeada vemos que de las dos últimas ecuaciones podemos deducir fácilmente que b = 18 €. Entonces a + c = 19, y restando esta ecuación a la tercera obtenemos $d - a = 6$. Y como, $a + d = 20$, resulta ser $d = 13$, y $a = 7$.

**5. (D)** Un pétalo de la flor está compuesto por un sexto del hexágono (lo que equivale a un triángulo) y cuatro tercios de un triángulo. Así el área de un pétalo es $\frac{7}{3}$ de la de un triángulo, y por tanto la flor tiene un área equivalente a 14 triángulos. Como nos dicen que el hexágono (6 triángulos) tiene de área 24 dm$^2$**,** a nuestra flor le corresponden 56.



**6. (C)** $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{m\cdot n}$, y sabemos que $m+n=-\frac{b}{a}=\frac{12}{2}=6$; $m\cdot n=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$, de forma que $m^2+n^2=(m+n)^2-2m\cdot n=36-3=33$, y el cálculo pedido es 22.

**7. (B)** Habrá que usar menos baldosines cuanto más grandes sean estos. Pero al ser cuadrados el lado deberá ser divisor del largo y ancho del patio, si bien midiendo todo en cm. Así el baldosín fetén tendrá por lado el máximo común divisor de 1000 y 600 es decir 200 cm. Como no hay de ese tamaño, cogemos el mayor de los posibles divisor de 200, es decir 8. Como $1000\times 600=8\times 125\times 8\times 75$, el número de baldosines necesarios es $125\times 75 = 9375$.

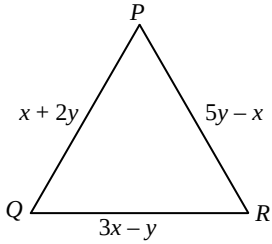
**8. (E)** A ojo vemos que $a = 2$ y $b = 3$, y el cálculo, $2^2\cdot\left(\left(2^3\right)^3-3^2\right)=4\cdot(512-9)=2012$, da un número cuyas cifras suman 5.

**9. (A)** El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$, y el área de la superficie esférica es $4\pi r^2$. Así, según el enunciado, debemos buscar un entero *r* que su cuadrado multiplicado por 4 tenga cuatro cifras, y que $\frac{4}{3}r^3$ sea también un entero de cuatro cifras. Lo primero sitúa *r* entre $\sqrt{250}$ y $\sqrt{2500}$ (debe ser mayor que 15) y lo segundo nos indica que *r* es múltiplo de 3 y que está entre $\sqrt[3]{750}$ y $\sqrt[3]{7500}$ (debe ser menor que 20). La divisibilidad por 3 hace que *r* sea 18.

**10. (D)** La única forma de que una potencia de 2 coincida con una potencia de 5, es que el exponente de ambas sea 0. Así que buscamos una raíz común en ambos exponentes. Podemos resolver ambas ecuaciones y hallar la solución común, pero al ser una raíz entera deberá ser divisor de 4 y –12. Un poco de tanteo nos hace caer en la cuenta de que la solución es 4.

**11.(B)** Debemos resolver $10a + b = 3ab$, siendo *a y b* cifras. Así que $b = a(3b – 10)$. Entonces *b* debe ser mayor que 3 y menor que 7. Para $b = 4$ se obtiene $a = 2$. Para $b = 5$ se obtiene $a = 1$. Sin embargo para $b = 6$ no hay solución para *a*. Luego los dos números son 24 y 15, cuyo producto es 360.

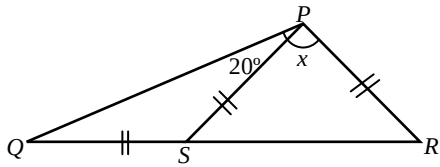
**12.(D)** Podemos resolver sustituyendo los valores propuestos en las expresiones algebraicas de los lados. Otra forma de hacerlo será estudiando el sistema $\begin{cases} x+2y=5y-x \\ x+2y=3x-y \end{cases}$, o el equivalente, $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases}$, en el que sobra una ecuación y nos dice que las soluciones son aquellas en las que $2x = 3y$, lo que excluye como solución: $x = 10$, $y = 6$.




**13.(A)** Estamos multiplicando un número PQPQ por otro RRR, es decir multiplicando PQ·101 por R·111. Ahora bien 101·111 =11211. Tanteando o dividiendo llegamos a la conclusión de que PQ·R = 57. Dos descomposiciones en dos factores son posibles: 19·3 y 57·1, y así tenemos que o bien, P = 1, Q = 9, R = 3, o bien, P = 5, Q = 7, R = 1. En ambos casos la suma P + Q + R =13.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **P** | **Q** | **P** | **Q** |
| **×** | | | **R** | **R** | **R** |
| **6** | **3** | **9** | **0** | **2** | **7** |

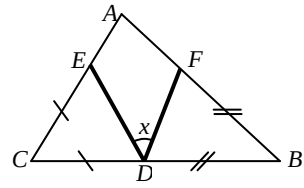
**14.(E)**




El ángulo en *Q* es de 20º ya que *PQS* es isósceles, y eso hace que en ese mismo triángulo el ángulo en *S* sea de140º. El ángulo en *S* del triángulo *PSR* mide 40º, igual que el ángulo en *R* y de ahí el ángulo *x* es de 100º.

**15.(C)** Sumando las tres ecuaciones: $4x - y = 5$, $4y - z = 7$ y $4z - x = 18$, obtenemos $3x + 3y + 3z = 30$. Así que la respuesta es 10.

**16.(C)** Los ángulos *C* y *B* suman 100º. *C* y *D* son los ángulos distintos en los triángulos isósceles *CDE* y *DBF*. Los ángulos iguales dos a dos de esos triángulos suman 360º – 100º = 260º, y por tanto 130º la pareja de ángulos que con *x* forman un ángulo llano. Así $x = 50º$.

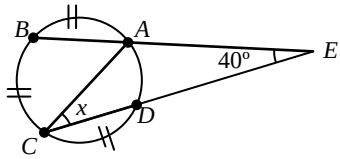


**17.(D)** $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{-1}\cdot\left[(2x)^{-1}+\left(\frac{y}{2}\right)^{-1}\right]=\frac{2}{4x+y}\cdot\left[\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}\right]=\frac{2}{4x+y}\cdot\left[\frac{y+4x}{2xy}\right]=\frac{1}{xy}$

siempre que $x$, $y$ , $4x+y$ sean distintos de 0.

**18.(B)** $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$**.** Los sumandos de esta expresión son 1 o – 1, pero el valor del cuarto sumando está asociado al producto de los otros tres. Por tanto no puede haber un número impar de signos negativos. Las posibilidades son cuatro unos, dos unos positivos y dos negativos, y cuatro unos negativos.

**19.(B)** Como el ángulo exterior $E$ mide 40º, la diferencia entre los arcos $BC$ y $AD$ es de 80º.
Por otro lado 3 $BC$ + $AD$ = 360º.
Así 240º + 4 $AD$ = 360º.
Tenemos entonces que $AD$ = 30º = 2$x$.

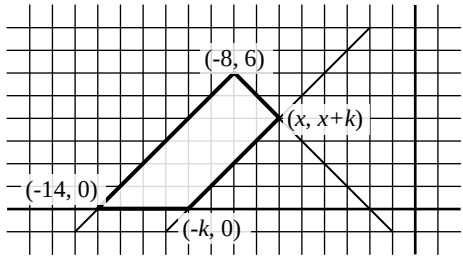



**20.(E)** Si $(3x-1)^7=a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$**,** la suma $a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$, se obtiene cuando sustituimos $x$ por 1 en el segundo miembro de la identidad y por tanto cuando lo hacemos en el primer miembro. La suma pedida es $2^7$ =128.

**21.(C)** La edad de Joaquín, $x$, será 16 + $y$ + $z$, siendo, $y$, $z$ , las edades de María y Mar.
Además $x^2=1632+(y+z)^2$ , o lo que es igual, $x^2-(y+z)^2=1632$ , o bien,
$1632=(x+y+z)\cdot(x-(y+z))=(x+y+z)\cdot 16$ , luego $(x+y+z)=102$.

**22.(D)** Vemos los restos de las primeras potencias de 7 con respecto a 9.
$7 \longrightarrow 7$, $49 \longrightarrow 4$, $343 \longrightarrow 1$. Al dividir 343 entre 9 da resto 1 y así $343^8 = 7^{24}$ también dará resto 1, luego $3^{25}$ da resto 7.

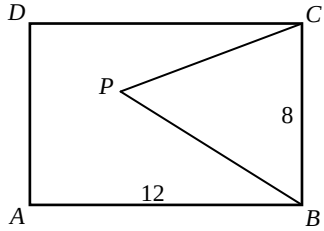
**23.(A)** Hacer un dibujo nos aclarará un poco las cosas. El trapecio se puede obtener como diferencia de dos triángulos, el grande de base 12 y altura 6, y el pequeño de base $k-2$ y altura, $-1+\frac{k}{2}$ (altura del punto de intersección de las rectas, $y=x+k$, $y=-x-2$) Así el área



del trapecio es $36-\frac{(k-2)^2}{4}$.

Si esta área debe ser 20, entonces $\frac{(k-2)^2}{4}=16$, y de ahí k = 10.

**24.(B)** Entendemos que el punto *P* tiene con igual probabilidad cualquier longitud entre 0 y 12. Para que el triángulo *PBC* tenga área mayor que 20, la altura de *P* sobre *BC* debe ser mayor que 5, y por tanto la longitud de P debe ser menor que 7. Esta probabilidad es de $\frac{7}{12}$.




**25.(C)** En los 50 términos de la sucesión, 1, 3, –5, 7, 9, –11, 13, 15, –17, 19,…, están los 17 primeros de 1, 7, 13, ... ; los 17 primeros de 3, 9, 15, ...; y los 16 primeros de -5, -11, -17, ...

$1+7+13+...+97=\frac{97+1}{2}\cdot 17=49\cdot 17=833$

$3+9+15+...+99=833+34=867$

$-5-11-17-...-95=-867+101-34=-800$

La suma de esos resultados es $833+867-800=900$

También podríamos obtener la suma como:

$1+3+(-5+7+9)+(-11+13+15)+...+(-95+97+99)=4+11+17+...+101=$

$=4+\frac{101+11}{2}\cdot 16=900$.

# XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* IV

**1. (E)** Si cambió el orden de las cifras de a y obtuvo para el producto 161, multiplicó 23 por 7, cuando debía haber multiplicado 32 por 7; de modo que el resultado correcto es 224.

**2. (B)** Teniendo en cuenta que el dominio de la función inversa de una función coincide con el recorrido (o imagen) de ésta, como $3^x$ es un número positivo, el recorrido de $f(x) = 3^x + 5$ es el conjunto $(5,+\infty)$ , y este es también el dominio de su inversa .

**3. (A)** La ecuación $\sqrt{5|x|+8} = \sqrt{x^2-16}$ es equivalente a $x^2 - 5|x| - 24 = 0$ .

Si $x > 0$, la ecuación es $x^2 - 5x - 24 = 0$, que tiene como soluciones 8 y –3, no siendo válida esta última porque no es mayor que 0.

Si $x < 0$, la ecuación es $x^2 + 5x - 24 = 0$, que tiene como soluciones –8 y 3, no siendo válida esta última porque no es menor que 0.

El producto de las soluciones de la ecuación original es –8×8 = –64

**4. (A)** Si $f(x) + 2f(-x) = sen\ x$ para todo número real *x*, entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ \text{II} & f\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{array}\right\}$$

. Si sumamos estas dos ecuaciones obtenemos: $3f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , de donde $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Sustituyendo en II, tenemos $-f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

**5. (A)** El primer día hicieron $\frac{1}{3}x+2$. El segundo día hicieron $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x-2\right)+4$. Finalmente el tercer día hicieron 8 problemas, por tanto $\frac{1}{3}x+2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x-2\right)+4+8=x$. De aquí $x=30$.

**6. (D)** Los triángulos ABC y EDB son semejantes, así tenemos que $\frac{ED}{3}=\frac{DB}{4}$.

El área del triángulo ABC es $\frac{3\times 4}{2}=6$. De modo que el área del triángulo EDB es

$$\frac{ED\times DB}{2}=\frac{6}{3} \Rightarrow \frac{DB\times\frac{3}{4}DB}{2}=2 \Rightarrow DB^2=\frac{16}{3} \Rightarrow DB=\frac{4\sqrt{3}}{3}2.$$

**7. (B)** El mayor elemento del conjunto es $10^{10}$, y la suma de los 10 restantes es $\frac{10^{10}-1}{10-1}=\frac{10^{10}-1}{9}$. Por tanto el cociente pedido es $\frac{10^{10}}{\frac{10^{10}-1}{9}}=9\times\frac{10^{10}}{10^{10}-1}\approx 9$

**8. (D)** Puesto que 12 × 4 = 48, **p**or el "Principio del Palomar" podemos afirmar que al menos 5 personas de entre 52 cumplen años el mismo mes.

**9. (B)** En una vuelta completa, la diferencia entre la distancia recorrida por fuera y la recorrida por dentro es $2\pi(R+6) - 2\pi R = 12\pi$. Si tarda 6 s. más en recorrer la vuelta por fuera, lleva una velocidad de $2\pi$ m/s.

**10. (D)** El producto es positivo si se multiplican dos números positivos o dos negativos. La probabilidad de que el producto sea de dos números positivos es $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ mientras que la probabilidad de que el producto sea de dos negativos es $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$. Por tanto, la probabilidad de que el producto sea positivo es $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

**11. (C)** Llamando *x* al largo del parking e *y* a su ancho, tenemos $\left.\begin{array}{c} x\cdot y=168 \\ x^2+y^2=625 \end{array}\right\}$.Si a la segunda ecuación le sumamos el doble de la primera, tenemos $(x+y)^2=961$. Por tanto $x+y=31$, y el perímetro es 62.

**12. (E)** La propiedad I es falsa, puesto que

$$x@(y+z)=\frac{x+(y+z)}{2}\neq\frac{x+y}{2}+\frac{x+z}{2}=(x@y)+(x@z).$$

La propiedad II es verdadera, puesto que

$$x+(y@z)=x+\frac{y+z}{2}=\frac{2x+y+z}{2}=\frac{x+y+x+z}{2}=(x+y)@(x+z).$$

Por último, la propiedad III también es verdadera, ya que

$$x@(y@z)=x@\frac{y+z}{2}=\frac{x+\frac{y+z}{2}}{2}=\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{x+z}{2}}{2}=\frac{(x@y)+(x@z)}{2}=(x@y)@(x@z)$$

**13. (A)** Se puede calcular la probabilidad de que el dardo caiga en la zona sombreada haciendo el cociente entre el área del cuadrado y el área total del octógono. El lado del cuadrado es el mismo que el lado del octógono, l. Y el área del octógono es $A=\frac{2l^2}{\sqrt{2}-1}$. Por tanto la probabilidad es $p=\frac{l^2}{\frac{2l^2}{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

**14. (C)** Como el triángulo ABE es rectángulo, recto en A, al ser el cociente entre los dos ángulos agudos 4/5, estos miden 40º y 50º respectivamente. Como las cuerdas AB y ED son paralelas, el ángulo DEB mide también 50º. Por tanto los arcos DE, EA y AB suman 80º + 100º + 80º = 260º. Y el ángulo BCD es la mitad de esta suma, es decir 130º.

**15. (E)** La ecuación de $r_2$ corresponde a la función inversa (ya que es simétrica respecto de la gráfica de la función identidad). Así $x = a \cdot y + b \Rightarrow \quad y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

**16. (C)** Si las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son números enteros que están en progresión aritmética, los lados son de la forma 3k, 4k, 5k. De los números propuestos sólo hay uno que sea múltiplo de 3 ó 4 ó 5. Ese número es 81

**17. (E)** Cuando $M$ crece un $p$% y después decrece un $q$%, se convierte en $M \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{q}{100}\right)$. Para que esta cantidad sea mayor que $M$ debe ser

$$\left(1+\frac{p}{100}\right) \cdot \left(1-\frac{q}{100}\right) > 1 \Rightarrow 1+\frac{p}{100}-\frac{q}{100}-\frac{pq}{10000} > 1 \Rightarrow \frac{p}{100} \cdot \left(1-\frac{q}{100}\right) > \frac{q}{100}$$

$$\Rightarrow \quad p > \frac{100q}{100-q}$$

**18.(B)**. Si $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$, entonces $(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$ y tomando logaritmos tenemos: $\log_b 2 \cdot \log(2x) = \log_b 3 \cdot \log(3x)$ . Dividiendo por $\log_b 10$, cambiamos los logaritmos en base $b$ a logaritmos decimales, y así tenemos

$$\log 2 \cdot (\log 2 + \log x) = \log 3 \cdot (\log 3 + \log x) \Rightarrow \log x = -\log 2 - \log 3 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

**19.(D)** $(a+b+c)\cdot(a+b-c)=3ab \;\Rightarrow\; (a+b)^2-c^2=3ab \;\Rightarrow\; a^2+b^2-c^2=ab$,

siendo entonces $\cos\hat{C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$. El ángulo vale 60º

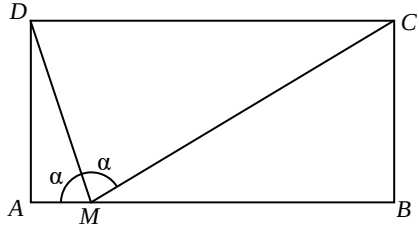
**20.(B)** Puesto que los tres triángulos son rectángulos y tienen longitudes de sus lados enteras, estos forman ternas pitagóricas. Siendo AB = 3, la única terna en la que interviene 3 es 3, 4, 5.Así AE = 4 y BE = 5. Además de en esta, 5 interviene en la terna 5, 12, 13, de modo que EC = 12 y BC = 13. Por último 12 interviene en las ternas de la forma 3k, 4k, 5k y en 12, 35, 37. Como dicen que no hay triángulos semejantes, no puede ser 3k,4k,5k, siendo CD = 35 y ED = 37. El área resulta $A=\dfrac{3\cdot4}{2}+\dfrac{5\cdot12}{2}+\dfrac{12\cdot35}{2}=246$. Y la suma de sus cifras es 12

**21.(C)** El área de la región sombreada es el doble del área de un segmento circular de ángulo central $\dfrac{2\pi}{3}rad$ en un círculo de radio $R$ = 2. $A_{segmento}=A_{\text{sec }tor}-A_{triángulo}$

$$\Rightarrow A_{segmento}=\frac{s_{arco}\cdot R}{2}-\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\alpha\cdot R\cdot R}{2}-\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\frac{2\pi}{3}\cdot 4}{2}-\frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

Y el área sombreada es el doble: $A=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$

**22.(E)** Si $A\hat{M}D=C\hat{M}D=\alpha$, en la figura tenemos $C\hat{M}B=M\hat{C}D=180^\circ-2\alpha$, por ser alternos internos. Así $C\hat{D}M=\alpha$ y el triángulo $CMD$ es isósceles, siendo CM = 6. En $BMC$, $sen\, C\hat{M}B=\dfrac{3}{6}\Rightarrow C\hat{M}B=30^\circ\Rightarrow\alpha=75^\circ$



**23.(D)** Las raíces cuartas de – 4 son $\left(\sqrt{2}\right)_{45^o}$, $\left(\sqrt{2}\right)_{135^o}$, $\left(\sqrt{2}\right)_{225^o}$, $\left(\sqrt{2}\right)_{315^o}$. Por tanto el radio de la circunferencia circunscrita al cuadrado es $\sqrt{2}$ mientras que el radio de la circunferencia inscrita es 1. El área de la corona circular pedida es $\pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi$

**24.(C)** Si hay 19 jugadores de élite y este número viene dado por la fórmula $2^{1+\left[\log_2 (N-1)\right]} - N$, al número total de jugadores le falta 19 para ser una potencia de 2. Como hay menos de 120 jugadores, los valores posibles son:

128 – 19 = 109; 64 – 19 = 45; 32 – 19 = 13.

Pero la parte entera del logaritmo en base 2 de 12 es 3, que sumado a 1 da 4, que no coincide con el exponente de 2 para 32. Por tanto, la tercera posibilidad no es válida, y la suma de todas las posibilidades válidas es 109 + 45 = 154

**25.(C)** Tenemos los siguientes datos:

$$\left.\begin{array}{c} f(1) = a+b+c = 0 \\ f(7) = 49a+7b+c \in [51,59] \subset Z \\ f(8) = 64a+8b+c \in [71,79] \subset Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 48a+6b \in [51,59] \subset Z \\ 15a+b \in [12,28] \subset Z \end{array}\right\} \Rightarrow 42a \in [13,117] \subset Z$$

.

Esta última condición la cumplen sólo dos valores de *a*, *a* = 1 y *a* = 2.

Si $a = 1, \quad 6b \in [3,11] \subset Z$, y *b* sólo puede ser 1, de modo que c sólo puede ser – 2, pero esta solución no vale porque $f(8) = 64 + 8 - 2 = 70 \notin [71,79]$.

Si $a = 2, \quad 6b \in [-45,-37] \subset Z$, y *b* sólo puede ser – 7, de modo que c = 5. La función es $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$, y $f(100) = 19305 \in (15000,20000) \Rightarrow k = 3$

# Participantes y relación de ganadores del XVI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En esta convocatoria del Concurso de Primavera la participación de estudiantes en la primera fase fue superior a 35000. De los 428 centros participantes se inscribieron 3490 estudiantes para la segunda fase aunque finalmente realizaron la prueba 2966. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | NIVEL 2 | | NIVEL 3 | | NIVEL 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | | 1º ESO, 2º ESO | | 3º ESO, 4º ESO | | 1º B, 2º B | |
| **nº de inscripciones** | 223 | 574 | 449 | 662 | 510 | 506 | 354 | 212 |
| **nº de participantes** | 207 | 521 | 399 | 566 | 430 | 399 | 280 | 164 |
| **nº centros** | 105 | 172 | 236 | 265 | 224 | 224 | 150 | 96 |

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

1. Pablo Soto Martín (5º Primaria) CEIP Miguel de Cervantes
2. Miguel Miret Ortega (6º Primaria) Liceo Francés
3. Lucas Cuesta Araujo (5º Primaria) CEIP La Latina

**NIVEL II**

1. Berta García González (2º ESO) IES San Juan Bautista. Madrid
2. Pablo del Olmo de Casas (1º ESO) IES Las Canteras
3. Marcos Vázquez Verdejo (1º ESO) Colegio Divina Pastora
3. Daniel Puignau Chacón (2º ESO) Liceo Francés

**NIVEL III**

1. Miguel Barrero Santamaría (4º ESO) IES Alameda de Osuna. Madrid
2. Álvaro Robledo Vega (3º ESO) Colegio Peñalar. Torrelodones
3. Álvaro Rodríguez García (4º ESO) Colegio Gredos San Diego
3. Ángel Prieto Nastlin (4º ESO) Liceo Francés

**NIVEL IV**

1. Jaime Mendizábal Roche (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu. Madrid
2. Pablo Esteban de la Iglesia (1º Bchto) Colegio Fray Luis de León. Madrid
3. Víctor García Herrero (2º Bchto) IES Ortega y Gasset

# XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

La suma de dos números naturales es 371 y el cociente entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisores 430. ¿Cuáles son esos números?

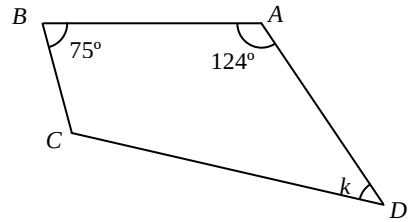
**Problema 2.**

En un triángulo rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es de 2,8 cm y el radio de la circunferencia circunscrita es de 9,1 cm. Calcula el perímetro del triángulo.

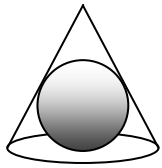
**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
¿Cuál es el mayor número de seis cifras, representado por *ELEVEN*, en el que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales cifras iguales, que verifica que es múltiplo de 11?

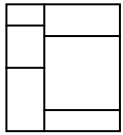
**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *k* la suma de las cifras de *T*.
En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está a escala, $AB = AC$, $\hat{A} = 124^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$ y $\hat{D} = k^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo $B\hat{D}C$ ?



**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. Una esfera de *T* cm de radio está inscrita (perfectamente ajustada) en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de su base. ¿Cuál es, en cm, la altura del cono?



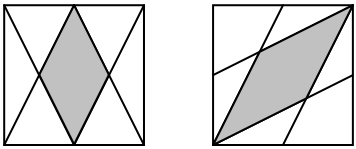
**Problema 1B.** (1 punto)
Dividimos un cuadrado en seis rectángulos como se indica en la figura. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 120 cm, ¿cuál es. en $cm^2$, el área del cuadrado?



**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *n* la suma de las cifras de *T*. El número de cinco cifras 24X8Y es divisible por 4, 5 y *n*. ¿Cuál es la suma de las cifras X e Y?

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. El cuadrilátero *PQRS* está inscrito en una circunferencia de tal manera que *PR* es un diámetro. Si las longitudes de *PQ*, *QR* y *RS* son 60, 25 y 13·*T*, ¿cuál es la longitud del lado *SP*?

**Problema 4.** (5 puntos)
Sean *a* y *b* las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. La figura muestra dos rombos sombreados inscritos en cuadrados iguales de lado *a* – *b*. Cada uno de ellos se han formado mediante segmentos de extremos un vértice del cuadrado y el punto medio de uno de los lados. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de dichos rombos?



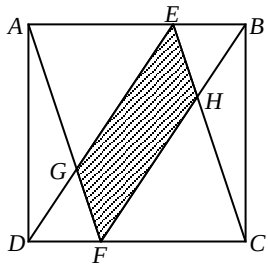
**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

Al escribir una a continuación de otra las edades de Alicia y Bruno resulta un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si hiciéramos lo mismo, en ese orden, dentro de 31 años resultaría un número también de cuatro cifras y también cuadrado perfecto.
¿Cuáles son las edades actuales de Alicia y de Bruno?

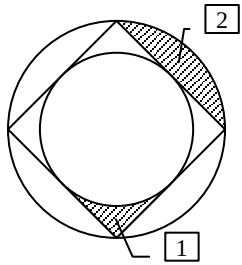
**Problema 2.**

En el cuadrado *ABCD* de la figura $AE = 2 \cdot EB$ y $FC = 2 \cdot DF$.
¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo *EGFH* y el área del cuadrado *ABCD*?



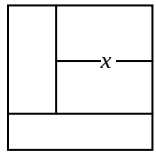

**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Calcula el cociente entre el área de la región 1 y el área de la región 2.




**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior, que en la forma más simplificada es $T = \dfrac{a-\pi}{2\pi-b}$ con $a$ y $b$ enteros.

La figura, que no está a escala, muestra un cuadrado de lado $\dfrac{a}{b}$ dividido en cuatro rectángulos de igual área. Calcula la longitud del segmento marcado con *x*.



**Problema 3A.** (2 puntos)

Sea $T = \frac{c}{d}$ la respuesta del problema anterior expresada en forma de fracción irreducible y $n = 2(c+d)$. En una clase de 4º de ESO hay $n$ chicas. Si seleccionamos al azar dos estudiantes de esa clase la probabilidad de que ambos sean chicas es 0,15. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

**Problema 1B.** (1 punto)

¿Cuántas soluciones enteras tiene la inecuación $\left||x| - 2013\right| < 5$ ?

**Problema 2B.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Calcula cuántos números de cuatro cifras verifican que la suma de los cuadrados de sus cifras es $T$.

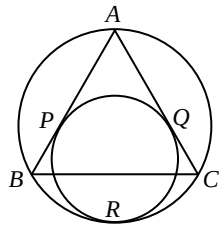
**Problema 3B.** (2 puntos)

La respuesta del problema anterior es un número $T$ de dos dígitos, $p$ y $q$. En el triángulo $ABC$ la mediana que parte de $A$ es perpendicular a la mediana que parte de $B$. Si las longitudes de los lados $AC$ y $BC$ son $p+q$ y $p \cdot q$, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado $AB$?

**Problema 4.** (5 puntos)

Sean $a$ y $b$ las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente y sea $x = a \cdot b^2$.

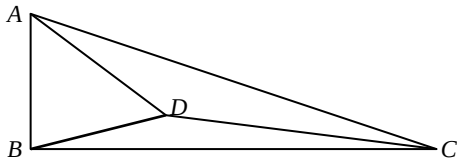
En una circunferencia hay inscrito un triángulo equilátero $ABC$. Una segunda circunferencia es tangente interior a la primera en $R$ y tangente a $AB$ y $AC$ en $P$ y $Q$ respectivamente. Si $BC = x$ calcula $PQ$.



**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

En el interior del triángulo rectángulo *ABC*, con ángulo recto en *B*, tomamos un punto *D* tal que el área del triángulo *ABD* es la tercera parte del área del triángulo original y el área del triángulo *BDC* es la cuarta parte del área del triángulo original. Si las distancias de *D* a los vértices *A* y *C* son, respectivamente, 3 y 4 cm, calcula la distancia de *D* al vértice *B*.



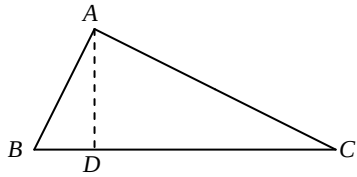

**Problema 2.**

Encuentra todos los enteros positivos que escritos en notación usual (base 10) son una unidad mayor que la suma de los cuadrados de sus cifras.

**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Calcula el menor primo $p$ tal que $(p - 1)$ es la diferencia de los cuadrados de dos múltiplos de 4, ambos positivos.

**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *k* la suma de los dígitos de *T*.
En el triángulo rectángulo *ABC* de la figura *AD* es perpendicular a *BC*. Si el área del triángulo *ABD* es 1 y el área del triángulo *ADC* es *k*, calcula $tg^2 \hat{B}$.



**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Calcula el mayor entero positivo *n* para el que $n^2 - Tn + 6$ resulta ser un número primo.

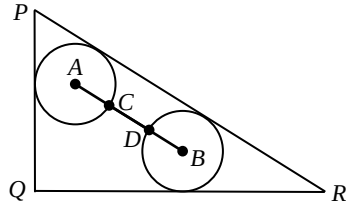
**Problema 1B.** (1 punto)
Calcula el valor de *T* si $\lg_2 4$, $\lg_{\sqrt{2}} 8$, $\lg_3 9^{T-1}$ están en progresión geométrica.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Calcula el número de valores enteros de *x* que verifican el sistema de inecuaciones:
$x^2 > x + 6$, $\quad |x| < T^2$.

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Una enorme cesta de frutas tiene un gran número de naranjas, peras, manzanas y limones, más de 10000 de cualquiera de ellas. Calcula el menor valor de *k* para que cualquier elección de *k* de piezas de frutas tenga al menos una de las siguientes características:

- Que haya al menos 1001 naranjas
- Que haya al menos 2013 peras
- Que haya al menos 219 manzanas
- Que haya al menos *T* limones.

**Problema 4.** (5 puntos)
Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *b* la suma de los dígitos del problema **3B**.
En el triángulo rectángulo *PQR* de la figura, en el que $PQ = \frac{b}{2}$ y *QR* = 2*a*, dibujamos dos circunferencias iguales, de centros *A* y *B*, cada una de ellas tangente a un cateto y a la hipotenusa. Si las intersecciones de las circunferencias con el segmento *AB* dividen a éste en tres partes iguales, *AC* = *CD* = *DB*, calcula el radio de las circunferencias.



## XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

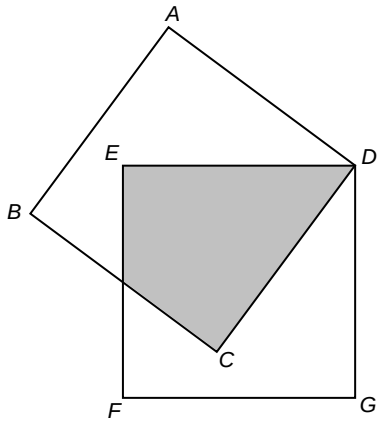
17 de noviembre de 2012

**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** Encuentra todos los números de cuatro cifras que empezando por 4 y acabando en 8 son múltiplos de 2, 3, 4, 6, 8 y 9.

**2.** En el segmento *AB* marcamos el punto *C* tal que *AC* = 3·*CB*. Con diámetros *AC* y *CB* dibujamos sendas circunferencias cuyas tangentes exteriores cortan a la prolongación de *AB* en el punto *D*. Demuestra que *BD* es igual al radio de la circunferencia pequeña.

**3.** En el dibujo de la figura *ABCD* y *DEFG* son cuadrados iguales de área 16. *D* es un vértice común a ambos y el cuadrilátero *EBFC* es un rectángulo. Calcula el área de la región sombreada común a ambos cuadrados



## XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

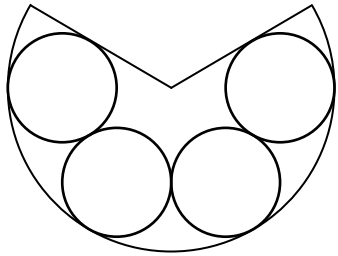
17 de noviembre de 2012

**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** ¿Cuál es el menor múltiplo de 84 entre cuyas cifras aparecen exclusivamente "6" y "7"?

**2.** Si $x + \frac{1}{x} = 3$, ¿cuál es el valor de $x^6 + \frac{1}{x^6}$?

**3.** En el dibujo de la figura hay cuatro circunferencias iguales, tangentes entre sí, y un sector circular que corresponde al desarrollo de la superficie lateral de un cono cuyo radio de la base es $\frac{2}{3}$ de su generatriz. Las circunferencias son a su vez tangentes al arco y a los radios del sector. Calcula el cociente entre la generatriz de dicho cono y el radio de las circunferencias.



## XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

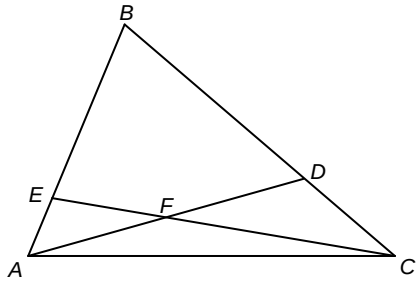
17 de noviembre de 2012

**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato. (45 minutos)

**1.** Representamos por $P_k$ al producto de los $k$ primeros números primos. Demuestra que, sea cual fuere $k$, $P_k + 1$ nunca es un cuadrado perfecto.

**2.** Si $z^2 + \frac{1}{z^2} = 14$ y $z > 0$, ¿cuál es el valor de $z^5 + \frac{1}{z^5}$?

**3.** En el lado $AB$ del triángulo $ABC$ marcamos el punto $E$ de tal manera que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ y en el lado $BC$ marcamos el punto $D$ con $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. Si $F$ es el punto de intersección de $AD$ y $CE$, calcula $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD}$.



## XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

**PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

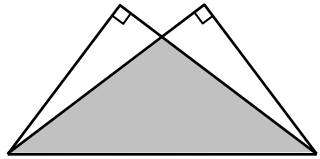
**1.** En la siguiente expresión *a, b* y c representan tres cifras cualesquiera, no todas nulas. Calcula el valor de dicha expresión.

$$\frac{0'\widehat{abc}+0'\widehat{acb}+0'\widehat{bac}+0'\widehat{bca}+0'\widehat{cab}+0'\widehat{cba}}{0'\hat{a}+0'\hat{b}+0'\hat{c}}$$

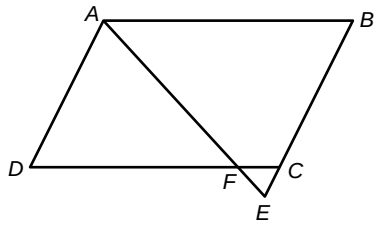
**2.** En el conjunto $\{1, 2, 3,..., 50\}$ hay muchos conjuntos formados por cinco enteros consecutivos, por ejemplo $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ o $\{13, 14, 15, 16, 17\}$ ¿Cuántos de estos conjuntos verifican que el producto de sus cinco elementos es múltiplo de 12 y de 21 simultáneamente?

**3.** En un triángulo isósceles de lados *AB* = 5, *AC* = 5 y *BC* = 8, calcula la distancia del vértice *A* al centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

**4.** Dos triángulos rectángulos iguales, de catetos 24 y 32 cm, se colocan como indica la figura. Calcula el área de la región sombreada común a ambos triángulos.



**5.** Prolongamos el lado *BC* del paralelogramo *ABCD* de forma que el área del triángulo *ADF* es 81 cm$^2$ y el área del triángulo *FCE* es 4 cm$^2$. Calcula el área del paralelogramo *ABCD*.



## XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

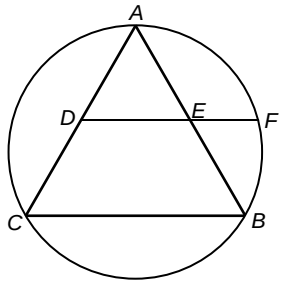
**PRUEBA INDIVIDUAL** **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** Si $[abc]$ representa el número de tres cifras, *a*, *b* y *c*, con *a* K 0, calcula el mínimo valor de la expresión $[abc]-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

**2.** Determina todos los números primos *p* tales que $p^{2012}+p^{2013}$ sea un cuadrado perfecto.

**3.** El triángulo *ABC* es semejante al triángulo *MNP* con *BC* = 60, *AB* = 12, *MP* = 8 y *BC* > *AC* > *AB*. Calcula la suma de todos los posibles valores enteros para el cociente entre el área de *ABC* y el área de *MNP*.

**4.** En el triángulo equilátero *ABC* de la figura, *D* y *E* son puntos medios de los correspondientes lados. Expresa el cociente $\frac{DE}{EF}$ como $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ con *a, b* y *c* enteros.




**5.** En una competición un equipo gana 3 partidos seguidos, luego pierde 1, luego vuelve a ganar 3 seguidos, luego pierde 2, gana 3, pierde 3, etc., es decir, gana 3 seguidos y pierde cada vez un partido más que la vez anterior. Si *N* es el número total de partidos jugados, calcula el menor valor de *N* para el que el porcentaje de partidos ganados sea inferior al 25 %.

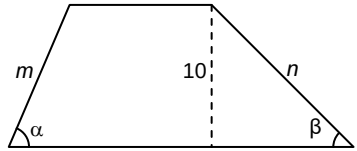
## XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

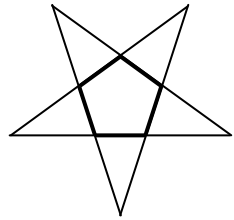
**PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato** (90 minutos)

**1.** En el triángulo *ABC* la longitud del lado *BC* es la media de las longitudes de los otros dos. Si $\cos\hat{C} = \frac{AB}{AC}$, calcula el valor de dicho coseno.

**2.** En el trapecio de la figura, de altura 10, las longitudes de los lados *m* y *n* vienen dadas por números enteros. Si la suma de los senos de los ángulos agudos $\alpha$ y $\beta$ es $\frac{1}{2}$, calcula el mayor valor posible para la suma $m + n$.




**3.** Prolongamos los lados de un pentágono regular hasta formar una estrella de cinco puntas como indica la figura. Si el cociente entre el área del pentágono y el área de la estrella es $sen\varphi$, calcula el valor de $\varphi$.



**4.** Un entero positivo *N* decimos que es "*autodescriptivo*" si cada uno de sus dígitos aparece tantas veces como indica su valor. Por ejemplo: 1, 22, 212, 122333 son "*autodescriptivos*". Calcula la suma de los dígitos de todos los números "*autodescriptivos*" de seis dígitos.

**5.** Sea $P(x)$ un polinomio de grado 2010. Si $P(n) = \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots, 2011$, calcula el valor de $P(2012)$.

**XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

17 de noviembre de 2012

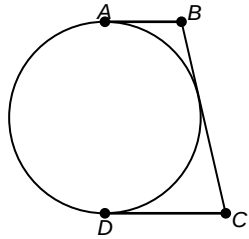
**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** Calcula la cifra de las unidades del número $1234567^{89}$.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "T" la respuesta del problema 2B
En el triángulo *ABC* en el que los tres ángulos son agudos, $\hat{A} = \left(x + \frac{T}{3}\right)^0$, $\hat{B} = (2x - 6)^0$ y el ángulo exterior en *C* mide $(3x + 9)^0$. Calcula el número de posibles valores enteros de *x*.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "$T = \frac{a}{b}$" la respuesta del problema 2C, expresada en forma de fracción irreducible.
En la figura, los segmentos *AB* y *DC* son paralelos y tangentes a la circunferencia, siendo *A* y *D* los puntos de tangencia. El segmento *BC* también es tangente a la circunferencia. Si *AB* = *b* y *DC* = *a*, calcula el área del trapecio *ABCD*.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**



**XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

17 de noviembre de 2012

**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

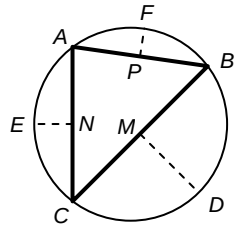
**3º y 4º de ESO.-**

.

**2A.-** Sea "T" la respuesta del problema 3A.

El radio de la circunferencia de la figura adjunta es $\frac{T}{5}$ y el perímetro del triángulo *ABC* inscrito es *T*. Los segmentos *DM, EN* y *FP* pertenecen a las mediatrices de los lados del triángulo. Calcula el área del hexágono *AFBDCE*.

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**



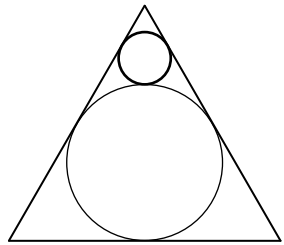

**2B.-** En un concurso de problemas el 40 % de los chicos y el 60 % de las chicas obtuvieron una puntuación superior a 80 puntos. Si había el triple de chicos que de chicas participantes, ¿qué porcentaje de los participantes obtuvieron una puntuación superior a 80 puntos?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "T" la respuesta del problema 3C.

En un triángulo equilátero de lado *T* se dibujan dos circunferencias tangentes como se muestran en la figura. Calcula el cuadrado del radio de la circunferencia pequeña.

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**



**XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

17 de noviembre de 2012

**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En el cuadrado *ABCD* las coordenadas de los vértices *A* y *B* son, respectivamente, $(\log_{15} 5,\ 0)$ y $(0,\ \log_{15} x)$. Si las coordenadas de los otros dos vértices son positivas y la suma de las ocho coordenadas de los cuatro vértices es $T + 1$, calcula $x$.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**3B.-** Sea "T" la respuesta del problema 1B.
En una circunferencia de radio $T$ inscribimos un triángulo *ABC* en el que $\hat{B} = 30^{\circ}$. Con centro en B se traza otra circunferencia tangente a la recta que pasa por *A* y *C*. Calcula el máximo valor para el área de la región exterior a la circunferencia de centro *B* pero interior al triángulo *ABC*.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** ¿Cuántas palabras capicúas (que se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda) pueden formarse utilizando en cada una todas las letras de la palabra "MISSISSIPPI".
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

## CENTROS GANADORES

1. Colegio Fray Luis de León A
2. IES San Juan Bautista B
3. IES Ramiro de Maeztu A

## ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Alejandro García Miguel | IES Luis García Berlanga A |
| 2. | Jorge Elvira | Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas |

NIVEL II (3º, 4º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Gonzalo Gómez Abejón | IES Ramiro de Maeztu |
| 2. | Álvaro Robledo Vega | Colegio Peñalar |

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Miguel Barrero Santamaría | IES Alameda de Osuna |
| 2. | Izar Alonso Lorenzo | IES Diego Velázquez |

## RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Colegio Fray Luis de León A | 32’5 |
| 2. | IES San Juan Bautista B | 30,8 |
| 3. | IES Ramiro de Maeztu A | 24,4 |
| 4. | Colegio Alemán de Madrid B | 23,93 |
| 5. | IES Cardenal Herrera Oria | 20,2 |
| 6. | IES San Juan Bautista A | 20,1 |
| 7. | Colegio Alemán de Madrid A | 19,43 |
| 8. | IES Fortuny | 17,6 |
| 9. | IES Alameda de Osuna A | 17,4 |
| 10. | Colegio Brains A | 16,93 |

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: viernes 23 de noviembre de 2012**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

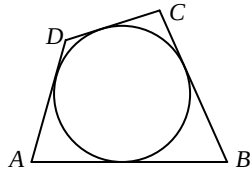
**1.** ¿Cuántos números reales satisfacen la ecuación $\left(x^2+4x-2\right)^2=\left(5x^2-1\right)^2$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**2.** ¿Cuál es el menor de los siguientes números?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\log_3 2$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\log_4 10$ E) $\sqrt[3]{4}$

**3.** El cuadrilátero *ABCD* es circunscrito a una circunferencia. Si $AB = 16$ y $CD = 10$, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero?




A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

**4.** Si $\left[\sqrt{x}\right]=9$ y $\left[\sqrt{y}\right]=12$, ¿cuál es el mayor valor posible para $\left[x+y\right]$?

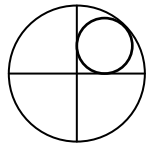
Recuerda: [*a*] es el mayor entero menor o igual que *a*.

A) 268 B) 225 C) 242 D) 270 E) 256

**5.** Si $a$ y $b$ son enteros positivos para los que $a^2-b^2=2017$, ¿cuál es el valor de $a^2+b^2$?

A) 2 026 081 B) 2 026 082 C) 2 026 083 D) 2 029 545 E) 2 034 145

**6.** Dos rectas perpendiculares, que se cortan en el centro de un círculo de radio 1, dividen a éste en cuatro partes iguales. En una de estas partes inscribimos una circunferencia, como se muestra en la figura. ¿Cuál es su radio?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{1}{2}$ E) $2-\sqrt{2}$

**7.** Si $x$ e $y$ son números distintos de cero tales que $x\cdot y=\frac{x}{y}=x-y$, ¿cuál es el valor de $x + y$?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

**8.** $a$, $b$ y $c$ son números positivos que verifican $a+b^2+2ac=29$, $b+c^2+2ab=18$, $c+a^2+2bc=25$. ¿Cuál es el valor de $a+b+c$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**9.** Una función $f$, definida para cualquier número distinto de cero, verifica que $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\cdot f(-x)=2x$. Calcula $f(2)$.

A) 2,5 B) 3 C) 3,5 D) 4 E) 4,5

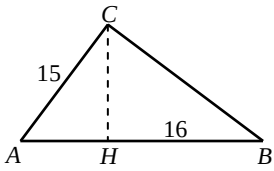
***10.*** $N = [xyz]$ es un número de tres cifras, todas distintas de cero. Si $N^2=(x+y+z)^5$ entonces $x^2+y^2+z^2$ es igual a:

A) 21 B) 23 C) 29 D) 33 E) 37

**11.** En el triángulo rectángulo $ABC$ de hipotenusa $AB$, el cateto $AC$ mide 15. Si la altura $CH$ divide a $AB$ en dos segmentos $AH$ y $HB$, con $HB = 16$, el área del triángulo $ABC$ es:

A) 120 B) 144 C) 150

D) 216 E) $144\sqrt{5}$




**12.** Una bolsa contiene 11 bolas numeradas con: 1, 2, 3,…, 11. Sacamos simultáneamente seis bolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de estas seis bolas sea impar?

A) $\frac{133}{231}$ B) $\frac{115}{231}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{118}{231}$ E) $\frac{6}{11}$

**13.** El número de soluciones enteras positivas del sistema $\left.\begin{matrix} xy+yz=44 \\ xz+yz=23 \end{matrix}\right\}$ es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**14.** En el triángulo rectángulo $ABC$ el ángulo $\hat{A} = 30º$. La circunferencia de diámetro el cateto $AB$ corta a la hipotenusa en un punto $D$. Si $CD=\sqrt{3}$, ¿cuánto mide el cateto $AB$?

A) $3\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$ D) 8 E) $5\sqrt{3}$

**15.** El discriminante de una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros nunca puede ser:

A) 23 B) 24 C) 25 D) 28 E) 33

(Recuerda: el discriminante de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ es $b^2-4ac$)

**16.** Lanzamos ocho veces un dado equilibrado de seis caras. Si el número 3 aparece exactamente 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de que no aparezca dos veces consecutivas?

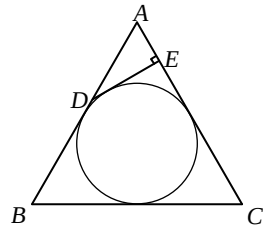
A) $\frac{5}{14}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{9}{14}$

**17.** Si $a, b, c$ son distintos de cero las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la expresión:

A) $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ B) $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$ C) $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

D) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ E) Nada de lo anterior

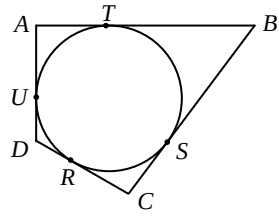
**18.** La figura adjunta muestra el triángulo equilátero *ABC*, su circunferencia inscrita y el segmento *DE* perpendicular al lado *AC* y tangente a la circunferencia inscrita; el punto *D* sobre el lado *AB* y el *E* sobre el lado *AC*. Si *AE* = 1, la longitud del lado del triángulo *ABC* es:




A) $3\sqrt{3}$ B) $3+\sqrt{3}$ C) $6-\sqrt{3}$

D) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

**19.** La circunferencia de la figura está inscrita en el cuadrilátero *ABCD*, siendo *R*, *S*, *T* y *U* los puntos de tangencia con los lados. Si $\hat{A} = 90^\circ$, *DR* = 3 y el arco *RST* es de 210º, el área del círculo es:



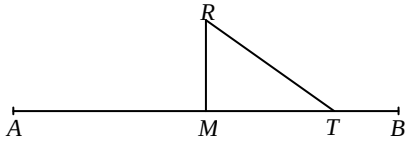

A) $36\pi$ B) $32\pi$ C) $27\pi$ D) $18\pi$

E) Nada de lo anterior

**20.** Determina el número *n*, de manera que los últimos siete dígitos de *n*! sean 8 000 000.

A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

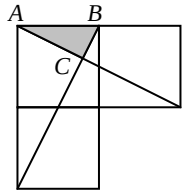
**21.** Desde el punto medio, *M*, del segmento *AB*, de *p* unidades de longitud, trazamos el segmento *MR*, de *q* unidades de longitud, perpendicular a *AB*. Si $RT = \frac{p}{2}$, las longitudes de los segmentos *AT* y *TB* son las soluciones de la ecuación:




A) $x^2 + px + q^2 = 0$ B) $x^2 - px + q^2 = 0$

C) $x^2 + px - q^2 = 0$ D) $x^2 - px - q^2 = 0$ E) $x^2 - px + q = 0$

**22.** Los tres cuadrados de la figura son iguales y de lado 1. ¿Cuál es el área del triángulo *ABC*?




A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**23.** El valor de $201\,220\,112\,010^2 - 2\cdot 201\,220\,112\,007^2 + 201\,220\,112\,004^2$ es:

A) 48 B) 38 C) 28 D) 18 E) 8

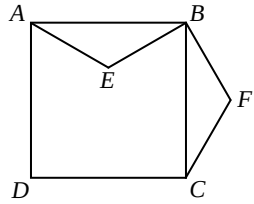
**24.** La base de un triángulo isósceles mide $\sqrt{2}$. Si las medianas sobre los dos lados iguales son perpendiculares entre sí, el área del triángulo es:

A) 1,5 B) 2 C) 2,5 D) 3,5 E) 4

**25.** En el triángulo *ABC*, *BD* es una mediana y *E* su punto medio. Si la prolongación de CE corta a AB en F con BF = 5, la longitud del lado AB es:

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

**26.** Sobre dos de los lados del cuadrado *ABCD* de la figura, se construyen dos triángulos isósceles e iguales, *AEB* y *BCF* con uno de sus ángulos de 120º. Si $EF = \sqrt{2}$, el área del cuadrado *ABCD* es:




A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{3}$ D) 4

E) Nada de lo anterior

**27.** Si los lados de un triángulo isósceles, no rectángulo, son: sen*x*, cos*x* y tg*x*, el valor de sen*x* es:

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) Nada de lo anterior

**28.** Colocados en orden creciente los números $a$ = 1000!, $b$ = (400!)·(400!)·(200!), $c$ = (500!)·(500!), $d$ = (600!)·(300!)·(100!) y $e$ = (700!)·(300!), la respuesta correcta sería:

A) $a < b < c < d < e$ B) b < c < d < e < a C) b < d < c < e < a

D) b < d < c < a < e E) c < b < a < d < e

**29.** Elegido al azar un número $x$ en el intervalo [0, 3], la probabilidad de que el número elegido verifique $15x^2 + 3 < 14x$ es:

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{4}{45}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

**30.** El valor de la suma de la siguiente serie de infinitos sumandos es:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} + \ldots$$

A) 0 B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{9}{32}$ E) $\frac{27}{32}$

# XLIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## 1ª FASE LOCAL-COMUNIDAD DE MADRID

**Primera sesión, viernes 14 de diciembre de 2012**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

### Problema 1

Tenemos dos cubos de agua de volúmenes respectivos 4 y 9 litros, inicialmente vacíos. Queremos conseguir que el cubo mayor contenga exactamente 6 litros de agua repitiendo, todas las veces que haga falta y en el orden que queramos, las operaciones siguientes:

(a) Llenar completamente uno de los dos cubos;
(b) Vaciar completamente uno de los dos cubos;
(c) Verter parte o el total del contenido de un cubo al otro cubo hasta que el primero quede vacío o el segundo lleno.

Indicar qué sucesión de estas operaciones tenemos que realizar para conseguir nuestro objetivo.
(Se supone que disponemos de una fuente que mana constantemente y de un sitio donde tirar toda el agua sobrante.)

### Problema 2

Sea $H$ el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC de alturas $h_a$ ,$h_b$ y $h_c$ respectivamente. Demostrar que:

$$\frac{HA}{h_a}+\frac{HB}{h_b}+\frac{HC}{h_c}=2$$

### Problema 3

Determinar todas las soluciones enteras de la ecuación: $x^3-y^3=xy+61$.

**Segunda sesión, sábado 15 de diciembre de 2012**

**Problema 4**

Los gráficos de las curvas $y = x^2 - a,\ x = y^2 - b\ (a > 0, b > 0)$ se cortan en cuatro puntos de abscisas $x_1, x_2, x_3$ y $x_4$. Demostrar que:

$$(x_1 + x_2)\,(x_1 + x_3)\,(x_1 + x_4) = 1.$$

**Problema 5**

Consideramos $n$ puntos del plano ($n > 3$), tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, y sea $k$ un entero con $\frac{n}{2} < k < n$. Dibujamos una colección de segmentos de manera que:

- Cada uno de ellos tiene por extremos puntos de los inicialmente dados, y
- Cada uno de los $n$ puntos es extremo, al menos, de $k$ de los segmentos dibujados.

Demostrar que, como mínimo, tres de los segmentos dibujados son los lados de un triángulo.

**Problema 6**

Demostrar que existe un número natural que expresado en base diez contiene 2012 nueves consecutivos y que es el cuadrado de otro número natural.

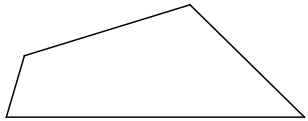
## XVIII$^a$ OLIMPIADA de MAYO
## Primer Nivel
## Mayo de 2012

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

### PROBLEMA 1
Pablo dice: "Al día de mi cumpleaños le sumo 2 y multiplico el resultado por 2. Al número obtenido le sumo 4 y multiplico el resultado por 5. Al nuevo número obtenido le sumo el número del mes de mi cumpleaños (por ejemplo, si es junio, le sumo 6) y obtengo 342."
¿Cuál es la fecha del cumpleaños de Pablo? Dar todas las posibilidades.

### PROBLEMA 2
Llamamos $S(n)$ a la suma de las cifras del entero $n$. Por ejemplo, $S(327) = 3 + 2 + 7 = 12$ .
Hallar el valor de $A = S(1) – S(2) + S(3) – S(4)+…+S(2011) – S(2012)$.
($A$ tiene 2012 términos).

### PROBLEMA 3
De un cuadrilátero de papel como el de la figura, hay que recortar un nuevo cuadrilátero cuya área sea igual a la mitad del área del cuadrilátero original. Solo se puede doblar una o más veces y cortar por algunas de las líneas de los dobleces.



Describir los dobleces y los cortes y justificar que el área es la mitad.

### PROBLEMA 4
Pedro tiene 111 fichas azules y 88 fichas blancas. Hay una máquina que por cada 14 fichas azules entrega 11 fichas blancas y por cada 7 fichas blancas entrega 13 azules. Decidir si Pedro puede lograr, mediante sucesivas operaciones con la máquina, aumentar en 33 el número total de fichas, de modo que la cantidad de fichas azules sea igual a $\frac{5}{3}$ de la cantidad de fichas blancas.
Si se puede, indicar cómo hacerlo. Si no se puede, indicar porqué.

## PROBLEMA 5

En una reunión hay 12 personas. Se sabe que para cada dos personas A y B de la reunión hay (al menos) otra persona C de la reunión que es amiga de A y de B. Determinar el mínimo número de pares de amigos que hay en la reunión.
Cada persona puede integrar varios pares. Si X es amigo de Y entonces Y es amigo de X.

# XVIIIª OLIMPIADA de MAYO
## Segundo Nivel
## Mayo de 2012

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

## PROBLEMA 1

Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

## PROBLEMA 2

Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se numeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman.
Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que 162.

## PROBLEMA 3

En el triángulo *ABC*, se verifica que $\hat{B} = 2\hat{C}$ y $\hat{A} > 90^\circ$. Llamamos *M* al punto medio de *BC*. La perpendicular por *C* al lado *AC* corta a la recta *AB* en el punto *D*. Demostrar que $A\hat{M}B = D\hat{M}C$.

## PROBLEMA 4

Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el lado más largo de otro.

## PROBLEMA 5

Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por lo menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es *feliz* si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor número total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.

# XVIII OLIMPIADA DE MAYO – 2012. RESULTADOS DE ESPAÑA

**PRIMER NIVEL**

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Sánchez Ibáñez, Enrique | ORO |
| 2 | Cendón Palomo, Pablo | PLATA |
| 3 | Gómez Toribio, Pablo | PLATA |
| 4 | Mondra Terol, Teresa | BRONCE |
| 5 | Andrés Gorrachategui, Víctor | BRONCE |
| 6 | Arranz Tors, Diego | BRONCE |
| 7 | Sierra Corredera, Diego | BRONCE |
| 8 | Rodrigo Albert, Daniel | MENCIÓN |
| 9 | Olmo de Casas, Pablo del | MENCIÓN |
| 10 | García González, Hugo | MENCIÓN |

**SEGUNDO NIVEL**

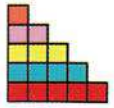
| | | |
|---|---|---|
| 1 | Carbajo Temprano, Miguel | ORO |
| 2 | Navarro Hernández, Adrián | PLATA |
| 3 | Olalla Santamaría, Alfonso | PLATA |
| 4 | Yu, Ruizhe | BRONCE |
| 5 | García González, Berta | BRONCE |
| 6 | Robledo Vega, Álvaro | BRONCE |
| 7 | Musicó Cortés, Mario | BRONCE |
| 8 | Barrero Santamaría, Miguel | MENCIÓN |
| 9 | Hevia Rodríguez, David de | MENCIÓN |
| 10 | Alonso González, Alberto | MENCIÓN |

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
**Comunidad de Madrid**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

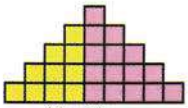
# XVIII concurso de primavera

$$1+1+1+\ldots+1=n=\binom{n}{1}$$

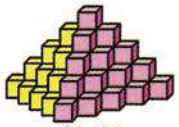


$$1+(1+1)+(1+1+1)+\ldots+(1+1+\ldots+1)=\binom{n}{2}$$

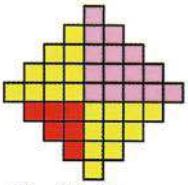
$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+\ldots+n)=\binom{n}{3}$$



$$\binom{6}{2}+\binom{5}{2}=5^2$$

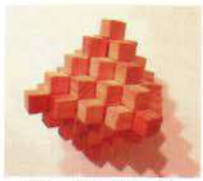


$$\binom{7}{3}+\binom{6}{3}$$



$$\binom{6}{2}+2\binom{5}{2}+\binom{4}{2}=5^2+4^2$$

$$\binom{7}{3}+2\binom{6}{3}+\binom{5}{3}$$



$$\binom{7}{3}+3\binom{6}{3}+3\binom{5}{3}+\binom{4}{3}$$

# MATEMÁTICAS 2014

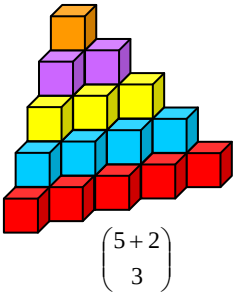
**Comunidad de Madrid**

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

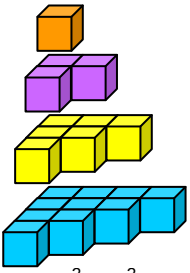
*Alfredo Martínez Sanz*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Hugo Fernández Hervás*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*María Gaspar Alonso-Vega,*
*María Moreno Warleta*
*María Olbés Fernández*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pilar Ruiz Cervigón*
*Víctor Manuel Sánchez González*

(Viene de la portada)

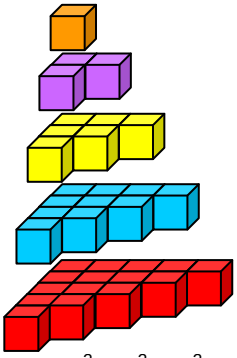
(Una observación de nuestra compañera Inmaculada Muñoz de Pablo)



$\binom{5+2}{3}$



$2^2 + 4^2$



$1^2 + 3^2 + 5^2$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \binom{2n+1}{3}$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \binom{2n+2}{3}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{4}\binom{2n+2}{3}$$

## *Presentación*

La tortuga perdió la apuesta con Aquiles. Zenón insistía en que hiciera una nueva. Ahora Aquiles iría un kilómetro por delante, y ella tendría que darle alcance. “Pero si él es más rápido. Nunca le cogeré” “ No seas tonta, el mundo es redondo. Sólo tienes que andar en dirección contraria”.

Hoy a la tortuga todos la llaman “Deuda”.

El Comité Organizador

**AGRADECIMIENTOS**

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A la librería Aviraneta.

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 27 de febrero de 2013**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avira neta
Libros Guijarro

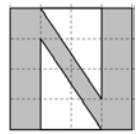
**1** La abuela Rosario nació en el año 1939, ¿cuántos años cumplirá en 2013?

A) 52 B) 64 C) 74 D) 75 E) 84

**2** La guía telefónica de Madrid capital cuenta con 1207 páginas. En cada página hay cinco columnas y en cada columna caben 160 teléfonos. ¿Qué cifra aproxima mejor la cantidad de números de teléfono que hay en la guía?

A) 99 000 B) 900 000 C) 950 000 D) 990 000 E) 1 000 000

**3** Nicolás ha dibujado su inicial en una cuadrícula sobre un cuadrado, como ves en la figura. ¿Qué fracción del cuadrado ocupa la N?

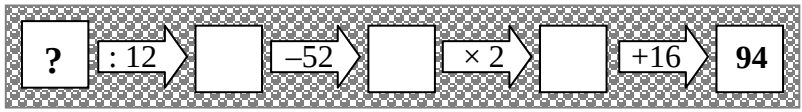


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{9}{16}$

**4** Quince vacas, tres ciempiés, treinta y siete gallinas y once serpientes bailan alegremente celebrando la llegada de la primavera. ¿Cuántas patas y cabezas hay en total en esta curiosa reunión?

A) 434 B) 489 C) 500 D) 537 E) 574

**5** Un número ha entrado en la máquina transformanúmeros y ha salido convertido en 94.




¿Cuál es la suma de las cifras del número que entró?

A) 5 B) 7 C) 12 D) 13 E) 21

**6** Justin Bieber está de gira por Madrid. Ayer firmó la friolera de 11782 autógrafos. Si tarda dos segundos en firmar cada autógrafo, ¿cuánto tiempo invirtió ayer en ello?

A) Menos de cuatro horas B) Entre 4 y 5 horas C) Entre 5 y 6 horas

D) Entre 6 y 7 horas E) Más de siete horas

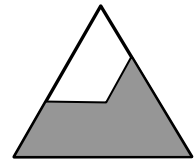
**7** Tres gominolas y dos chupachups cuestan lo mismo que dos chicles y cuatro gominolas. Cuatro chupachups cuestan lo mismo que seis chicles. ¿Cuántos chicles cuestan lo mismo que una gominola?

A) Uno B) Dos C) Tres D) Cuatro E) Seis

**8** Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?

A) 7 B) 12 C) 4 D) 9 E) 6

**9** Desde el centro de un triángulo equilátero de 36 $cm^2$ de área, trazamos paralelas a dos de sus lados y construimos la figura sombreada que llamamos esfinge. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área de la esfinge?



A) 18 B) 20 C) 21 D) 24 E) 27

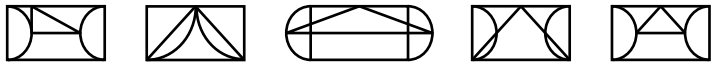
**10** Pilar ha hecho una multiplicación gigante: 78453400555343 × 34502313458.

¿Qué cifra ha obtenido en la posición de las decenas?

A) 0 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

**11** ¡A dibujar se ha dicho!, anunció Don Retorcido a sus alumnos. ¡Concentraos y mirad el papel! Dibujad un rectángulo cuya base sea doble que su altura; los dos lados menores son los diámetros de dos circunferencias; borrad las partes de las circunferencias que queden fuera del rectángulo; dibujad ahora el segmento más corto que une esos dos arcos; ese segmento es la base de un triángulo isósceles cuya altura es la mitad de la altura del rectángulo ¡Y no repito! ¿Quién de estos cinco alumnos dibujó correctamente lo que pidió Don Retorcido?

A) B) C) D) E)



**12** Jesús y Silvia son pareja de baile desde hace muchos años y tienen ciertas manías: si un día bailan Chotis no bailan Pasodoble; si bailan Rock & Roll no bailan Fox-Trot y si no bailan Pasadoble bailan Fox-Trot. Siempre que bailan Merengue bailan Chotis y cuando bailan Tango, también bailan Rock & Roll. Hoy han comenzado la velada bailando un alegre Merengue. Si a lo largo de la noche bailaron solamente dos bailes más, ¿cuáles fueron?

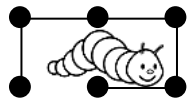
A) Chotis y Rock & Roll B) Fox-Trot y Chotis C) Tango y Rock & Roll

D) Pasodoble y Tango E) Chotis y Tango

**13** Esteban y Joaquín están lesionados y no pueden ir al monte, así que han decidido hacer un puzle de 1500 piezas mientras se recuperan. Hoy han celebrado que solo les queda por poner dos tercios de las piezas que ya llevan puestas. ¿Cuántas piezas les quedan aún sin colocar?

A) 300 B) 500 C) 600 D) 900 E) 1000

**14** La oruga Tepica vive en Seis Puntos y se entretiene en recorrer los seis puntitos, sin pasar dos veces por el mismo, mediante tramos horizontales o verticales. Luego dibuja el trazado dejado por su rastro. Aquí puedes ver uno de los dibujos que ha formado su rastro. ¿Cuántos dibujos diferentes puede conseguir Tepica?



A) 16 B) 10 C) 6 D) 15 E) 8

**15** ¿Qué resultado obtuvo Triangupín cuando realizó

?

¡Ah!, se nos olvidaba deciros que los habitantes de Triangupón operan los números de tres en tres del siguiente modo:

$= (a + b \times c) : (a - b \times c)$

A) 1,5 B) 4 C) 5 D) 9 E) 36

**16** ¿Cuántos números de dos cifras tienen una cifra par y la otra impar? (Recuerda que 0 es par)

A) 20 B) 25 C) 40 D) 45 E) 50

**17** Martita dice: "Tengo en mi bolsillo una moneda de un euro, tres monedas de 50 céntimos, seis monedas de 20 céntimos y tres monedas de 5 céntimos. Su hermana Mariquilla dice: "Pues yo tengo exactamente la misma cantidad de dinero que tú pero muchas menos monedas." ¿Cuántas monedas debe tener, como mínimo Mariquilla?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

**18** Los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, están colocados en ese orden a lo largo de un segmento. El segmento *AE* mide 20 cm. Si *B* es el punto medio de *AC*, *C* es el punto medio de *BD* y *D* es el punto medio de *BE*, ¿cuántos centímetros mide el segmento *DE*?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) Faltan datos

**19** Jaime es un genio haciendo operaciones combinadas. En su cuaderno ha escrito esta operación pero el Comenúmeros se ha zampado uno de los números. Si Jaime tenía bien la operación, ¿qué número se ha comido esta vez el Comenúmeros?

$48 - (6 + 2 \times$ $) = 16$

A) 4 B) 8 C) 13 D) 16 E) 61

**20** Juanje sumó tres lados de un rectángulo y obtuvo como resultado 44 cm. Francisco sumó tres lados del mismo rectángulo y obtuvo como resultado 40 cm. Si ambos sumaron bien, ¿cuántos centímetros mide el perímetro de ese rectángulo?

A) 42 B) 56 C) 64 D) 84 E) 112

**21** El pobre Richi tiene insomnio y su prima Ana le ha sugerido que cuente corderitos. El método funciona y cada día Richi necesita contar cinco corderitos menos que el día anterior para quedarse dormido. El día treinta de tratamiento Richi no ha necesitado contar ningún corderito para dormirse. ¿Cuántos corderitos contó el primer día?

A) 140 B) 145 C) 150 D) 155 E) Más de 1000

**22** Rafa sale a correr todas las mañanas, de tal manera que cada día par corre tres kilómetros más que cada día impar. Si en los 28 primeros días del año recorrió en total 210 km, ¿cuántos kilómetros completará del 21 al 27 de abril?

A) 31,5 B) 48 C) 49,5 D) 51 E) 52,5

**23** Luis tiene cuatro pares distintos de zapatos y metió los del pie derecho en una caja y los del izquierdo en otra. Sin mirar, coge con la mano derecha uno del pie derecho y con la izquierda, uno del pie izquierdo. ¿Qué probabilidad tiene de obtener dos zapatos del mismo par?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

**24** Olivia sale de viaje. Durante la primera media hora va a 50 km/h. Después sale a la autopista y conduce durante cuatro horas y media a 120 km/h. Finalmente, en el último tramo va a 60 km/h durante un cuarto de hora. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en total?

A) 160 B) 230 C) 520 D) 565 E) 580

**25** Don Retorcido hizo grupos de cuatro con los estudiantes de una clase y le sobraron dos. Después hizo grupos de cinco y le sobró uno. Si en la clase hay quince chicas y hay más chicas que chicos, ¿cuántos chicos hay?

A) 6 B) 7 C) 9 D) 10 E) 11

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 27 de febrero de 2013**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avira neta
Libros Guijarro

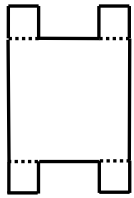
**1** Cuatro animales amigos corren por un camino recto. Anfibio va primero y le siguen en este orden, Batracio, Croador y Delfín. Al cabo de un rato, Delfín grita ¡STOP!, todos se detienen y miden algunas distancias entre ellos: dist (Anf, Del) = 306 m, dist (Anf, Cro) = 180 m y dist (Bat, Del) = 174 m. ¿Cuántos metros separan a Batracio de Croador?

**A)** 14 **B)** 48 **C)** 72 **D)** 90 **E)** 96

**2** ¿Cuál es el menor número natural que multiplicado por 35613,475 da como resultado un entero?

**A)** 1000 **B)** 500 **C)** 200 **D)** 40 **E)** 20

**3** Adrián ha recortado un gran cuadrado de perímetro 80 cm y ha diseñado una H añadiéndole cuatro cuadraditos iguales. Si el perímetro de su H son 136 cm, ¿cuántos centímetros mide el perímetro de cada uno de los cuadraditos?



**A)** 28 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 40

**E)** 56

**4** Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

**A)** 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

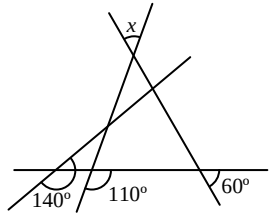
**5** Pilar ha hecho una multiplicación gigante: 78453400555343 × 34502313458.

¿Cuántas cifras tiene el número que ha obtenido?

**A)** 13 **B)** 14 **C)** 24

**D)** 25 **E)** 143

**6** ¿Cuánto mide el ángulo $x$?




**A)** 60º **B)** 50º **C)** 45º

**D)** 40º **E)** 30º

**7** Don Retorcido te pone a prueba con sus frases-trampa.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Si dos fracciones "hermanas" de números positivos tienen el mismo numerador, yo te aseguro que la mayor es la del menor denominador.

II. La mitad del doble de la mitad es la mitad.

III. Si en una división entera al dividendo le restas el resto y divides esta resta entre el divisor, ¡tachán!, obtendrás el mismo cociente.

**A)** Solo la I **B)** Solo la II **C)** Solo la I y II **D)** Solo la I y III **E)** I, II y III

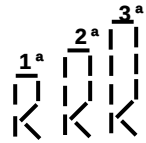
**8** ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

**A)** $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5$ **B)** $3^5 \cdot 5^6 \cdot 7$ **C)** $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5$ **D)** $2 \cdot 3^6 \cdot 5^6$ **E)** $3^8 \cdot 5^5$

**9** Este año, 2013, es múltiplo de 11 y acaba en 13. ¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de 11 y terminan en 13?

**A)** 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** 5

**10** Don Retorcido diseña con palitos la inicial de su nombre sin parar. ¿Cuántos palitos necesitará para diseñar la R número 2013?




**A)** 2013 **B)** 3580 **C)** 4028

**D)** 4030 **E)** 12078

**11** Índice se comió la mitad de pasteles que Corazón, Anular se comió tres pasteles más que Índice, Meñique sólo quiso un pastelito y el goloso de Pulgar se zampó tantos pasteles como sus cuatro hermanos juntos. Si en total se comieron 80 pasteles, ¿cuántos se comió Anular?

**A)** 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

**12** A dos cuadrados unidos por un lado les hemos añadido "de tejado" tres triángulos equiláteros. Después, uniendo los centros de los cinco polígonos, hemos creado el pentágono que ves en la figura. Si el área de cada cuadrado es $a$ y la de cada triángulo es $b$, el área del pentágono es:

**A)** $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ **B)** $\frac{3a}{5}+\frac{2b}{5}$ **C)** $\frac{a}{2}+b$ **D)** $\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}$ **E)** $\frac{2a}{3}+b$

**13** La mula y el buey se han mudado a un establo no muy lejos del portal. La mula va al trotecito y recorre 10 km en una hora pero como es muy saltarina se cansa mucho y cada dos horas debe descansar una. El buey va con paso firme recorriendo 8 km en una hora y no necesita descansar. Si salen a la vez del portal y llegan a la vez al establo, ¿a cuántos kilómetros se encuentra su nuevo hogar?

**A)** 16 **B)** 24 **C)** 35 **D)** 40 **E)** 52

**14** Los números enteros positivos $A$, $B$ y $C$ son diferentes y puedes elegirlos desde el 1 hasta el 100, ambos inclusive. ¿Cuál es el mayor valor posible de $\frac{A+B+C}{A-B-C}$?

**A)** 100 **B)** 150 **C)** 189 **D)** 199 **E)** 297

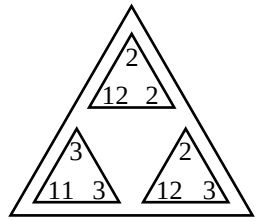
**15** Una amiga le dice a otra: “la mitad del triple de mi edad es justamente el doble de la tercera parte de tu edad”. Si dividimos la edad de la mayor entre la de la menor, obtenemos...

**A)** 1,20 **B)** 1,35 **C)** 1,50 **D)** 1,66 **E)** 2,25

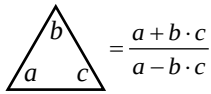
**16** Al dividir un número entre 60 obtenemos 42 de resto. Si dividimos el mismo número entre 20, el resto será:

**A)** 12 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 2

**17** ¿Qué resultado obtuvo Triangupín cuando realizó la operación de la derecha?




¡Ah!, se nos olvidaba decir que los habitantes de Triangupón operan los números de tres en tres del siguiente modo:




**A)** 1,5 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 9 **E)** 36

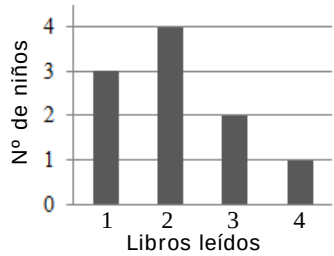
**18** El 14 se puede escribir como suma de dos números primos de dos formas distintas: 14 = 3 + 11 y 14 = 7 + 7. ¿De cuántas formas distintas puede escribirse 40 como suma de dos números primos?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**19** Santiago ha dibujado dos triángulos acutángulos y ha medido cuatro de sus ángulos: 28º, 47º, 51º y 73º. ¿Cuál es la diferencia entre los dos ángulos que no ha medido?

**A)** 3º **B)** 5º **C)** 9º **D)** 12º **E)** 15º

**20** José María ha preguntado a algunos de sus amigos cuántos libros han leído en el último mes y ha representado los datos en este diagrama de barras. ¿Cuál es la media del número de libros leídos en dicho mes por este grupo de amigos?

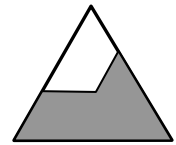



**A)** 2 **B)** 2,1 **C)** 2,2 **D)** 2,5 **E)** 2,7

**21** En mi instituto se han vendido quinientas papeletas para sortear un viaje para dos personas. Doraemon ha comprado siete papeletas y su amigo Nobita trece, y acuerdan entre ellos que si a alguno le toca llevará al otro al viaje. Dora ha comprado dieciséis papeletas y su amigo Botas catorce y acuerdan lo mismo. ¿Qué probabilidad hay de que alguna de esas dos parejas vaya al viaje?

**A)** $\frac{1}{25}$ **B)** $\frac{3}{50}$ **C)** $\frac{2}{25}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{10}$

**22** Desde el centro de un triángulo equilátero de 360 mm de perímetro, trazamos paralelas a dos de sus lados y construimos la figura sombreada que llamamos esfinge. ¿Cuál es, en mm, el perímetro de la esfinge?



**A)** 330 **B)** 320 **C)** 300 **D)** 270 **E)** 240

**23** Jaime es un genio haciendo operaciones combinadas. En su cuaderno ha escrito esta operación pero el Comenúmeros se ha zampado uno de los números. Si Jaime tenía bien la operación, ¿qué número se ha comido esta vez el Comenúmeros?

$(6+2\cdot$ $):4\cdot 2=16$

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 61

**24** En el comité organizador del XVII Concurso de Primavera hay el doble de hombres que de mujeres. La mitad de las mujeres se llaman María; ninguna mujer está jubilada; hay el doble de hombres jubilados que de "Marías". ¿Cuál es la proporción de jubilados en el comité?

**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{5}$

**25** Zipi y Zape siempre la están montando. Ahora uno va a decir siempre la verdad y el otro va a mentir siempre pero no sabemos cuál de los dos es el mentiroso. Un día ven en la nevera cinco pasteles y deciden comérselos a escondidas. Don Pantuflo los pilla en plena faena y pregunta "¿Cuántos pasteles os habéis comido?" Zipi contesta: "Hemos comido 4 pasteles". Zape dice: "Hemos comido un número par de pasteles". Don Pantuflo los mandó al cuarto de los ratones. ¿Cuántos pasteles se comieron?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 27 de febrero de 2013**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

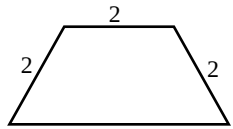
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avira neta
Libros Guijarro

**1** Si $2^4 \cdot 3^8 = n \cdot 6^4$, el valor de $n$ es:

**A)** 12 **B)** 24 **C)** 27 **D)** 54 **E)** 81

**2** El área de este trapecio es:




**A)** 6 **B)** $3\sqrt{3}$ **C)** $4\sqrt{2}$

**D)** $4\sqrt{3}$ **E)** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

**3** Si $n$ es un número natural, ¿qué número natural está más cerca del cuadrado de $n+\frac{1}{2}$?

**A)** $n^2$ **B)** $n^2+1$ **C)** $n^2+n$ **D)** $(n+1)^2$ **E)** $n^2+n+1$

**4** El valor del producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2013^2}\right)$ es:

**A)** $\frac{2015}{4016}$ **B)** $\frac{1006}{2013}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1007}{2013}$ **E)** $\frac{2013}{4014}$

**5** Alicia tarda 30 segundos en hacer un bizcocho e Isabel tarda 20 segundos en hacer otro igual. Si trabajan las dos juntas, ¿cuántos bizcochos harán en 5 minutos?

**A)** 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

**6** Don Retorcido no deja nada al azar y rellena cada uno de los cuadraditos de la figura colocando una cifra de forma que en cada fila y en cada columna aparecen el 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Qué cifra ocupará el lugar marcado con $x$?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 4 | | |
| 1 | 3 | | | |
| | | 5 | 3 | |
| 2 | | 3 | 1 | |
| | | | | $x$ |

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**7** En una bolsa con canicas, los tres quintos del total son canicas azules y el resto rojas. Si duplicamos el número de canicas rojas y mantenemos el número de canicas azules, ¿qué fracción de las canicas serán ahora rojas?

**A)** $\frac{5}{2}$ **B)** $\frac{3}{7}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{4}{5}$

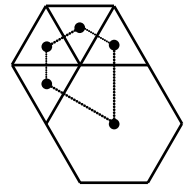
**8** ¿Cuál es el número natural menor que multiplicado por $9{,}34\widehat{6}$ da como resultado un entero?

**A)** 900 **B)** 300 **C)** 225 **D)** 75 **E)** 15

**9** Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

**10** A un hexágono regular le hemos adosado cuatro triángulos equiláteros alrededor de un vértice. Usando los centros de esas cinco figuras hemos construido un pentágono. Si el área del hexágono es de 72 $cm^2$, el área del pentágono, en $cm^2$, es:



**A)** 24 **B)** 27 **C)** 28
**D)** 32 **E)** 36

**11** Los radios de dos circunferencias tangentes exteriores, de centros *A* y *B* son 5 y 3 respectivamente. Una recta tangente exterior a ambas corta a la recta *AB* en el punto *C*. ¿Cuánto mide el segmento *BC*?

**A)** 4,8 **B)** 9 **C)** 10,2 **D)** 12 **E)** 14,4

**12** En el triángulo *ABC*, de lados *BC* = 13, *CA* = 14 y *AB* = 15, ¿cuánto mide la altura que parte de *B*?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

**13** Nueve monos pesan lo mismo que cuatro osos. Ocho osos pesan lo mismo que quince pumas y diez pumas pesan lo mismo que veintisiete ciervos. ¿Cuántos ciervos pesan como cuatro monos?

**A)** 6 **B)** 3 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 9

**14** ¿Para cuántos valores del número real *x*, la media y la mediana del conjunto de cinco números *x*, 6, 4, 1, 9 es la misma?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

**15** En una circunferencia de centro *O*, *AB* es un diámetro y *BC* una cuerda. Si $O\hat{B}C = 58^\circ$, ¿cuánto mide el ángulo $O\hat{C}A$?

**A)** 58º **B)** 61º **C)** 64º **D)** 32º **E)** 30º

**16** En un examen de Matemáticas de 3º ESO aprobaron la misma cantidad de chicos que de chicas, pero de chicos solo aprobaron los $\frac{2}{3}$ de los chicos que había, mientras que de chicas aprobaron el 75% de las que había. ¿Qué fracción del total de los estudiantes aprobaron el examen?

**A)** $\frac{11}{16}$ **B)** $\frac{12}{17}$ **C)** $\frac{13}{18}$ **D)** $\frac{14}{19}$ **E)** $\frac{17}{23}$

**17** Si el producto de dos números positivos es 9 y el inverso de uno es el cuádruple del inverso del otro, ¿cuál es la suma de los dos números?

**A)** $\frac{10}{3}$ **B)** $\frac{20}{3}$ **C)** 7 **D)** $\frac{15}{2}$ **E)** 8

**18** Si el número de 9 cifras 197 000 19*d* es primo, ¿qué cifra es la representada por *d*?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

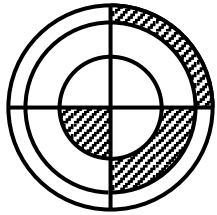
**19** En el triángulo equilátero *ABC* de lado 4, *D* es un punto del lado *BC*. Si $S_1$ es el área del triángulo *ABD* y $S_2$ el área del triángulo *ADC*, ¿cuál es el mayor valor posible para el producto $S_1 \cdot S_2$?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 16

**20** Dibuja un triángulo equilátero; dibuja la circunferencia que pasa por sus tres vértices; traza las tangentes a la circunferencia que pasan por cada uno de los tres vértices; prolonga las tres tangentes hasta que se corten formando un triángulo final. Si el área del triángulo con el que empezaste es *A*, ¿qué área tiene el triángulo final?

**A)** $\frac{A}{2}$ **B)** $A$ **C)** $2A$ **D)** $3A$ **E)** $4A$

**21** En la figura se observan tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si las tres figuras sombreadas tienen igual área y el radio del círculo pequeño es 1, ¿cuál es el producto de los tres radios?



**A)** $\sqrt{6}$ **B)** 2,5 **C)** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D)** $2\sqrt{2}$

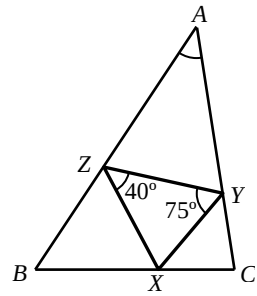
**E)** $\pi$

**22** ¿Cuál es el mayor resto posible cuando divides un número de dos cifras entre la suma de éstas?

**A)** 9 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

**23** En el triángulo *ABC*, *AY* = *AZ*, *BX* = *BZ*, *CX* = *CY*.

Si $X\hat{Z}Y = 40^\circ$ y $XY\hat{Z} = 75^\circ$ , ¿cuánto mide el ángulo $\hat{A}$ del triángulo?

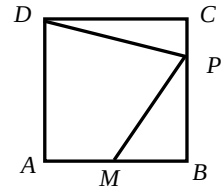



**A)** 50º **B)** 60º **C)** 55º **D)** 52,5º **E)** 57,5º

**24** En el año 2010, el número de estudiantes de mi centro fue un cuadrado perfecto. Al año siguiente, hubo 100 estudiantes más y el nuevo número resultó ser un cuadrado perfecto más uno y al siguiente año, con otros 100 estudiantes más, volvió a ser un cuadrado perfecto. El número de estudiantes de mi centro en ese año 2010 era múltiplo de:

**A)** 3 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 17

**25** En un cuadrado *ABCD* de 2 cm de lado, *M* es el punto medio del lado *AB* y *P* es un punto variable del lado *BC*. ¿Cuál es el mínimo valor de *DP* + *PM*?




**A)** $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 27 de febrero de 2013**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
Libros Guijarro

**1** Si *a*, *b*, *c* y *d* son números reales con $a-1=b+2=c-3=d+4$, el mayor de los cuatro es:

**A)** *a* **B)** *b* **C)** *c* **D)** *d* **E)** No se puede determinar

**2** Si *m* y *n* son enteros con $2m - n = 3$, $m - 2n$ debe ser:

**A)** Igual a –3 **B)** Igual a 0 **C)** Múltiplo de 3 **D)** Un entero impar

**E)** Un entero par

**3** De un triángulo obtusángulo sabemos que un lado *a* mide 7 metros, su ángulo opuesto $\hat{A}$ mide 60º, y otro lado *b* mide 8 metros. ¿Cuántos metros mide el tercer lado?

**A)** 2 **B) 3** **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

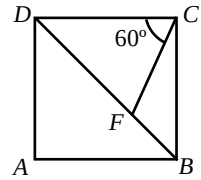
**4** Calcula el valor de la suma $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 19^3$ ayudándote de la fórmula de la suma los primeros cubos: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

**A)** 19 900 **B)** 19 850 **C)** 19 500 **D)** 19 750 **E)** 19 250

**5** ¿Cuántos enteros mayores que 5000 pueden formarse con las cifras 3, 4, 5, 6 y 7 de manera que en cada número no aparezcan cifras repetidas?

**A)** 174 **B)** 144 **C)** 84 **D)** 192 **E)** 202

**6** Si el lado del cuadrado *ABCD* mide 2 cm, el área, en $cm^2$, del triángulo *FBC* es:




**A)** $2\sqrt{3}-3$ **B)** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ **C)** $\sqrt{3}-1$

**D)** $2\sqrt{2}-2$ **E)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

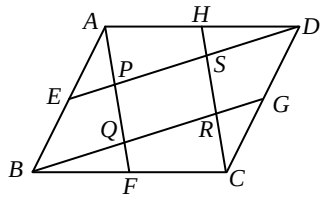
**7** Esteban preguntó a cinco de sus estudiantes cuántos de ellos habían trabajado las Matemáticas en casa la tarde anterior.

Emilio dijo: Ninguno, profe. Eligio dijo que solo uno de los cinco, Elisa respondió que dos de los cinco, Eugenio que tres de los cinco y Elia contestó que cuatro de los cinco habían trabajado.

Esteban sabía que quienes no habían trabajado mentían, mientras que los que sí habían trabajado decían la verdad. ¿Cuántos estudiantes de estos cinco habían hecho los deberes?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**8** Si *ABCD* es un paralelogramo y *E*, *F*, *G* y *H* son los puntos medios de los lados, el cociente entre el área de *ABCD* y el área de *PQRS* es:



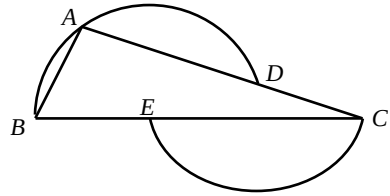

**A)** 3 **B)** 3,5 **C)** 4

**D)** 4,5 **E)** 5

**9** Para numerar las páginas de un cuadernillo de 12 páginas hacen falta 15 dígitos, a saber: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2. ¿Cuál de los siguientes números **no** puede ser la cantidad de dígitos necesarios para numerar todas las páginas de un libro?

**A)** 31 **B)** 543 **C)** 2012 **D)** 2013 **E)** 2016

**10** En la figura adjunta se observa un triángulo *ABC* y dos arcos de circunferencia: uno de centro *E* y que pasa por *A*, *B* y *D* y otro de centro *D* y que pasa por *E* y *C*. Si el ángulo $\hat{B}$ del triángulo es de 63º, ¿cuál es el valor del ángulo $\hat{C}$?




**A)** 17º **B)** 18º **C)** 19º **D)** 20º **E)** 21º

**11** Cinco amigos se aburrían y deciden ponerse a contar. Se colocan en fila y empiezan así: Maite (¡uno!), Virginia (¡dos!), Christian (¡tres!), Iván (¡cuatro!) y Jose (¡cinco!) y cambian el sentido y siguen contando: Iván (¡seis!), Christian (¡siete!), Virginia (¡ocho!) y Maite (¡nueve!) y de nuevo cambian de sentido y siguen divertidos: Virginia (¡diez!), Christian (¡once!), Iván (¡doce!). ¿Qué amigo gritará ¡dos mil trece!?

**A)** Maite **B)** Virginia **C)** Christian **D)** Iván **E)** José

**12** Un granjero tiene ovejas y gallinas. Si la media del número de patas por animal es *l*, el cociente entre el número de ovejas y el número de gallinas es:

**A)** $\frac{l}{3(4-l)}$ **B)** $\frac{l-2}{4-l}$ **C)** $\frac{3(l-2)}{l}$ **D)** $\frac{(l-2)^2}{16-l^2}$ **E)** $\frac{7\left(l^2-4\right)}{5\left(16-l^2\right)}$

**13** En un triángulo rectángulo, la mediana sobre la hipotenusa vale 2. ¿Cuál es el valor de la suma de los cuadrados de las otras dos medianas?

**A)** 5 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

**14** Sea *N* el menor entero positivo que al dividirlo entre 5 da resto 2, al dividirlo entre 7 da resto 3 y al dividirlo entre 9 da resto 4. ¿Cuál es la suma de los dígitos de *N*?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 13 **D)** 22 **E)** 40

**15** Sea *n* un número mayor que 2013. Si $n^2 + 4$ y $n + 3$ **no** son primos entre sí, ¿cuál es su máximo común divisor?

**A)** 11 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 17 **E)** 23

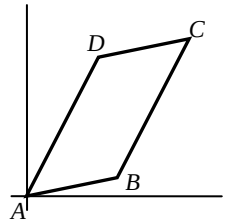
**16** La función $f(x)=\begin{cases}2x+5 & si \quad x\le 3\\ 4x-1 & si \quad x>3\end{cases}$ puede ser definida mediante una sola fórmula como $f(x)=a|x+b|+cx+d$. El valor de *d* es:

**A)** –5 **B)** –4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

**17** ¿Cuántos puntos reticulares (es decir, puntos con coordenadas enteras) hay en el interior del paralelogramo limitado por las rectas $x = 100$, $x = 300$, $y=\frac{1}{3}x+0{,}1$; $y=\frac{1}{3}x+0{,}6$ ?

**A)** 73 **B)** 71 **C)** 69 **D)** 67 **E)** 65

**18** En la figura de la derecha se observa un paralelogramo *ABCD* en el que *A*(0, 0), *B*(20, 10) y *D*(10, *y*). Si el área de dicho paralelogramo es 600, ¿cuál es el valor de *y*?




**A)** 32 **B)** 33 **C)** 34

**D)** 35 **E)** 36

**19** Si $\log_x y + \log_y x = 7$, $(\log_x y)^2 + (\log_y x)^2$ es igual a:

**A)** 40 **B)** 43 **C)** 45 **D)** 47 **E)** 49

**20** Las gráficas de $y = x - 2$ e $y = mx + 3$ se cortan en un punto de coordenadas positivas si y solo si:

**A)** $m = 1$ **B)** $m < 1$ **C)** $m > -\frac{3}{2}$ **D)** $-\frac{3}{2} < m < 0$ **E)** $-\frac{3}{2} < m < 1$

**21** Uno de los siguientes enteros **no** divide a $2^{1650} - 1$. ¿Cuál?

**A)** 3 **B)** 7 **C)** 31 **D)** 127 **E)** 2047

**22** Si sen15º y cos15º son las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$, ¿cuál es el valor de $a^4 - b^4$?

**A)** –1 **B)** 1 **C)** $\frac{35}{16}$ **D)** $1+\sqrt{2}$ **E)** $3\sqrt{2}-1$

**23** Se han borrado dos dígitos *a* y *b* en esta multiplicación:
$29a\,031 \times 342 = 100\,900\,b02$. ¿Cuál es el valor de la suma $a + b$?

**A)** 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

**24** ¿Cuál es la longitud del camino más corto que partiendo del punto *A*(2, 5) pasa por el eje de abscisas y acaba en algún punto de la circunferencia de ecuación:
$(x + 6)^2 + (y - 10)^2 = 16$?

**A)** 12 **B)** 13 **C)** $4\sqrt{10}$ **D)** $6\sqrt{5}$ **E)** $4+\sqrt{89}$

**25** ¿Cuál es el valor de $sen\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{1}{16}$ **E)** $\frac{1}{32}$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 20 de abril de 2013**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

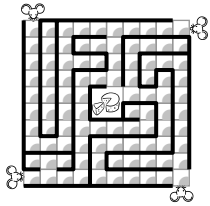
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

**1** Daniel tiene cincuenta y seis libros de cuentos y Alberto tiene ventiocho. ¿Cuántos libros tendría que regalarle Daniel a Alberto para que ambos tuvieran la misma cantidad de libros?

**A)** 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

**2** Cuatro ratones bien entrenados están en las cuatro puertas de un laberinto y en el centro les espera un delicioso queso. Todos van a la misma velocidad y llegan al centro por el camino más corto posible. Si el que llega primero tarda quince segundos en recorrerlo, ¿cuántos segundos tardará el último?

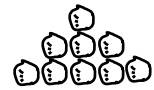


**A)** 35 **B)** 40 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 55

**3** Ana tiene dos cajitas forradas de terciopelo, una blanca y la otra negra, y tres perlas de colores: una roja, otra azul y la tercera verde. ¿De cuántas formas diferentes puede guardar sus tres perlas en las dos cajitas?

**A)** 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

**4** Treinta amigos juegan a construir triángulos con garbanzos de esta manera: Ana coloca un garbanzo, Braulio coloca debajo tres garbanzos, Clara aumenta la base poniendo cinco garbanzos, Daniel añade una fila de siete,... ¿Cuántos garbanzos tendrá que colocar el último?



**A)** 61 **B)** 60 **C)** 57 **D)** 58 **E)** 59

**5** En esta multiplicación letras distintas representan cifras distintas y letras iguales, cifras iguales. ¿Cuánto vale **T**?

$$\begin{array}{r} A\ L \\ \times\ A\ L \\ \hline C\ A\ L \\ L\ E \\ \hline T\ A\ L \end{array}$$

**A)** 6 **B)** 3 **C)** 8 **D)** 4 **E)** 9

**6** -¡Julián, te he dicho mil veces que hagas tu cama! le dice su madre muy enfadada.
-¡Pero si solo llevo levantado ocho minutos! No te ha dado tiempo a decirlo tantas veces.
-¡Anda que no! Y voy a seguir a este ritmo hasta que la hagas.
Si Julián tardó una hora y media en ponerse a hacer la cama, ¿cuántas veces repitió su madre que la hiciera?

**A)** 250 **B)** 5600 **C)** 10500 **D)** 11250 **E)** 90000

**7** ¿Cuál es la diferencia entre la suma de los diez primeros números pares positivos y la suma de los diez primeros números impares?

**A)** 12 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

**8** Sofía de mayor quiere ser como Baumgartner y saltar desde la estratosfera. Ha hecho planes y entrenará del siguiente modo: el primer día saltará desde diez metros de altura, el segundo desde veinte metros, el tercero desde cuarenta metros, el cuarto desde ochenta metros y así, cada día saltará desde el doble que el día anterior. Según sus alocados planes, ¿cuántos días tendrá que entrenar para superar por primera vez los 39 kilómetros conseguidos por Baumgartner?

**A)** 13 **B)** 30 **C)** 130 **D)** 3000 **E)** 13000

**9** ¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras hay, de forma que la suma de las dos cifras centrales sea el doble que la suma de las cifras de los extremos?

**A)** 4 **B)** 14 **C)** 6 **D)** 20 **E)** 18

**10** ¿Qué número sigue en esta serie: 3600, 1800, 600, 150,…?

**A)** 15 **B)** 75 **C)** 60 **D)** 30 **E)** 18

**11** Hemos colocado nueve letras en una cuadrícula y nos ha salido el nombre del gran PITÁGORAS. Luego las hemos removido y ha resultado que: en la fila superior están las letras de TOP; en la columna de la derecha sólo hay vocales; debajo de una A hay una S; en las esquinas están las letras de PISO; sólo quedan dos letras que no se han movido. ¿Qué letra aparecerá en la casilla central?

**A)** P **B)** T **C)** G **D)** R **E)** A

**12** Con un rectángulo de cartulina, Orlandito se ha hecho la corona del *"Rey de la casa"* recortando triángulos isósceles iguales hasta la mitad de la altura de la cartulina, como ves en la figura.

¿Qué fracción del rectángulo inicial ocupa la corona?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{4}$

**13** Un cuadrado tiene seis metros de lado. Si disminuimos dos lados paralelos en dos metros cada uno, ¿cuántos metros tenemos que aumentar cada uno de los otros dos para obtener un rectángulo de igual área que el cuadrado inicial?

**A)** $\frac{8}{3}$ **B)** 2 **C)** $\frac{11}{3}$ **D)** 3 **E)** 9

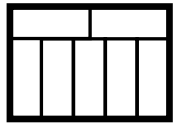
**14** ¿Cuántos granos de arena son necesarios, aproximadamente, para cubrir un cuadrado de 2 cm de lado si cada grano de arena ocupa 5 $mm^2$?

**A)** 8 **B)** 60 **C)** 40 **D)** 80 **E)** 800

**15** Glotón se comió dos tercios de una tarta, llegó Listín y se comió la mitad de lo que quedaba. Así que Buenazo, Tranquilo y Tontín se repartieron el resto como buenos hermanos. ¿Qué fracción de la tarta comió Tontín?

**A)** $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{1}{16}$ **D)** $\frac{1}{18}$ **E)** $\frac{1}{36}$

**16** El rectángulo de la figura está formado por siete rectangulitos iguales. Si el perímetro del rectángulo grande es 68 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro de cada rectangulito?



**A)** 9,7 **B)** 14 **C)** 17 **D )** 24 **E)** 28

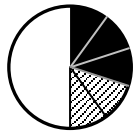
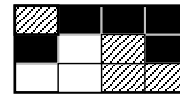
**17** De los veinticinco alumnos de mi clase, quince tocan la guitarra y once tocan la flauta. Solo hay tres niños en mi clase que no tocan ningún instrumento. ¿Cuántos niños saben tocar los dos instrumentos?

**A)** 0 **B)** 7 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 13

**18** Carlos, Eva, Lucas y Pilar forman el grupo de *Los Adivinanzas* y esta mañana hablaban así: Lucas dice "tengo la misma cantidad de monedas que Carlos"; Eva añade "y yo tengo la mitad que Carlos"; Pilar dice "pues yo tengo la mitad que Eva". Si el total de monedas de *Los Adivinanzas* es un número múltiplo de tres menor que 50, ¿cuántas monedas tiene Lucas?

**A)** 8 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 16 **E)** 20

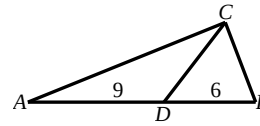
**19** Alfredo (A), Merche (M) y Luis (L) han dibujado un círculo, un triángulo y un rectángulo, respectivamente, todos ellos de igual área. Luego los han coloreado y no se ponen de acuerdo en cuál de ellos ha usado más rotulador negro.

Alfredo  Merche Luis 

Si ordenamos de menor a mayor la parte de cada figura que es negra, ¿cómo quedarían?

**A)** A < M < L **B)** A < L < M **C)** L < A < M **D)** L < M < A **E)** A = L < M

**20** El área del triángulo *ABC* es 30 cm$^2$. El punto *D* está en el segmento *AB*, como ves en la figura. Si *AD* = 9 cm y *DB*= 6 cm, ¿cuál es, en cm$^2$, el área



del triángulo *ADC*?

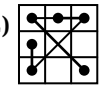
**A)** 18 **B)** 18,25 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

**21** El móvil de Don Retorcido tiene los números colocados como en los nuestros pero el suyo va haciendo operaciones a medida que se teclean los números. La operación que realiza depende de cómo estén colocados los dos números:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

SUMA RESTA MULTIPLICA DIVIDE

Estas cinco secuencias de teclas empiezan en el 9. ¿Cuál de ellas arroja el mayor resultado en el móvil de Don Retorcido?

**A)** **B)** **C)** **D)** **E)** 

**22** Inés, Lucía y Rosario se han ido de rebajas. En la tienda todas las prendas iguales tiene el mismo precio. Inés ha comprado dos pantalones y tres camisetas; Lucía un pantalón, dos camisetas y dos sombreros y Rosario una camiseta y cuatro sombreros. Si Inés ha pagado 5 € más que Lucía, Rosario ha pagado:

**A)** Lo mismo que Lucía **B)** 20 € menos que Inés **C)** Lo mismo que Inés

**D)** 10 € menos que Lucía **E)** 5 € menos que Lucía

**23** De nuevo los "Comenúmeros" han hecho de las suyas y se han comido la tercera cifra de los sumandos de esta operación: 23,3 + 52, 8 + 342 = 3725,28. . ¿Cuánto suman las tres cifras desaparecidas?

**A**) 13 **B**) 14 **C**) 20 **D**) 22 **E**) 23

**24** Hoy han coincidido en el gallinero tres gallinas poniendo huevos: Catalina los pone cada doce días, Brígida cada nueve días y Silvina cada quince. ¿Dentro de cuántos días volverán a coincidir las tres gallinas poniendo huevos?

**A)** 60 **B)** 120 **C)** 180 **D)** 240 **E)** 360

**25** Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 20 de abril de 2013**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
Libros Guijarro

**1** ¿Cuál es la diferencia entre el mayor número de cuatro cifras diferentes, todas pares, y el menor número de cuatro cifras diferentes, todas impares?

**A)** 7285 **B)** 7777 **C)** 7531 **D)** 7707 **E)** 1111

**2** Un grupo de personas decide viajar por América y eligen tres países: México, Guatemala y Honduras. Al volver se muestran sus pasaportes y observan que: en 16 pasaportes está el sello de México; en 16 está el sello de Guatemala; en 11 el de Honduras; en 5 está el sello de México y Honduras; 5 tienen únicamente el sello de Honduras; 8 tienen sólo el sello de Guatemala; 3 tienen los tres sellos. ¿Cuántos viajeros tienen solamente el sello de México?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**3** Dos diminutos quedan para dar vueltas alrededor de un reloj de agujas. Minimino se coloca en las 12 y Minimina se sitúa en las tres; Minimino gira en sentido contrario a las agujas pero Minimina va en el mismo sentido que las agujas; dicen ¡una, dos y tres! y salen a la vez; tris tras tris tras, se encuentran en las 9. Si cada diminuto mantiene su propia velocidad, ¿en qué hora se encontrarán por segunda vez?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**4** Cinco hermanas tienen todas edades diferentes: la media de sus edades es 5; Emilia, la mediana, tiene 5 años y es la única que tiene edad impar; Carlota tiene el doble de edad que Ana; Berta tiene dos años menos que Daniela. ¿Cuántos años tiene Berta?

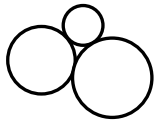
**A)** 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

**5** Isabel llama *número repe* al que está formado por una o varias cifras que se repiten de izquierda a derecha. Por ejemplo: 333333, 262626, 135135 son números repes de seis cifras.

¿Cuántos *números repes* de seis cifras hay?

**A)** 981 **B)** 990 **C)** 991 **D)** 998 **E)** 999

**6** Tres circunferencias de radios 1, 2 y 3 se colocan de tal manera que sean tangentes dos a dos como ves en la figura. ¿Qué área tiene el triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias?



**A)** 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

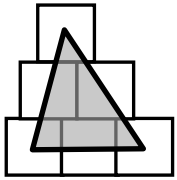
**7** Si cada consonante la cambias por el número 2 y cada vocal por el número 1, ¿qué RETORCIDO vale más?

**A)** $R^E+T^O-R^C+I^D-O$ **B)** $(R-E)^T+(O-R)\times(C-I)+D-O$

**C)** R+E–T+O–R+C–I+D–O **D)** R:E+T:O+R:C–I–D+O

**E)** R×E+T×O+R–C– (I+D):O

**8** Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 $cm^2$, ¿cuántos $cm^2$ mide el área de un cuadrado?

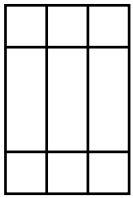


**A)** 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

**9** Para escribir las medidas de los tres ángulos de un triángulo hemos utilizado estas seis cifras: 7, 7, 7, 6, 5 y 4. Además, uno de los ángulos mide 20 grados más que otro. ¿Cuánto mide el ángulo menor?

**A)** 45º **B)** 46º **C)** 47º **D)** 54º **E)** 57º

**10** Con seis cuadrados iguales y con tres rectángulos iguales hemos diseñado una zona de paseo para hormigas. Guoquin pasea siempre a la misma velocidad y piensa en voz alta: "ayer recorrí el perímetro exterior pero hoy sólo completé el perímetro del rectángulo central y he necesitado 56 minutos menos que ayer. ¡Uf, qué agotamiento!, mañana solo pienso recorrer el lado menor del gran rectángulo". ¿Cuántos minutos paseará mañana Guoquin?



**A)** 32 **B)** 30 **C)** 18 **D)** 21 **E)** 28

**11** Reordenando las cuatro sílabas del nombre de nuestro héroe (RE TOR CI DO), podemos formar unas cuantas palabrejas rarísimas. Si ordenamos alfabéticamente esas palabrejas, ¿cuál ocupa la posición decimoquinta?

**A)** Redotorci **B)** Recitordo **C)** Retorcido **D)** Redocitor **E)** Recidotor

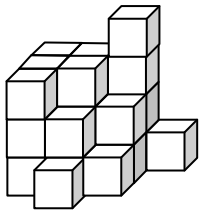
**12** Wally diseña con puntitos la inicial de su nombre, más y más grande cada vez. ¿Cuántos puntitos necesitará Wally para formar la **W** número 100?

**A)** 380 **B)** 107 **C)** 601 **D)** 403 **E)** 398

**13** En la siguiente igualdad $2^A \times 6^B = 8^C \times 9^D$, conocemos el valor de dos exponentes: $A = 8$ y $D = 5$. ¿Cuánto vale el exponente $C$?

**A)** 3 **B)** 8 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 6

**14** Sara había construido un gran cubo de 4 × 4 × 4 con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?



**A)** 28 **B)** 38 **C)** 26
**D)** 40 **E)** 37

**15** Ya está aquí Don Retorcido con sus frases trampa:

**I.** Todo número primo es impar.

**II.** Todo número impar es primo.

**III.** La suma de dos números impares nunca es primo.

**IV.** La suma de dos números impares siempre es par.

**V.** El producto de dos números impares siempre es impar.

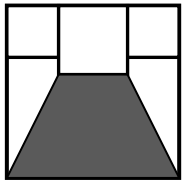
¿Cuántas de estas frases son verdaderas?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**16** Tengo tres tetrabricks rectangulares de bases 4 × 6 cm, 3 × 6 cm y 2 × 6 cm, cuyas alturas respectivas son $a$, $b$ y $c$. Sabiendo que el primero tiene doble capacidad que el segundo y el segundo doble que el tercero, ¿qué relación deben cumplir sus alturas?

**A)** $2a = 3b = 4c$ **B)** $a = 2b = 4c$ **C)** $a = b = c$
**D)** $a = 3b = 6c$ **E)** $2a = 4b = 3c$

**17** El cuadrado grande contiene tres cuadrados más pequeños de áreas 9 cm$^2$, 9 cm$^2$ y 16 cm$^2$. ¿Qué área, en cm$^2$, tiene la región sombreada?



**A)** 33 **B)** 22 **C)** 42
**D)** 34 **E)** 40

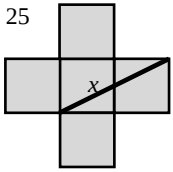
**18** De las 24 horas que tiene el día, Roque Ronquidos pasa la mitad en la cama. Del resto del tiempo, pasa la mitad bostezando en el pupitre del colegio y, del tiempo que le queda, pasa la mitad dormitando mientras "hace los deberes". Y aún pasa la mitad del tiempo que le queda apoltronado en el sofá delante de la tele, y la mitad de lo que le queda cabeceando en el autobús. El resto del tiempo que le queda, el bueno de Roque lo emplea en leer cuentos a su abuela para que concilie el sueño. ¿Cuántos minutos al día dedica Roque a leerle a su abuela?

**A)** 0 **B)** 15 **C)** 30 **D)** 45 **E)** 60

**19** A ver, Merche, dime qué notas crees que has sacado en los cuatro exámenes. Pues 4, 6, 9 y 9. Fíjate que no has acertado ni una nota pero la media sí te coincide y, por supuesto, no has obtenido ningún 10 ni tampoco has sacado la misma nota en los cuatro exámenes. Si descartamos la peor nota de Merche, ¿cuánto suman los otros tres exámenes?

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

**20** Si el segmento $x$ mide 5 cm, ¿cuánto mide, en $cm^2$, el área de la cruz?



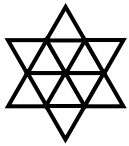

**A)** 16 **B)** 18 **C)** 20

**D)** 21 **E)** 25

**21** La diana de la feria sólo tiene dos regiones, la naranja y la verde. Cuando el dardo cae en la naranja te dan 3 puntos, cuando cae en la verde 5 puntos y si cae fuera 0 puntos. Si puedes lanzar tantas veces como quieras, ¿cuántas puntuaciones menores que 100 son imposibles de conseguir?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

**22** ¡A contar se ha dicho! ¡Y sin dejarse ninguno! ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

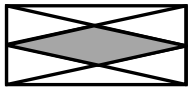


**A)** 12 **B)** 20 **C)** 18 **D)** 14 **E)** 24

**23** Siete cebollas y cinco tomates cuestan 4,50 euros. Cinco cebollas y tres tomates valen 3,10 euros. Si necesito para mi receta tres cebollas y dos tomates, ¿cuántos euros me gastaré?

**A)** 1,90 **B)** 2 **C)** 2,10 **D)** 2,15 **E)** 2,60

**24** En un rectángulo cuyos lados miden 4 y 12 centímetros, hemos formado un rombo ayudándonos de los vértices del rectángulo y de puntos medios de sus lados. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene el rombo?



**A)** 10 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 9 **E)** 14

**25** Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar cuántos años tengo? Es un número de tres cifras, múltiplo de 3 y de 5, si le borras la cifra de las unidades queda un número primo, ¡y no quiero comentarios sobre mi edad! Os dejo cinco posibilidades, sólo una es la correcta.

**A)** 210 **B)** 235 **C)** 275 **D)** 315 **E)** 379

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 20 de abril de 2013**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

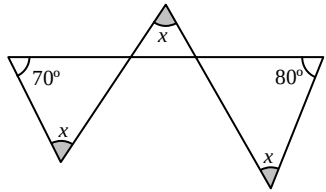
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
Libros Guijarro

**1** Un día observé que el cuentakilómetros de mi coche marcaba el 24942, un número capicúa, y unos días más tarde me di cuenta de que marcaba el siguiente capicúa. La suma de las cifras del número de km que recorrí entre esos dos días es:

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**2** Los ángulos de un triángulo son proporcionales a los números 2, 3 y 5. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor?

**A)** 9º **B)** 18º **C)** 36º
**D)** 45º **E)** 54º



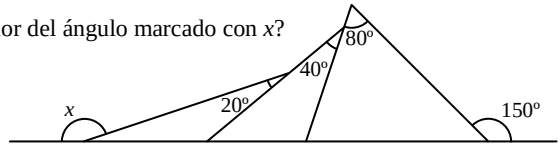

**3** ¿Cuál es el valor de $x$ en el siguiente dibujo, que no está hecho a escala?

**A)** 30º **B)** 35º **C)** 40º
**D)** 45º **E)** 50º

**4** Tres atletas comienzan a correr simultáneamente desde el mismo punto en una pista circular de 500 m de longitud. Todos corren en el mismo sentido alrededor de la pista, manteniendo velocidades constantes de 4,4 m/s, 4,8 m/s y 5 m/s. Acuerdan detenerse cuando vuelvan a coincidir los tres en algún punto de la pista. ¿Cuántos segundos corren?

**A)** 1000 **B)** 1250 **C)** 2500 **D)** 5000 **E)** 10 000

**5** ¿Cuál es el valor del ángulo marcado con $x$?

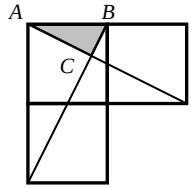



**A)** 170º **B)** 160º **C)** 150º **D)** 140º **E)** 130º

**6** El número 6 es la media aritmética del número entero 3 y de su cuadrado. ¿Cuál de los siguientes números no es la media aritmética de ningún entero positivo y su cuadrado?

**A)** 3 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 21 **E)** 30

**7** En la figura observas tres cuadrados de lado 1 y dos segmentos que unen dos pares de vértices. ¿Cuál es el área del triángulo $ABC$?

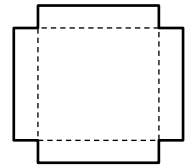



**A)** $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{2}{9}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$

**8** Dos hermanos gemelos sacan siempre la misma nota en los exámenes de Matemáticas. A lo largo del curso pasado, uno de ellos obtuvo en los ocho exámenes que hizo: 8,5; 6,5; 2,5; 5; 7; 4,5; 6 y 8 y el otro, que no pudo hacer dos exámenes de esos ocho, obtuvo la misma media que su hermano. ¿Qué nota obtuvo éste en los dos exámenes que hizo sólo?

**A)** 6 y 8,5 **B)** 2,5 y 8,5 **C)** 4,5 y 8 **D)** 5 y 6 **E)** 5 y 7

**9** En una hoja cuadrada cortamos en cada esquina un cuadrado de 2 cm de lado y doblamos por las líneas a trazos que se observan en la figura para formar una caja sin tapa de 180 $cm^2$ de superficie total. ¿Cuál es el volumen, en $cm^3$, de esa caja?

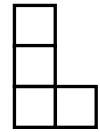


**A)** 100 **B)** 128 **C)** 162 **D)** 180 **E)** 200

**10** Supón que la cotización del euro es 1,30 dólares. Si Hillary tiene 500 dólares y Antonio tiene 400 euros, Hillary tiene algo menos que Antonio. Sobre el total del dinero de Hillary, ¿qué porcentaje supone esa diferencia?

**A)** 2% **B)** 4% **C)** 6,5% **D)** 8% **E)** 13%

**11** La figura que ves está hecha con cuatro cuadraditos iguales. María quiere añadir un cuadradito más para formar una figura con 5 cuadraditos y que tenga al menos un eje de simetría. ¿De cuántas formas podrá hacerlo?



**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**12** Joaquín se comió 12 naranjas en tres días. Cada día comió más naranjas que el día anterior y el tercer día comió menos que la suma de los dos días anteriores. ¿Cuántas naranjas se comió Joaquín el tercer día?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**13** Berta hace una lista con todos los números de tres cifras cuyas cifras suman 8. ¿Cuál es la suma del menor y el mayor número de la lista?

**A)** 707 **B)** 907 **C)** 916 **D)** 1000 **E)** 1001

**14** Isa tiene nueve perlas de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 gramos de peso. Un día hizo cuatro collares con dos perlas en cada collar, así que dejó una perla sin utilizar. Si la suma de los pesos de los cuatro collares es múltiplo de 5, ¿cuál es el peso en gramos de la perla que no utilizó?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

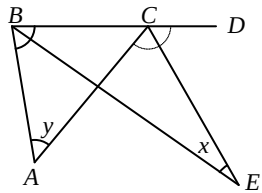
**15** La suma de los primeros $m$ enteros positivos impares es 212 más que la suma de los $n$ primeros enteros positivos pares. ¿Cuál es la suma de todos los valores que puede tomar $n$?

**A)** 255 **B)** 256 **C)** 257 **D)** 258 **E)** 252

**16** En un triángulo rectángulo de hipotenusa 4 cm, la suma de sus catetos es $\sqrt{18}$ cm. ¿Cuál es, en cm$^2$, el área de dicho triángulo?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 18

**17** En el dibujo que observas, los ángulos $A\hat{B}E$ y $E\hat{B}C$ son iguales, así como también son iguales los ángulos $A\hat{C}E$ y $E\hat{C}D$. Si llamamos $B\hat{E}C = x$, el ángulo $y = B\hat{A}C$ es igual a:



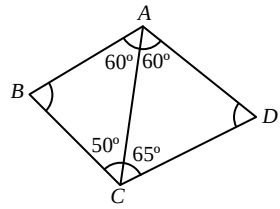

**A)** $90^\circ - x$ **B)** $90^\circ - \frac{x}{2}$ **C)** $2x$

**D)** $x$ **E)** $180^\circ - 2x$

**18** Al sumar 329 con el número de tres cifras 2$A$4 obtenemos como resultado 5$B$3. Si 5$B$3 es divisible por 3, el mayor valor posible para la cifra $A$ es:

**A)** 1 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**19** En el dibujo siguiente, que no está hecho a escala, la mayor longitud debe ser:




**A)** $CD$ **B)** $AC$ **C)** $AD$

**D)** $AB$ **E)** $BC$

**20** Si $n$ es un entero mayor que $2013^{2013}$, cuando dividimos $n(n + 1)$ entre 3, el resto puede ser:

**A)** Solo 0 **B)** Solo 2 **C)** Solo 0 o 1 **D)** Solo 0 o 2 **E)** 0, 1 o 2

**21** El menor entero positivo que da restos 1, 4 y 1 al dividirlo entre 3, 5 y 11, respectivamente, está entre:

**A)** 11 y 20 **B)** 21 y 30 **C)** 31 y 40 **D)** 41 y 50 **E)** 61 y 70

**22** El mayor entero positivo que divide a todos los términos de la sucesión $13^5 - 13$, $14^5 - 14$, $15^5 - 15$, …, $n^5 - n$, … es:

**A)** 60 **B)** 30 **C)** 20 **D)** 12 **E)** 6

**23** Al restarle a un número su cuadrado, el mayor resultado posible es:

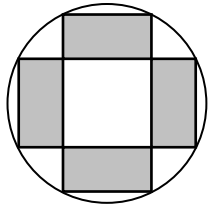
**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{6}$

**24** Esteban escribe un número de cinco cifras, todas distintas, y tal que la primera por la izquierda es la suma de las otras cuatro. ¿Cuántos números puede escribir con estas características?

**A)** 72 **B)** 144 **C)** 168 **D)** 216 **E)** 288

**25** Los cuatro rectángulos sombreados de la figura son iguales y con un lado doble que el otro. Si el círculo tiene radio 1, ¿cuál es el área de cada rectángulo?

**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{5}{12}$ **D)** $\frac{4}{9}$ **E)** $\frac{1}{2}$



concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 20 de abril de 2013**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avira neta
Libros Guijarro

**1** ¿Cuántos primos de dos cifras cumplen además que sus cifras son números primos? (Por ejemplo, 23 sería uno de ellos, pero 71 no, pues 1 no es primo)

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

**2** Tengo seis pares de calcetines, de diferente color cada par, estando los doce calcetines sueltos guardados en un cajón. ¿Cuántos calcetines debo sacar, como mínimo, del cajón para asegurar que me puedo poner un par del mismo color?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 11

**3** En la primera fase de un concurso de matemáticas, la media de las puntuaciones fue de 76 sobre 100. La nota media de los estudiantes que se clasificaron para la segunda fase fue de 83 y la media de los que no se clasificaron fue de 55. ¿Qué porcentaje de los estudiantes se clasificó para la segunda fase?

**A)** 44% **B)** 66% **C)** 68% **D)** 72% **E)** 75%

**4** ¿Qué número es $\sqrt{10-4\sqrt{6}}-\sqrt{10+4\sqrt{6}}$ ?

**A)** $-1$ **B)** $-4$ **C)** $-2\sqrt{6}$ **D)** $-\sqrt{8\sqrt{6}}$ **E)** $-8\sqrt{6}$

**5** En el triángulo de lados $AB = 24$, $BC = 7$ y $AC = 25$, ¿cuál es la longitud de la mediana que parte de $C$?

**A)** 10 **B)** $\sqrt{139}$ **C)** 12 **D)** $\sqrt{193}$ **E)** 16

**6** Si las dos raíces de la ecuación $x^2-85x+c=0$ son números primos, ¿cuál es la suma de las cifras de $c$?

**A)** 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 21

**7** Si $sen\,x+\cos x=\frac{1}{2}$, ¿cuánto vale $sen^3x+\cos^3 x$ ?

**A)** $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$

**8** ¿Cuál es el mayor entero $n$ para el que $\frac{n^2-38}{n+1}$ es entero?

**A)** 36 **B)** 38 **C)** 72 **D)** 76 **E)** $-2$

**9** Una circunferencia pasa por dos vértices contiguos de un cuadrado de lado 2 y es tangente al lado opuesto. ¿Cuál es su radio?

**A)** $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** $\frac{6}{5}$ **E)** $\frac{7}{6}$

**10** Para cada entero positivo $n$ definimos $S(n)$ como la suma de los divisores de $n$. Así pues $S(8)=1+2+4+8=15$. ¿Cuál de los siguientes números es el más pequeño?

**A)** $S(2010)$ **B)** $S(2011)$ **C)** $S(2012)$ **D)** $S(2013)$ **E)** $S(2014)$

**11** ¿Cuántos términos de la sucesión 1, 4, 7, 10, 13, 16, … tienen menos de cinco cifras?

**A)** 3003 **B)** 3331 **C)** 3332 **D)** 3333 **E)** 3524

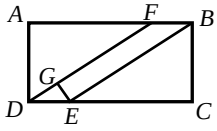
**12** En una lista de seis números, el primero es 4 y el último 47, siendo cada número, a partir del tercero la suma de los dos precedentes. Si $S$ es la suma de los seis números de la lista, $S$ está en el intervalo:

**A)** [51, 90] **B)** [91, 100] **C)** [101, 110] **D)** [111, 120] **E)** [121, 160]

**13** El perímetro de un rectángulo es $x$ cm y el cociente de sus dos longitudes es $\frac{a}{b}$ con $a > b$. ¿Cuál es la longitud, en cm, del lado más corto?

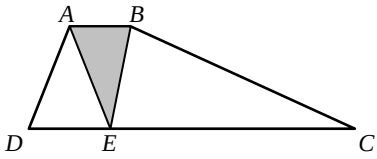
**A)** $\frac{bx}{a+b}$ **B)** $\frac{x}{2}-2a$ **C)** $\frac{2bx}{a+b}$ **D)** $\frac{ax}{2(a+b)}$ **E)** $\frac{bx}{2(a+b)}$

**14** En el rectángulo de la figura, de dimensiones 12 y 6, los segmentos $DF$ y $BE$ son paralelos y $EG$ es perpendicular a ambos. Si el área del paralelogramo $DEBF$ es 12, la longitud de $EG$ es:




**A)** $\frac{3\sqrt{34}}{17}$ **B)** $\frac{2\sqrt{34}}{34}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** 2 **E)** Nada de lo anterior

**15** El área del trapecio $ABCD$ de la figura es 18, $AB = 4$ y $DE=\frac{1}{4}DC$. Si la altura del trapecio es un entero y el lado $DC$ es un entero impar, el área del triángulo $ABE$ es:




**A)** 9 **B)** 6 **C)** $\frac{18}{5}$ **D)** 8 **E)** Nada de lo anterior

**16** Si $tgx = 3$, siendo $0º \le x \le 90º$, entonces:

**A)** $0º \le x \le 30º$ **B)** $30º \le x \le 45º$ **C)** $45º \le x \le 60º$

**D) 6**$0º \le x \le 75º$ **E)** $75º \le x \le 90º$

**17** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x = 10 \cdot cosx$ ?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

**18** El valor de $25^{\frac{1}{2}-\log_5 \sqrt{2}}$ es:

**A)** $\frac{5}{2}$ **B)** $\frac{5}{\sqrt{2}}$ **C)** $5-\sqrt{2}$ **D)** $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ **E)** 3

**19** ¿Cuántos puntos tienen en común las gráficas de $y = |x|$ e $y = |x^2 - 4|$ ?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**20** La distancia más corta entre un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y otro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 41 = 0$ es:

**A)** $3\sqrt{5} - 5$ **B)** $3\sqrt{5}$ **C)** $3\sqrt{5} - 1$ **D)** 5 **E)** 1

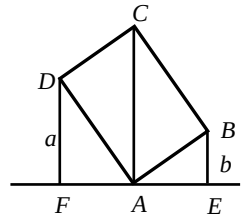
**21** ¿Cuál es el mínimo valor que toma la función $f(x) = 2^{x^2-2x}$ ?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** –1 **C)** 0 **D)** 2 **E)** 1

**22** El menor entero positivo $x$ para el que la suma $x + 2x + 3x + \ldots + 100x$ es un cuadrado perfecto es:

**A)** 100 **B)** 101 **C)** 202 **D)** 5050 **E)** Nada de lo anterior

**23** En la figura que observas, *ABCD* es un rectángulo y los segmentos *DF*, *BE* y *CA* son perpendiculares a la recta *FE*. Si $DF = a$ y $BE = b$, la longitud *FE* es:




**A)** $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

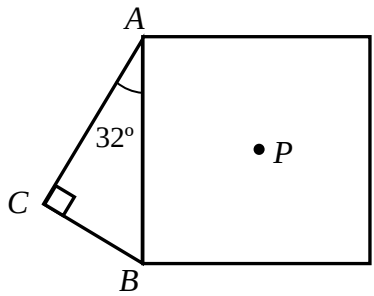
**D)** $\frac{2a + 4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

**24** ¿Cuál es el valor de $\log(tg\,1^o)+\log(tg\,2^o)+...+\log(tg\,88^o)+\log(tg\,89^o)$?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** $\log\frac{\pi}{2}$ **E)** $\log\frac{\pi}{4}$

**25** En la figura se observa un triángulo rectángulo *ABC* con $\hat{A}=32^o$ y un cuadrado de centro *P* y que comparte el lado *AB* con el triángulo. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{C}B$?

**A)** 32º **B)** 44º **C)** 45º **D)** 48º **E)** 58º



# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **C** | 1 | **B** | 1 | **E** | 1 | **C** |
| 2 | **C** | 2 | **D** | 2 | **B** | 2 | **C** |
| 3 | **D** | 3 | **A** | 3 | **C** | 3 | **B** |
| 4 | **C** | 4 | **C** | 4 | **D** | 4 | **A** |
| 5 | **C** | 5 | **D** | 5 | **D** | 5 | **D** |
| 6 | **D** | 6 | **B** | 6 | **C** | 6 | **C** |
| 7 | **A** | 7 | **E** | 7 | **C** | 7 | **B** |
| 8 | **D** | 8 | **C** | 8 | **D** | 8 | **E** |
| 9 | **D** | 9 | **B** | 9 | **A** | 9 | **C** |
| 10 | **E** | 10 | **D** | 10 | **C** | 10 | **B** |
| 11 | **E** | 11 | **A** | 11 | **D** | 11 | **E** |
| 12 | **B** | 12 | **C** | 12 | **D** | 12 | **B** |
| 13 | **C** | 13 | **D** | 13 | **E** | 13 | **D** |
| 14 | **E** | 14 | **D** | 14 | **D** | 14 | **C** |
| 15 | **B** | 15 | **E** | 15 | **D** | 15 | **B** |
| 16 | **D** | 16 | **E** | 16 | **B** | 16 | **D** |
| 17 | **D** | 17 | **B** | 17 | **D** | 17 | **D** |
| 18 | **C** | 18 | **C** | 18 | **A** | 18 | **D** |
| 19 | **C** | 19 | **A** | 19 | **D** | 19 | **D** |
| 20 | **B** | 20 | **B** | 20 | **E** | 20 | **E** |
| 21 | **B** | 21 | **E** | 21 | **A** | 21 | **D** |
| 22 | **D** | 22 | **B** | 22 | **C** | 22 | **C** |
| 23 | **C** | 23 | **C** | 23 | **A** | 23 | **E** |
| 24 | **E** | 24 | **A** | 24 | **B** | 24 | **B** |
| 25 | **E** | 25 | **B** | 25 | **A** | 25 | **D** |

# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **E** | 1 | **A** | 1 | **B** | 1 | **B** |
| 2 | **B** | 2 | **B** | 2 | **E** | 2 | **D** |
| 3 | **C** | 3 | **D** | 3 | **A** | 3 | **E** |
| 4 | **E** | 4 | **C** | 4 | **C** | 4 | **B** |
| 5 | **A** | 5 | **A** | 5 | **A** | 5 | **D** |
| 6 | **D** | 6 | **A** | 6 | **E** | 6 | **B** |
| 7 | **B** | 7 | **D** | 7 | **B** | 7 | **E** |
| 8 | **A** | 8 | **A** | 8 | **E** | 8 | **A** |
| 9 | **A** | 9 | **B** | 9 | **E** | 9 | **C** |
| 10 | **D** | 10 | **D** | 10 | **B** | 10 | **B** |
| 11 | **D** | 11 | **D** | 11 | **C** | 11 | **D** |
| 12 | **E** | 12 | **D** | 12 | **A** | 12 | **D** |
| 13 | **D** | 13 | **E** | 13 | **B** | 13 | **E** |
| 14 | **D** | 14 | **B** | 14 | **E** | 14 | **A** |
| 15 | **D** | 15 | **B** | 15 | **A** | 15 | **D** |
| 16 | **E** | 16 | **A** | 16 | **A** | 16 | **D** |
| 17 | **D** | 17 | **C** | 17 | **C** | 17 | **D** |
| 18 | **B** | 18 | **D** | 18 | **B** | 18 | **A** |
| 19 | **B** | 19 | **C** | 19 | **C** | 19 | **E** |
| 20 | **A** | 20 | **E** | 20 | **D** | 20 | **A** |
| 21 | **A** | 21 | **C** | 21 | **C** | 21 | **A** |
| 22 | **E** | 22 | **B** | 22 | **B** | 22 | **C** |
| 23 | **A** | 23 | **A** | 23 | **C** | 23 | **B** |
| 24 | **C** | 24 | **C** | 24 | **C** | 24 | **A** |
| 25 | **D** | 25 | **D** | 25 | **B** | 25 | **C** |

# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel I*

**1. (C)** Nos piden que hagamos la resta 2013 – 1939 = 74.

**2. (C)** Como en la guía caben $1207 \times 160 \times 5 = 965\,600$ teléfonos, 950 000 es claramente la cifra que mejor aproxima el número de teléfonos de la guía.

**3. (D)** El cuadrado ocupa 16 unidades cuadradas. Por su parte, la **N** se puede descomponer en dos rectángulos de 4 unidades cada uno y un paralelogramo de base unidad y altura 2, con lo que el área de la **N** es de 8 + 2 = 10 unidades cuadradas y la fracción pedida es $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$.

**4. (C)** Si organizamos lo datos en una tabla como la siguiente:

| | Patas | Cabezas |
|---|---|---|
| 15 vacas | 60 | 15 |
| 3 ciempiés | 300 | 3 |
| 37 gallinas | 74 | 37 |
| 11 serpientes | 0 | 11 |
| **SUMA** | 434 | 66 |

Vemos con facilidad que hay 434 + 66 = 500 patas y cabezas en total.

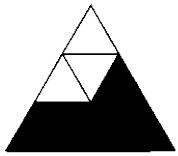
**5. (C)** Haciendo funcionar a la máquina en sentido inverso tendremos: $94-16=78;\ 78:2=39;\ 39+52=91;\ 91\times12=1092$ y por lo tanto 1 + 9 + 2 = 12.

**6. (D)** Dado que 11782 : 3600 = 6,5 , la respuesta es: entre 6 y 7 horas.

**7. (A)** Sabemos que 3 gominolas + 2 chupachups valen igual que 4 gominolas + 2 chicles, y que la igualdad se mantendrá si quitamos 3 gominolas en *ambos lados*.
Entonces 2 chupachups valen lo mismo que 1 gominola + 2 chicles.
Por otra parte, si 4 chupachups cuestan lo mismo que 6 chicles, es claro que 2 chupacups valen lo mismo que 3 chicles.
Como consecuencia 1 gominola + 2 chicles cuestan lo mismo que 3 chicles, es decir, una gominola cuesta lo mismo que un chicle.

**8. (D)** El único número que tiene sus cifras en distinto orden a los dados y que es menor que 60 y mayor que 34 es 54. La suma de sus cifras es 9

**9. (D)** A la vista de la figura es evidente que el área de cada triangulito Mide 36 : 9 = 4 $cm^2$. Luego el área de la figura sombreada es: $6 \times 4 = 24$ $cm^2$.



**10.(E)** Sin importar lo gigantescos que sean los dos números, en su multiplicación, la cifra de las decenas será la misma que la del producto de 43 por 58. Haciendo la operación encontramos que la cifra es 9.

**11.(E)** El único que hizo caso a Don Retorcido fue el alumno E.

**12.(B)** Si bailan Merengue también bailan Chotis, pero si bailan Chotis no bailan Pasodoble y si no bailan Pasodoble, entonces bailan Fox-Trot. Por lo tanto, además del Merengue, bailaron Fox-Trot y Chotis.

**13.(C)** Empecemos por representar esquemáticamente las piezas que llevan puestas, de la siguiente forma:

Lo dividimos en tres partes iguales para determinar fácilmente lo que representan dos tercios.

Y ahora añadimos los dos tercios que faltan por poner.

Como el total de las piezas es de 1500, entonces cada cuadradito representa $\frac{1500}{5} = 300$ piezas y por lo tanto les quedan por colocar $300 \times 2 = 600$ piezas.

**14.(E)** Si hace el recorrido en forma *circular* (como en la figura del enunciado), puede hacer seis dibujos diferentes; uno por cada uno de los Puntos desde los que puede comenzar el recorrido. Además puede hacer otros dos dibujos distintos, desviándose a la vertical en los dos Puntos centrales, como muestra la figura:

Luego, puede hacer ocho dibujos diferentes.

**15.(B)** Sustituyendo cada letra por su número correspondiente tenemos:
$(20 + 2 \times 3) : (10 - 2 \times 3) = (10 + 6) : (10 - 6) = 16 : 4 = 4$.

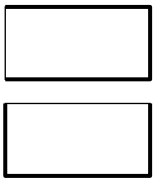
**16.(D)** Si la primera cifra es par, la podemos elegir de cuatro formas (2, 4, 6, 8) y la segunda de cinco (1, 3, 5, 7, 9). En total tenemos $4 \times 5 = 20$ números.
Si la primera es impar, podemos elegirla de 5 maneras, pero ahora la segunda cuenta también con cinco opciones, de modo que tenemos $5 \times 5 = 25$ números. En consecuencia hay 45 números que cumplen las condiciones impuestas.

**17.(D)** Para empezar calcularemos el dinero que tiene cada una de las hermanas:
$1 + 3 \times 0{,}5 + 6 \times 0{,}20 + 3 \times 0{,}05 = 3{,}85$ €
Mariquilla tendrá el mínimo número de monedas si tiene el máximo número de monedas de mayor valor: con una de 2 € otra de 1 € ya completa 3 € Los 0,85 € restantes los debe completar con una moneda de 50 céntimos, una de 20, una de 10 y una de 5 céntimos. Tiene pues, en total, seis monedas.

**18.(C)** Fijémonos en la figura**:** si *B* es el punto medio de *AC* y *C* el punto medio de *BD*, tenemos que los segmentos *AB*, *BC* y *CD* miden lo mismo, y si *D* es el punto medio de *BE*, entonces el segmento *DE* mide igual que el *BD*. Esto nos permite dividir el segmento *AB* en cinco partes iguales; 3 para los segmentos *AB*, *BC* y *CD* y 2 para el segmento *DE*, con lo que, $\frac{20}{5}\times 2 = 8\ cm$ será lo que mide *DE*.

**19.(C)** Como 48 menos el paréntesis es igual a 16, el paréntesis tiene que ser 48 – 16 = 32, es decir, 6 más el doble del número comido es igual a 32, luego el doble de ese número es igual 32 – 6 = 26 y por tanto el número comido es 13.

**20.(B)** Evidentemente, como se aprecia en la figura, la suma de Juanje es igual al perímetro, P, menos el lado menor, *b*, y la suma de Francisco equivale al perímetro menos el lado mayor, *a*. Entre los dos sumaron $44 + 40 = P - b + P - a = 2P - (a + b)$ y como $(a + b)$ es igual al semiperímetro, tenemos: $84 = 1{,}5P$, con lo que $P = \frac{84}{1{,}5} = 56\ cm$.



**21.(B)** El día 1º necesita contar *X* corderitos. El día 2º necesita $X - 5$. El 3º día $X - 2 \times 5$. El 4º día $X - 3 \times 5$… El 30º día $X - 29 \times 5 = 0$, de donde $X = 29 \times 5 = 145$ corderitos.

**22.(D)** Si agrupamos los 28 primeros días del año en 14 parejas, día par más día impar, tendremos que cada par de días corre $\frac{210}{14} = 15\ km.$ Dado que el día par corre tres kilómetros más que el día impar, basta descomponer 15 en dos sumandos tales que su diferencia sea 3. Tras un breve tanteo encontramos: $15 = 9 + 6$.
Como entre los días 21 y 27 tenemos tres parejas: impar, par, más el impar 27, concluimos que correrá $3 \times 15 + 6 = 51\ km$.

**23.(C)** En realidad el problema se reduce a elegir un zapato entre 4. Saque el que saque con una mano, tiene cuatro opciones para sacar un zapato con la otra mano, y solo una de ellas será favorable. Por lo tanto la probabilidad pedida es 1/4.

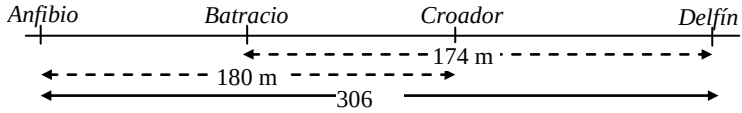
**24.(E)** Basta multiplicar, en cada tramo, la velocidad en *km/h* por el tiempo correspondiente en horas y realizar la suma de kilómetros:
$(50 \times 0{,}5) + (120 \times 4{,}5) + (60 \times 0{,}25) = 25 + 540 + 15 = 580\ km.$

**25.(E)** El número de chicos que puede haber en la clase de Don Retorcido está comprendido entre 0 y 14. Imaginemos que son 14, esto es, en la clase hay 29 estudiantes. Entonces, si hace grupos de cinco le sobrarán cuatro. Para que le sobre uno basta con eliminar a tres chicos. De esta forma, en la clase, hay 26 alumnos de los que 11 son chicos. Si ahora hace grupos de cinco, tendrá cinco grupos y le sobrará un estudiante y si los hace de cuatro, habrá seis grupos y le sobrarán dos. Por lo tanto, si hay once chicos, problema solucionado.
Es muy fácil ver que esta es la única solución.
Consideremos que hay en la clase $26 – 5 = 21$ ó $21 – 5 = 16$ estudiantes (las otras dos únicas posibilidades de hacer grupos de cinco y que sobre uno). Vemos inmediatamente que ninguna de estas opciones cumple la otra condición del problema.

# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

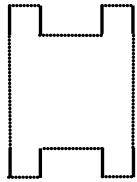
*Soluciones 1ª Fase Nivel II*

**1. (B)** Lo más sencillo es alinear a los corredores y escribir los datos que nos dan:




Así es fácil ver que la distancia de Anfibio a Batracio es 306 – 174 = 132 m y la distancia de Batracio a Croador es 180 – 132 = 48 m.

**2. (D)** Como $35613{,}475 = \frac{35613475}{1000} = \frac{1424539}{40}$ el menor número natural por el que debemos multiplicar para obtener un entero es 40.

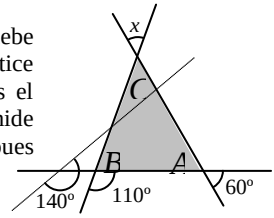


**3. (A)** Como el perímetro del cuadrado es igual a la suma de todos los trazos punteados, lo único nuevo que hemos añadido son ocho lados del cuadrado (es decir, el doble del perímetro de un cuadradito). Así pues, el perímetro de cada cuadradito es (136 – 80) : 2 = 56 : 2 = 28 cm.

**4. (C)** Si para vestir a 90 hadas hacen falta 750 m de hilo, para vestir a 225 necesitaremos $225 \cdot \frac{750}{90} = 225 \cdot \frac{25}{3} = 75 \cdot 25 = 1875$ m. Así pues, tras vestir a las hadas nos quedarán 2250 – 1875 = 375 m de hilo con los que podremos vestir a $375 : \frac{750}{150} = 375 : 5 = 75$ ninfas.

**5. (D)** El resultado será aproximadamente igual a ochenta billones (un ocho seguido de 13 ceros por treinta mil millones (un tres seguido de 10 ceros) luego será aproximadamente igual a 24 seguido de 13 + 10 = 23 ceros.
Así pues, el número tendrá 2 + 23 = 25 cifras.

**6. (B)** Observa el triángulo sombreado. La suma de sus ángulos debe ser 180º. El ángulo *A* mide 60º (pues es opuesto por el vértice al de 60º), el ángulo *B* mide 180º – 110º = 70º pues es el suplementario del ángulo de 110º. Así pues el ángulo *C* mide 180º – (60 + 70) = 50º y por tanto *x* debe ser también 50º (pues son opuestos por el vértice).
Como ves, el dato de 140º no es necesario.



**7. (E)** La afirmación I es verdadera. Los denominadores nos indican la cantidad de partes iguales en que dividimos la unidad. Si el denominador es menor, la unidad estará dividida en menos partes y cada una de esas partes será más grande. Por tanto, si $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$ es porque $c < b$.

La "mitad del doble de la mitad" es la "mitad de la unidad", que es claramente la mitad. La afirmación II es verdadera.

La afirmación III también es verdadera pues, si llamamos $D$ al dividendo, $d$ al divisor, $c$ al cociente y $r$ al resto, sabemos que $D = d \cdot c + r$. Por tanto $D - r = d \cdot c$ así pues, al dividir $D - r$ entre $d$ obtendremos como cociente $c$ y como resto, 0.

Hemos visto que todas las afirmaciones son verdaderas.

**8. (C)** Vamos comparando poco a poco: comparemos primero A) con B).

$2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^5 = 32 \cdot (3^5 \cdot 5^5)$ y $3^5 \cdot 5^6 \cdot 7 = (3^5 \cdot 5^5) \cdot 5 \cdot 7 = (3^5 \cdot 5^5) \cdot 35$. Así que es mayor la opción B).

Entre B) y C) $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 = 16 \cdot 3 \cdot (3^5 \cdot 5^5) = 48 \cdot (3^5 \cdot 5^5) > (3^5 \cdot 5^5) \cdot 35$ así que la opción C) es mayor.

Entre C) y D) $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 = 8 \cdot (2 \cdot 3^6 \cdot 5^5)$ y $2 \cdot 3^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 3^6 \cdot 5^5) \cdot 5$ y C) sigue siendo mayor.

Por último, entre la opción C) y E) tenemos que $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5 = 16 \cdot (3^6 \cdot 5^5)$ y $3^8 \cdot 5^5 = 9 \cdot (3^6 \cdot 5^5)$ y, por tanto, el número mayor es $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^5$.

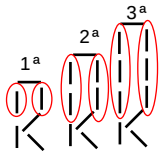
**9. (B)** El número de cuatro cifras "*abcd*" es múltiplo de 11 si $(a + c) - (b + d)$ es múltiplo de 11. Seguro que conoces este resultado pero, ¿sabes por qué? Pues verás, el número "*abcd*" es, en realidad, $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d = 1001 \cdot a - a + 99 \cdot b + b + 11 \cdot c - c + d = 11 \cdot 91 \cdot a - a + 11 \cdot 9 \cdot b + b + 11 \cdot c - c + d = 11(91 \cdot a + 9 \cdot b + c) - a + b - c + d$ y este número será múltiplo de 11 si lo es $-a + b - c + d$.

Bueno, pues vamos ahora a resolver el problema: Nuestro número debe ser de la forma "*ab*13" con $(a + 1) - (b + 3)$ múltiplo de 11.

Así que queremos que $a - b - 2$ sea un múltiplo de 11. Como $a$ y $b$ son cifras, solo pueden tomar valores enteros de 0 a 9 (y $a$ no puede ser 0) así que ese número estará entre –10 y 7 y el único múltiplo de 11 que hay es 0.

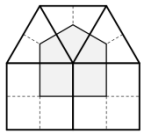
Queremos que $a - b - 2 = 0$, es decir $a - b = 2$. Los valores posibles son 2013, 3113, 4213, 5313, 6413, 7513, 8613 y 9713. En total hay 8.

**10.(D)** Observa que para formar la primera letra usamos $2 \cdot 1 + 4$ palillos, para la segunda, $2 \cdot 2 + 4$, para la tercera $2 \cdot 3 + 4$… Así que para la letra número 2013 usaremos $2 \cdot 2013 + 4 = 4030$ palillos.



**11.(A)** Si llamamos $x$ al número de pasteles que se comió Índice, tenemos que:
Corazón se comió $2x$
Anular se comió $x + 3$
Meñique se comió 1.
Pulgar se comió $x + 2x + (x + 3) + 1 = 4x + 4$.
Como entre todos se comieron 80 pasteles, Pulgar se comió 40 así que $4x + 4 = 40$.
Resolviendo la ecuación tenemos que $x = 9$ y Anular se comió $9 + 3 = 12$ pasteles.

**12.(C)** Observa que el pentágono ocupa 1/4 de cada cuadrado y 1/3 de cada triángulo. Así pues su área es $2\cdot\frac{a}{4}+3\cdot\frac{b}{3}=\frac{a}{2}+b$



**13.(D)** Veamos cómo va la cosa: en las tres primeras horas la Mula ha recorrido 20 km y el Buey 24 km (coinciden cuando la Mula está descansando después de dos horas de trote). En la siguiente hora la Mula llevará recorridos 30 km y el Buey 32 km y en la siguiente hora ambos coincidirán. Así pues tardarán 5 horas en coincidir y habrán recorrido 40 km.

**14.(D)** Nos conviene que el denominador sea 1 y que el numerador sea grande. Si $A = 100$ y $B + C = 99$ se cumplen las dos cosas y el resultado es 199.

Como tal vez creas que podría haber una solución mejor, para terminar de convencerte observa que si llamas $D = B + C$, la expresión se escribe como $\frac{A+D}{A-D}$ donde $A$ va de 1 a 100 y $D$ de 3 a 199. Si $D$ es mayor que $A$ el número será negativo, así que te conviene tomarlo de 3 a 100 y ahora está claro que lo mejor es tomar $A = 100$ y $D = 99$.

**15.(D)** Si la primera tiene $x$ años y la segunda tiene $y$ años podemos escribir que $\frac{1}{2}(3x)=2\left(\frac{y}{3}\right)$ o lo que es lo mismo: $\frac{3}{2}x=\frac{2}{3}y$. La mayor es la que tiene $y$ años y el cociente pedido es $\frac{y}{x}=\frac{3/2}{2/3}=\frac{9}{4}=2{,}25$.

**16.(E)** Si llamamos $c$ al cociente de la división, el número es $D = 60\cdot c + 42 = 20\cdot 3\cdot c + 20\cdot 2 + 2 = 20(3\cdot c + 2) + 2$ y, por tanto, el resto de dividirlo entre 20 es 2.
También puedes pensarlo de una forma más intuitiva. Si al repartir una cantidad de caramelos entre 60 amigos nos han sobrado 42, si los hubiéramos repartido entre 20 amigos, ¿cuántos nos sobrarían? Pensando un rato te darás cuenta que sobran 2.

**17.(B)** Comencemos haciendo las operaciones de los triángulos pequeños:

$$= \frac{12+2\cdot 2}{12-2\cdot 2} = \frac{12+4}{12-4} = 2$$

$$= \frac{11+3\cdot 3}{11-3\cdot 3} = \frac{11+9}{11-9} = 10$$

$$= \frac{12+2\cdot 3}{12-2\cdot 3} = \frac{12+6}{12-6} = 3$$

Así que el triángulo grande es:

$$= \frac{10+2\cdot 3}{10-2\cdot 3} = 4.$$

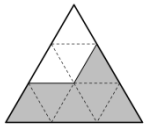
**18.(C)** Vamos mirando todas las posibilidades tomando como primer sumando los números primos 2, 3, 5, 7, 11, etc.
40 = 2 + 38 = 3 + 37 = 5 + 35 = 7 + 33 = 11 + 29 = 13 + 27 = 17 + 23 = 19 + 21.
Hemos subrayado las sumas en las que ambos números son primos. Así pues, hay 3 posibilidades.

**19.(C)** Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180º, veamos qué ángulos pertenecen a cada triángulo.
Primero observa que cualesquiera tres de esos números sumados no da 180º, luego dos ángulos son de un triángulo y los otros dos del otro.
Si 28º y 47º fueran ángulos del mismo triángulo, el tercer ángulo debería medir 180º – (28º + 47º) = 105º y no sería acutángulo. Lo mismo ocurre con 28º y 51º.
Así que en un triángulo los ángulos son 28º, 73º y 180º – (28º + 73º)= 79º y en el otro son 47º, 51º, y 180º – (47º + 51º) = 82º.
La diferencia entre los ángulos que no midió es 82º – 79º = 3º.

**20. (B)** Como tres niños han leído un libro, cuatro niños han leído 2, dos niños han leído 3 y uno ha leído 4, en total le ha preguntado a diez niños y la media del número de libros leídos es: $\frac{3\cdot 1+4\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4}{10} = 2{,}1.$

**21.(E)** Como entre los cuatro tienen 7 + 13 + 16 +14 = 50 papeletas, la probabilidad de que viaje alguno es $\frac{50}{500} = \frac{1}{10}$.

**22.(B)** Dividimos el triángulo grande en nueve triangulitos pequeños semejantes a él.



Como el lado del triángulo grande mide 360:3 = 120 mm, el lado de un triángulo pequeño mide 120:3 = 40 mm y el perímetro de la esfinge es $40 \cdot 8 = 320$ mm.

**23.(C)** Hay que tener cuidado en "deshacer" las cuentas en el orden correspondiente. Al resultado del paréntesis lo dividiré entre 4 y después lo multiplicaré por 2 y quiero que me dé 16. El número que dividido entre 4 y multiplicado por 2 da 16 es 32. Así que el resultado del paréntesis debe ser 32 y, por tanto, el número que se comió el Comenúmeros es $(32 – 6) : 2 = 13$.

**24.(A)** Si llamamos $M$ al número de Marías que hay tenemos que:
El número de jubilados es $2M$
El número de mujeres es $2M$
El número de hombres es $2(2M) = 4M$
En total hay $2M + 4M = 6M$ miembros del comité organizador y $2M$ jubilados así que la proporción es $2/6 = 1/3$.

**25.(B)** Como uno dice la verdad y el otro miente, está claro que Zipi miente y Zape dice la verdad. Luego buscamos un número par que no sea 4 y la única posibilidad es 2.

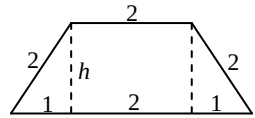
## XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

### *Soluciones 1ª Fase Nivel* III

**1. (E)** $2^4 \cdot 3^8 = n \cdot 6^4$, $2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^4 = n \cdot 6^4$, $6^4 \cdot 3^4 = n \cdot 6^4$, $3^4 = n$ ; por lo tanto, $n = 81$.

**2. (B)** Altura del trapecio: $h = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Área del trapecio: $\frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ .




**3. (C)** $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + \frac{1}{4} + n = n^2 + n + \frac{1}{4}$ .

Es evidente que: $n^2 < n^2 + 1 \le n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4} < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$

Como $n^2 + n + \frac{1}{4} - (n^2 + n) = \frac{1}{4}$ es menor que $n^2 + n + 1 - \left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$, el número natural más cercano es $n^2 + n$.

**4. (D)** $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2013^2}\right) = \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{2012^2 - 1}{2012^2} \cdot \frac{2013^2 - 1}{2013^2} =$

$$= \frac{(2-1)\cdot(2+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-1)\cdot(3+1)}{3 \cdot 3} \cdot \frac{(4-1)\cdot(4+1)}{4 \cdot 4} \cdot \ldots \cdot \frac{(2012-1)\cdot(2012+1)}{2012 \cdot 2012} \cdot \frac{(2013-1)\cdot(2013+1)}{2013 \cdot 2013}$$

Observamos que el primer factor del numerador de cada fracción también es factor del denominador de la fracción anterior y que el segundo factor de dicho numerador también lo es del denominador de la fracción siguiente. Por lo tanto, al simplificar, resulta que la expresión anterior es igual a $\frac{1}{2} \cdot \frac{2014}{2013} = \frac{1007}{2013}$.

**5. (D)** 5 minutos $= 5 \cdot 60 = 300$ segundos.

En 300 segundos, Alicia hará $\frac{300}{30} = 10$ bizcochos e Isabel hará $\frac{300}{20} = 15$ bizcochos.

Entre las dos harán $10 + 15 = 25$ bizcochos.

**6. (C)** Llamemos $C_{i,j}$ a la celda determinada por la fila i y la columna j.
A simple vista observamos que la celda $C_{1,1}$ sólo puede estar ocupada por la cifra 3.
Una vez colocada esta cifra en $C_{1,1}$, observamos que tanto en las 4 primeras columnas como en las 4 primeras filas está el 3, por lo tanto, esta cifra sólo puede ocupar la celda $C_{5,5}$; es decir $x = 3$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 5 | 4 | | |
| 1 | 3 | | | |
| | | 5 | 3 | |
| 2 | | 3 | 1 | |
| | | | | $x$ |

**7. (C)** Llamemos t al número total de canicas. Entonces, $\frac{3}{5}\cdot t$ son azules y $\frac{2}{5}\cdot t$ son rojas.

Si duplicamos el número de rojas, en la bolsa habrá $\frac{4}{5}\cdot t$ canicas rojas, dentro de un total de $\frac{3}{5}\cdot t+\frac{4}{5}\cdot t=\frac{7}{5}\cdot t$. Por lo tanto, la fracción pedida es: $\frac{\frac{4}{5}\cdot t}{\frac{7}{5}\cdot t}=\frac{4}{7}$

**8. (D)** $9{,}34\widehat{6}=\frac{934{,}\widehat{6}}{100}=\frac{\frac{9346-934}{9}}{100}=\frac{8412}{9\cdot 100}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 701}{3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 25}=\frac{701}{3\cdot 25}$

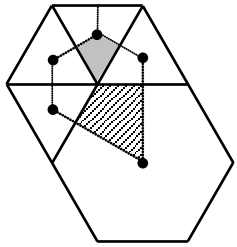
Por lo tanto, el menor número natural que multiplicado por $9{,}34\widehat{6}$ da como resultado un entero es $3\cdot 25 = 75$.

**9. (A)** Número de casos posibles: $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$.

Dentro de esas 210 posibilidades, Rubén aparecerá, con Puri o sin ella, $\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$ veces, y Puri, sin Rubén, lo hará $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ veces.

Por lo tanto, la probabilidad que tiene Rubén de trabajar el domingo es $\frac{56+84}{210}=\frac{140}{210}=\frac{2}{3}$.

**10. (C)** Como los 4 triángulos adosados son equiláteros, y sus lados son iguales a los del hexágono, el área de cada uno de ellos es $\frac{1}{6}\cdot 72=12$ cm$^2$.

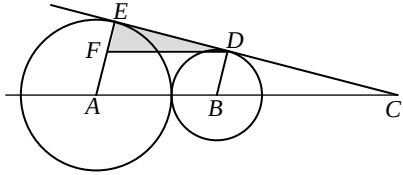


Área del cuadrilátero sombreado $=\frac{1}{3}\cdot 12=4$ cm$^2$

Área del cuadrilátero rayado $= \frac{1}{6} \cdot 72 = 12 \text{ cm}^2$

Área del pentágono $= 4 \cdot 4 + 12 = 16 + 12 = 28 \text{ cm}^2$

**11. (D)** Trazamos *FD* paralela a *AB*, con lo que *AF* = 3, *FE* = 2 y *FD* = 8.
Como el triángulo sombreado *DEF* es semejante al triángulo *CEA*, se cumple que $\frac{EF}{EA} = \frac{FD}{AC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{8}{AC} \Rightarrow AC = 20$
y $BC = 20 - 8 = 12$.

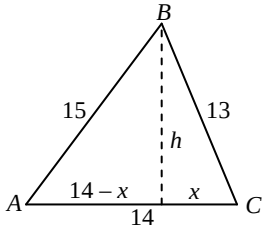



**12. (D)** $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$

$15^2 - 14^2 - x^2 + 28x = 13^2 - x^2$

$28x = 13^2 + 14^2 - 15^2 \Rightarrow x = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{28} = 5$

$h = \sqrt{13^2 - x^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$




**13. (E)** Llamando *m*, *s*, *p* y *c* a lo que pesa, respectivamente, un mono, un oso, un puma y un ciervo, podemos escribir:
$9m = 4s$, $8s = 15p$, $10p = 27c$. Y a simple vista vemos que, si en vez de figurar $10p$ en el primer miembro de la tercera igualdad, figurase $30p$, podríamos enlazar las igualdades así:
$3 \cdot 27c = 3 \cdot 10p = 2 \cdot 8s = 4 \cdot 9m = 36m$; pero si 36 monos pesan lo mismo que $3 \cdot 27$ ciervos, entonces 4 monos pesarán lo mismo que $\frac{3 \cdot 27}{9} = 9$ ciervos.

**14. (D)** Media aritmética = $\frac{x + 6 + 4 + 1 + 9}{5} = \frac{x + 20}{5} = \frac{x}{5} + \frac{20}{5} = \frac{x}{5} + 4$

Mediana: Ordenamos los números de menor a mayor (1, 4, 6, 9) y analizamos qué posición puede ocupar el número *x*.

*x*, 1, 4, 6, 9 : Me = 4; $\frac{x}{5} + 4 = 4; x = 0$

1, *x*, 4, 6, 9 : Me = 4; $\frac{x}{5}+4=4$; $x=0$ (posición no válida ya que tendría que ser $1\le x\le 4$).

1, 4, *x*, 6, 9 : Me = *x*; $\frac{x}{5}+4=x$; $\frac{x}{5}-x=-4$; $-\frac{4}{5}x=-4$; $x=5$

1, 4, 6, *x*, 9 : Me = 6; $\frac{x}{5}+4=6$; $x=10$ (posición no válida pues tendría que ser $6\le x\le 9$).

1, 4, 6, 9, *x* : Me = 6; $\frac{x}{5}+4=6$; $x=10$

Luego para tres valores de *x* (0, 5 y 10) se cumple la condición del enunciado.

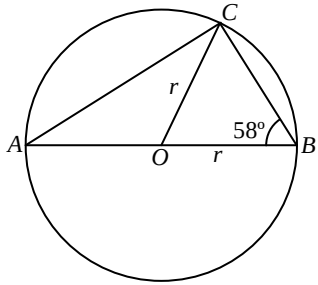
**15. (D)** En la figura se observa que:

$O\hat{C}A = A\hat{C}B - O\hat{C}B$

$A\hat{C}B = \frac{180^o}{2} = 90^o$ (es un ángulo inscrito que abarca media circunferencia).

$O\hat{C}B = 58^o$, pues el triángulo *OBC* es isósceles.

Luego, $O\hat{C}A = 90^o - 58^o = 32^o$.




**16. (B)** Llamemos *x* al número de chicos e *y* al número de chicas que había en 3º ESO.

Chicos que aprobaron $=\frac{2}{3}x$ ; chicas que aprobaron $=\frac{75}{100}y$.

De acuerdo con el enunciado: $\frac{2}{3}x=\frac{75}{100}y \Rightarrow \frac{2}{3}x=\frac{3}{4}y$ ; $y=\frac{2}{3}x\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{9}x$

Estudiantes que aprobaron (como fracción del total):

$$\frac{\frac{2}{3}x+\frac{75}{100}y}{x+y}=\frac{\frac{2}{3}x\cdot 2}{x+\frac{8}{9}x}=\frac{\frac{4}{3}x}{\frac{17}{9}x}=\frac{4}{3}:\frac{17}{9}=\frac{12}{17}.$$

**17. (D)** Llamemos $x$ e $y$ a los dos números. Según el enunciado:

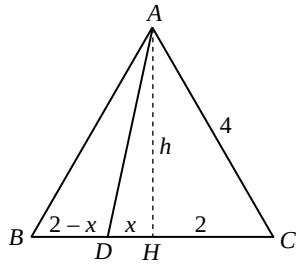
$$\left.\begin{array}{l}\text{(I)}\quad x\cdot y=9\\ \text{(II)}\ \dfrac{1}{x}=4\cdot\dfrac{1}{y}\end{array}\right\}\quad \text{De (II): } x=\frac{y}{4}.\ \text{ Sustituyendo en (I) tenemos:}$$

$\frac{y}{4}\cdot y=9;\ y^2=36;\ y=6$ (en el enunciado se dice que son números positivos).

$x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. La suma es: $x+y=\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}$.

**18. (A)** Analicemos las distintas opciones que se dan como posible valor de la cifra *d*.
No puede ser 3 pues la suma de las cifras sería 30 y por tanto el número sería divisible por 3; no puede ser 5 pues entonces el número sería múltiplo de 5; no puede ser 7 pues la división del número entre 197 es exacta; tampoco puede ser 9 pues la suma de las cifras sería 36 y el número sería divisible por 9.
Luego *d* es 1.

**19. (D)** La altura *AH* del triángulo *ABC* es $h=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$.



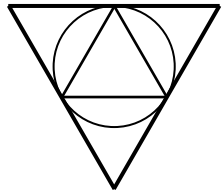

Área de *BDA* = $S_1=\dfrac{(2-x)\cdot h}{2}$

Área de *CDA* = $S_2=\dfrac{(2+x)\cdot h}{2}$

$$S_1\cdot S_2=\frac{(2-x)\cdot(2+x)\cdot h^2}{4}=\frac{(4-x^2)\cdot h^2}{4}$$

El mayor valor de este producto se alcanza cuando $x=0$ y es $S_1\cdot S_2=\dfrac{4\cdot\left(\sqrt{12}\right)^2}{4}=12$.

**20. (E)** En la figura observamos que el triángulo final está formado por el triángulo inicial y otros tres iguales a éste, luego su área es 4*A*.

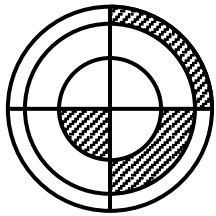


**21. (A)** Llamemos $r_1$, $r_2$ y $r_3$ a los radios (en orden de menor a mayor) de las tres circunferencias.

Áreas de las zonas sombreadas:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{4},\ A_2 = \frac{\pi \cdot r_2^2}{4} - \frac{\pi}{4},\ A_3 = \frac{\pi \cdot r_3^2}{4} - \frac{\pi \cdot r_2^2}{4}$$

En el enunciado se dice que las tres figuras sombreadas tienen la misma área, o sea $A_1 = A_2 = A_3$.



De $A_2 = A_1 \Rightarrow \frac{\pi \cdot r_2^2}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r_2^2 = 2;\ r_2 = \sqrt{2}$

De $A_3 = A_1 \Rightarrow \frac{\pi \cdot r_3^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r_3^2 = 3;\ r_3 = \sqrt{3}$

Luego: $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

**22. (C)** En una división el resto ha de ser menor que el divisor. Como se pide el mayor resto posible, vamos a comenzar probando con el mayor divisor posible: 9+9 = 18.
Haciendo la división de 99 entre 18 se obtiene de resto 9.
El siguiente mayor divisor sería 17 (= 9+8 = 8+9); haciendo las divisiones de 98 y 89 entre 17 obtenemos de resto 13 y 4, respectivamente.
El siguiente mayor divisor sería 16 (= 9+7 = 8+8 = 7+9); haciendo las divisiones de 97, 88 y 79 entre 16 se obtiene como restos 1, 8 y 15.
Llegado a este punto no es necesario seguir probando: el mayor resto posible es 15; la razón es que el siguiente mayor divisor sería el 15, luego el resto de las correspondientes divisiones sería menor que 15.

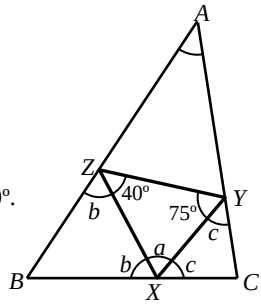
**23. (A)** De acuerdo con la figura podemos escribir:

$a = 180^\circ - (40^\circ + 75^\circ) = 65^\circ$

$b + 65^\circ + c = 180^\circ;\ b + c = 115^\circ$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ;\ \hat{A} + 180^\circ - 2b + 180^\circ - 2c = 180^\circ;$

$\hat{A} = 2b + 2c - 180^\circ = 2(b + c) - 180^\circ = 2 \cdot 115^\circ - 180^\circ = 50^\circ.$



**24. (B)** Llamando $N$ al número de estudiantes en el año 2010, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} N = x^2 \\ N+100 = y^2+1 \\ N+200 = z^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(I)}\ \ x^2+100 = y^2+1 \\ \text{(II)}\ x^2+200 = z^2 \end{array} \Big\} \text{(II)} - \text{(I)}:\ \ 100 = z^2 - y^2 - 1$$

$$101 = z^2 - y^2;\ (z+y)\cdot(z-y) = 101 = 1\cdot 101 \Rightarrow \begin{cases} z+y = 101 \\ z-y = \ 1 \end{cases} \Big\{ 2z = 102;\ z = 51$$

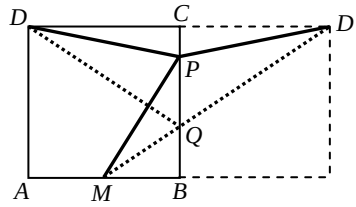
Sustituyendo en (II): $x^2 + 200 = 51^2;\ x^2 = 51^2 - 200 = 2\,401$

Luego $N = 2401$.

Este número no es múltiplo de 3 (ni por tanto de 9), ni de 11, ni de 17 (la división de 2401 entre 17 no es exacta). Es múltiplo de 7.

**25. (A)** Si consideramos el punto *D'*, simétrico de *D* respecto de la recta *BC*, tendremos que *DP* + *PM* = *D'P* + *PM* > *D'M* para cualquier punto *P* del segmento *BC*.

Por lo tanto la mínima suma de distancias será la que se obtiene con el punto *Q* y con el que $DQ + QM = D'M = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$



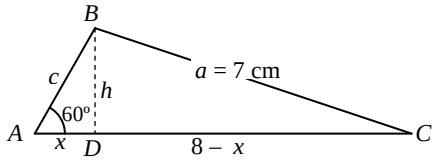
# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* IV

**1. (C)** La solución es *c*, ya que se trata del número al que hay que restar mayor valor para que sea igual que los demás.

**2. (C)** Despejamos $n$ en la primera igualdad, $2m - n = 3 \Rightarrow n = 2m - 3$**.** Sustituimos en la segunda igualdad: $m - 2(2m - 3) = 3m + 6 = 3(m + 2) = \dot{3}$ .

**3. (C)** Aplicando Pitágoras en los triángulos rectángulos *ADB* y *CDB* obtenemos:




$$\begin{cases} c^2 = h^2 + x^2 \\ 7^2 = (8-x)^2 + h^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h^2 = c^2 - x^2 \\ h^2 = -x^2 + 16x - 15 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{16x - 15}$$

Por otro lado $\cos 60^o = \frac{x}{c} \Rightarrow x = \frac{c}{2}$ y sustituyendo en la relación anterior se obtiene $c = \sqrt{16 \cdot \frac{c}{2} - 15} \Rightarrow c^2 = 8c - 15 \Rightarrow c = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} c = 5 \\ c = 3 \end{cases}$.

Como el triángulo es obtusángulo, $b^2 > a^2 + c^2$ es decir, $c^2 < 64 - 49 = 15$. Por lo tanto el valor de *c* ha de ser 3.

**Otro método.-**

Por el teorema de los senos en el triángulo *ABC*, $\frac{7}{sen60^o} = \frac{8}{sen\hat{B}} \Rightarrow sen\hat{B} = \frac{8}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ y como $\hat{B} > 90^o$, $\cos\hat{B} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = -\frac{1}{7}$.

$$\cos\hat{C} = \cos(180^o - 60^o - \hat{B}) = \cos 120^o \cdot \cos\hat{B} + sen120^o \cdot sen\hat{B} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$$

Obtenemos que $\cos\hat{C} = \frac{13}{14}$. Por el teorema del coseno en el triángulo *ABC*,

$$c^2 = 8^2 + 7^2 - 2\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{13}{14} = 9 \Rightarrow c = 3.$$

**4. (A)** La suma pedida corresponde a hacer

$$S_{19} - \left(2^3 + 4^3 + ... + 18^3\right) = \frac{19^2\cdot 20^2}{4} - 2^3\left(1^3 + 2^3 + .. + 9^3\right) = 36100 - 8\frac{9^2\cdot 10^2}{4} =$$

$$= 36100 - 16200 = 19900.$$

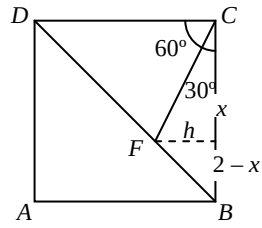
**5. (D)** Todos los números de cinco cifras son mayores que 5000, y son 5! = 120.
Los de cuatro cifras deben empezar por 5,6 ó 7, la siguiente cifra puede ser cualquiera de las cuatro restantes, etc., en total, 3·4·3·2 = 72.
En total habrá 120 + 72 = 192 números mayores que 5000 con las condiciones exigidas.

**6. (C)** La altura del triángulo *FBC*, h, cumple:

$$tg30^o = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\cdot tg30^o$$

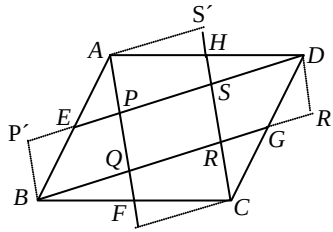
$$2 - x = h \Rightarrow h = (2-h)tg30^o \Rightarrow h = \frac{2tg30^o}{1+tg30^o} = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3} = \frac{6\sqrt{3}-6}{6} = \sqrt{3}-1$$




**7. (B)** Como solo uno de ellos dice la verdad, dado que todas las respuestas son diferentes, solamente ha podido hacer los deberes uno de ellos. No es posible que ninguno haya hecho los deberes ya que en este caso Emilio no habría dicho ninguno. El único que hizo los deberes fue Eligio.

**8. (E)** Completando la figura con los triángulos *AHS', BEP', CFQ'* y *DGR',* observamos que el paralelogramo *ABCD* tiene un área que equivale a cinco paralelogramos como el *PQRS.* Luego el cociente pedido es 5.



**9. (C)** Para numerar las páginas de un libro con un número, *k*, de páginas de dos cifras se necesitan $9 + 2(k - 9)$ dígitos, con $k \in \mathrm{N}; 10 \le k \le 98$, que como mucho es 187. Revisamos, de entre las soluciones propuestas, la que es menor que 187 para ver si verifica la expresión anterior.

$31 = 9 + 2(k-9) \Rightarrow k = 20 \in \mathrm{N}$. Número entero y par de páginas.

Si el número de páginas, *k*, es de tres cifras se necesitan $187 + 2 + 3(k - 99)$ dígitos, con $k \in \mathrm{N}; 100 \le k \le 998$.

Comprobamos las otras posibles respuestas.

$543 = 189 + 3(k-99) \Rightarrow k = 217 \in \mathrm{N}$

$2012 = 189 + 3(k-99) \Rightarrow k = \dfrac{2120}{3} \notin \mathrm{N}$

$2013 = 189 + 3(k-99) \Rightarrow k = 707 \in \mathrm{N}$

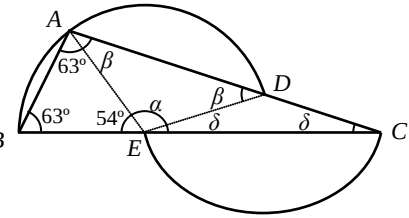
$2016 = 189 + 3(k-99) \Rightarrow k = 708 \in \mathrm{N}$

Conviene hacer una observación en este problema. El número de páginas de un libro siempre es par, pues cada hoja tiene anverso y reverso. Por lo tanto las respuestas B y D tampoco serían posibles, pero ese detalle se nos escapó en la propuesta de respuestas.

**10.(B)** Los triángulos *ABE*, *ADE* y *ECD* son isósceles y se cumple

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \beta = 2\delta \\ \alpha + 54^\circ + \delta = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 126^\circ - \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 126^\circ - \delta + 4\delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = \hat{C} = 18^\circ$$

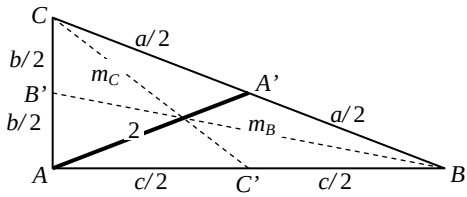



**11.(E)** Desde que dice un número Maite hasta que la vuelve a tocar decir el siguiente número, se dicen 8 números consecutivos y como 2013 = 251·8+5, se dan 251 vueltas completas de Maite a Maite, y sobran 5, que corresponde a José.

**12.(B)** Si el número de ovejas es *o*, y el número de gallinas *g* $\Rightarrow l = \dfrac{4 \cdot o + 2 \cdot g}{o + g}$

$$l = \frac{4o + 2g}{o + g} \Rightarrow ol + og = 4o + 2g \Rightarrow o(l-4) = g(2-l) \Rightarrow \frac{o}{g} = \frac{2-l}{l-4} = \frac{l-2}{4-l}.$$

**13.(D)** Queremos calcular el valor de $(m_B)^2 + (m_C)^2$ , sabiendo que $m_A = 2$




En el triángulo rectángulo $AA'C'$ se tiene que $2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 16$

En el triángulo rectángulo $ACC'$ se tiene que $m_C{}^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$

En el triángulo rectángulo $ABB'$ se tiene que $m_B{}^2 = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Sumando estas dos últimas expresiones $m_B{}^2 + m_C{}^2 = \frac{5}{4}\left(b^2 + c^2\right) = \frac{5}{4}\cdot 16 = 20$ .

**14.(C)** Utilizamos las dos condiciones primeras $\boldsymbol{N} = 5k + 2$, pero además
$N = 7k' + 3 \Rightarrow (5+2)k' + 3 = 5k' + 2k' + 3$ , luego $3 + 2k' = 5q + 2 \Rightarrow 5q = 2k' + 1$ .

Probando los valores de $k'$ convenientes, se obtiene:
$$\begin{cases} k' = 2 \Rightarrow N = 17 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 7 \Rightarrow N = 52 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 12 \Rightarrow N = 87 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 17 \Rightarrow N = 122 \neq \dot{9} + 4 \\ k' = 22 \Rightarrow N = 157 = \dot{9} + 4 \end{cases}$$

Luego el número pedido es 157 y la suma de sus cifras es 13.

**Otro método.-** Sea $N$ el número buscado, entonces $N = 5a + 2$. Si sumamos a ambos miembros un múltiplo de 7 que sea múltiplo de 5 más 1, como el 21, tendremos:
$N = 7b + 3 \Rightarrow N + 21 = 7(b + 3) + 3 = 5(a + 4) + 3$.
Como $N = 9c + 4 \Rightarrow N + 21 = 9(c + 2) + 7$.
Sumando a ambos miembros un múltiplo de 5 y 7, que sea múltiplo de 9 menos 4, (sus cifras deberán sumar 5 o múltiplo de 9 más 5), como $35\cdot 4 = 140 = 9\cdot 16 - 4$, resulta que,

$N + 21 + 140 = 9(c + 2 + 16) - 4 + 7 = 9(18 + c) + 3$, es decir, $N + 161 - 3$ es múltiplo de 5, 7 y 9. El menor de ellos es el mcm(5, 7, 9) = 315, por lo tanto, $N + 158 = 315 \Rightarrow N = 157$.

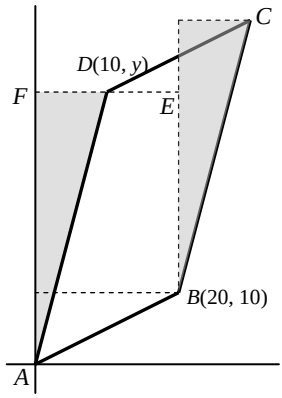
**15.(B)** Si dividimos $n^2 + 4$ entre n + 3 obtenemos: $n^2 + 4 = (n+3)(n-3) + 13$. Por el algoritmo de Euclides, el MCD($n^2 + 4$, $n + 3$ ) divide al resto de dicha división, y como $n^2 + 4$ y n + 3, no so primos entre sí quiere decir que su máximo común divisor no es 1, luego tiene que ser 13.

**16.(D)** **Si** $f(x) = a|x+b| + cx + d = \begin{cases} -ax - ab + cx + d, x \le b \\ ax + ab + cx + d, x > b \end{cases} = \begin{cases} 2x + 5, x \le 3 \\ 4x - 1, x > 3 \end{cases}$, por tanto $\begin{cases} -ab + d = 5 \\ ab + d = -1 \end{cases} \Rightarrow 2d = 4 \Rightarrow d = 2$.

**17.(D)** Observamos en ambas funciones los valores que se obtienen para, 101, 102, etc. $y_1(101) = \frac{1}{3}\cdot 101 + 0{,}1 = 33.7\widehat{6}$; $y_2(101) = \frac{1}{3}\cdot 101 + 0.6 = 34.2\widehat{6}$, luego para el valor $x$ = 101 hay un punto reticular. Probamos con 102: $y_1(102) = 34.1; y_2(102) = 34.6$, luego no existe punto reticular para $x$ = 102. $y_1(103) = 34.4\widehat{3}; y_2(103) = 34.9\widehat{3}$, que tampoco contiene ningún punto reticular, pero al hacer $y_1(104) = 34.7\widehat{6}; y_2(104) = 35.2\widehat{6}$ observamos, no solo que contiene un punto reticular, sino que además la estructura comienza a repetirse, luego para los valores de $x$ de la forma $x = 3k + 2$, se cumple que existe un punto reticular.
Entre $x$ = 100 y $x$ = 300 hay 67 números que sean múltiplos de 3 más dos, que corresponden a los 67 puntos reticulares.

**18.(D)** El área pedida es equivalente al área del trapecio *ABEF* (véase la figura). Por lo tanto,

$$S = (y-10)\cdot 20 + \frac{10\cdot 20}{2} = (y-10)\cdot 20 + 100 = 600$$
$$(y-10)\cdot 20 = 500 \Rightarrow y = 35$$



**19.(D)** Hallamos $\left(\log_x y+\log_y x\right)^2=\left(\log_x y\right)^2+\left(\log_y x\right)^2+2\left(\log_x y\right)\left(\log_y x\right)\Rightarrow$

$\left(\log_x y\right)^2+\left(\log_y x\right)^2=\left(\log_x y+\log_y x\right)^2-2\left(\log_x y\right)\left(\log_y x\right)=7^2-2\cdot 1=47$

**20.(E)** Hallamos el punto de corte de las gráficas resolviendo el sistema $\begin{cases} y=x-2 \\ y=mx+3 \end{cases}$

$x-2=mx+3\Rightarrow x(1-m)=5\Rightarrow x=\dfrac{5}{1-m}$, $y=\dfrac{5}{1-m}-2=\dfrac{2m+3}{1-m}$.

Como las coordenadas han de ser positivas, $x=\dfrac{5}{1-m}>0\Rightarrow m<1$ pero además $y=\dfrac{2m+3}{1-m}>0$ Como $1-m>0$ debe verificarse que $2m+3>0\Rightarrow m>-\dfrac{3}{2}$

Por tanto debe cumplirse que $-\dfrac{3}{2}<m<1$.

**21.(D)** Los números N que dividen a $2^{1650}-1$ tienen que ser de la forma $2^k-1$ siendo $k$ un divisor de 1650, ya que si 1650 = $ak$ entonces $2^{1650}-1=2^{ak}-1=\left(2^k\right)^a-1$ que es divisible entre $2^k-1$. También pueden ser de la forma $2^k+1$ si $2k$ es un divisor de 1650 ya que si 1650 = $2bk$ entonces $2^{1650}-1=2^{2bk}-1=\left(2^k\right)^{2b}-1$ que es divisible entre $2^k+1$.

Como $3=2^2-1$, $7=2^3-1$, $31=2^5-1$ y $2047=2^{11}-1$, todos ellos son divisores de $2^{1650}-1$ puesto que 2, 3, 5 y 11 son divisores de 1650. Pero $127=2^7-1$ no es un divisor de $2^{1650}-1$ puesto que 7 no es un divisor de 1650.

**22.(C)** Si sen15º y cos15º son raíces de la ecuación dada, se cumple:

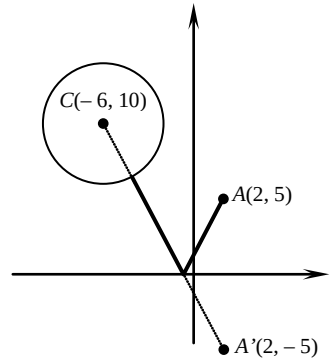
$b=sen15^\circ\cos15^\circ=\dfrac{1}{2}sen30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow b^2=\dfrac{1}{16}$

$a=-\left(sen15^\circ+\cos15^\circ\right)\Rightarrow a^2=sen^2 15^\circ+2sen15^\circ\cos15^\circ+\cos^2 15^\circ=1+sen30^\circ=\dfrac{3}{2}$

Hallamos $a^4-b^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{16}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{16}=\dfrac{35}{16}$.

**23.(E)** Como 342 es múltiplo de 9 $\Rightarrow$ (1 + 9 + $b$ + 2) tiene que ser múltiplo de 9 $\Rightarrow$ $b$ = 6.
En este caso 100900602 es múltiplo de 11 y como 342 no lo es, tendrá que serlo 29$a$031. Pero esto ocurre cuando 1 + 0 + 9 = 3 + $a$ + 2 $\Rightarrow$ $a$ = 5.
Por lo tanto $a + b = 11$.

**24.(C)** El camino más corto es el que corresponde a la dirección que tendría un rayo que partiendo del centro de la circunferencia se reflejara en el eje de abscisas y pasara por *A*. Esta distancia sería la misma que la distancia al punto *A'*(2, – 5) simétrico de *A* respecto del eje de abscisas.




$$d(C,A') = \sqrt{(2+6)^2 + (-5-10)^2} =$$
$$= \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17$$

Como esta distancia es 17, la distancia más corta desde el punto A al punto más cercano de la circunferencia será 17 – 4 = 13, dado que el radio de la circunferencia es 4.

**25.(D)** Este ejercicio se resuelve aplicando la fórmula del seno del ángulo doble: $sen(2\alpha) = 2sen\alpha\cdot\cos\alpha \Rightarrow sen\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}sen(2\alpha)$ . Así:

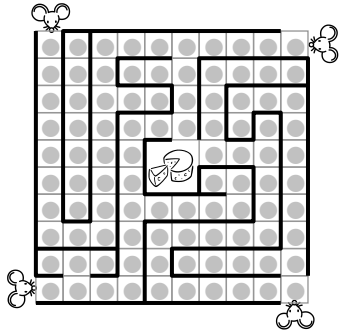
$$sen\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}sen\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sen\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sen\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sen\frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}$$

# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel I*

**1. (E)** Primero, calculamos el número de libros que tienen Daniel y Alberto juntos.
56 + 28 = 84 libros tienen entre los dos.
Después, hallamos el número de libros que tienen que tener cada uno.
84: 2 = 42 libros tienen que tener cada uno.
Por último, calculamos el número de libros que tiene que dar Daniel a Alberto.
56 – 42 = 14 libros.

**2. (B)** Para facilitar el desarrollo nombramos a los ratones con las letras: a, b, c, y d, comenzando por el que está en el vértice superior izquierdo, "a", y seguimos la dirección de las agujas del reloj; a continuación, contamos el número de pasos (puntos más uno) que cada ratón emplea para llegar al queso.
El primero en llegar, es el ratón "b" con 9 "pasos" y el último el ratón "a" con 24 "pasos".
Si con 9 "pasos" tarda 15 segundos, con 24 "pasos" tardará: (15 × 24): 9 = 40 segundos.



**3. (C)** Evidentemente hay dos formas de tener cero perlas en una caja y tres en la otra. También es inmediato ver que hay tres formas de tener una perla en la caja blanca y dos en la negra y, simétricamente, otras tres si intercambiamos las cajas. Con esto tenemos todas las posibles formas de colocar las tres perlas, esto es, 0, 1, 2 o 3 perlas en cada caja. Por lo tanto Ana tiene en total ocho formas de guardar las perlas.
En la tabla se pueden apreciar las ocho posibles formas de colocar las tres perlas en las dos cajas.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CAJA B | R, V, A | - | R | V | A | V, A | R, A | R, V |
| CAJA N | - | R, V, A | V, A | R, A | R, V | R | V | A |

**4. (E)** El número de garbanzos que colocan los amigos de forma consecutiva es un número impar; por tanto, se trata de hallar el trigésimo número impar.
30 × 2 = 60
60 – 1 = 59

**5. (A)** Siguiendo los pasos del producto "AL" por "AL", observamos que:
- Para que el producto de "L" por "L" se obtenga "L", la única cifra que corresponde a "L" es 5.
- Para que el producto "L" por "A" se obtenga "A", la cifra que corresponde a "A" es necesariamente 2.
- Conociendo los valores de "L" y "A", las cifras correspondientes a las restantes letras se obtiene realizando el producto $25 \times 25$.

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & 5 \\ \times & & 2 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 5 & \\ 5 & 0 & & \\ \hline 6 & 2 & 5 & \end{array}$$

Con lo que a la letra "T" le corresponde la cifra 6.

**6. (D)** 1 hora y media = 90 minutos.
En 8 minutos le ha dicho 1000 veces que "haga su cama".
En un minuto la ha dicho: 1000: 8 = 125 veces.
En 90 minutos lo ha dicho: $125 \times 90 = 11\,250$ veces.

**7. (B)** La diferencia de dos números consecutivos (par e impar) es siempre 1.
La diferencia de la suma de los 10 primeros números pares y la suma de los 10 números impares es 10.
Comprobación:
Suma de los 10 primeros números pares:
2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110.
Suma de los 10 primeros números impares:
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 1000
110 – 100 = 10

**8. (A)** En esta progresión, cada término es doble del anterior.

Día 1 → 10 m
Día 2 → 20 m
Día 3 → 40 m
Día 4 → 80 m
Día 5 → 160 m
Día 6 → 320 m
Día 7 → 640 m
Día 8 → 1280 m = 1,28 km
Día 9 → 2560 m = 2,56 km
Día 10 → 5120 m = 5,12 km
Día 11 → 10240 m = 10,24 km
Día 12 → 20480 m = 20,48 km
Día 13 → 40 960 m = 40,960 km

Como 39 km es menor que 40,960, tendrá que entrenar 13 días.

**9. (A)** Los únicos números capicúas de cuatro cifras que cumplen las condiciones del problema son estos cuatro: 1221-2442-3663-4884.

**10. (D)** En esta secuencia los sucesivos términos se dividen entre la sucesión de números a partir del 2.
La serie sigue esta secuencia.
3600: 2 = 1800; 1800: 3 = 600; 600: 4 = 150; 150: 5 = 30

**11. (D)** En la fila superior, siguiendo las instrucciones, tenemos:
En la tercera columna la vocal, O. En la esquina de la izquierda, la P de PISO. La P no se ha movido.

| P | T | O |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

La tercera vocal de la tercera fila tiene que ser la I y, en consecuencia, la columna completa queda:

| P | T | O |
|---|---|---|
| | | A |
| | | I |

Como debajo de una de las A hay una S, tenemos:
Donde la A no se ha movido.

| P | T | O |
|---|---|---|
| A | | A |
| S | | I |

La G central se ha movido necesariamente, por tanto tenemos finalmente:

| P | T | O |
|---|---|---|
| A | R | A |
| S | G | I |

**12.(E)** Los triángulos ocupan 1/4 del rectángulo y la tira sobre la que están apoyados 1/2:
1/4 + 1/2 = 3/4

**13.(D)** Área del cuadrado inicial: $6 \times 6 = 36$ m$^2$
Longitud de un lado del rectángulo que se obtenga: 6 cm – 2 cm = 4 cm.
Área del rectángulo: 36 m$^2$ = $4 \times l \rightarrow l = 36 : 4 = 9$ cm
Los lados del rectángulo de igual área que el cuadrado inicial miden: 4 m y 9 m.
9 m actuales – 6 m iniciales = 3 m.

**14.(D)** Área del cuadrado: $2 \times 2 = 4$ cm$^2$
4 cm$^2$ = 400 mm$^2$
400 mm$^2$: 5 mm$^2$ = 80 granos

**15.(D)** 3/3 – 2/3 = 1/3 de tarta deja Glotón.
1/2 × 1/3 = 1/6 de tarta comió Listín.
2/3 + 1/6 = 5/6 de tarta comieron Glotón y Listín
6/6 – 5/6 = 1/6 de tarta queda para Buenazo, Tranquilo y Tontín,
1/6: 3 = 1/18 de tarta comió Tontín

**16.(E)** Analizando la figura se puede comprobar que la longitud del lado del mayor de un rectángulo pequeño es igual a 2,5 veces la longitud del lado menor.
Si designamos "$x$" a la longitud del lado menor de un rectangulillo el perímetro del rectángulo mayor es 17; por tanto, $17x = 68$ cm, de donde se deduce que el lado menor de un rectangulillo mide 4 cm
El lado mayor medirá: $4 \times 2{,}5 = 10$ cm.
Perímetro de un rectangulillo: $2 \times (4 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) = 28$ cm.

**17.(D)** $25 - 3 = 22$ alumnos tocan algún instrumento.
15 que tocan en guitarra + 11 que tocan la flauta = 26.
$26 - 22 = 4$ alumnos tocan los dos instrumentos.

**18.(B)** Si designamos con "$x$" las monedas que tiene Lucas se obtiene esta expresión:
$x + x + x/2 + x/4 = 11x/4$
El único número múltiplo de 3 y de 11 menor que 50 es 33.
$11x/4 = 33 \rightarrow x = 12$

**19.(B)** Alfredo coloreó 1/2; Merche, 13/16 y Luis 9/12
Reducimos las fracciones a común denominador:
1/2, 13/16, 9/12 → 24/48, 39/48, 36/48
Ordenamos las fracciones de menor a mayor.
24/48 < 36/48 < 39/48 → 1/2 < 9/12 < 13/16

**20.(A)** Los triángulos *ABC* y *ABD* tienen la misma altura. Por tanto si la base del triángulo *ABC* es 15 cm y su área 30 $cm^2$, el área del triángulo *ABD* de 9 cm de base es 18 $cm^2$.
También podemos calcular el resultado de esta otra forma:
Área(*ABC*) = $(b \times h)/2 \rightarrow 30 = (15 \times h)/2 \rightarrow h = 4$ cm
Área(*ABD*) = $(9 \times 4)/2 = 18$ $cm^2$

**21.(A)** Los resultados de cada secuencia son:
$A = [(9 + 7 - 4): 2] \times 6 = 36$
$B = [(9 - 3 + 2): 4)] \times 8 = 16$
$C = [(9 + 8) \times 4]: 2 + 3 - 6 = 31$
$D = 9 + 8 + 7 - 4 - 1 + 2 - 5 + 6 = 22$
$E = [(9 \times 1) + 2 + 3]: 7 - 4$

**22.(E)** Por eliminación de respuestas dadas. La única que cumple, con los datos dados es la E.

**23.(A)** Colocando en vertical las cifras conocidas y no conocidas de la suma, se facilita la resolución del problema.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 0 | 3 | |
| | | 5 | 2 | 9 | 8 |
| 3 | 4 | 4 | 2 | | |
| 3 | 7 | 2 | 5, | 2 | 8 |

$0 + 9 + 4 = 13$.

**24.(C)** Se halla el mínimo común múltiplo de 12, 8 y 15

$12 = 2^2 \times 3$

$9 = 3^2$

$15 = 3 \times 5$

$MCM(12, 9, 15) = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

**25.(D)** Don Retorcido nació entre el año 1600 y 1699.

Para que quede un número cuadrado al eliminar la cifra de las unidades, la cifra de las decenas tiene que ser un 9, ya que 169 es el único cuadrado perfecto comprendido entre 160 y 169

Por tanto Don Retorcido habrá nacido entre el año 1690 y 1699.

Como la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas entonces su año de nacimiento es 1698.

La suma de las cifras de su año de nacimiento es:

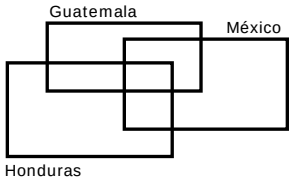
1698 → 1 + 6 + 9 + 8 = 24

# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

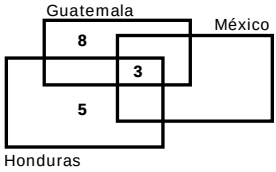
*Soluciones 2ª Fase Nivel II*

**1. (A)** El mayor número de cuatro cifras diferentes, todas pares, es el 8642 y el menor número de cuatro cifras diferentes, todas impares es el 1357. Su diferencia es 7285.

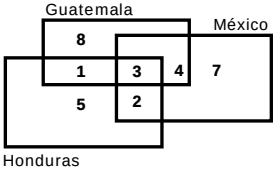
**2. (B)** Podemos resolver este problema usando unos diagramas que representen a cada país visitado.



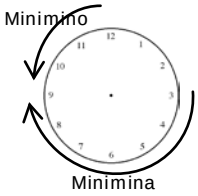

Los primeros datos que podemos colocar son los que corresponden a los 5 que tienen únicamente el sello de Honduras; 8 que tienen sólo el sello de Guatemala y 3 que tienen los tres sellos.




Los demás datos hay que ir colocándolos haciendo unas sencillas cuentas. Así, el dato de que hay 5 pasaportes que tienen el sello de México y Honduras, se plasma en el diagrama poniendo un 2 en la región que hay debajo de la que tienen los tres sellos. Y así, con cautela, se completa el diagrama.
Hay siete personas que viajaron únicamente a México.



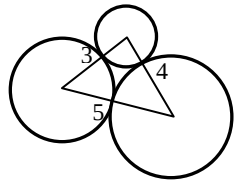

**3. (D)** Los diminutos estaban separados por 9 horas y se observa que Minimina recorre 6 horas y Minimino la mitad, 3 horas. Así que ahora que están separados por 12 horas, Minimina recorrerá 8 horas y Minimino 4 horas. Se encontrarán de nuevo en la marca de las 5 horas.




**4. (C)** Como la hermana mediana tiene 5 años y es la única con edad impar, las tres primeras hermanas tienen edades 2, 4 y 5, que suman 11 años. Como la suma de todas ha de ser 25, las dos mayores suman 14 y por tanto sus edades son 6 y 8. La correspondencia es Ana (2), Carlota (4), Emilia (5), Berta (6) y Daniela (8).

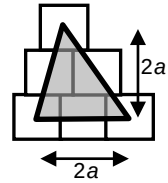
**5. (A)** Números repes con periodos de una cifra que se repite hay nueve (desde el 1 hasta el 9). Si el periodo está formado por dos cifras que se repiten, encontramos 81 (desde el 10 hasta el 99 pero hay que descartar los nueve que tienen periodo 11, 22, 33..., porque ya están contados). Y con periodo de tres cifras hay 891 (desde el 100 hasta el 999, pero hay que descartar de nuevo los nueve de 111, 222,...).
En total hay 981 (9 + 81 + 891).

**6. (A)** El triángulo que se forma al unir los centros tiene lados que miden 3, 4 y 5... ¿os suenan estas medidas?
En efecto, 3, 4, 5 son la terna pitagórica más sencilla ($3^2 + 4^2 = 5^2$), por tanto dicho triángulo es rectángulo y su área es la mitad del producto de los catetos, $\frac{3\cdot 4}{2} = 6$.



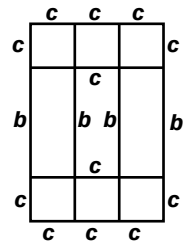

**7. (D)** Pues empecemos a calcular:
**A)** $R^E + T^O - R^C + I^D - O = 2^1 + 2^1 - 2^2 + 1^2 - 1 = 2 + 2 - 4 + 1 - 1 = 0$
**B)** $(R - E)^T + (O - R) \times (C - I) + D - O = (2 - 1)^2 + (1 - 2)\cdot(2 - 1) + 2 - 1 = 1$
**C)** $R + E - T + O - R + C - I + D - O = 2 + 1 - 2 + 1 - 2 + 2 - 1 + 2 - 1 = 2$
**D)** $R : E + T : O + R : C - I - D + O = 2 : 1 + 2 : 1 + 2 : 2 - 1 - 2 + 1 = 3$
**E)** $R \times E + T \times O + R - C - (I + D) : O = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2 - 2 - (1 + 2) : 1 = 1$
El mayor valor es el D.

**8. (A)** Si llamamos $a$ al lado del cuadrado vemos que la base y la altura del triángulo miden ambos $2a$. Como su área son 24 cm$^2$, tenemos que $\frac{2a\cdot 2a}{2} = 24$, es decir, $a^2 = 12$.
Se acabó, el área de cada cuadrado son 12 cm$^2$.




**9. (B)** Con las cifras que tenemos (7 - 7- 7 - 6 - 5 - 4) solo hay dos maneras de conseguir dos ángulos que difieran en 20º.
Primera forma: 47º y 67º, con lo que el tercer ángulo debe medir 180º – 47º – 67º = 66º, que no se ajusta a los datos del problema.
Segunda forma: 57º y 77º, y el tercer ángulo será 180º – 57º – 77º = 46º, que sí satisface las condiciones del enunciado. El ángulo menor mide 46º.

**10.(D)** El perímetro exterior mide $10c + 2b$ y el rectángulo central $2c + 2b$. La diferencia son $8c$, que Guoquin los recorre en 56 minutos, así pues un único $c$ lo recorre en 7 segundos. Los $3c$ del lado menor del gran rectángulo los recorrerá en 21 minutos.



**11.(D)** Si fijamos la primera sílaba, podemos formar 6 palabras (3 × 2 × 1).
Con la CI en primer lugar tenemos las 6 primeras palabras; con la DO en primer lugar llegamos ya hasta la 12ª palabra. RECIDOTOR será la 13ª, RECITORDO la 14ª y REDOCITOR la 15ª.

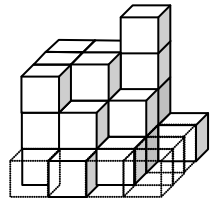
**12.(D)** La primera **W** tiene 7 puntitos y las siguientes se forman añadiendo 4 puntitos a la anterior. Así, la **W** que ocupa el lugar 100 tendrá 7 + 99·4 = 403 puntitos.

**13.(E)** Como sabemos que $A=8$ y $D=5$, la igualdad $2^A \times 6^B = 8^C \times 9^D$ podemos escribirla como $2^8 \times 6^B = 8^C \times 9^5$. Y ahora, descomponiendo las bases llegamos a: $2^8 \times (2\cdot 3)^B = (2^3)^C \times (3^2)^5$ y aplicando las propiedades de las potencias:

$2^8 \times 2^B \cdot 3^B = 2^{3C} \times 3^{10}$, es decir, $2^{8+B}\cdot 3^B = 2^{3C}\cdot 3^{10}$ y ya podemos igualar los exponentes de las bases iguales: $B = 10$ y $8 + B = 3C$, de donde deducimos que $C = 6$.

**14.(B)** Este es un problema de capacidad de abstracción.

Debes ir imaginando los dados que faltan hasta completar el cubo de 4 × 4 × 4. En el dibujo hemos completado el piso inferior con cinco dados pero no dibujamos más porque no se apreciaría nada. El total de dados que faltan son 38.



**15.(B)** Analicemos las frases de Don Retorcido. Para asegurar su falsedad habrá que buscar un ejemplo que la contradiga (a esto se le llama buscar un contraejemplo) y para asegurar que son verdad habrá que razonarlo:
**I.** Todo número primo es impar. FALSA ya que 2 es primo y es par. Es decir, 2 es un contraejemplo.
**II.** Todo número impar es primo. FALSA. El 9 es impar y no es primo.
**III.** La suma de dos números impares nunca es primo. FALSA. 1 + 1 es primo.
**IV.** La suma de dos números impares siempre es par. VERDADERA. Un número impar es un par más 1, así que la suma de dos impares será dos pares más 2, que es naturalmente par.
**V.** El producto de dos números impares siempre es impar. VERDADERA. Los demostraremos con letras. $(2a+1)\cdot(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab+a+b) + 1$ es impar.
Sólo las dos últimas frases de Don Retorcido son ciertas.

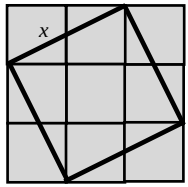
**16.(A)** La capacidad de un tetrabrick es el producto de sus tres dimensiones (largo, ancho, alto), así pues la capacidad de los tres tetabricks son respectivamente $24a$, $18b$ y $12c$. Con los datos del problema podemos asegurar que:
$24a = 2 \cdot 18b$ y $18b = 2 \cdot 12c$, así pues, $24a = 36b$ y $18b = 24c$. De esta última igualdad obtenemos que $36b = 48c$ y entonces podemos enlazar las dos igualdades así: $24a = 36b = 48c$. Dividimos todo entre 12 y queda $2a = 3b = 4c$.

**17.(C)** Los cuadrados pequeños tienen lados de 3 cm, 3 cm y 4 cm, por tanto, el lado del cuadrado grande mide 10 cm.
La zona sombreada es un trapecio cuyas medidas son: 10 cm de base mayor, 4 cm de base menor y 6 cm de altura. Su área son 42 $cm^2$.

**18.(D)** Un día tiene 1440 minutos ($24 \times 60$). Vayamos calculando mitades: Roque pasa 720 minutos en la cama; 360 bostezando; 180 dormitando; 90 en el sofá; 45 cabeceando; le quedan 45 minutos para leer cuentos a sus abuela.

**19.(C)** La suma de las notas de Merche debe ser 28 (4 + 6 + 9 + 9) y entre sus notas no pueden estar ni 4, ni 6, ni 9, ni 10. Su peor nota no puede ser 1 porque esto obligaría a que las otras tres fuesen 9, 9 y 9. Tampoco puede ser un 2 porque las otras serían 8, 9 y 9. Un 3 tampoco porque obligaría a 9, 9, 7 o a 9, 8, 8. Un 4 está prohibido. Un 5 sí podría y la suma de las restantes notas sería 23 (por ejemplo, 8,8,7). Un 6 está prohibido. Un 7 ya no puede ser la menor.

**20. (E)** Haciendo un sencillo rompecabezas se aprecia que el área de la cruz es equivalente al área del cuadrado de lado *x*, es decir, 25 $cm^2$.

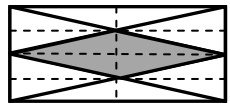



**21.(C)** Las puntuaciones imposibles de conseguir son cuatro: 1, 2, 4 y 7.

**22.(B)** Hay 12 triángulos de área 1 triangulito. Hay 6 triángulos de área 4 triangulitos. Hay 2 triángulos de área 9 triangulitos. En total hay 20 triángulos, todos ellos equiláteros.

**23.(A)** Si llamamos *c* al precio en euros de una cebolla y *t* al de un tomate puedo escribir estas dos ecuaciones: $7c + 5t = 4,50$ y $5c + 3t = 3,10$. Si sumo dichas ecuaciones miembro a miembro obtengo esta igualdad: $12c + 8t = 7,60$ y si divido toda ella entre 4 termino así: $3c + 2t = 1,90$.
Tres cebollas y dos tomates cuestan 1, 90 euros.

**24.(C)** Si dividimos el rectángulo en triángulos iguales mediante segmentos paralelos a los lados, vemos que el rectángulo ocupa 16 triángulos y el rombo 4 triángulos. Es decir, el rombo es la cuarta parte del rectángulo. Como el área del rectángulo es 48 $cm^2$, la del rombo es 12 $cm^2$.



**25.(D)** Entre las respuestas que se ofrecen debemos desechar los números que no sean múltiplos de 15, así pues, descartamos 235, 275 y 379. Quedan solo 210 y 315. Si quitamos las respectivas cifras de las unidades obtenemos 21 (no es primo) y 31 (sí es primo). Don Retorcido tiene 315 años.

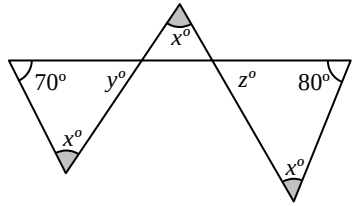
# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* III

**1. (B)** Como la cifra central del primer capicúa es máxima, 9, para llegar al siguiente capicúa deberemos ponerla en cero. Así el siguiente capicúa será 25052. Luego había recorrido 110 km.

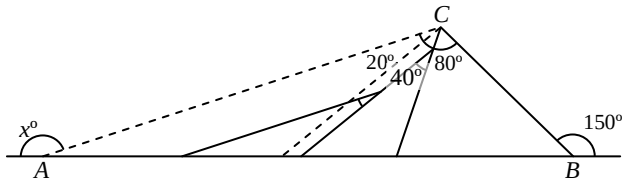
**2. (E)** Debemos repartir 180º proporcionalmente a 2, 3 y 5. Luego tocan a 18º por unidad. El mayor será 90º y el menor 36º. La diferencia entre ellos, 54º.

**3. (A)** La suma de los ángulos de los tres triángulos es, $3x^o + 70^o + 2y^o + 2z^o + 80^o$, y esa suma debe ser 540º.
Pero como $2x^o + 2y^o + 2z^o = 360^o$ ($x^o$, $y^o$, $z^o$, son los ángulos del triángulo superior) al final nos queda que $x^o = 30^o$.



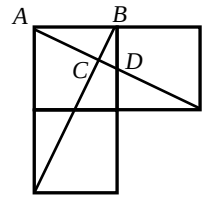

**4. (C)** Dos corredores que van a diferente velocidad vuelven a coincidir cuando el más veloz dobla al más lento. Eso en esta pista significa que le ha sacado 500 m de diferencia. Así para que el intermedio doble al lento, $500 = 0{,}4 \cdot t_1$ , y para que el veloz doble al intermedio, $500 = 0{,}2 \cdot t_2$ , siendo 0,4 y 0,2 las diferencias de velocidades respectivas. Luego despejando, $t_1 = 1250$ s y $t_2 = 2500$ s. Los tres corredores se encontrarán a la vez cuando el tiempo en segundos sea un múltiplo común de 1250 y 2500. La primera vez será en el mínimo común múltiplo (2500).

**5. (A)** Trazando paralelas, para conservar los ángulos, a dos de los segmentos de la figura, se obtiene el triángulo *ABC* cuyos ángulos son: $\hat{A} = 180^o - x^o$, $\hat{B} = 20^o + 40^o + 80^o = 140^o$ y $\hat{C} = 180^o - 150^o = 30^o$ . Por lo tanto $180^o - x^o + 140^o + 30^o = 180^o \Rightarrow x^o = 170^o$



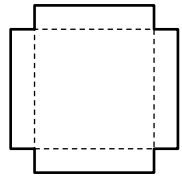

**6. (E)** Un número es media de otro y de su cuadrado si es de la forma $\frac{a + a^2}{2}$, pero como $a^2 + a = a \cdot (a + 1)$, el doble del número (si es además entero positivo) será el producto de dos enteros positivos consecutivos. De los números propuestos como solución, sólo el doble de 30 no es producto de dos números consecutivos.

**7. (B)** Por construcción los segmentos *AD* y *BC* son perpendiculares. Así *BC* es la altura sobre la hipotenusa en el triángulo rectángulo *ABD*, y por tanto los triángulos *ABC* y *BCD* son semejantes con razón de semejanza la de sus hipotenusas, 1 y $1/2$. Las áreas estarán en proporción de 4 a 1, y las dos juntas forman el área de *ABD*. Así *ABC* tiene por área los $4/5$ del área de *ABD*, es decir, $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$.




**8. (E)** El hermano que se presentó a todos los exámenes tuvo una media de 6 puntos y sacó en total 48. El que faltó a dos, pero tuvo la misma media, tuvo que sacar un total de $6 \cdot 6 = 36$ puntos. Dejó de hacer dos exámenes en los que su hermano sacó 12 puntos. Las únicas dos puntuaciones que suman doce son 5 y 7.

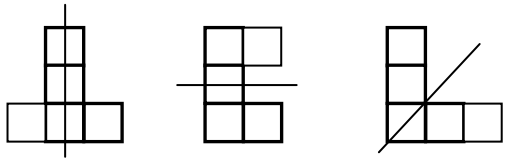
**9. (E)** La superficie, 180 cm$^2$**,** es la de un cuadrado de lado $l$ más la de cuatro rectángulos de lados, $l$ y 2. Por tanto tenemos la ecuación $l^2 + 4 \cdot l \cdot 2 = 180$, cuyas soluciones son: $l = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{1} = -4 \pm 14$, siendo $l$ la solución positiva, 10.



El volumen de la caja es $10^2 \cdot 2 = 200$ cm$^3$**.**

**10. (B)** Por la forma de dar el cambio, conviene trabajar en euros. Hillary tiene 500 €, y Antonio, $400 \cdot 1{,}3 = 520$ €. La diferencia, 20, sobre el dinero de Hillary representa el $\frac{20}{500}=\frac{2}{50}=\frac{4}{100}=4\%$.

**11.(C)** Las tres soluciones y los tres ejes de simetría:



**12.(A)** La media de naranjas por día es cuatro, pero debemos obtener 12 sumando tres números distintos y crecientes. Razonemos con el de en medio. Si es mayor que 4, tiene que ser 5, pero entonces debe estar rodeado por 1 y 6, no cumpliéndose lo de la suma. Si es menor que 4, el tercero sería al menos 7, con lo que sería mayor que la suma de los otros dos. Luego la solución ordenada es 3, 4 y 5.

**13.(B)** El menor de la lista es 107, y el mayor 800, luego la suma es 907.

**14.(E)** La suma de las nueve perlas es: $1+2+3+...+9=45$ gramos. Si el peso de las cuatro parejas es múltiplo de 5, el peso de las ocho perlas que aparecen en ellas lo es. Así que la que se quedó suelta tuvo que ser la de 5 g.

**15.(A)** La suma de los *m* primeros impares es: $1+3+5+...+(2m-1)=\frac{1+2m-1}{2}\cdot m=m^2$

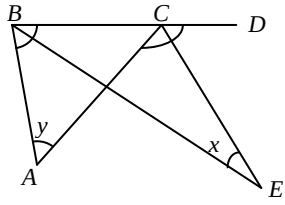
La suma de los *n* primeros pares es: $2+4+6+...+2n=\frac{2+2n}{2}\cdot n=n^2+n$.

Tenemos que: $m^2-(n^2+n)=(m+n)\cdot(m-n)-n=212$. Si llamamos *d* a la diferencia entre *m* y *n*, obtenemos la ecuación, $(d+2n)\cdot d-n=212$, que leída como ecuación de 2º grado en *d*, nos da la solución: $d=-n\pm\sqrt{n^2+n+212}$, teniéndose que, $n^2+n+212$ debe ser un cuadrado perfecto, $(n+k)^2$, y por tanto $(2k-1)\cdot n=212-k^2$, y $d=k$. Dando valores a valores a *k*, obtenemos:

$k=1,\ n=211$; $k=2,\ 3n=208$; $k=3,\ 5n=203$; $k=4;\ 7n=196$; ...; obteniéndose que *n* es natural sólo para los valores de *k*: 1, 4 y 6; y los consiguientes valores de *n*: 211, 28 y 16, que suman 255.

**16.(A)** Tenemos que resolver el sistema: $\begin{cases}a^2+b^2=16\\ a+b=\sqrt{18}\end{cases}$. Elevando la segunda ecuación al cuadrado y usando la primera, llegamos a la ecuación $2ab=2$, con lo cual nuestro sistema queda transformado en el $\begin{cases}a\cdot b=1\\ a+b=\sqrt{18}\end{cases}$, cuyas soluciones se obtienen a partir de las de la ecuación de segundo grado, $a^2-\sqrt{18}a+1=0$, y que son: $a=\frac{\sqrt{18}\pm\sqrt{18-4}}{2}=\frac{\sqrt{18}\pm\sqrt{14}}{2}$, siendo nuestros catetos, $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{14}}{2}$ y $\frac{\sqrt{18}-\sqrt{14}}{2}$, y el área pedida, $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{18}+\sqrt{14}}{2}\cdot\frac{\sqrt{18}-\sqrt{14}}{2}=\frac{18-14}{8}=\frac{1}{2}$.

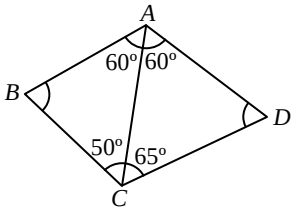
**17.(C)** Llamemos, $\beta=A\hat{B}E=E\hat{B}C;\ \alpha=A\hat{C}E=E\hat{C}D$. Tenemos que $2\beta+y+180^\circ-2\alpha=180^\circ$, y que $\beta+x+\alpha+180^\circ-2\beta-y=180^\circ$, o simplificando, $y=2\alpha-2\beta$, $y=x+\alpha-\beta$; de donde $y=2x$.



**18.(B)** De la suma deducimos que $\boldsymbol{A} + \mathbf{3} = \boldsymbol{B}$. Si $\mathbf{5}\boldsymbol{B}\mathbf{3}$ tiene que ser múltiplo de 3, el mayor valor de $\boldsymbol{B}$ es 7 y por lo tanto el de $\boldsymbol{A}$ es 4.

$$\begin{array}{r} \mathbf{3\ 2\ 9} \\ \mathbf{+\ 2\ A\ 4} \\ \hline \mathbf{5\ B\ 3} \end{array}$$

**19.(C)** En un triángulo el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor. Así en el triángulo *ABC* el lado mayor es *AC* , ya que se opone a 70º. Pero en el *ACD* el mayor es *AD* (opuesto a a 65º), luego es éste el mayor lado de la figura completa.




**20.(D)** Si $n$ es múltiplo de 3, entonces $n\cdot(n+1)$ es múltiplo de 3. Si $n$ es de la forma $3k + 1$, entonces, $n\cdot(n + 1) = (3k + 1)\cdot(3k + 2) = 3\cdot(3k^2 + 3k) + 2$. Si $n$ es de la forma $3k + 2$, entonces $n+1$ es múltiplo de 3 y de ahí lo es $n\cdot(n + 1)$. La solución es D. (Lo del tamaño de $n$ es una broma del autor).

**21.(C)** Aprovechemos primero que hay dos restos iguales. Así, si al dividirlo por 3 y por 11 da resto 1, quitándole uno es múltiplo de 3 y de 11, y por ende de 33. Al dividir 34 entre 5, da resto 4, que es lo que queríamos. El primer natural que cumple lo pedido es 34.

**22.(B)** Podemos factorizar la fórmula, $n^5 - n = n\cdot\left(n^4 - 1\right) = n\cdot\left(n^2 + 1\right)\cdot\left(n + 1\right)\left(n - 1\right)$.

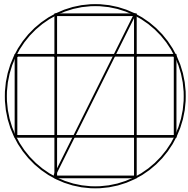
Como $n$ y $n+1$ tienen distinta paridad, el producto es par, pero no podemos asegurar más doses en la descomposición. También el producto es múltiplo de 3, ya que hay tres factores consecutivos. Además podemos asegurar el factor 5, porque da la casualidad (compruébalo) que la potencia quinta de un natural tiene la misma terminación que la base, y por ello $n^5 - n$, acaba en 0. Así todos los términos de la sucesión son múltiplos de $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Aunque para enes consecutivas se obtienen otros factores comunes, estos no se comparten con todos los demás términos

**23.(C)** Para que la resta sea positiva, el número debe ser menor que 1, y lo que tenemos que maximizar es $n\cdot\left(1-n\right)$, cuyo valor mayor es que los dos factores sean iguales, es decir para $n=\frac{1}{2}$. Podemos razonarlo escribiendo:

$$n\cdot\left(1-n\right)=\left(\frac{1}{2}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}.$$

**24.(C)** El número de la izquierda es el mayor y al ser suma de cifras distintas es mayor o igual que 6. Si es 6, las otras cifras son, 0, 1 , 2 y 3, que pueden disponerse en el número de 24 formas. Con 7 delante tendremos otros 24 números con las otras cifras, 0, 1, 2 y 4. Si es 8, las siguientes cifras pueden ser, 0, 1, 2 y 5, o , 0, 1, 3, 4. Con 9, nuevos grupos de 4 cifras son posibles: (0, 1, 2, 6), (0, 1, 3, 5), (0, 2, 3, 4). En total siete grupos con 24 variaciones cada uno.

**25.(B)** Dibujado el diámetro diagonal de uno de los rectángulos, llegamos a la ecuación, $x^2 + (2x)^2 = 1$, siendo $x$ la medida del lado corto de los rectángulos. Como el área de un rectángulo es $2x^2$, obtenemos que es $\frac{2}{5}$.



# XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* IV

**1. (B)** Las cifras de los números pedidos deben ser 2, 3, 5 y 7. Tales números no pueden ser con cifras iguales, pues entonces serían múltiplos de 11. De los 12 números con estas condiciones (variaciones ordinarias de 4 tomadas de dos en dos), debemos quitar los que terminan en 2 ó 5. De los 6 que nos quedan hay que quitar el 27 y el 57. Nos quedan finalmente cuatro números con las condiciones pedidas: 23, 53, 73 y 37.

**2. (D)** Si saco seis, es posible que coincidan uno de cada par y, por tanto, de diferente color, pero si saco uno más es seguro que coincidirá con alguno de los escogidos anteriormente.

**3. (E)** Si había $n$ estudiantes la puntuación total fue de $76n$.

Si se clasificaron $c$ estudiantes la suma de sus puntuaciones fue $83c$ y la suma de las puntuaciones de los $(n - c)$ que no se clasificaron fue $55(n - c)$.

Así pues, $76c = 83c + 55(n - c)$, de donde $21n = 28c \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{3}{4}$ por lo que $c$ es el 75% de $n$.

**4. (B)** Si observamos que $10 - 4\sqrt{6} = \left(2 - \sqrt{6}\right)^2$ y $10 + 4\sqrt{6} = \left(2 + \sqrt{6}\right)^2$, entonces

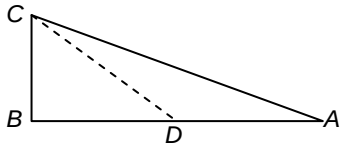
$\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{6}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{6}\right| = \sqrt{6} - 2$ y $\sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{6}\right)^2} = 2 + \sqrt{6}$

Por lo tanto $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = \left(\sqrt{6} - 2\right) - \left(2 + \sqrt{6}\right) = -4$.

También podemos proceder así. Llamando $x$ al número buscado y teniendo en cuenta que ha de ser negativo, ya que $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} < \sqrt{10 + 4\sqrt{6}}$, hallamos $x^2$.

$$x^2 = 10 - 4\sqrt{6} + 10 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{\left(10 - 4\sqrt{6}\right)\cdot\left(10 + 4\sqrt{6}\right)} = 20 - 2\sqrt{4} = 16 \Rightarrow x = -4$$

**5. (D)** El triángulo en cuestión es rectángulo, pues $24^2 + 7^2 = 25^2$ de hipotenusa *AC*, por lo que la mediana que parte de *C* es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 12 y 7, con lo que su longitud es $\sqrt{12^2+7^2}=\sqrt{193}$




**6. (B)** Las dos raíces de la ecuación deben sumar 85, luego una es par y la otra impar. Pero al ser ambas números primos, una tiene que ser 2 y la otra 83. Por lo tanto $c = 2\cdot 83 = 166$ y la suma de sus cifras es 13.

**7. (E)** Como $(senx+\cos x)^2 = sen^2x+\cos^2 x+2senx\cdot\cos x \Rightarrow \frac{1}{4}=1+2senx\cdot\cos x$ **y**

$(senx+\cos x)^3 = sen^3x+\cos^3 x+3sen^2x\cdot\cos x+3senx\cdot\cos^2 x$ podemos escribir

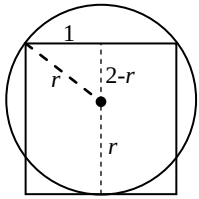
$$sen^3x+\cos^3 x=(senx+\cos x)^3-3senx\cdot\cos x(senx+\cos x)=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}(senx\cdot\cos x)$$

Y como $senx\cdot\cos x=\frac{\frac{1}{4}-1}{2}=-\frac{3}{8}$ resulta que $sen^3x+\cos^3 x=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{16}$ .

**8. (A)** Al ser $\frac{n^2-38}{n+1}=n-1-\frac{37}{n+1}$ el número en cuestión será entero cuando lo sea $\frac{37}{n+1}$ y el mayor entero con esta propiedad es *n* = 36.

**9. (C)** La situación es la que indica la figura, por lo que

$$r^2=1^2+(2-r)^2 \Rightarrow r^2=5-4r+r^2 \Rightarrow r=\frac{5}{4}$$




**10. (B)** Los números 2010, 2012, 2013 y 2014 son todos compuestos. 2010 = 2·3·5·67, 2012 = $2^2$·503, 2013 = 3·671 y 2014 = 2·19·23. El que menos divisores tiene es 2013 y su suma es: S(2013) = 1 + 3 + 671 + 2013 = 2688. Como 2011 es primo la suma de sus divisores es menor. S(2011) = 1 + 2011 = 2012.

**11. (D)** El término general de esta sucesión es $a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$, con lo que el problema se reduce a encontrar para cuántos enteros positivos *n*, se verifica que $3n - 2 < 10000$, es decir, $n < \frac{10002}{3} = 3334$. El mayor valor de *n* es 3333, que es el número de términos con menos de cinco dígitos.

**12. (D)** Los números son: 4, *b*, 4 + *b*, 4 + 2*b*, 8 + 3*b*, 12 + 5*b* = 47, así que *b* = 7, siendo entonces 4, 7, 11, 18, 29 y 47 la lista en cuestión y su suma $S = 116 \in [111, 120]$.

**13. (E)** Al ser $\frac{a}{b}$ el cociente de las dos longitudes de los lados del rectángulo, con *a* > *b*, podemos escribir dichas longitudes como $\frac{ka}{a+b}$ y $\frac{kb}{a+b}$, por lo que el perímetro, *x*, será $x = 2\left(\frac{ka}{a+b} + \frac{kb}{a+b}\right) = 2k \Rightarrow k = \frac{x}{2}$. Por lo tanto el lado más corto, *b*, viene dado por la expresión $\frac{xb}{2(a+b)}$.

**14. (A)** Tomando *DE* como base del paralelogramo *DEBF*, su altura es 6 y al ser su área 12, *DE* = 2, por lo que *EC* = 10 y $EB = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$.

Por otra parte, la semejanza de los triángulos *DGE* y *EBC* nos lleva a escribir $\frac{EG}{2} = \frac{6}{2\sqrt{34}} \Rightarrow EG = \frac{3\sqrt{34}}{17}$.

**15. (D)** La posición del punto *E* sobre el lado *DC*, no va a influir en el área del triángulo *ABE*, por lo que el dato $DE = \frac{1}{4}DC$ es superfluo e innecesario. Si llamamos *h* a la altura del trapecio y 2*k* + 1 a la base *DC* tendremos que $18 = \frac{2k+5}{2} \cdot h$ por lo que $36 = (2k+5) \cdot h$ con *k* y *h* enteros. Al ser 2*k* + 5 impar y mayor que 3, la única posibilidad es que 2*k* + 5 = 9 y *h* = 4, con lo que el área del triángulo *ABE* es 8.

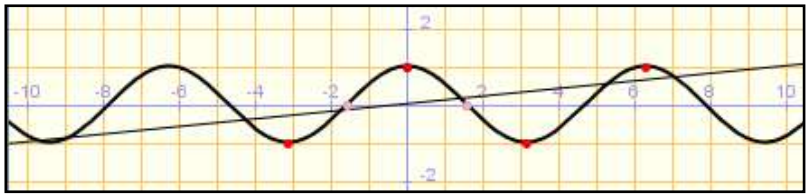
**16. (D)** La función tangente es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ lo que implica que los arcos mantienen el orden de las tangentes.

Puesto que $tg\ 60^o = \sqrt{3}$ y $tg\,75^o = tg(30^o+45^o) = \frac{tg\,30^o + tg\,45^o}{1 - tg\,30^o \cdot tg\,45^o} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1} = 2+\sqrt{3}$,

como $tg\,60^o = \sqrt{3} < tgx = 3 < tg\,75^o = 2+\sqrt{3} \Rightarrow 60^o < x < 75^o$.

**17. (D)** Las soluciones de la ecuación $x = 10\cos(x)$ son tantas como puntos de corte tienen las funciones $f(x) = \frac{x}{10}$ y $g(x) = \cos(x)$. Puesto que la imagen de cos(*x*) es el intervalo $[-1, 1]$, los puntos de corte han de estar en el intervalo $[-10, 10]$.

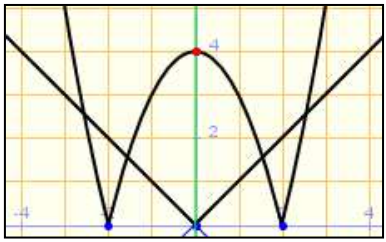
Un esbozo de ambas funciones clarifica bastante la situación.




En el intervalo $[-10, 0]$ hay dos intervalos en los que la función cos(*x*) es negativa y además en cada uno tiene un mínimo igual a – 1. Estos intervalos son $\left[-10, -\frac{5\pi}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ y los mínimos se alcanzan en $-\pi$ y en $-3\pi$, por lo que las funciones tendrán cuatro puntos de corte. En el intervalo $(0, 10]$ hay dos intervalos en los que la función cos(*x*) es positiva, pero sólo tiene un máximo relativo en $2\pi$ que es igual a 1, por lo que las funciones tienen tres puntos de corte. En total, hay siete puntos de corte.

**18. (A)** $25^{\left(\frac{1}{2} - \log_5 \sqrt{2}\right)} = \frac{25^{\frac{1}{2}}}{25^{\log_5 \sqrt{2}}} = \frac{\left(5^2\right)^{\frac{1}{2}}}{5^{2\log_5 \sqrt{2}}} = \frac{5}{5^{\log_5 2}} = \frac{5}{2}$

**19. (E)** Haciendo un esbozo de la gráfica de ambas funciones se ve que las funciones se cortan en cuatro puntos, que corresponden a las soluciones de las ecuaciones $x^2 - 4 = x$ y $x^2 - 4 = -x$ que son $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ y $x_4 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$



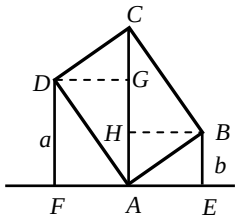

**20. (A)** La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ tiene el centro en el origen y radio 3, mientras que la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 41 = 0$ tiene centro en el punto (6 , -3) y radio 2. Puesto que la distancia entre los centros de ambas circunferencias es $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ , que es mayor que la suma de los radios (3 + 2 = 5), la mínima distancia entre dos puntos, uno de cada circunferencia es $3\sqrt{5} - 5$

**21. (A)** Por ser la función $y = 2^x$ monótona creciente, $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$ alcanza su valor mínimo en el mínimo de $g(x) = x^2 - 2x$, que es $g(1) = -1$. Por tanto, el mínimo de $f(x)$ es $f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

**22. (C)** La suma es, $x + 2x + 3x + ... + 99x + 100x = 5050x = 2 \cdot 5^2 \cdot 101 \cdot x$

El valor mínimo de *x* que hace la suma un cuadrado perfecto es $2 \cdot 101 = 202$.

**23. (B)** Trazando las paralelas a *EF* por los puntos *D* y *B*, cortan a *AC* en *G* y *H*, respectivamente. Como *ABCD* es un rectángulo $FE = DG + GB = 2 \cdot DG$.




Y aplicando el teorema de la altura en el triángulo rectángulo *ADC*,

$$FE = 2DG = 2\sqrt{AG \cdot GC} = 2\sqrt{AG \cdot AH} = 2\sqrt{a \cdot b}$$

**24. (A)** $\log(tg1^\circ) + \log(tg2^\circ) + \log(tg3^\circ) + ... + \log(tg88^\circ) + \log(tg89^\circ) =$

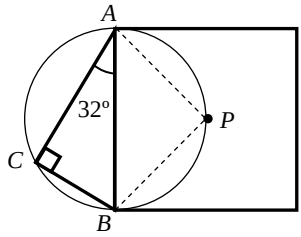
$$\log\left[(tg1^\circ) \cdot (tg2^\circ) \cdot (tg3^\circ) \cdot ... \cdot (tg88^\circ) \cdot (tg89^\circ)\right].$$

Como $tg(x) = \dfrac{1}{tg(90^\circ - x)}$, la expresión pedida es

$$\log\left[ tg(1^\circ) \cdot ... \cdot tg(44^\circ) \cdot tg(45^\circ) \cdot \frac{1}{tg(44^\circ)} \cdot ... \cdot \frac{1}{tg(1^\circ)} \right] = \log(1) = 0\,.$$

**25. (C)** El cuadrilátero ACBP se puede inscribir en una circunferencia de diámetro *AB* ya que *AB* es la hipotenusa de los triángulos rectángulos *ABC* y *ABP*. Los ángulos $P\hat{C}B$ y $P\hat{A}B$ son iguales, pues ambos son inscritos y abarcan el mismo arco.

Como $P\hat{A}B = 45^\circ \Rightarrow P\hat{C}B = 45^\circ$.



# Participantes y relación de ganadores del XVII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En esta convocatoria del Concurso de Primavera la participación de estudiantes en la primera fase fue próxima a 40 000. De los 490 centros participantes se inscribieron 3957 estudiantes para la segunda fase, aunque finalmente realizaron la prueba 3428. Debido al elevado número de participantes para esta 2ª fase y al limitado espacio de la Facultad de Matemáticas, nos vemos obligados a reducir el número de participantes, por nivel y centro, a tres. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | NIVEL 2 | | NIVEL 3 | | NIVEL 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | | 1º ESO, 2º ESO | | 3º ESO, 4º ESO | | 1º B, 2º B | |
| **nº de inscripciones** | 243 | 611 | 578 | 763 | 540 | 629 | 366 | 227 |
| **nº de participantes** | 226 | 521 | 535 | 684 | 465 | 533 | 287 | 177 |
| **nº centros** | 177 | 187 | 267 | 206 | 243 | 257 | 136 | 95 |

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

1. Lucas Cuesta Araújo (6º Primaria) CP La latina
2. Pablo Soto Martín (6º Primaria) CP Miguel de Cervantes
3. Víctor David Sánchez (5º Primaria) CP Andrés Segovia

**NIVEL II**

1. Alejandro Epelde Blanco (1º ESO) Montessori School Los Fresnos
2. Pablo del Olmo de Casas (2º ESO) IES Las Canteras
3. Saúl Rodríguez Martín (2º ESO) Colégio Villa de Griñón

**NIVEL III**

1. Berta García González (3º ESO) IES San Juan Bautista
2. Ismael Sierra del Río (4º ESO) Colegio San Juan Bautista
3. Marc Isern Hacker (4º ESO) Colegio Alemán

**NIVEL IV**

1. Pablo Esteban de la Iglesia (2º Bchto) Colegio Fray Luis de León. Madrid
2. Raúl González Molina (2º Bachto) IES San Mateo
3. Miguel Barrero Santamaría (1º Bachto) IES Alameda de Osuna

# XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

La suma de dos números naturales es 371 y el cociente entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisores 430. ¿Cuáles son esos números?

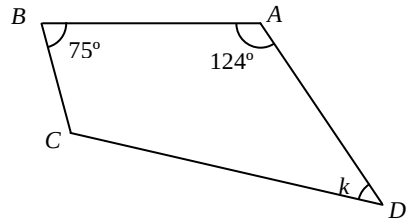
**Problema 2.**

En un triángulo rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es de 2,8 cm y el radio de la circunferencia circunscrita es de 9,1 cm. Calcula el perímetro del triángulo.

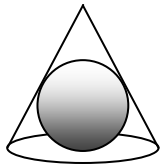
**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
¿Cuál es el mayor número de seis cifras, representado por *ELEVEN*, en el que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales cifras iguales, que verifica que es múltiplo de 11?

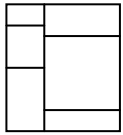
**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *k* la suma de las cifras de *T*.
En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está a escala, $AB = AC$, $\hat{A} = 124^\circ$, $\hat{B} = 75^\circ$ y $\hat{D} = k^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo $B\hat{D}C$ ?



**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. Una esfera de *T* cm de radio está inscrita (perfectamente ajustada) en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de su base. ¿Cuál es, en cm, la altura del cono?



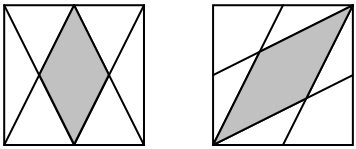
**Problema 1B.** (1 punto)
Dividimos un cuadrado en seis rectángulos como se indica en la figura. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 120 cm, ¿cuál es. en $cm^2$, el área del cuadrado?



**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *n* la suma de las cifras de *T*. El número de cinco cifras 24X8Y es divisible por 4, 5 y *n*. ¿Cuál es la suma de las cifras X e Y?

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. El cuadrilátero *PQRS* está inscrito en una circunferencia de tal manera que *PR* es un diámetro. Si las longitudes de *PQ*, *QR* y *RS* son 60, 25 y 13·*T*, ¿cuál es la longitud del lado *SP*?

**Problema 4.** (5 puntos)
Sean *a* y *b* las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. La figura muestra dos rombos sombreados inscritos en cuadrados iguales de lado *a* – *b*. Cada uno de ellos se han formado mediante segmentos de extremos un vértice del cuadrado y el punto medio de uno de los lados. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de dichos rombos?



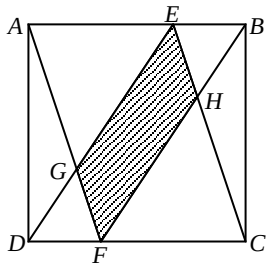
**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

Al escribir una a continuación de otra las edades de Alicia y Bruno resulta un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si hiciéramos lo mismo, en ese orden, dentro de 31 años resultaría un número también de cuatro cifras y también cuadrado perfecto.
¿Cuáles son las edades actuales de Alicia y de Bruno?

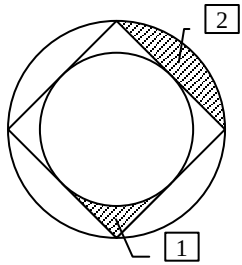
**Problema 2.**

En el cuadrado *ABCD* de la figura $AE = 2 \cdot EB$ y $FC = 2 \cdot DF$.
¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo *EGFH* y el área del cuadrado *ABCD*?



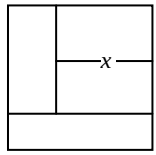

**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Calcula el cociente entre el área de la región 1 y el área de la región 2.




**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior, que en la forma más simplificada es $T = \dfrac{a-\pi}{2\pi-b}$ con $a$ y $b$ enteros.

La figura, que no está a escala, muestra un cuadrado de lado $\dfrac{a}{b}$ dividido en cuatro rectángulos de igual área. Calcula la longitud del segmento marcado con *x*.



**Problema 3A.** (2 puntos)

Sea $T = \frac{c}{d}$ la respuesta del problema anterior expresada en forma de fracción irreducible y $n = 2(c+d)$. En una clase de 4º de ESO hay $n$ chicas. Si seleccionamos al azar dos estudiantes de esa clase la probabilidad de que ambos sean chicas es 0,15. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

**Problema 1B.** (1 punto)

¿Cuántas soluciones enteras tiene la inecuación $\left||x| - 2013\right| < 5$ ?

**Problema 2B.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Calcula cuántos números de cuatro cifras verifican que la suma de los cuadrados de sus cifras es $T$.

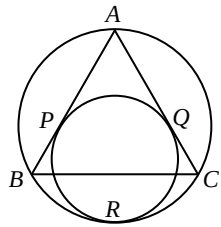
**Problema 3B.** (2 puntos)

La respuesta del problema anterior es un número $T$ de dos dígitos, $p$ y $q$. En el triángulo $ABC$ la mediana que parte de $A$ es perpendicular a la mediana que parte de $B$. Si las longitudes de los lados $AC$ y $BC$ son $p+q$ y $p \cdot q$, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado $AB$?

**Problema 4.** (5 puntos)

Sean $a$ y $b$ las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente y sea $x = a \cdot b^2$.

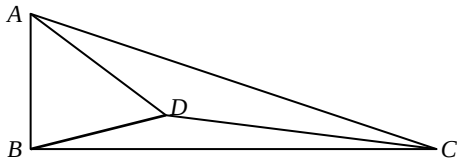
En una circunferencia hay inscrito un triángulo equilátero $ABC$. Una segunda circunferencia es tangente interior a la primera en $R$ y tangente a $AB$ y $AC$ en $P$ y $Q$ respectivamente. Si $BC = x$ calcula $PQ$.



**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

En el interior del triángulo rectángulo *ABC*, con ángulo recto en *B*, tomamos un punto *D* tal que el área del triángulo *ABD* es la tercera parte del área del triángulo original y el área del triángulo *BDC* es la cuarta parte del área del triángulo original. Si las distancias de *D* a los vértices *A* y *C* son, respectivamente, 3 y 4 cm, calcula la distancia de *D* al vértice *B*.



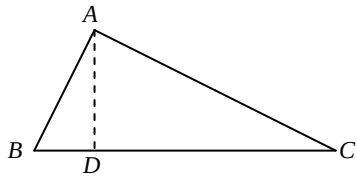

**Problema 2.**

Encuentra todos los enteros positivos que escritos en notación usual (base 10) son una unidad mayor que la suma de los cuadrados de sus cifras.

**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Calcula el menor primo $p$ tal que $(p - 1)$ es la diferencia de los cuadrados de dos múltiplos de 4, ambos positivos.

**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *k* la suma de los dígitos de *T*.
En el triángulo rectángulo *ABC* de la figura *AD* es perpendicular a *BC*. Si el área del triángulo *ABD* es 1 y el área del triángulo *ADC* es *k*, calcula $tg^2 \hat{B}$.



**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Calcula el mayor entero positivo *n* para el que $n^2 - Tn + 6$ resulta ser un número primo.

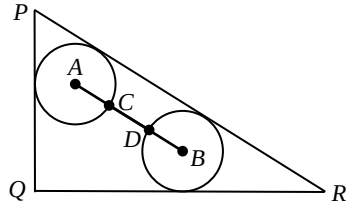
**Problema 1B.** (1 punto)
Calcula el valor de *T* si $\lg_2 4$, $\lg_{\sqrt{2}} 8$, $\lg_3 9^{T-1}$ están en progresión geométrica.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Calcula el número de valores enteros de *x* que verifican el sistema de inecuaciones:
$x^2 > x + 6$, $\quad |x| < T^2$.

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Una enorme cesta de frutas tiene un gran número de naranjas, peras, manzanas y limones, más de 10000 de cualquiera de ellas. Calcula el menor valor de *k* para que cualquier elección de *k* de piezas de frutas tenga al menos una de las siguientes características:

- Que haya al menos 1001 naranjas
- Que haya al menos 2013 peras
- Que haya al menos 219 manzanas
- Que haya al menos *T* limones.

**Problema 4.** (5 puntos)
Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *b* la suma de los dígitos del problema **3B**.
En el triángulo rectángulo *PQR* de la figura, en el que $PQ = \frac{b}{2}$ y *QR* = 2*a*, dibujamos dos circunferencias iguales, de centros *A* y *B*, cada una de ellas tangente a un cateto y a la hipotenusa. Si las intersecciones de las circunferencias con el segmento *AB* dividen a éste en tres partes iguales, *AC* = *CD* = *DB*, calcula el radio de las circunferencias.

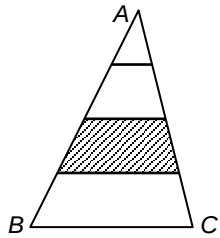


**XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

23 de noviembre de 2013

**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** En el triángulo *ABC* dibujamos tres paralelas a la base *BC* que dividen a la altura sobre dicho lado en cuatro partes iguales. Si el área del trapecio rayado es 35 $cm^2$, calcula el área de dicho triángulo.




**2.** Las tangentes exteriores a dos circunferencias de radios 3 y 14 forman un ángulo de 60º. ¿A qué distancia están sus centros?

**3.** La tabla adjunta muestra algunos datos del último campeonato de pesca celebrado en el lago de la Casa de Campo.

| Número de peces pescados (*n*) | 0 | 1 | 2 | 3 | … | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de participantes que pescaron *n* peces | 9 | 5 | 7 | 23 | … | 5 | 2 | 1 |

Como puedes observar hubo 9 participantes que no pescaron nada, 5 pescaron un único pez, etc.
En la prensa local que cubría el evento se pudo leer al día siguiente:

- *El ganador obtuvo 15 peces*
- *La media de los que pescaron 3 o más peces fue de 6 peces.*
- *La media de los que pescaron menos de 13 peces fue de 5 peces.*

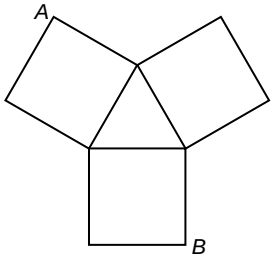
¿Cuál fue el número total de peces capturados?

**XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

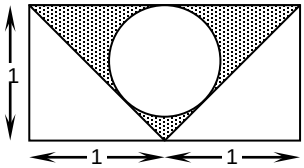
23 de noviembre de 2013

**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

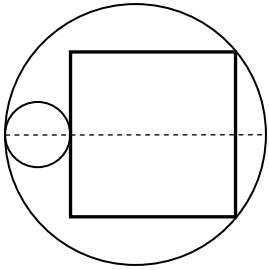
**1.** Sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero se construye un cuadrado, como indica la figura. Si el lado del triángulo es 10, ¿cuál es la distancia entre los vértices *A* y *B*?




**2.** Calcula el área de la zona sombreada




**3.** En el dibujo de la figura hay dos circunferencias tangentes interiores. El diámetro de la pequeña es 10 y el radio de la grande es 20. El cuadrado tangente a circunferencia pequeña tiene dos vértices en la circunferencia grande y su centro está alineado con los centros de las circunferencias. Calcula el lado del cuadrado y expresa el resultado en la forma $m + n\sqrt{t}$ con *m, n* y *t* enteros y *n* lo más grande posible.



**XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

23 de noviembre de 2013

**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato. (45 minutos)

**1.** Sean *f* y *g* dos funciones cuyas gráficas son dos rectas. Si para todo número real *x* se verifica que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, $f(0) = 4$ y $g(5) = 61$, calcula $f(2013)$.

**2.** Calcula el máximo común divisor de todos los enteros de la forma $n^5 - 5n^3 + 4n$ para cualquier entero n > 2.

**3.** La sucesión 3, 15, 24, 48, 63,… está formada por los enteros positivos que son múltiplos de 3 y una unidad menor que un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el resto de la división entre 1000 del término que ocupa el lugar 2013º en dicha sucesión?

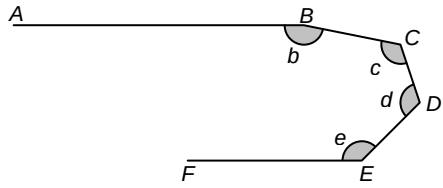
**XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

23 de noviembre de 2013

**PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** Calcula el menor número de cinco cifras "*pqrst*", todas diferentes, que sea divisible por 3, 4, 5 y 7. (ten en cuenta que *p* no puede ser cero)

**2.** La recta que pasa por *A* y *B* es paralela a la que pasa por *F* y *E.* Si *b, c, d* y *e* son las medidas de los ángulos marcados, calcula la suma $b + c + d + e$.

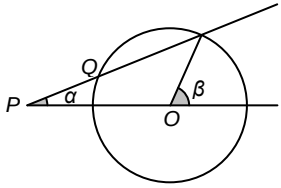



**3.** El cuadrado que observas es "mágico", es decir, la suma de los números de las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales es la misma. Si los nueve números del cuadrado mágico son los números pares comprendidos entre 11 y 29, ¿cuánto vale el producto $a \cdot b \cdot c$?
Completa el cuadrado con esos números cuando $c < b$.

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *y* | ***a – c*** |
| ***a –b –c*** | ***a*** | ***a+b+c*** |
| *z* | *u* | *v* |

**4.** En un Instituto hay 144 estudiantes en 2º de ESO. En 1º de ESO hay un 25% de estudiantes más que en 3º de ESO, o sea, si en 3º hubiera 20, en 1º habría 20 + 25% de 20 = 25. En 2º de ESO hay un 10% menos que en 1º y el 20% del total de estudiantes de la ESO son de 4º. ¿Cuántos estudiantes hay entre los cuatro cursos de ESO de ese Instituto?

**5.** En esta figura el segmento *PQ* es igual que el radio de la circunferencia de centro *O*. Si el ángulo $\beta$ mide 66º, ¿cuánto mide el ángulo $\alpha$?



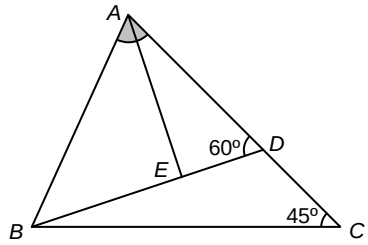
**XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

23 de noviembre de 2013

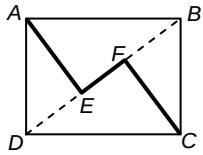
**PRUEBA INDIVIDUAL** **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** Encuentra todas las parejas de enteros positivos *a* y *b* tales que $5a - ab = 9b^2$.

**2.** En el triángulo *ABC* de la figura, que no está hecha a escala, *AD* = 2, *DC* = 1 y *E* es el pie de la perpendicular desde *A* a la recta *BD*. Si el ángulo $A\hat{C}B = 45º$ y el ángulo $A\hat{D}E = 60º$, calcula el valor del ángulo $B\hat{A}C$ marcado en la figura.

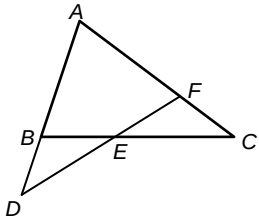



**3.** En el rectángulo *ABCD* de dimensiones 8 y 6, los puntos *E* y *F* son los pies de las perpendiculares desde *A* y *C* sobre la diagonal *BD*. Calcula la longitud de la línea quebrada *AEFC*.




**4.** Si *a* y *b* son enteros positivos tales que $a \cdot b = 10!$, prueba que $a + b$ siempre es mayor que 3744.

**5.** En el triángulo *ABC* de la figura, que no está hecho a escala, prolongamos el lado *AB* hasta el punto *D.* Desde *D* trazamos una recta que corta a los lados *BC* y *AC* en los puntos *E* y *F*, respectivamente, verificándose que *AB* = *AE* = *AF* y que *FE* = *FC*. Demuestra que *AD* = *FD*.

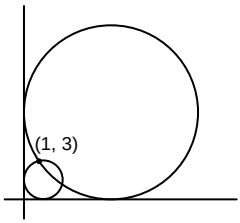


## XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

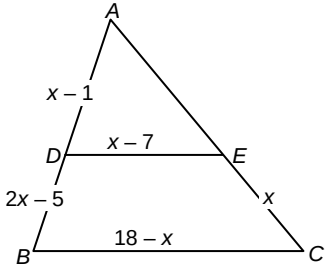
**PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato** (90 minutos)

**1.** Dos circunferencias distintas son tangentes a los ejes de coordenadas y ambas pasan por el punto (1, 3). ¿Cuál es la suma de sus radios?



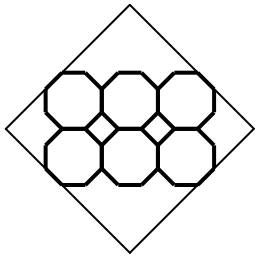

**2.** Calcula el menor entero *n*, mayor que 2000, tal que los números $\frac{3n+4}{5}$, $\frac{4n+5}{3}$, $\frac{5n+3}{4}$ sean enteros.

**3.** En el triángulo *ABC* de la figura, que no está hecho a escala, la recta *DE* es paralela al lado *BC*. Encuentra, si existen, los valores de *x* que hacen que los segmentos señalados tengan las longitudes que se indican.




**4.** Calcula la pendiente de la recta que, pasando por el origen, corta a la parábola $5y = 2x^2 - 6x + 10$ en dos puntos cuyas abscisas suman 2013.

**5.** En el cuadrado *ABCD* de la figura hay seis octógonos regulares iguales, de lado 2, que comparten un lado con los octógonos colindantes. Cada uno de los octógonos de los extremos tiene un lado sobre un lado del cuadrado. Calcula el área del cuadrado y expresa el resultado en la forma $m + n\sqrt{2}$.



**XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

23 de noviembre de 2013

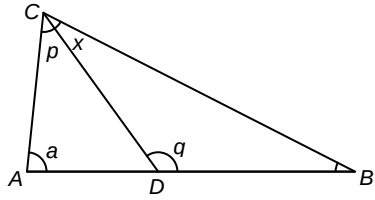
**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** Si escribimos el máximo común divisor de 720 y 1080 en la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, calcula $a + b + c$.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "T" la respuesta del problema 2B
¿Cuál es el menor entero positivo $N$ que verifica $(T + 4) \cdot N$ es el cubo de un número entero?
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "T" la respuesta del problema 2C y $n$ la suma de los dígitos de T.
En el triángulo $ABC$ el ángulo $a$ es mayor que 70º y su medida (en grados sexagesimales) viene dada por el número cuyas cifras son $n$ y $\frac{n}{2}$. $D$ es un punto del lado $AB$ tal que $DC = DB$ y el ángulo $q$ es el triple del ángulo $p$. ¿Cuál es la medida del ángulo $x$?




**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

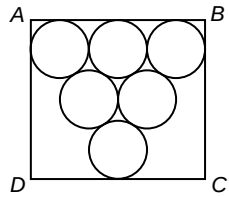
23 de noviembre de 2013

**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**3º y 4º de ESO.-**

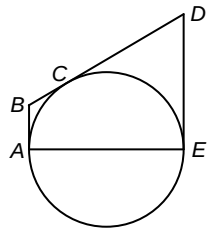
.

**2A.-** Sea "T" la respuesta del problema 3A y *p* el producto de las cifras de T.
En el rectángulo *ABCD* de la figura, con *AB* = *p*, hay seis circunferencias tangentes entre sí y a los lados del rectángulo, como muestra la figura. Calcula *BC* y expresa la solución como $r\sqrt{3}+s$ con *r* y *s* enteros.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**




**2B.-** Estoy pensando en un número positivo. Si le sumo 7, divido esta suma entre 3, resto 3 a lo que me queda y finalmente elevo al cuadrado el número obtenido resulta 16. ¿En qué número estoy pensando?
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "T" la respuesta del problema 3C.
La longitud del diámetro *AE* de la circunferencia de la figura es T. Si *BA, ED,* y *BD* son tangentes a dicha circunferencia en los puntos *A, E* y *C*, respectivamente, y *BD* = 50, calcula el área del trapecio *ABDE*.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**



## XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

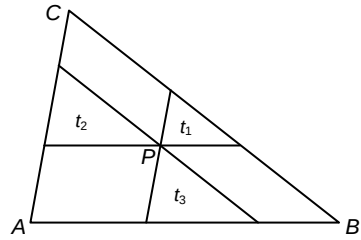
23 de noviembre de 2013

**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "T" la respuesta del problema 1A.
¿Cuántos cuadrados perfectos, sin contar el cero, son menores que $10^T$ y múltiplos de 24?
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**3B.-** Sea "T" la respuesta del problema 1B.
En el interior del triángulo *ABC* elegimos un punto *P* por el que trazamos paralelas a los lados y resultan los triángulos $t_1$, $t_2$ y $t_3$ de áreas $\frac{T}{3}, \frac{3T}{4}$ *y* $(4T+1)$, respectivamente.
¿Cuál es el área del triángulo *ABC*?




**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** Calcula cuántos enteros *n* hay que verifican que $2^4 < 8^n < 16^{32}$.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

## CENTROS GANADORES

1. IES San Juan Bautista (Equipo A)
2. IES Ramiro de Maeztu (Equipo A)
3. IES Alameda de Osuna (Equipo A)

## ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Alejandro Epelde Blanco | (Montessori School Los Fresnos) |
| 2. | Diego Sierra | (Colegio San José del Parque) |

NIVEL II (3º, 4º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Daniel Puignau Chacón | (IES Alameda de Osuna) |
| 2. | Javier González Domínguez | (IES San Juan Bautista) |

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Miguel Barrero Santamaría | (IES Alameda de Osuna) |
| 2. | Ángel Prieto Naslín | (Liceo Francés de Madrid) |

## RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

| | | |
|---|---|---|
| 1. | IES San Juan Bautista A | 43,5 |
| 2. | IES Ramiro de Maeztu A | 40,7 |
| 3. | IES Alameda de Osuna A | 40,0 |
| 4. | Colegio Alemán de Madrid | 37,9 |
| 5. | Colegio Fray Luis de León A | 28,6 |
| 6. | Liceo Francés de Madrid | 26,45 |
| 7. | Colegio Virgen de Mirasierra | 22,9 |
| 8. | IES La Estrella A | 21,6 |
| 9. | Colegio Brains A | 19,8 |
| 10. | Colegio Retamar | 19,7 |

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: viernes 29 de noviembre de 2013**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

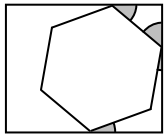
**1.** ¿Cuál es la cifra de las unidades de $3^{2013}$?

A) 3 B) 9 C) 7 D) 1 E) 6

**2.** El robot OMEMAN se mueve sobre la recta real empezando en el 0. Da un paso a la derecha llegando al 1, dos pasos a la izquierda hasta el -1, tres pasos a la derecha hasta el 2, cuatro pasos a la izquierda hasta el -2 y así sucesivamente, alternando derecha e izquierda y un paso más en cada movimiento. ¿A qué número llegará después de 2012 giros?

A) 1007 B) -1006 C) 27 D) 11 E) 0

**3.** El dibujo muestra un hexágono regular dentro de un rectángulo. ¿Cuál es la suma de los cuatro ángulos marcados?



A) 90º B) 120ºC) 135ºD) 150º
E) Depende de la posición del hexágono respecto del rectángulo

**4.** Ayer fue el cumpleaños de David y de su abuela. Hoy la edad de la abuela es par y 15 veces la de David y dentro de cuatro años será el cuadrado de la edad que tenga David. ¿Cuántos años es mayor la abuela que David?

A) 42 B) 49 C) 56 D) 60 E) 64

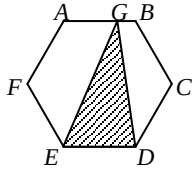
**5.** Dos lados de un triángulo miden 4 y 5 cm y el tercer lado $x$ cm, siendo $x$ un número entero. ¿Cuántos valores diferentes puede ser $x$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**6.** Un triángulo tiene dos lados iguales de longitud 5. ¿Qué longitud debe tener el tercer lado para que sea máxima el área de dicho triángulo?

A) 5 B) 6 C) $5\sqrt{2}$ D) 8 E) $5\sqrt{3}$

**7.** En la figura se observa un hexágono regular *ABCDEF* y un triángulo *EGD* en el que *G* es un punto del lado *AB*. ¿Qué fracción del área del hexágono ocupa el triángulo?

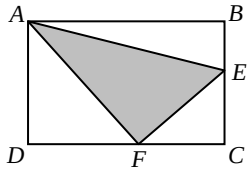



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{5}{12}$

**8.** ¿Cuántas ecuaciones de segundo grado, de la forma $x^2 + ax + b = 0$, con $a$ y $b$ diferentes, tienen por solución $a$ y $b$?

A) Infinitas B) Ninguna C) 4 D) 3 E) 1

**9.** El área del triángulo $ABE$ es $\frac{1}{5}$ del área del rectángulo $ABCD$ y el área del triángulo $EFC$ es $\frac{1}{8}$ del área de dicho rectángulo. ¿Qué fracción de la superficie del rectángulo ocupa el triángulo sombreado $AFE$?




A) $\frac{27}{40}$ B) $\frac{21}{40}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{19}{40}$ E) $\frac{23}{60}$

**10.** Un estudio entre los hábitos alimenticios de los estudiantes de un centro escolar concluye que al 70% les gustan las peras, al 75% les gustan las naranjas, al 80% les gustan los plátanos y al 85% les gustan las manzanas. ¿Cuál es el menor porcentaje posible de estudiantes de ese centro a los que les gustan todas esas frutas?

A) 10% B) 15% C) 20% D) 25% E) 70%

***11.*** Si los números $x$ e $y$ verifican que $x + y = 20$ y que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de $xy^2 + x^2y$?

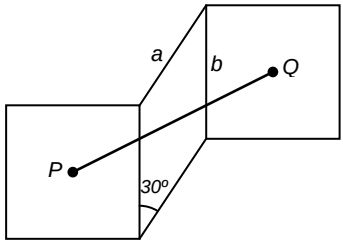
A) 80 B) 200 C) 400 D) 640 E) 800

**12.** En cada una de las doce casillas de la tabla de la figura hemos colocado un número de forma que la suma de los números de cada fila es la misma y también la suma de los números de cada una de las cuatro columnas es la misma. ¿Qué número representa la letra ***x***?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | | 2 |
| | 3 | 3 | |
| 6 | | 1 | ***x*** |

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**13.** Sobre los lados mayores de un paralelogramo de lados $a$ y $b$ y un ángulo de 30º, construimos dos cuadrados, hacia fuera, como muestra la figura. ¿Cuál es la distancia entre los centros, $P$ y $Q$, de los cuadrados?




A) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$ B) $\sqrt{b^2-a^2+2ab}$

C) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$ D) $\sqrt{a^2+b^2+1}$

E) $\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$

**14.** En el triángulo de vértices $A(0, 4)$, $B(-2, 0)$ y $C(4, 0)$ inscribimos un cuadrado con un lado descansando sobre el lado $BC$ del triángulo. Uno de los vértices del cuadrado es el punto $P$ de coordenadas:

A) (1, 3) B) (2, 2) C) (1,5; 2,5) D) (1,6; 2,4) E) (1,8; 2,2)

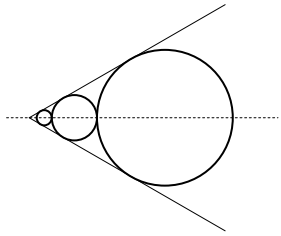
**15.** ¿Cuál es el mayor valor de $a$ para el que la recta $y = 10x + 5$ es tangente a la parábola $y = x^2 + ax + 6$?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 12

**16.** Si $x$ e $y$ son enteros positivos que verifican la ecuación $\sqrt{x} - \sqrt{11} = \sqrt{y}$, ¿cuál es el máximo valor de $\frac{x}{y}$?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 11 E) 44

**17.** En la figura se observan tres circunferencias tangentes exteriores y dos rectas tangentes a las tres. Si los radios de las circunferencias son $r_1$, $r_2$ y $r_3$, con $r_1 < r_2 < r_3$) y la distancia entre el centro de la pequeña y el centro de la mayor es $16r_1$, el cociente $\frac{r_1}{r_2}$ es:



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{1}{4}$

**18.** En el triángulo isósceles $ABC$, con $AB = AC$, la bisectriz del ángulo de vértice $C$ corta al lado $AB$ en un punto $D$. Si $BC = CD$, el ángulo $C\hat{D}A$ es igual a:

A) 90º B) 100º C) 108º D) 110º E) 120º

**19.** En una clase las chicas son más del 45% pero menos del 50%. ¿Cuál es el menor número posible de chicas en esa clase?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

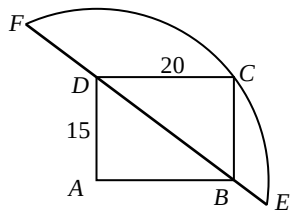
**20.** Si $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$, el valor de $n$ es:

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

**21.** Si $a + b + c = 7$ y $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}$, ¿cuál es el valor de $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$?

A) $\frac{19}{10}$ B) $\frac{17}{10}$ C) $\frac{9}{7}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{10}{7}$

**22.** En la figura se observa un rectángulo $ABCD$ de lados 20 y 15 y un arco de la circunferencia de centro en $A$ y radio $AC$. La cuerda de dicho arco pasa por $D$ y $B$. ¿Cuál es la longitud de dicha cuerda?




A) 50 B) $2\sqrt{20 \cdot 25}$ C) $2\sqrt{37 \cdot 13}$

D) 44 E) 26

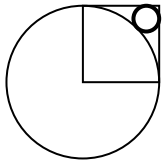
**23.** Para cada entero positivo $n$ ordenamos, de mayor a menor, todos sus divisores; el primero será el propio número y el último el 1. ¿Para cuántos valores de $n$ el segundo número de esta lista será el 91?

A) Infinitos B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**24.** ¿Cuántos divisores de 4 cifras tiene el número $102^2$?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

**25.** El cuadrado de la figura tiene lado igual a 1. ¿Cuál es el radio del círculo pequeño?



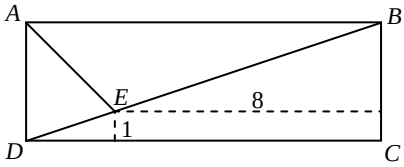
A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

**26.** En un cajón hay 2 pares de calcetines negros, 3 pares de grises y 4 de azules. Yo sé que hay 3 calcetines con agujeros pero no me acuerdo de qué color eran. Si están todos revueltos y los elijo al azar, ¿cuántos calcetines debo coger, como mínimo, para estar seguro de poder ponerme dos del mismo color y sin agujeros?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 8

**27.** En el rectángulo $ABCD$ la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ corta a la diagonal $BD$ en el punto $E$. Si las distancias de $E$ a los lados $DC$ y $BC$ son 1 y 8, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado $AB$ de dicho rectángulo?



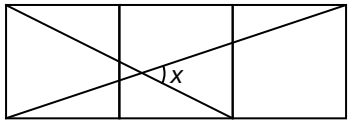

A) $8+2\sqrt{2}$ B) $11-\sqrt{2}$ C) 10

D) $3+3\sqrt{2}$ E) $11+\frac{\sqrt{2}}{2}$

**28.** ¿Cuál es la última cifra, distinta de cero, del número $2^{57}\cdot 3^4\cdot 5^{53}$?

A) 8 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

**29.** Se juntan tres cuadrados como se indica en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?




A) 30º B) 40º C) 45º

D) 50º E) 60º

**30.** Algunos números de tres cifras verifican que si le quitas la primera cifra o si le quitas la última, obtienes, en ambos casos, un cuadrado perfecto. Por ejemplo el número 816. ¿Cuál es la suma de todos los números de tres cifras con esta curiosa propiedad?

A) 2016 B) 2013 C) 1993 D) 1465 E) 1177

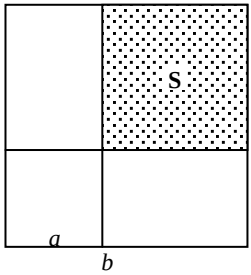
**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

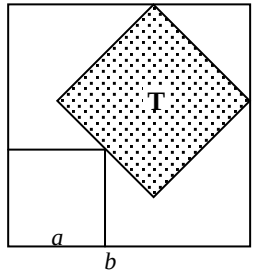
**L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE LOCAL:** segunda prueba. Jueves 19 de diciembre de 2013
Tiempo: 3h 30 min

1. En las figuras adjuntas se observan dos cuadrados iguales de lado *b*, y en su interior dos cuadrados iguales de lado *a* y dos cuadrados, S y T, uno en cada una de las figuras. Los lados del cuadrado S son paralelos a los de lados *a* y *b*, y las diagonales del cuadrado T también son paralelas a los lados de los cuadrados de lados *a* y *b*. Calcula el cociente (área de S) : (área de T)

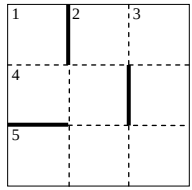



2. Seis vacas se comen toda la hierba de un prado –que crece a ritmo constante- en tres días. Tres vacas, con la misma hambre, se la comen en siete días. ¿Cuántos días tardaría una vaca en comerse toda la hierba si estuviera ella sola?

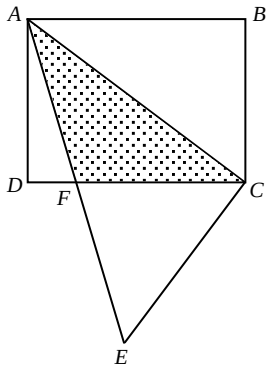
3. Considera todos los números de cinco cifras cuya suma es 43: por ejemplo, el número 79999. Si elegimos uno de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 11?
4. Cada casilla del cuadro siguiente se rellena siguiendo las siguientes reglas:

| Horizontales | Verticales |
|---|---|
| 2: suma de cifras de 2 vertical (dos cifras) | 1: producto de dos primos (dos cifras) |
| 4: número primo (dos cifras) | 2: múltiplo de 99 (tres cifras) |
| 5: 1 vertical + 2 horizontal + 3 vertical (tres cifras) | 3: cuadrado de 4 horizontal. (tres cifras) |




5. Halla todos los conjuntos de tres enteros positivos diferentes tales que cada uno de ellos divida a la suma de los otros dos.

6. La figura muestra un rectángulo *ABCD* con *AB* = 16 y *BC* = 12. Si el ángulo $A\hat{C}E$ es recto y *CE* = 15, calcula el área del triángulo *ACF*.




7. La suma de cinco enteros consecutivos es un cuadrado perfecto, y la suma de los tres centrales es un cubo perfecto. Si todos son menores que 2013, halla la raíz de su suma.

8. Determina la menor distancia posible desde el origen de coordenadas a los puntos $(x, y)$ de la curva de ecuación $(x - y)xy = 8$ situados en el primer cuadrante.

9. En un triángulo rectángulo de lados enteros, el radio de la circunferencia inscrita es 12. Calcula el mayor valor posible para la hipotenusa de dicho rectángulo.

10. En el trapecio *ABCD*, de bases *AD* y *BC*, se verifica que *DA* = *DB* = *DC*. Sea *E* el punto de corte de la mediatriz del lado *DC* con la prolongación del lado *AB*. Si $B\hat{C}E = 2 \cdot C\hat{E}D$, calcula $B\hat{C}E$.

# L OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## Prueba de selección
## Comunidad de Madrid

**Primera sesión**
**Viernes 17 de enero de 2014**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Se considera un polígono de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Demostrar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.

2. Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$

3. Se considera un cuadrado *ABCD* y su circunferencia circunscrita $\mathcal{K}$. Sea *P* un punto de $\mathcal{K}$. Demostrar que la distancia de *P* a alguno de los vértices del cuadrado debe ser un número irracional.

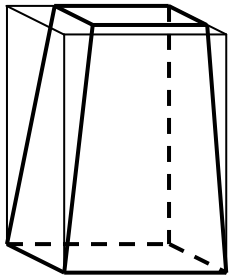
**Segunda sesión**
**Sábado 18 de enero de 2014**

Tiempo: 3 horas y media

4. Sean $a$ y $b$ números reales positivos. Demostrar que $a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

5. Encontrar las tres últimas cifras del número $7^{2014}$

6. De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud $L_1$, y altura $H$, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud $L_1$ (para la inferior) y $L_2$ (para la superior), y altura $H$. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente:
Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de $L_1/L_2$?



**XIXª OLIMPIADA de MAYO**
**Primer Nivel**
**Mayo de 2013**

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

## PROBLEMA 1

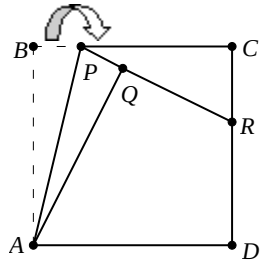
Hallar la cantidad de formas de escribir el número 2013 como suma de dos enteros mayores o iguales que cero de modo que al sumar no haya **ningún** acarreo.
ACLARACIÓN: En la suma 2008 + 5 = 2013 hay acarreo de las unidades a las decenas.

## PROBLEMA 2

Elisa suma los dígitos de su año de nacimiento y observa que el resultado coincide con los dos últimos dígitos del año en que nació su abuelo. Más aún, los dos últimos dígitos del año en que ella nació, son precisamente la edad actual de su abuelo. Hallar el año en el que nació Elisa y el año en el que nació su abuelo.

## PROBLEMA 3

Sea *ABCD* un cuadrado de papel de lado 10 y *P* un punto en el lado *BC*. Al doblar el papel a lo largo de la recta *AP*, el punto *B* determina el punto *Q*, como se ve en la figura. La recta *PQ* corta al lado *CD* en *R*. Calcular el perímetro del triángulo *PCR*.




## PROBLEMA 4

Pablo escribió 5 números en una hoja y luego escribió los números 6,7,8,8,9,9,10,10,11 y 12 en otra hoja que le dio a Sofía, indicándole que esos números son las sumas posibles de dos de los números que él tiene escondidos. Decidir si con esta información Sofía puede determinar los cinco números que escribió Pablo.

## PROBLEMA 5

En la pizarra está dibujado un cuadrado de 8×8 dividido en 64 cuadraditos de 1×1 mediante líneas paralelas a los lados. Gustavo borra algunos segmentos de longitud 1 de modo que a cada cuadradito de 1×1 le borra 0, 1 ó 2 lados.
Gustavo afirma que borró 6 segmentos de longitud 1 del borde del cuadrado de 8×8 y que la cantidad de cuadraditos de 1×1 que tienen exactamente 1 lado borrado es igual a 5.
Decidir si lo que dijo Gustavo puede ser cierto.

## XIXª OLIMPIADA de MAYO
## Segundo Nivel
## Mayo de 2013

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

### PROBLEMA 1
Sofía sumó los números de las páginas de un libro empezando por el 1 en la primera página y obtuvo 2013. Pablo vio como hizo la suma y se dio cuenta que Sofía se saltó una página. ¿Cuántas páginas tiene el libro y qué número de página se saltó?

### PROBLEMA 2
Se dispone de un regla sin números y de un trisector que marca en cualquier segmento los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. Construir el punto medio de un segmento dado utilizando exclusivamente estas dos herramientas.

### PROBLEMA 3
Se marcan varios puntos distintos en el plano, y se trazan todos los segmentos determinados por esos puntos. Una recta r no pasa por ninguno de los puntos marcados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos segmentos no están cortados por r? Dar todas las posibilidades.

### PROBLEMA 4
¿Es posible escribir 100 números impares en una fila de tal forma que la suma de cada 5 números adyacentes sea un cuadrado perfecto y que la suma de cada 9 números adyacentes también sea un cuadrado perfecto?

### PROBLEMA 5
Se tienen 600 tarjetas, 200 de ellas tienen escrito el número 5, 200 tienen escrito el número 2 y las otras 200 tienen escrito el número 1. Usando estas tarjetas se quieren formar grupos de tal forma que en cada grupo la suma de los números sea 9. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar?

# XIX OLIMPIADA DE MAYO – 2013. RESULTADOS DE ESPAÑA

**PRIMER NIVEL**

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Epelde Blanco, Alejandro | ORO |
| 2 | Rodríguez Martín, Saúl | PLATA |
| 3 | Sierra Corredera, Diego | PLATA |
| 4 | Carbonié del Burgo, Diego | BRONCE |
| 5 | García González, Hugo | BRONCE |
| 6 | Andrés Torrijos, Jorge | BRONCE |
| 7 | Ruiz de la Puente, Alejandro | BRONCE |
| 8 | Tejedor Alonso, Uttam | MENCIÓN |
| 9 | Soto Martín, Pablo | MENCIÓN |
| 10 | Sánchez González, Víctor David | MENCIÓN |

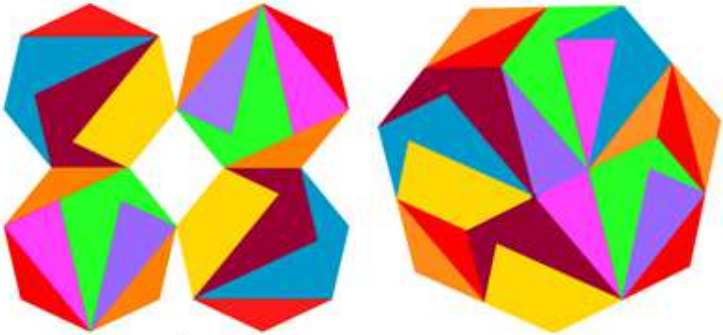
**SEGUNDO NIVEL**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Carbajo Temprano, Miguel | PLATA |
| 2 | Sánchez Ibáñez, Enrique | PLATA |
| 3 | Checas Calderón, José | PLATA |
| 4 | Crisanto García, Svetlin | BRONCE |
| 5 | García González, Berta | BRONCE |
| 6 | González Domínguez, Javier | BRONCE |
| 7 | Olalla Santamarina, Alfonso | BRONCE |
| 8 | Puignau Chacón, Daniel | MENCIÓN |
| 9 | Olmo de Casas, Pablo del | MENCIÓN |
| 10 | Verdasco Ramos, Santiago | MENCIÓN |

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
**Comunidad de Madrid**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

# XIX concurso de primavera



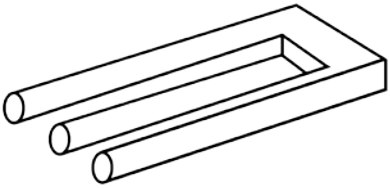
# matemáticas 2015

Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alfredo Martínez Sanz*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Hugo Fernández Hervás*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*María Gaspar Alonso-Vega,*
*María Moreno Warleta*
*María Olbés Fernández*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pilar Ruiz Cervigón*
*Víctor Manuel Sánchez González*

*Siempre nos dijeron que*
*la mejor lotería era el trabajo,*
*pero nunca pensamos*
*que tener trabajo iba a ser una lotería.*



## *Presentación*

Vivo sin vivir en mí,
y tan alta vida espero,
que muero
porque no muero.
(Sta Teresa de Jesús)

Ven muerte tan escondida,
que no te sienta venir,
pues el miedo de morir,
me está quitando la vida.
(Variante satírica de una
copla del Cancionero General
de Hernando del Castillo).

"... Su canto asciende a más profundo cuando, abierto en el aire, ya es de todos los hombres." (R. Alberti)

En poesía la contraposición de términos (oximoron) produce imágenes de gran fuerza y belleza.
"Le dieron el premio al personaje más anodino del mundo", parece una sutil greguería, pero su versión matemática, "El primer número natural que no tiene nada de especial", es una inquietante paradoja.
Las paradojas son un acicate para la Ciencia, pero antes fueron una puñalada en la espalda del que se topó con ellas.

El Comité Organizador

Correcciones portada anterior:

$$1+(1+1)+(1+1+1)+\ldots+(1+1+1+\ldots+1)=\binom{n+1}{2}$$

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots+(1+2+3+\ldots+n)=\binom{n+2}{3}$$


## AGRADECIMIENTOS

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General
de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 12 de febrero de 2014**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

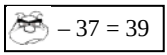
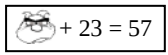
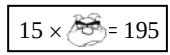
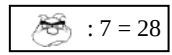
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avira neta
Libros Guijarro
Smartick

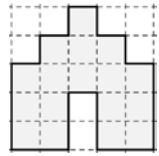
**1** Comenúmeros se ha comido algunos números de los deberes de Jaime.

¿Cuánto suman todos los números que se ha comido el muy canalla?

**A)** 127 **B)** 245 **C)** 319 **D)** 365 **E)** 3039

**2** Inés ha pintado una casita en una cuadrícula. Si el perímetro de cada cuadradito de la cuadrícula es 8 cm, ¿cuál es el perímetro de la casita?



**A)** 28 cm **B)** 32 cm **C)** 40 cm **D)** 48 cm **E)** 136 cm

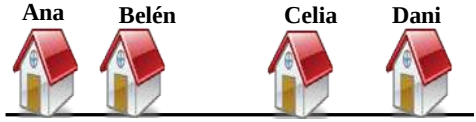
**3** Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:

- Adrián y el profesor van discutiendo.
- Javier vive muy cerca del actor.
- Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
- El tenista es más alto que Juan y que el actor.
- Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.

¿Cuál de los amigos es el actor?

**A)** Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan **E)** No se sabe con certeza

**4** Ana, Belén, Celia y Dani viven en la misma calle, como ves en el dibujo. La distancia entre la casa de Ana y de Dani es de 2,5 km, entre la de Ana y Belén es de 760 m y entre la de Celia y Dani de 975 m. ¿A qué distancia, en metros, está la casa de Ana de la de Celia?




**A)** 152,5 **B)** 173,5 **C)** 765 **D)** 1525 **E)** 1735

**5** Juan le dio a Olivia un tercio de su tableta de chocolate y después le dio a Rafa la mitad de lo que le quedaba. ¿Qué fracción de tableta le ha quedado a él?

**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{5}{6}$

**6** Don Retorcido nos quiere liar y dice:
**I.** La suma de un número par con un número impar es siempre impar.
**II.** Si multiplicas un número par por un número impar el resultado puede ser impar.
**III.** Si divides un número par entre otro número par el resultado puede ser impar.
**IV.** Si a un número impar le restas otro número impar el resultado nunca es impar.
¿Cuántas de estas afirmaciones son ciertas?

**A)** Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

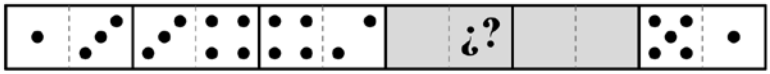
**7** Richi colecciona monedas de un céntimo y las ha colocado formando un triángulo equilátero. Por ahora la base del triángulo solo tiene cuatro monedas pero, ¿cuántos euros tendrá el día que en la base haya 20 monedas?

**A)** 0,60 **B)** 2,10 **C)** 6 **D)** 80 **E)** 200

**8** Dos lápices y tres gomas cuestan 3 €. Dos lápices y 5 gomas cuestan 3,80 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz?

**A)** 0,90 € **B)** 0,95 € **C)**1 € **D)**1,05 € **E)** 1,10 €

**9** Dominique ha colocado seis fichas de dominó de la forma usual, es decir, haciendo coincidir la puntuación de los lados que se tocan. Si la suma de todos los puntos es 42, ¿cuántos puntos hay debajo de las interrogaciones?

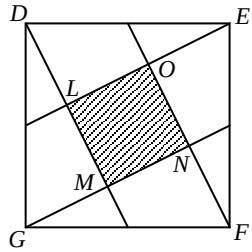



**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E) 6**

**10** La castañera de mi barrio vende dieciséis castañas a tres euros. ¿Cuántas castañas compraré con cuatro euros y medio?

**A)** 22 **B)** 22,5 **C)** 23 **D)** 23,85 **E)** 24

**11** En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en $cm^2$?

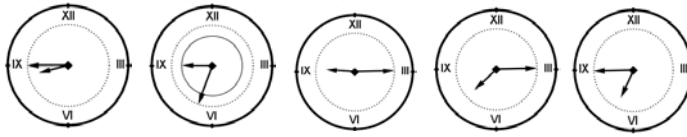



**A)** 20 **B)** 25 **C)** 35 **D)** 40

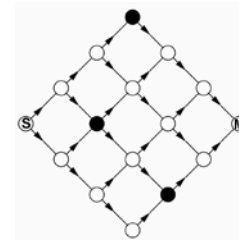
**E)** 50

**12** Mi abuelo y yo tenemos los relojes perfectamente sincronizados. Cuando mi reloj marca las 18:45, ¿cómo están las agujas en el reloj de mi abuelo?

**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**



**13** Indiana Jones debe recorrer el camino de piedras que ves. Solo puede ir por las líneas negras en el sentido que marcan las flechas. Él no lo sabe pero las piedras negras son explosivas. ¿Cuántos caminos seguros hay desde la salida (S) hasta la meta (M)?

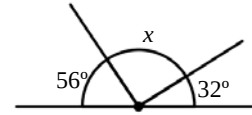



**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**14** Luca ya sabe contar de tres en tres: 1, 4, 7, 10, 13,… Cuando lleva dichos 2014 números, su abuela María consigue callarlo con unas gominolas. ¿Cuánto suman las cifras del último número que dijo Luca?

**A)** 7 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 23

**15** ¿Cuánto mide el ángulo $x$?




**A)** 92º **B)** 88º **C)** 178º **D)** 90º **E)** 272º

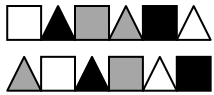
**16** Al repartir una bolsa de caramelos entre 20 niños, tocaron a 11 caramelos cada uno y sobraron 8. Si hubiéramos repartido entre 19 niños, ¿cuántos caramelos habrían sobrado?

**A)** 9 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 5 **E)** Ninguno

**17** ¡Juanito, no puedes estar todo el día delante de la Play! A partir de ahora solo podrás usarla una hora por semana. Si el lunes jugó 14 minutos y 30 segundos y el martes 8 minutos y 45 segundos, ¿cuánto tiempo le queda aún esta semana?

**A)** 35 min 15 s **B)**36 min 45 s **C)** 37 min 15 s **D**) 37 min 45 s **E)** 38 min 15 s

**18** Triangupín y Cuadripón juegan a colocar sus fichas una detrás de otra por turnos. Triangupín tiene tres triángulos, uno blanco, otro negro y el tercero gris y Cuadripón tienen tres cuadrados, uno de cada color. Aquí puedes ver dos configuraciones distintas. ¿Cuántas configuraciones distintas pueden formar?

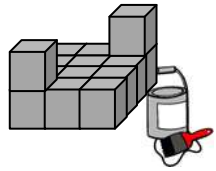


**A)** 9 **B)** 12 **C)** 36 **D)** 72 **E)** 720

**19** Don Retorcido está muy decepcionado con Esteban pues dice que no sabe operar con decimales. Hoy Esteban ha hecho las siguientes operaciones:
$1{,}25 + 4{,}75 = 6$ $2{,}04 \times 0{,}5 = 1{,}02$ $1{,}4 - 0{,}23 = 1{,}17$ $5{,}2 : 2 = 2{,}6$
¿Cuántas de ellas están mal?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**20** Anabel ha cogido 14 cubitos grises y los ha unido para formar la estructura que ves al margen. Luego ha pintado toda su estructura de rojo, por arriba, por abajo, por todos sus lados. Después de observarla un buen rato ha decidido que no le gusta y ha vuelto a separar los 14 cubitos. ¿Cuántas caras de los cubitos han quedado ahora de color gris?



**A)** 19 **B)** 30 **C)** 38 **D)** 40 **E)** 50

**21** Si subo los escalones de tres en tres doy 30 pasos. ¿Cuántos pasos dará un gigante que los sube de diez en diez?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

**22** En una bolsa hay ocho caramelos de menta, seis de fresa y el resto de limón.
Si saco un caramelo con los ojos cerrados, la probabilidad de que sea de limón es 1/2. ¿Cuántos caramelos de limón hay?

**A)** 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)**14

**23** Hoy es miércoles y ya solo faltan 100 días para mi cumple. ¿En qué día de la semana caerá mi cumpleaños este año?

**A)** Martes **B)** Miércoles **C)** Jueves D) Viernes **E)** Sábado

**24** Dieciocho perros salchichas comen lo mismo que quince pastores alemanes y cinco pastores alemanes comen tanto como nueve chihuahuas. ¿Cuántos chihuahuas comen lo mismo que ocho perros salchichas?

**A)** 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

**25** Sofía tiene 24 canicas azules, 30 verdes y 18 plateadas. Quiere meterlas en cajitas iguales y con el mismo número de canicas en cada una de ellas pero, como es muy maniática, no quiere mezclar canicas de distintos colores en la misma caja. ¿Cuántas cajas necesitará como mínimo?

**A)** 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 36

**25** Don Retorcido hizo grupos de cuatro con los estudiantes de una clase y le sobraron dos. Después hizo grupos de cinco y le sobró uno. Si en la clase hay quince chicas y hay más chicas que chicos, ¿cuántos chicos hay?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 12 de febrero de 2014**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avira neta
Libros Guijarro
Smartick

**1** Don Retorcido está muy decepcionado con Esteban pues dice que no sabe operar con decimales. Hoy Esteban ha hecho las siguientes operaciones:
$1{,}25 + 4{,}75 = 6$ $\quad 2{,}04 \times 0{,}5 = 1{,}02$ $\quad 1{,}4 - 0{,}23 = 1{,}17$ $\quad 5{,}2 : 2 = 2{,}6$
¿Cuántas de ellas están mal?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

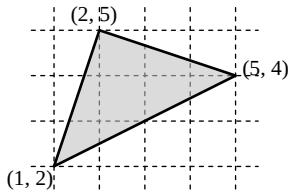
**2** ¿Qué número se ha comido Comenúmeros en esta igualdad? $2{,}014 = 2 + \frac{1}{\square} + \frac{4}{1000}$

**A)** 0 **B)** 10 000 **C)** 10 **D)** 100 **E)** 1000

**3** Si subo los escalones de tres en tres doy 30 pasos menos que si los subo de dos en dos. ¿Cuántos pasos dará un gigante que los sube de diez en diez?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

**4** Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(1, 2)$, $B(2, 5)$ y $C(5, 4)$. Su área es:

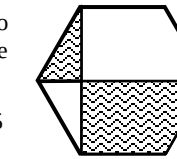



**A)** 4 **B)** 4,5 **C)** 5 **D)** 5,5 **E)** 6

**5** Don Retorcido acababa de escribir en la pizarra todos los números enteros desde el 1 hasta el 100 y de repente apareció Comenúmeros con mucha hambre. ¡Me comeré todos aquellos números que sean múltiplos de tres, menos los que tengan un siete entre sus cifras pues el siete se me indigesta! ¿Cuántos números quedaron en la pizarra después de la comilona?

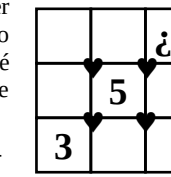
**A)** 27 **B)** 59 **C)** 67 **D)** 73 **E)** 81

**6** En mi jardín con forma de hexagono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?



**A)** 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65

**7** Este cuadrado es amoroso. ¿Amoroso? Sí fíjate, debes poner todos los números desde el 1 hasta el 9 y además, las cuatro casillas que rodean a cada corazón deben sumar 20. ¿Qué número hay que colocar a la fuerza en la casilla del vértice superior derecho?




**A)** 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 4

**8** Sandra ha dividido un cuadrado de 81 $cm^2$ de área en 81 cuadraditos iguales, y los ha recolocado formando dos rectángulos. Sabiendo que uno tiene doble área que el otro y que sus perímetros difieren en 34 cm, ¿qué longitud tiene el lado mayor del rectángulo de menor área?

**A)** 27 cm **B)** 18 cm **C)** 9 cm **D)** 6 cm **E)** 3 cm

**9** ¿Cuándo es tu cumple, Don Retorcido?, preguntó ilusionada la pequeña Lucía. Yo cumplo años justo el día central de este año, respondió nuestro amigo. ¿Qué día nació Don Retorcido?

**A)** 29 de junio **B)** 30 de junio **C)** 1 de julio **D)** 2 de julio **E)** 3 de julio

**10** Tengo un pentágono regular dibujado en una cartulina. Cojo unas tijeras y hago un único corte recto. ¿Cuál de estas figuras no puedo obtener con dicho corte?

**A)** Trapecio **B)** Triángulo isósceles **C)** Triángulo escaleno
**D)** Hexágono **E)** Triángulo rectángulo

**11** Sol y Mía se han inventado un juego: en cada partida, la que gana se lleva 5 puntos y la que pierde se anota solo 2 puntos. Si Sol ha ganado exactamente 521 partidas y Mía ha conseguido un total de 2792 puntos, ¿cuántas partidas han jugado?

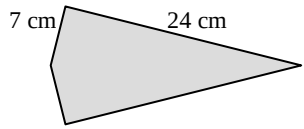
**A)** 871 **B)** 708 **C)** 875 **D)** 187 **E)** 788

**12** Olas gigantes, vientos fortísimos y una isla misteriosa: el naufragio ha sido inevitable. Los piratas del barco hacen recuento y ven que sólo tienen 27 quesos para sobrevivir. El primer día se reparten un queso para cada cuatro; el segundo día se reparten un queso para cada cinco; y observan con tristeza que ya no tienen más víveres. La tragedia les acecha… ¿Cuántos piratas son?

**A)** 135 **B)** 243 **C)** 56 **D)** 15 **E)** 60

**13** La punta de flecha de la figura tiene dos ángulos rectos. Su área, en $cm^2$, es:

**A)** 168 **B)** 164 **C)** 156 **D)** 150 **E)** 130



**14** Luca ya sabe contar de tres en tres: 1, 4, 7, 10, 13,… Cuando lleva dichos 2014 números, su abuela María consigue callarlo con unas gominolas. ¿Cuánto suman las cifras del último número que dijo Luca?

**A)** 7 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 23

**15** El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

**A)** 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

**16** He comprado tres alfombras cuyas áreas suman 20 $m^2$ y las he tirado a lo loco en mi jardín. Ha resultado que la superficie que he cubierto ha sido de 14 $m^2$ y la superficie cubierta por la superposición de sólo dos alfombras es de 2 $m^2$. ¿Qué área, en $m^2$, ha quedado cubierta por la superposición de las tres alfombras?

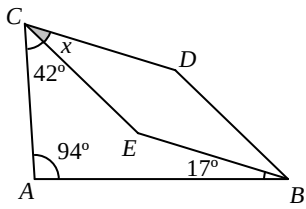
**A)** 1 **B) 2** **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**17** Dos lápices y tres gomas cuestan 3 €. Tres lápices y 4 gomas cuestan 4,30 €. Un lápiz cuesta:

**A)** 0,90 € **B)** 0,95 € **C)** 1 € **D)** 1,05 € **E)** 1,10 €

**18** El ángulo agudo *x* del rombo *BDCE* mide:

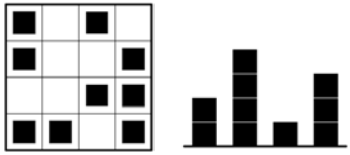
**A)** 35º **B)** 32º **C)** 30º **D)** 27º **E)** 25º




**19** Al repartir una bolsa de caramelos entre los niños de una clase, tocan a 11 caramelos cada uno y sobran unos pocos. Si un niño no quiere caramelos, los demás tocan a un caramelo más y sobran los mismos caramelos que antes. ¿Cuántos niños hay en la clase?

**A)** 24 **B)** 22 **C)** 20 **D)** 12 **E)** 11

**20** Irene hizo una ciudad con cubos de madera idénticos. En las figuras puedes ver la vista desde arriba y lo que ve su prima Ana desde uno de los lados, aunque no sabemos desde cuál. ¿Cuál es el número máximo de cubos que pudo haber usado Irene en su construcción?



**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

**21** Una cabra come al día 200 g de pienso. Heidi compró tres cabras y 20 kg de pienso para darles de comer todas las mañanas. Una noche, después de cuatro días, una cabra se escapó y nueve noches más tarde otra pobre cabra se murió. ¿Cuántos días podrá comer aún la última cabrita con el pienso que queda?

**A)** 7 **B)** 20 **C)** 52 **D)** 70 **E)** 88

**22** Inés debería dejar ya las redes sociales, ¡cada tres minutos recibe cinco Whatsapps! A este ritmo, ¿cuántos mensajitos recibirá en las próximas ocho horas?

**A)** 500 **B)** 800 **C)** 950 **D)** 2400 **E)** 48 000

**23** Santiago ha completado la siguiente tabla siguiendo siempre la misma pauta pero como es muy larga, hemos cortado algunos trozos.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … | 9 | 10 | … | ♥ | … | 29 | 30 |
| 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | | ♥ | 41 | | 69 | | 117 | 121 |

¿Cuál es la suma de los dos números que hemos sustituido por corazones?

**A)** 37 **B)** 41 **C)** 54 **D)** 78 **E)** 314

**24** Si $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ y $\frac{b}{c}=\frac{8}{5}$, ¿cuánto vale $\frac{a}{b+c}$?

**A)** $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{4}{13}$ **C)** $\frac{5}{16}$ **D)** $\frac{21}{10}$ **E)** $\frac{16}{5}$

**25** En una caja hay bolas verdes, amarillas y rojas. Si sacamos una bola con los ojos cerrados es igual de probable que sea verde o que sea amarilla y la probabilidad de que sea amarilla es el doble de que sea roja. Si en la caja hay 40 bolas en total, ¿cuántas son rojas?

**A)**5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 20

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 12 de febrero de 2014**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

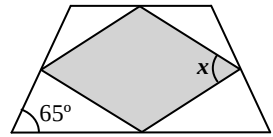
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avira neta
Libros Guijarro
Smartick

**1** En una tienda de libros de segunda mano se lee el siguiente cartel:
"Un libro 2€. Si te llevas 5 libros te regalamos uno más"
Si Alicia se llevó 16 libros, ¿cuántos euros pagó?

**A)** 8 **B)** 12 **C)** 26 **D)** 28 **E)** 32

**2** En un trapecio isósceles con tres lados iguales inscribimos el rombo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del trapecio. Si el ángulo agudo del trapecio mide 65º, ¿cuántos grados mide el ángulo agudo, *x*, del rombo?

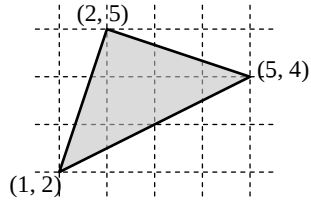



**A)** 65º **B)** 60º **C)** 55º **D)** 62º 30' **E)** 45º

**3** El cuadrado perfecto que hay entre 4 778 595 y 4 778 603 acaba en:

**A) 6** **B)** 8 **C)** 9 **D)** 1 **E)** 2

**4** Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $A(1, 2)$, $B(2, 5)$ y $C(5, 4)$. Su área es:



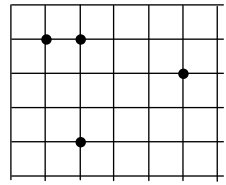

**A)** 4 **B)** 4,5 **C)** 5

**D)** 5,5 **E)** 6

**5** Si sumamos $4^{15}$ y $8^{10}$ obtenemos una potencia de 2. ¿Cuál?

**A)** $2^{30}$ **B)** $2^{31}$ **C)** $2^{40}$ **D)** $2^{50}$ **E)** $2^{60}$

**6** En la cuadrícula que observas, de lado 1, hay marcados cuatro puntos. Si consideras los triángulos cuyos vértices son tres de ellos, ¿cuál es el área del menor?



**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** 1 **D)** $\frac{3}{2}$

**E)** 2

**7** Arantxa se ha inventado la operación ♥ que funciona así: $a \heartsuit b = a^2(a-b)(b-a)$, siendo $a$ y $b$ dos números positivos distintos. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

I. $a \heartsuit b$ no puede ser positivo.

II. $1 \heartsuit 2 - 2 \heartsuit 1 = 3$

III. $(a \heartsuit b) : (b \heartsuit a) = a : b$ sean cuales sean los números $a$ y $b$.

**A)** Solo I **B)** Solo II **C)** Solo III **D)** Solo I y II **E)** Solo I y III

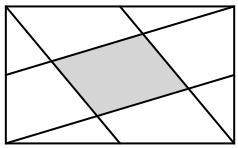
**8** Al repartir una bolsa de caramelos entre varios niños, tocaron a $m$ caramelos cada uno y sobraron $n$. Si hubiéramos repartido los caramelos entre $m+1$ niños también habrían sobrado $n$. ¿Cuántos caramelos, como mínimo, había en la bolsa?

**A)** $m^2+m+n$ **B)** $m^2-m+n$ **C)** $m \cdot n+n$ **D)** $m^2+n$ **E)** $m^2+m \cdot n+n$

**9** Si $P(x)=x^2+mx+n$ tiene las raíces $a$ y $\frac{1}{a}$, entonces $P\left(a+\frac{1}{a}\right)$ es igual a:

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**10** En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos definido un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 cm$^2$, la del romboide es:



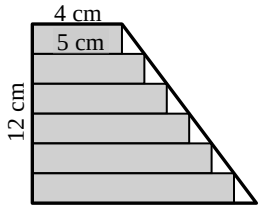
**A)** 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 10

**11** Consideramos el menor número natural que es múltiplo de 72 y que la suma de sus cifras es 72. ¿Cuántos nueves tiene?

**A)** ocho **B)** siete **C)** seis **D)** cinco **E)** cuatro

**12** El área, en cm$^2$, del trapecio circunscrito a la escalera del dibujo, con escalones de igual altura, es:

**A)** 72 **B)** 76 **C)** 80 **D)** 84 **E)** 90



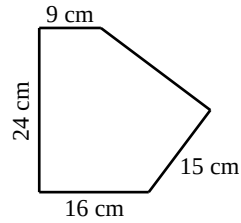
**13** Escribimos seguidos los cuadrados de los números del 1 al 100: 1 4 9 1 6 2 5 3 6 ... ¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 9

**14** Si $x, y, z$ son números positivos que verifican $x \cdot y = 1$, $x \cdot z = 2$, $y \cdot z = 8$, ¿cuál es el valor de $x + y + z$?

**A)** 3 **B)** $\frac{13}{2}$ **C)** 11 **D)** $\frac{81}{2}$ **E)** Ninguno de los anteriores

**15** El pentágono de la figura tiene tres ángulos rectos.
La medida, en cm, del quinto lado es:

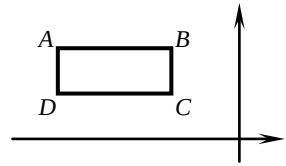



**A)** 20 **B)** 26 **C)** 28 **D)** 29
**E** 30

**16** Si cada uno de los chicos de una clase hubiera obtenido 2 puntos más en el examen, la media de toda la clase habría subido 0,5 puntos. ¿Cuál es el porcentaje de chicas en esa clase?

**A)** 25% **B)** 50 % **C)** 75% **D)** 80% **E)** Faltan datos para determinarlo.

**17** El rectángulo $ABCD$ de la figura tiene sus lados paralelos a los ejes de coordenadas y está situado en el segundo cuadrante. Para cada uno de los cuatro vértices calculamos el cociente $\frac{y}{x}$, entre su ordenada y su abscisa. ¿En cuál de los cuatro se obtiene el cociente más pequeño?

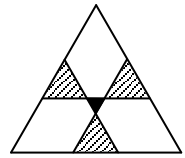



**A)** $A$ **B)** $B$ **C)** $C$ **D)** $D$ **E)** Depende de las dimensiones del rectángulo

**18** El cociente entre las longitudes de los lados de un rectángulo es $\frac{4}{5}$. Si su área es de 125 cm$^2$, ¿cuál es el perímetro de dicho rectángulo?

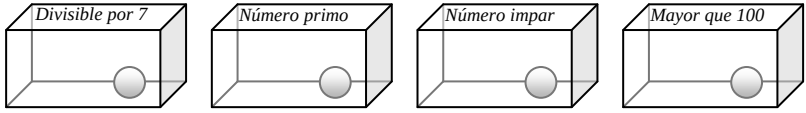
**A)** 18 cm **B)** 22,5 cm **C)** 36 cm **D)** 45 cm **E)** 54 cm

**19** El triángulo equilátero de la figura está dividido por tres rectas paralelas a sus lados en siete regiones. Tres de ellas son triángulos equiláteros de lado 5 y el triángulo central, también equilátero, tiene lado 2. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo inicial?



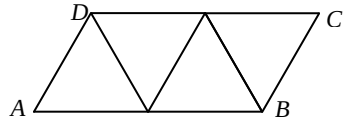
**A)** 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 22

**20** Don Retorcido tiene cuatro cajas y en cada una de sus tapas ha escrito una frase que describe una propiedad de un número. Las frases son: "Divisible por 7", "Número primo", "Número impar", "Mayor que 100". Después ha cogido cuatro bolas de billar: la número 2, la 5, la 7 y la 12 y ha metido una bola en cada caja. Si ningún número cumple la propiedad de su caja, ¿qué número tiene la bola que ha metido en la caja que dice "Mayor que 100"?




**A)** 2 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 12 **E)** Es imposible determinarlo

**21** Juntando cuatro triángulos equiláteros, de lado 1, hemos construido el paralelogramo *ABCD*. ¿Cuál es la longitud de la diagonal *AC*?




**A)** $\sqrt{5}$ **B)** $\sqrt{6}$ **C)** $\sqrt{7}$ **D)** $2\sqrt{2}$ **E)** 3

**22** Si el número real $x$ verifica $x^3 < 64 < x^2$, ¿qué afirmación de las siguientes es verdadera?

**A)** $0 < x < 64$ **B)** $-8 < x < 4$ **C)** $x > 8$ **D)** $-4 < x < 8$ **E)** $x < -8$

**23** El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

**A)** 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

**24** Si $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ y $\frac{b}{c}=\frac{8}{5}$, ¿cuánto vale $\frac{a}{b+c}$?

**A)** $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{4}{13}$ **C)** $\frac{5}{16}$ **D)** $\frac{21}{10}$ **E)** $\frac{16}{5}$

**25** ¿Cuántos enteros $n$, con $1 \le n \le 100$ verifican que $n^n$ es un cuadrado perfecto?

**A)** 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 12 de febrero de 2014**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Librería Avirameta
Libros Guijarro
Smartick

**1** En un rombo de diagonales 3 y 6 cm. ¿Cuál es el valor de la tangente del ángulo agudo?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**2** El cubo perfecto que hay entre 1 771 560 y 1 771 566 acaba en:

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**3** Un polinomio $P(x)$ de grado 2 y coeficiente principal 1 tiene las raíces $a$ y $b$. El valor numérico del polinomio para $x = a + b$ es:

**A)** $a + b$ **B)** $a^2 + b^2$ **C)** $a \cdot b$ **D)** 2 **E)** $a^2 + a \cdot b + b^2$

**4** Si la suma de los primeros veinte términos de una progresión aritmética de diferencia 5 es S, la suma de los diez términos de lugar par es:

**A)** $S - 50$ **B)** $\frac{S}{2}$ **C)** $\frac{S}{2} + 25$ **D)** $\frac{S}{2} - 25$ **E)** $\frac{S + 100}{2}$

**5** Escribimos alfabéticamente las claves de cinco letras que contengan todas las letras, a, b, c, d y e. ¿Qué posición ocupa la palabra "becad"?

**A)** 40 **B)** 45 **C)** 50 **D)** 55 **E)** 60

**6** Se conoce la fórmula $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

Entonces la suma $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$ es:

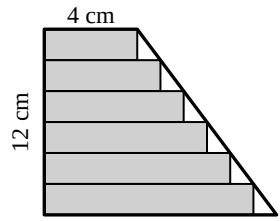
**A)** $\frac{2n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1)}{6}$ **B)** $\frac{2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{6}$ **C)** $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{2}$

**D)** $\frac{n \cdot (2n+1) \cdot (3n+1)}{6}$ **E)** $\frac{n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1)}{12}$

**7** Escribimos seguidos los cuadrados de los números del 1 al 100: 149162536... ¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 4

**D)** 6 **E)** **9**



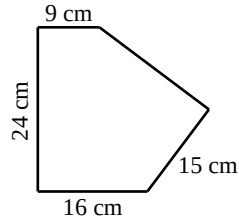
**8** El lado oblicuo del trapecio circunscrito a esta escalera, de escalones de igual altura, tiene pendiente $-2$. El área de la escalera es:

**A)** 72 **B)** 76 **C)** **78** **D)** 84 **E)** 90

**9** El pentágono de la figura tiene tres ángulos rectos. Su área, en $cm^2$, es:

**A)** 400 **B)** 500 **C)** 450

**D)** 375 **E)** 425




**10** ¿Cuántos puntos $(x, y)$ con coordenadas enteras tiene la curva $y = \dfrac{4x+8}{x-4}$?

**A)** ninguno **B)** dos **C)** cuatro **D)** ocho **E)** dieciséis

**11** Si el número real $x$ verifica $2 < x < 3$, ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

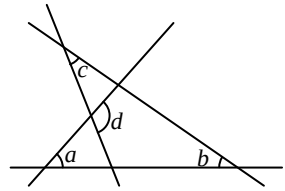
$4 < x^2 < 9$, $\quad 0 < x - 2 < 1$, $\quad 6 < 3x < 9$, $\quad 0 < x^2 - 2x < 3$

**A**) 0 **B**) 1 **C**) 2 **D**) 3 **E**) 4

**12** La medida de los ángulos marcados en la figura son: $a = 55^\circ$, $b = 40^\circ$ y $c = 35^\circ$. ¿Cuál es la medida del ángulo $d$?

**A)** 100º **B)** 105º **C)** 120º

**D)** 125º **E)** 130º



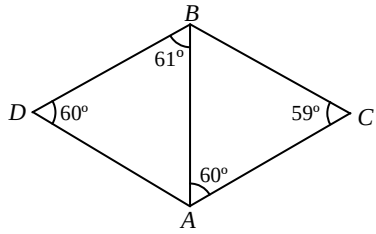

**13** En una lista de enteros consecutivos, ¿cuál de los siguientes no puede ser el porcentaje de impares?

**A)** 40% **B)** 45% **C)** 48% **D)** 50% **E)** 60%

**14** Al intentar dibujar dos triángulos equiláteros para formar un rombo, Don Retorcido ha cometido unos pequeños errores y le ha resultado la siguiente figura. ¿Cuál de los cinco segmentos es el más largo?

**A)** *AD* **B)** *AC* **C)** *AB*

**D)** *BC* **E)** *BD*



**15** La sucesión $\{a_n\}$ cumple que $a_1 = 1$ y $a_{m+n} = a_m + a_n + m \cdot n$ para cualquier par de números enteros positivos $m$ y $n$. ¿Cuál es el valor del término $a_{100}$?

**A)** 1000 **B)** 2014 **C)** 4950 **D)** 5050 **E)** No puede determinarse

**16** La suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, de los $n$ primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

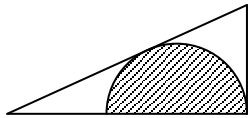
**A)** 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

**17** Un club de montaña organiza en cuatro sábados consecutivos cuatro excursiones teniendo todas la misma tasa de participación, el 80% de los miembros del club. ¿Cuál es el menor porcentaje posible de socios que participaron en todas las excursiones?

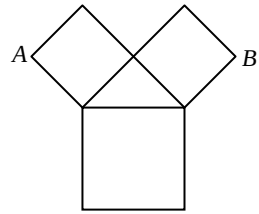
**A)** 80% **B)** 60% **C)** 40% **D)** 20% **E)** 16%

**18** Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?

**A)** $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$



**19** Sobre los lados de un triángulo rectángulo e isósceles se construyen tres cuadrados, como muestra la figura. Si la distancia entre los vértices $A$ y $B$ es de 16 cm, ¿cuál es el área ocupada por los cuatro polígonos?

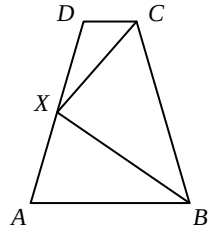



**A)** 114 cm$^2$ **B)** 130 cm$^2$ **C)** 144 cm$^2$ **D)** 160 cm$^2$ **E)** 186 cm$^2$

**20** En un cuadrado $ABCD$, $E$ y $F$ son los puntos medios de los lados $AB$ y $AD$, respectivamente. Se toma un punto $G$ de $CF$ de tal modo que $3CG = 2GF$. Si el lado del cuadrado es 2, ¿cuál es el área del triángulo $BEG$?

**A)** $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{6}{5}$

**21** *ABCD* es un trapecio isósceles y *X* es el punto medio del lado *AD*. Si *AX* = 1 y el triángulo *XBC* es rectángulo en *X*, ¿cuál es el perímetro del trapecio?




**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8

**E**) Es imposible determinarlo

**22** Al sumar los enteros desde el 1 hasta *n*, ha habido uno que, por error, hemos sumado dos veces. Si la suma obtenida ha sido 857, ¿cuál es el número que hemos repetido?

**A)** 4 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 37 **E)** 42

**23** La suma de dos enteros, no necesariamente distintos, es 26. Si añadimos otros dos enteros más, la suma es 41, y finalmente, si añadimos otros dos enteros a los cuatro que teníamos, la suma es 57. ¿Cuál es el mínimo número de enteros pares que hay entre estos seis enteros?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**24** ¿Cuál es el área del polígono cuyos vértices son los puntos de intersección de las curvas, $x^2 + y^2 = 25$ y $(x-4)^2 + 9y^2 = 81$?

**A)** 24 **B)** 27 **C)** 36 **D)** 37,5 **E)** 42

**25** ¿Cuántas listas de ceros y unos, de longitud 20, tienen todos los ceros consecutivos o todos los unos consecutivos o ambas cosas a la vez?

**A)** 190 **B)** 192 **C)** 211 **D)** 380 **E)** 382

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 5 de abril de 2014**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

**1** Cuando Sofía acababa de terminar esta larga resta, ¡zas!, apareció Comenúmeros y se comió cinco cifras. ¿Cuánto suman las cifras que se ha zampado?

$$\begin{array}{r} 4\,\square\,0\,\square\,7\,\square \\ -\;2\;1\;\square\;6\;\square\;9 \\ \hline 2\;3\;7\;5\;3\;3 \end{array}$$

**A)** 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

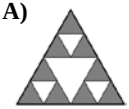
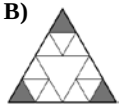
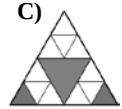
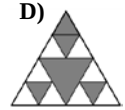
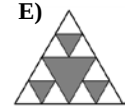
**2** Don Retorcido ha multiplicado todos los números impares desde el 1 hasta el 999. ¿En qué cifra acaba su gigantesca multiplicación?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**3** Lucía lleva dos horas leyendo un libro que tiene 98 páginas. Está enganchada y no puede parar de leer. Si ya se ha leído 84 páginas, ¿en cuántos minutos leerá lo que le queda?

**A)** 10 **B)** 20 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 50

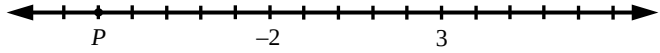
**4** ¿Cuál de las zonas sombreadas representa $\frac{3}{8}$ del triángulo?

**A)**  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

**5** Hannah Montana y yo cumplimos los años el 23 de noviembre. ¿Cómo dices que dijiste? Sí, pero no nacimos el mismo año. El día que yo nací ella cumplía 10 años. Si Hannah Montana nació en 1992, ¿sabes cuántos años tengo yo hoy sábado 5 de abril de 2014?

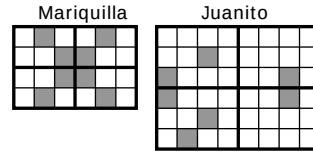
**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

**6** Fíjate en la recta numérica. ¿Qué número está 18 unidades a la derecha de $P$?




**A)** –25 **B)** 7 **C)** 11 **D)** 23 **E)** No se puede saber

**7** Mariquilla ha juntado cuatro rectángulos y los ha coloreado para que fueran simétricos con respecto a los lados comunes y le ha quedado esto. Juanito quería hacer lo mismo pero ha empezado a colorear a lo loco y se ha liado. ¿Cuántos cuadraditos más debe colorear como mínimo para conseguirlo?




**A)** 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 14 **E)** 21

**8** Ayer fue el día de las mascotas en mi colegio. De los 450 alumnos, 241 llevamos una mascota, 87 llevaron dos mascotas, algunos llevaron tres y el resto no llevó ninguna. Si en total había 553 mascotas, ¿cuántos chicos no llevaron ninguna?

**A)** 39 **B)** 11 **C)** 55 **D)** 76 **E)** 117

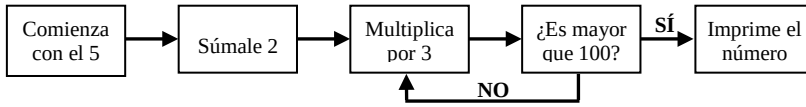
**9** En un triángulo un ángulo mide diez grados más que otro y el tercero es la media de los otros dos. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

**A)** 90º **B)** 85º **C)** 70º **D)** 65º **E)** 60º

**10** ¡Abuelo, abuelo, adivina qué número estoy pensando! Te daré varias pistas: es un número impar de tres cifras, es múltiplo de 57, todas sus cifras son distintas y ninguna de ellas es un 7. El abuelo piensa un rato y dice: Tendrás que darme alguna pista más pues hay dos números que cumplen todo eso. ¿Cuál es la suma de los dos números que ha encontrado el abuelo?

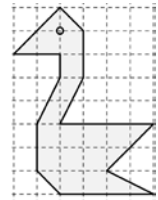
**A)** 1254 **B)** 1140 **C)** 1026 **D)** 912 **E)** 798

**11** Si sigues las instrucciones, ¿qué número se imprimirá?




**A)** 105 **B)** 168 **C)** 189 **D)** 210 **E)** 300

**12** Ana ha pintado al pato Gauss en una cuadrícula. Si el lado de los cuadraditos de la cuadrícula mide 1 cm, ¿cuál es el área, en $cm^2$, que ocupa el patito?



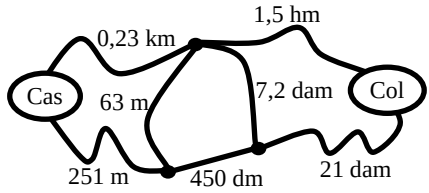
**A)** 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 21

**E)** 24

**13** En mi hucha tengo 2,50 euros en monedas de 5 céntimos; 7,60 euros en monedas de 20 céntimos y 15 euros en monedas de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas tengo?

**A)** 19 **B)** 64 **C)** 73 **D)** 118 **E)** 1108

**14** A Don Retorcido no le gusta ir siempre por el mismo camino así que va variando el recorrido de casa al colegio. Eso sí, en un mismo recorrido nunca pasa dos veces por el mismo sendero. Aquí tienes un dibujo esquemático de los distintos senderos y sus longitudes. ¿Cuál es la diferencia, en metros, entre el recorrido más largo y el más corto posible?




**A)** 180 **B)** 216 **C)** 321 **D)** 473 **E)** 641

**15** Tengo tres caramelos de fresa, dos de menta y uno de limón. ¿De cuántas maneras diferentes puedo rellenar una bolsita con tres caramelos?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

**16** Irene ha multiplicado un número por 12 y ha obtenido un número de dos cifras que ha escrito en una tarjeta pero Comenúmeros se ha comido una de las cifras del resultado. ¿Cuál de todas estas puede ser la tarjeta de Irene?

**A)**

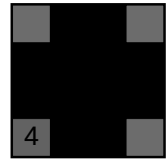
**B)**

**C)**

**D)**

**E)**


**17** El *Tofu* es una versión de *Sudoku* en un cuadrado de 4×4 en el que cada número del 1 al 4 debe aparece una sola vez en cada fila, una sola vez en cada columna y una sola vez en cada uno de los cuatro cuadrados de 2×2. Si completas este *Tofu*, ¿cuánto suman los números de las cuatro esquinas?




**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

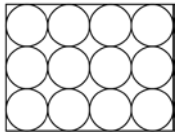
**18** Luz, Sol y Mar fueron a una pizzería y cada una se pidió una pizza que no pudieron terminar. Luz se dejó $\frac{1}{4}$, Sol se dejó $\frac{2}{5}$ y Mar se dejó $\frac{3}{10}$. ¿Qué afirmación es cierta?

**A)** Mar fue la que más comió **B)** Mar comió más que Sol

**C)** Luz comió menos que Mar **D)** Luz y Mar comieron lo mismo

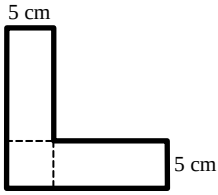
**E)** Sol comió menos de la mitad

**19** Julián ha dibujado un rectángulo de 8 cm de largo y 6 cm de ancho y dentro ha trazado doce circunferencias iguales que se ajustan perfectamente al rectángulo como ves en el dibujo. Richi quiere hacer lo mismo pero su rectángulo mide 18 cm de largo y 12 cm de ancho. ¿Cuál es el menor número de circunferencias con el que puede conseguirlo?



**A)** 6 **B)** 12 **C)** 22 **D)** 24 **E)** 36

**20** Superponiendo dos tiras rectangulares iguales de 5 cm de ancho hemos formado una **L**. Si el área de la **L** es 145 $cm^2$, ¿cuál es su perímetro?




**A)** 72 cm **B)** 48 cm **C)** 60 cm **D)** 88cm

**E)** 68 cm

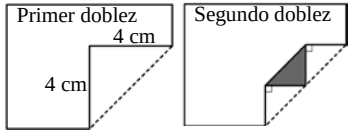
**21** Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213...
¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

**22** Olivia ha viajado de Lima a Madrid en un avión con escalas. Salió ayer de Lima a las cuatro de la tarde (hora de Lima) y ha llegado hoy a Madrid a las dos de la tarde (hora de Madrid). Si en Lima hay seis horas menos que en Madrid, ¿cuánto duró el viaje?

**A)** 28 horas **B)** 23 horas **C)** 18 horas **D)** 16 horas **E)** 9 horas

**23** Doblamos la esquina de una hoja de papel rectangular y después la volvemos a doblar como ves en la figura. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, de la zona sombreada?




**A)** 2 **B)** 2,5 **C)** 3

**D)** 3,5 **E)** 4

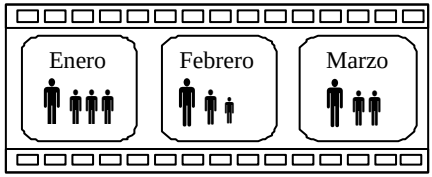
**24** En la primera parte de un partido entre el Matem FC y el Deportivo Áticas el resultado ha sido: Matem 1 - Áticas 0. En el segundo tiempo se metieron en total tres goles. ¿Cuál de estos no puede ser el resultado final del partido?

**A)** El partido acabó en empate **B)** Matem ganó por dos goles

**C)** Áticas ganó por dos goles **D)** Matem ganó por un gol

**E)** Matem ganó por cuatro goles

**25** El siguiente pictograma muestra el número de espectadores que acudió al cine en los últimos meses en Madrid. Si un hombrecillo grande vale cinco veces más que uno mediano, uno pequeño vale la mitad que uno mediano y en total en estos tres meses han acudido dos millones ciento cincuenta mil espectadores, ¿cuántas personas representa un hombrecillo mediano?




**A)** Cien mil **B)** Doscientas mil **C)** Cincuenta mil **D)** Medio millón **E)** Mil

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 5 de abril de 2014**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

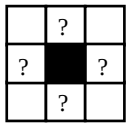
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

**1** Adivina mi número. Es mayor que 600 y menor que 800. Múltiplo de siete y de nueve. Y es impar. ¿Ya lo sabes? Pues dime cuánto suman sus cifras.

**A)** 16 **B)** 13 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 18

**2** He colocado al tuntún los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 formando un cuadrado. Si los tres números que hay en cada lado suman respectivamente 11, 12, 14 y 21, ¿cuál es la suma de los números que no están en las esquinas?




**A)** 20 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 22 **E)** 13

**3** Tengo cuatro caramelos de fresa, tres de menta y dos de limón. ¿De cuántas maneras diferentes puedo rellenar una bolsita con cuatro caramelos?

**A)** 11 **B)** 9 **C)** 24 **D)** 12 **E)** 18

**4** Comenúmeros lo ha vuelto a hacer, se ha zampado unos cuantos números y ahora os toca a vosotros averiguar cuáles han sido. Don Retorcido estaba inventando un problema para el concurso y había conseguido unas igualdades entre productos de enteros positivos, llegó Comenúmeros y ñam ñam, el problema quedó así:

$$18\times\square = 75\times\square = 24\times\square = 30\times\square$$

Si los números que faltan son los más pequeños posibles, ¿cuánto suman los números que se zampó Comenúmeros?

**A)** 150 **B)** 153 **C)** 160 **D)** 259 **E)** 200

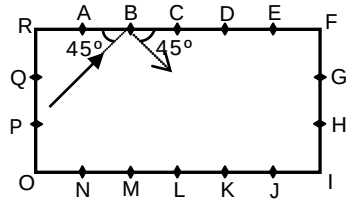
**5** Don Retorcido también fue niño y a veces se equivocaba. ¡Quién lo diría! Una vez le mandaron transmitir un mensaje secreto con las letras V y F. Se puso muy nervioso: la primera vez se equivocó en cuatro letras, la segunda en tres, la tercera en dos, la cuarta en una y por fin a la quinta envió el mensaje correctamente. Aquí te presentamos los cinco intentos del pobre Retorcidito pero no en el orden en el que él los transmitió. ¿Cuál es el mensaje correcto?

**A)** FFFFV **B)** FVVFF **C)** VFFVF **D)** FFVFF **E)** VFFVV

**6** Una botella de litro y medio de leche está llena y vaciamos parte de su contenido en un vaso hasta que ambos, botella y vaso, queden rellenos hasta los tres cuartos de su capacidad. ¿Qué capacidad tiene el vaso?

**A)** 1125 cl **B)** 60 cl **C)** 75 cl **D)** Un litro **E)** Medio litro

**7** En esta mesa de billar he golpeado la bola hacia el punto B y en todas las bandas, la bola entra con un ángulo de 45º y sale rebotada, como ya sabéis, con un ángulo también de 45º. Si el primer rebote lo hace en el punto B, ¿en qué punto se producirá el décimo rebote si todos los segmentitos son de igual longitud?




**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

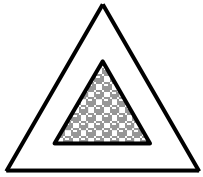
**8** Casi un trabalenguas. Álvaro y su primo se encuentran. Oye primo, ¿cuántos números primos hay de dos dígitos que tengan ambos dígitos también primos? ¡Pero qué pregunta es esa, primo!

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**9** Merche tiene un 40% más de pentágonos que María. ¿Qué fracción de sus pentágonos debe regalar Merche a María para que las dos tengan el mismo número de pentágonos?

**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{10}$ **E)** $\frac{1}{5}$

**10** En el dibujo se ven dos triángulos equiláteros, uno de 6 cm de lado y el otro de 3. ¿Qué fracción del triángulo grande ocupa el triángulo pequeño?

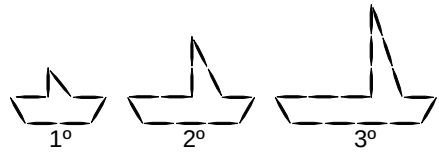


**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{5}{6}$

**11** La suma de las longitudes de tres lados de un rectángulo es 55 cm y cada lado mide un número entero de centímetros. Si un lado mide 8 cm más que el otro, su perímetro mide…

**A)** 63 cm **B)** 71cm **C)** 68 cm **D)** 59 cm **E)** 70 cm

**12** Mirad qué barcos tan bonitos, cada vez más y más grandes, diseña Nemo con palillos. Ayer estaba muy emocionado y decidió construir el barquito número 133, así que bajó a la tienda y se compró una caja de 500 palillos. ¿Tendrá suficientes? ¿Cuál de estas situaciones es la correcta?

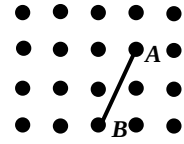



**A)** Le faltan 32 palillos **B)** Le sobran 6 palillos **C)** Tiene los palillos justos
**D)** Le faltan 6 palillos **E)** Le faltan 36 palillos

**13** Don Retorcido y Comenúmeros viven en la ciudad de Revoltijo. Su plano está formado por siete calles, todas ellas rectas, de las que solo dos son paralelas. En cada intersección se juntan únicamente dos calles y las han aprovechado para erigir los monumentos de la ciudad, dedicados a números, ecuaciones y cosas por el estilo. ¿Cuántos monumentos matemáticos hay en Revoltijo? (Todas las calles son lo suficientemente largas para cruzarse con las que pueda)

**A)** 21 **B)** 20 **C)** 42 **D)** 10 **E)** 12

**14** Hemos marcado el segmento *AB* en la rejilla. ¿De cuántas maneras puedes elegir el punto *C* en dicha rejilla para que el triángulo que se forma, *ABC*, sea isósceles?




**A)** 5 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6
**E)** 8

**15** Para obtener 10 al sumar cuatro números enteros positivos diferentes solo se puede hacer con este cuarteto: 1 + 2 + 3 + 4. ¿De cuántas maneras se puede obtener la suma 15 con cuatro sumandos enteros positivos diferentes?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**16** Dos amigos buscan setas con esmero a lo largo de una senda. Joaquín empieza en un extremo y camina cuatro pasos hacia delante y uno hacia atrás; Juan Jesús comienza en el otro extremo y anda tres pasos hacia delante y dos hacia atrás. Si el camino mide 166 metros y los amigos dan todos los pasos de un metro de longitud y al mismo ritmo, ¿a cuántos metros del punto de partida de Joaquín se encontrarán?

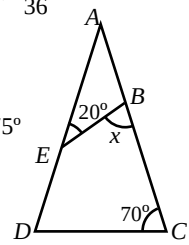
**A)** 100 **B)** 120 **C)** 83 **D)** 126 **E)** 123

**17** Alfredo va a tirar un dado y Luis otro. Víctor dice:
- El producto de los resultados que obtengan será un número de dos cifras.
¿Cuál es la probabilidad de que Víctor acierte?

**A)** $\frac{11}{36}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{11}{21}$ **E)** $\frac{19}{36}$

**18** En el triángulo que ves, $AB = DE$ y $AE = BC$. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?

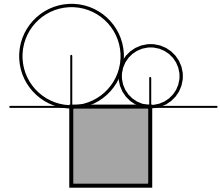
**A)** 65º **B)** 60º **C)** 90º **D)** 70º **E)** 75º




**19** Una hormiga sube hasta la cima de un poste a una velocidad de 3 decímetros por minuto y, sin descansar, baja a 5 decímetros por minuto. Si tarda 40 minutos en total, ¿qué altura, en metros, tiene el poste?

**A)** 9 **B)** 7,5 **C)** 20,5 **D)** 6 **E)** 15

**20** En el dibujo se ven dos circunferencias tangentes entre sí descansando sobre un cuadrado. Si los radios de las circunferencias son 10 cm y 7 cm, ¿cuál es el área, en $cm^2$, del cuadrado?

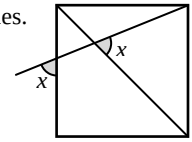


**A)** 100 **B)** 149 **C)** 280 **D)** 289
**E)** 297

**21** Comenúmeros va a merendarse cinco números diferentes $a$, $b$, $c$, $d$ y $e$, todos ellos mayores que 1 y menores que 20: $a$ es un número primo de dos cifras y además la suma de sus cifras también es un número primo, $b$ es múltiplo de 5, $c$ es un número impar que no es primo, $d$ es el cuadrado de un número primo, $e$ es primo e igual a la media de $a$ y $b$.
Comenúmeros va a empezar su merendola por el número menor. ¿Cuál es?

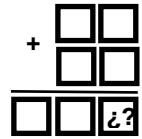
**A)** $a$ **B)** $b$ **C)** $c$ **D)** $d$ **E)** $e$

**22** En el cuadrado de la figura los dos ángulos marcados son iguales. ¿Cuánto mide cada uno de ellos?




**A)** 60º **B)** 65º **C)** 67,5º **D)** 70º
**E)** 72º

**23** Utilizando las siete cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, formamos la suma que se muestra al margen. ¿Cuál es la cifra que ocupa el lugar de las unidades del resultado?

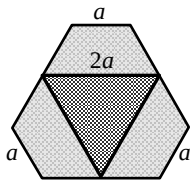



**A)** 2 **B)** 0 **C)** 3 **D)** 6 **E)** 5

**24** Laura tenía un anillo de 30 gramos que estaba compuesto por un 70% de oro y el resto de plata y ha decidido fundirlo. ¿Cuántos gramos de oro deberá añadir a esa mezcla para conseguir un nuevo anillo con un 80% de oro?

**A)** 24 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 34,29 **E)** 15

**25** A los lados de un triángulo equilátero de lado $2a$ adosamos (hacia fuera) tres trapecios isósceles con los otros tres lados de medida $a$.




Si el área del triángulo es 24 $cm^2$, el área del hexágono, en $cm^2$, es:

**A)** 52 **B)** 60 **C)** 64 **D)** 68 **E)** 78

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 5 de abril de 2014**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

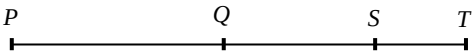
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

**1** La media de los elementos de un cierto conjunto A es 4. La media de los números de otro conjunto B, con el doble de elementos que A, es 10. ¿Cuál es la media de todos los números de ambos conjuntos?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**2** Los puntos *P*, *Q*, *S* y *T* están situados como muestra la figura. Las medidas de los segmentos *PQ*, *QS* y *ST* son, respectivamente, $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{3}{2}$.




Si *X* es el punto medio del segmento *QS* e *Y* es el punto medio del segmento *PT*, la longitud del segmento *XY* es:

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** 1 **C)** 2 **D)** $\frac{5}{2}$ **E)** $\frac{13}{4}$

**3** ¿Cuántas cifras tiene el número $16^8 \cdot 5^{25}$?

**A)** 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 28

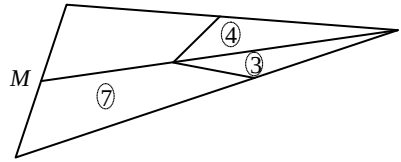
**4** A don Retorcido le ha dado por calcular potencias altísimas y para fastidiaros no os dice el exponente. Luego las suma y para fastidiaros aún más, solo escribe la última cifra de estas sumas. Así ha calculado cinco sumas, $2^a + 2^b$, $2^c + 3^d$, $2^e + 5^f$, $5^g + 5^h$, $9^i + 9^j$ y solo nos muestra la cifra de las unidades de los resultados, que son: 0, 2, 5, 6 y 7 ¿Cuál pertenece a la de la suma $2^a + 2^b$?

**A)** 2 **B)** 0 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 6

**5** ¿Cuántas parejas de números de dos cifras verifican que su producto es un número de tres cifras todas iguales?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**6** En la figura que observas, *M* es el punto medio de un lado de un triángulo que está dividido en cuatro partes. El área de tres de ellas viene indicada en la figura. ¿Cuál es el área de la otra parte?




**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7

**D)** 8 **E)** Faltan datos para determinarla

**7** El número $33^{33}$ lo podemos escribir como la suma de 33 impares consecutivos. ¿Cuál es el mayor de todos ellos?

**A)** $33^{32}+32$ **B)** $33^{31}+32$ **C)** $33^{33}-32$ **D)** $33^{31}+30$ **E)** $33^{32}$

**8** ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

**A)** $2^{500}$ **B)** $3^{400}$ **C)** $4^{300}$ **D)** $5^{200}$ **E)** $6^{100}$

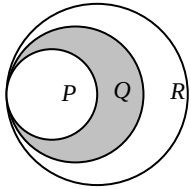
**9** Dos peregrinos del Camino de Santiago caminan por un terreno llano a 4 km/h cada uno. Al iniciar una prolongada subida el primero le saca 12 km de ventaja al otro. Si ambos caminan a 3 km/h en la subida, ¿qué distancia separará a los peregrinos cuando ambos estén subiendo?

**A)** 16 km **B)** 12 km **C)** 10 km **D)** 9 km **E)** 8 km

**10** Cinco estudiantes se pesan por parejas resultando que los pesos obtenidos en las diez parejas posibles son: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 y 121 kilogramos. ¿Cuánto pesa el de mayor peso?

**A)** 58 **B)** 59 **C)** 60 **D)** 61 **E)** 62

**11** El radio del círculo $P$ es dos tercios del radio del círculo $Q$ y este es tres cuartos del radio del círculo $R$. ¿Qué fracción del área del círculo $R$ está sombreada?

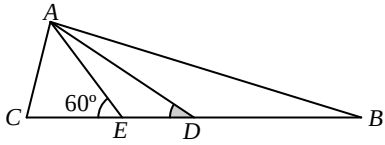



**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{3}{16}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{5}{16}$

**12** Si $(1+3+5+\ldots+p)+(1+3+5+\ldots+q)=(1+3+5+\ldots+25)$, $p+q$ es igual a:

**A)** 30 **B)** 32 **C)** 34 **D)** 36 **E)** 38

**13** En el triángulo $ABC$ de la figura (que no está a escala), $D$ es el punto medio de $BC$, $AD = CD$ y $AE$ es la bisectriz del ángulo de vértice $A$ del triángulo. Si el ángulo $C\hat{E}A$ es de 60º, ¿cuánto mide el ángulo $C\hat{D}A$?




**A)** 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º **D)** 45º **E)** 50º

**14** Las longitudes de dos lados de un cuadrilátero son 1 y 4 cm. Si una de sus diagonales, de longitud 2 cm, divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles, ¿cuál es, en cm, el perímetro del cuadrilátero?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** $6\sqrt{2}$

**15** Tiramos dos veces un dado cuyas caras están numeradas con $-3, -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{13}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

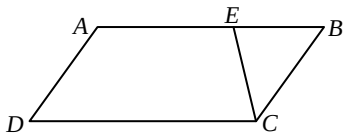
**16** ¿Cuántos números de cuatro cifras de la forma $\boxed{6}\boxed{\ }\boxed{4}\boxed{\ }$ son divisibles por 36?

**A)** Ninguno **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**17** Al añadir un nuevo número $x$ al conjunto $\{8, 10, 24, 28, 23, 9\}$ resulta que la media y la mediana del nuevo conjunto es precisamente $x$. ¿Cuál es la suma de las cifras de $x$?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

**18** En el paralelogramo $ABCD$ de la figura, el cociente entre $AE$ y $EB$ es $\frac{3}{2}$. ¿Cuál es el cociente entre el área del trapecio $AECD$ y el área del paralelogramo?

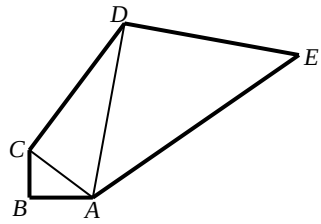



**A)** $\frac{3}{4}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{5}{6}$ **D)** $\frac{6}{7}$ **E)** $\frac{7}{8}$

**19** Si $a$, $b$ y $c$ son enteros positivos tales que $abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104$, entonces $a^2 + b^2 + c^2$ es igual a:

**A)** 49 **B)** 51 **C)** 54 **D)** 56 **E)** 60

**20** El pentágono $ABCDE$ está descompuesto en tres triángulos rectángulos como se muestra en la figura. Si $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 12$ cm y el perímetro del pentágono es 188 cm, ¿cuál es, en $cm^2$, su área?

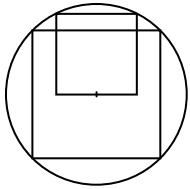



**A)** 580 **B)** 582 **C)** 584 **D)** 586 **E)** 588

**21** Los 630 estudiantes de ESO de un centro se colocan en filas para hacerse una foto de manera que cada fila tiene tres estudiantes más que la fila anterior. De los siguientes números, ¿cuál no puede ser el número de filas?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**22** En el interior de una circunferencia se dibujan dos cuadrados: el inscrito y otro con dos vértices en la circunferencia y uno de sus lados pasando por el centro, como muestra la figura. ¿Cuál es el cociente entre las áreas del cuadrado grande y del pequeño?



**A)** 3 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **D)** 2

**E)** $\frac{3}{\sqrt{6}}$

**23** En el conjunto de los 26 primeros enteros positivos borramos dos de ellos, de manera que su producto es igual a la suma de los 24 restantes. ¿Cuál es el menor múltiplo común de los dos números que hemos borrado?

**A)** 60 **B)** 42 **C)** 105 **D)** 80 **E)** 120

**24** En una sucesión el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y a partir del tercero cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

**A)** $-1007$ **B)** $-1005$ **C)** $-670$ **D)** 0 **E)** 1008

**25** Nadal y Ferrer juegan un partido al mejor de cinco sets, es decir, el vencedor es el ganador de tres sets. Si la probabilidad de que Nadal gane cualquier set es dos tercios, ¿cuál es la probabilidad de que gane el partido?

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{190}{243}$ **C)** $\frac{8}{9}$ **D)** $\frac{19}{27}$ **E)** $\frac{64}{81}$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 5 de abril de 2014**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick
Libros Guijarro

**1** ¿Cuál es el cuarto término de la progresión geométrica $\sqrt{7},\ \sqrt[3]{7},\ \sqrt[6]{7},\ldots$ ?

**A)** $\sqrt[9]{7}$ **B)** $\sqrt[12]{7}$ **C)** $\sqrt[5]{7}$ **D)** $\sqrt[10]{7}$ **E)** 1

**2** Las longitudes de los lados de un triángulo, expresadas en cm, son los enteros 13, $x$, $y$. Si el producto $x \cdot y$ es 105, ¿cuál es, en cm, el perímetro del triángulo?

**A)** 119 **B)** 69 **C)** 51 **D)** 39 **E)** 35

**3** De los siguientes números, ¿cuál puede ser el número de aristas de un prisma?

**A)** 6 **B)** 2010 **C)** 2012 **D)** 2014 **E)** 2015

**4** La gráfica formada por los puntos $(x, y)$ tales que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ es:

**A)** El conjunto vacío **B)** Un punto **C)** Un par de rectas

**D)** Una circunferencia **E)** Todo el plano

**5** La solución de la ecuación $25^{-2} = \dfrac{5^{\frac{48}{x}}}{5^{\frac{26}{x}} \cdot 25^{\frac{17}{x}}}$ es:

**A)** $x = 2$ **B)** $x = 3$ **C)** $x = 5$ **D)** $x = 6$ **E)** $x = 9$

**6** ¿Qué número de los siguientes es un cuadrado perfecto?

**A)** 98!·99! **B)** 98!·100! **C)** 99!·100! **D)** 99!·101! **E)** 100!·101!

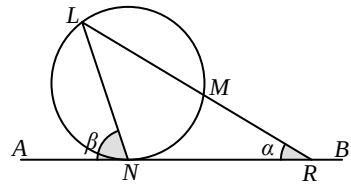
**7** ¿Cuántos números de dos cifras, $\overline{ab}$, verifican que $3 \cdot \overline{ab} < \overline{ba}$ ?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 22

**8** Los enteros positivos $a$, $b$ y $c$ verifican: $a \cdot b \cdot c = 240$, $a \cdot c + b = 46$, $a + b \cdot c = 64$. ¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

**A)** 19 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 36

**9** La circunferencia de la figura es tangente a la recta $AB$ en el punto $N$. Las cuerdas $LN$ y $LM$ tienen la misma longitud. La prolongación de la cuerda $LM$ corta a $AB$ en el punto $R$. ¿Cuál de las siguientes expresiones verifican los ángulos $\alpha$ y $\beta$ de la figura?

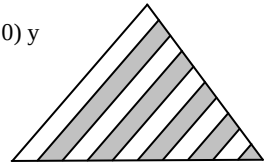



**A)** $180^\circ + \alpha = 3\beta$ **B)** $\alpha + 2\beta = 180^\circ$

**C)** $\alpha + \beta = 180^\circ$ **D)** $2\alpha + \beta = 180^\circ$ **E)** $\alpha = \beta$

**10** El triángulo de la figura lo hemos dividido en nueve trapecios y un triángulo, todos de la misma altura. ¿Qué porcentaje del área del triángulo está sombreada?

**A)** 41,75% **B)** 42,5% **C)** 45% **D)** 46,5% **E)** 47%



**11** ¿Cuál es el área del hexágono regular *ABCDEF* si $A(0, 0)$ y $C(7, 1)$?

**A)** $20\sqrt{3}$ **B)** $22\sqrt{3}$ **C)** $25\sqrt{3}$

**D)** $27\sqrt{3}$ **E)** 50

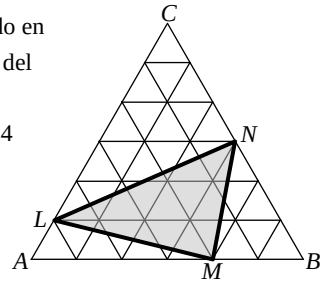
**12** Al lanzar un dado, con sus caras numeradas del 1 al 6, tres veces consecutivas, resulta que el número obtenido en el tercer lanzamiento es igual a la suma de los números obtenidos en los dos primeros lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número 2 no haya aparecido en ninguno de los tres lanzamientos?

**A)** $\frac{5}{6}$ **B)** $\frac{125}{216}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{7}{15}$ **E)** $\frac{5}{12}$

**13** El triángulo equilátero *ABC* de la figura está dividido en 36 triángulos equiláteros de área 1. ¿Cuál es el área del triángulo *LMN*?

**A)** 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14

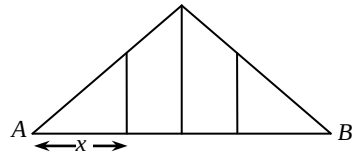
**E)** 15




**14** ¿Cuántos números *N* de cuatro cifras verifican que al borrar en *N* la cifra de las unidades de millar se obtiene otro número de tres cifras que es un noveno de *N*?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**15** En el triángulo isósceles de la figura el lado desigual es $AB = 12$ y está dividido en cuatro polígonos de igual área por segmentos perpendiculares al lado *AB*. ¿Cuál es el valor de *x*?




**A)** $3\sqrt{2}$ **B)** 4 **C)** 4,5

**D)** $3\sqrt{3}$ **E)** 3

**16** La suma de la progresión geométrica decreciente ilimitada $a, ar, ar^2, \ldots$ es 7 y la suma de la progresión obtenida considerando solamente los términos con exponente impar de $r$, es 3. ¿Cuál es el valor de $a + r$?

**A)** $\frac{4}{3}$ **B)** $\frac{12}{7}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{7}{3}$ **E)** $\frac{5}{2}$

**17** Sea $P$ un punto del interior del triángulo equilátero $ABC$ y $Q$, $R$ y $S$ los pies de las perpendiculares desde $P$ a los lados $AB$, $BC$ y $CA$, respectivamente.

Si $PQ = 1$, $PR = 2$ y $PS = 3$, la longitud $AB$ es igual a:

**A)** 4 **B)** $3\sqrt{3}$ **C)** 6 **D)** $4\sqrt{3}$ **E)** 9

**18** Un trozo de queso está situado en el punto (12, 10) de un sistema de coordenadas. Un ratón se mueve a lo largo de la recta $y = 18 - 5x$ y, cuando está convencido de que se encuentra lo más cerca posible del queso, se para.
Si se para en el punto $(a, b)$, el valor de $a + b$ es:

**A)** 6 **B)** 10 **C)** 14 **D)** 18 **E)** 22

**19** Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Si dicho triángulo está inscrito en un círculo de radio 3, ¿cuál es el área del triángulo?

**A)** 8,64 **B)** 12 **C)** $5\pi$ **D)** 17,28 **E)** 18

**20** La probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en un determinado dado es proporcional a los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de obtener suma 7 al lanzar dos veces ese dado?

**A)** $\frac{4}{63}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{8}{63}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{2}{7}$

**21** Si el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto $(t, t)$ y el punto de corte de la parábola con el eje de ordenadas es el punto $(0, -t)$, con $t \neq 0$, el valor de $b$ es:

**A)** $-t$ **B)** 0 **C)** 2 **D)** 4 **E)** $t$

**22** La suma de 18 enteros positivos consecutivos es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el menor valor posible para esta suma?

**A)** 169 **B)** 225 **C)** 289 **D)** 361 **E)** 441

**23** ¿Para cuántos números reales $x$ se verifica que $\sqrt{120-\sqrt{x}}$ es un número entero?

**A)** 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

**24** Si $\cos x = 0$ y $z$ es un número positivo tal que $\cos(x+z)=\frac{1}{2}$, el menor valor posible para $z$, en radianes, es:

**A)** $\frac{\pi}{6}$ **B)** $\frac{\pi}{3}$ **C)** $\frac{\pi}{8}$ **D)** $\frac{5\pi}{6}$ **E)** $\frac{\pi}{9}$

**25** En el trapecio $ABCD$ de bases $AB$ y $CD$, $E$ es el punto medio de $BC$ y $F$ el punto medio de $DA$. Si el área del cuadrilátero $ABEF$ es el doble del área del cuadrilátero $FECD$, el cociente $\frac{AB}{DC}$ es igual a:

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **C** | 1 | **A** | 1 | **D** | 1 | **C** |
| 2 | **D** | 2 | **D** | 2 | **A** | 2 | **A** |
| 3 | **B** | 3 | **D** | 3 | **A** | 3 | **C** |
| 4 | **D** | 4 | **C** | 4 | **C** | 4 | **C** |
| 5 | **A** | 5 | **D** | 5 | **B** | 5 | **B** |
| 6 | **D** | 6 | **A** | 6 | **B** | 6 | **B** |
| 7 | **B** | 7 | **B** | 7 | **D** | 7 | **E** |
| 8 | **A** | 8 | **C** | 8 | **A** | 8 | **C** |
| 9 | **E** | 9 | **D** | 9 | **A** | 9 | **C** |
| 10 | **E** | 10 | **E** | 10 | **D** | 10 | **E** |
| 11 | **A** | 11 | **A** | 11 | **D** | 11 | **E** |
| 12 | **E** | 12 | **E** | 12 | **D** | 12 | **E** |
| 13 | **A** | 13 | **A** | 13 | **E** | 13 | **B** |
| 14 | **B** | 14 | **B** | 14 | **B** | 14 | **B** |
| 15 | **A** | 15 | **A** | 15 | **A** | 15 | **D** |
| 16 | **E** | 16 | **B** | 16 | **C** | 16 | **E** |
| 17 | **B** | 17 | **A** | 17 | **B** | 17 | **D** |
| 18 | **D** | 18 | **D** | 18 | **D** | 18 | **B** |
| 19 | **A** | 19 | **D** | 19 | **B** | 19 | **C** |
| 20 | **C** | 20 | **D** | 20 | **C** | 20 | **B** |
| 21 | **A** | 21 | **D** | 21 | **C** | 21 | **B** |
| 22 | **E** | 22 | **B** | 22 | **E** | 22 | **D** |
| 23 | **D** | 23 | **C** | 23 | **A** | 23 | **A** |
| 24 | **E** | 24 | **B** | 24 | **B** | 24 | **B** |
| 25 | **B** | 25 | **B** | 25 | **E** | 25 | **E** |

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **A** | 1 | **E** | 1 | **D** | 1 | **E** |
| 2 | **C** | 2 | **B** | 2 | **B** | 2 | **E** |
| 3 | **B** | 3 | **A** | 3 | **E** | 3 | **B** |
| 4 | **C** | 4 | **D** | 4 | **E** | 4 | **C** |
| 5 | **B** | 5 | **D** | 5 | **C** | 5 | **B** |
| 6 | **C** | 6 | **E** | 6 | **B** | 6 | **C** |
| 7 | **C** | 7 | **D** | 7 | **A** | 7 | **A** |
| 8 | **D** | 8 | **B** | 8 | **B** | 8 | **B** |
| 9 | **D** | 9 | **C** | 9 | **D** | 9 | **A** |
| 10 | **E** | 10 | **A** | 10 | **E** | 10 | **C** |
| 11 | **C** | 11 | **C** | 11 | **E** | 11 | **C** |
| 12 | **C** | 12 | **E** | 12 | **B** | 12 | **D** |
| 13 | **D** | 13 | **B** | 13 | **B** | 13 | **A** |
| 14 | **B** | 14 | **D** | 14 | **C** | 14 | **D** |
| 15 | **C** | 15 | **D** | 15 | **E** | 15 | **A** |
| 16 | **A** | 16 | **E** | 16 | **E** | 16 | **E** |
| 17 | **A** | 17 | **E** | 17 | **D** | 17 | **D** |
| 18 | **B** | 18 | **B** | 18 | **B** | 18 | **B** |
| 19 | **A** | 19 | **B** | 19 | **D** | 19 | **A** |
| 20 | **E** | 20 | **C** | 20 | **B** | 20 | **C** |
| 21 | **C** | 21 | **D** | 21 | **D** | 21 | **D** |
| 22 | **D** | 22 | **C** | 22 | **B** | 22 | **B** |
| 23 | **A** | 23 | **E** | 23 | **C** | 23 | **E** |
| 24 | **D** | 24 | **E** | 24 | **C** | 24 | **A** |
| 25 | **A** | 25 | **E** | 25 | **E** | 25 | **C** |

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel I*

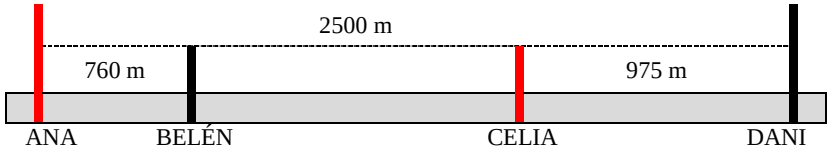
**1. (C)** Calculamos el valor del Comenúmeros de cada una de las operaciones:
39 + 37 = 76; 57 – 23 = 34; 195: 15 = 13; 7 × 28 = 196
76 + 24 + 13 + 196 = 319.

**2. (D)** Calculamos el perímetro así:
Primero, calculamos un lado de cada casilla de la cuadrícula: 8 : 4 = 2 cm
Después, hallamos el perímetro del cuadrado que forman todas las casillas y añadimos cuatro "lados" más que forman la puerta de la casita:
5 × 4 = 20; 20 + 4 = 24; 24 × 2 = 48 cm.

**3. (B)** En una tabla de doble entrada, escribimos los nombres de los amigos en una entrada, y en la otra, los oficios. A continuación, siguiendo el orden de los puntos del problema, escribimos "no" o "si", según corresponda, en cada una de las casillas haciendo corresponder el oficio de cada personaje; de esta forma se deduce que Álvaro es el actor.

| | Profesor | Actor | Pintor | Tenista |
|---|---|---|---|---|
| Adrián | NO | NO | SI | NO |
| Javier | NO | NO | NO | SI |
| Álvaro | NO | **SI** | NO | NO |
| Juan | SI | NO | NO | NO |

**4. (D)** Dibujando un esquema como el que se indica y anotando las distancias entre las casas, se puede observar que la distancia entre las casas de Ana y de Celia se calcula restando 975 a 2500.
2500 – 975 = 1525 m



**5. (A)** $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de tableta quedan después de dar $\frac{1}{3}$ a Olivia.

$\frac{2}{3}:2=\frac{1}{3}$ de tableta dio a Rafa.

$\frac{3}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

**6. (D)** Hay tres afirmaciones ciertas. Son las siguientes:

**I.** La suma de un número par con un número impar es siempre impar.

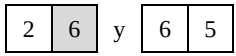
**III.** Si divides un número para entre otro número parel resultado puede ser impar.

**IV.** Si a un número impar le restas otro número impar el resultado nunca es impar.

**7. (B)** El número triangular de base 20 está formado por 210 puntos.
210 puntos → 210 céntimos
210 céntimos = 2,10 €.

**8. (A)** Comparamos los objetos comprados y el precio pagado por ellos mediante esta operación:
2 lápices + 5 gomas = 3,80 € → $2\,l + 5\,g = 3,80$ €
2 lápices + 3 gomas = 3,00 € → $2\,l + 3\,g = 3,00$ €.
Restando ambas igualdades se obtiene 2 g = 0,80 €.
Se deduce que 2 gomas valen 80 céntimos. Una goma vale 40 céntimos.
Sustituyendo el valor de una goma en una de las igualdades anteriores obtendremos el valor de un lápiz:
$2\,l + 3 \times 0,40$ € = 3 € → $2\,l$ + 1,20 € = 3 € → $2\,l$ = 3 € – 1,20 € = 1,80 €
1,80 € : 2 = 0,90 €. Un lápiz vale 0,90 euros.

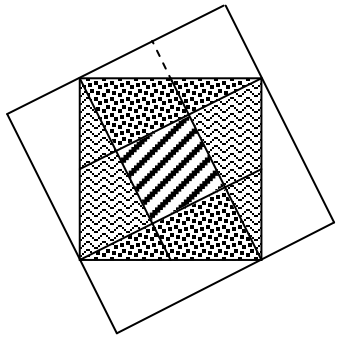
**9. (E)** La suma de los puntos de las dos fichas sombreadas es: 42 – 23 = 19 puntos.
Teniendo en cuenta que, de los extremos de estas fichas son un 2 y un 5, la suma de los puntos de las dos partes de las fichas que faltan es: 19 – (2 + 5) = 12 puntos; por tanto, los puntos de las dos fichas sombreadas son:




Debajo de las interrogaciones hay 6 puntos.

**10.(E)** Si por 3 euros podemos comprar 16 castañas, por 1,5 euros, que es la mitad, podremos comprar 8 castañas. Luego con 4,5 = (3 + 1,5) euros, podremos comprar 16 + 8 = 24 castañas.

**11.(A)** Completando el cuadrado, mediante el trazado de paralelas equidistantes como se muestra en la figura, es inmediato ver que nuestro cuadrado original puede seccionarse en cinco polígonos de igual área: cuatro triángulos (rectángulos) y el cuadrado original *LMNO*. Por lo que el área del cuadrado central es $\frac{10^2}{5} = 20\ cm^2$ .



**12.(E)** El único reloj de manillas que marca las siete menos cuarto (18:45) es el E.

**13.(A)** Hay cinco caminos seguros que son:

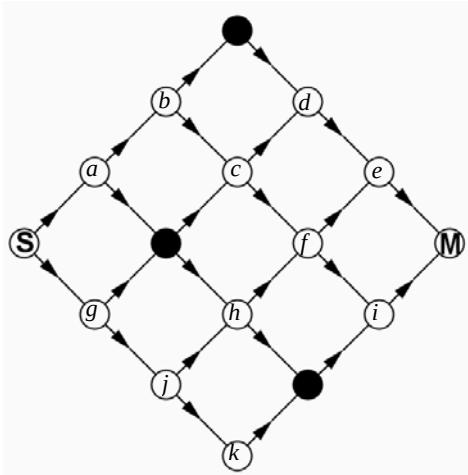
**S *a b c d e* M**

**S *a b c f e* M**

**S *a b c f i* M**

**S g *j h f e* M**

**S g *j h f i* M**




**14.(B)** Cuando haya dicho 2014 números ha tenido que sumar 3 un total de 2013 veces. Como empezó en el 1 habrá llegado al número $1 + 3 \times 2013 = 6040$..
La suma de sus cifras es 10.

**15.(A)** El ángulo $x$ es igual a: $180º - (56º + 32º) = 180º - 88º = 92º$.

**16.(E)** En una división entera se cumple: Dividendo = divisor × cociente + resto
$D = 20 \times 11 + 8 = 228$.

$228 : 19 = 12$. Tocan a 12 y no sobra ninguno.

**17.(B)** 1 h = 60 min
60 min – (14 min 30 s + 8 min 45 s) = 60 min – 23 min 15 s = 36 min 45 s.

**18.(D)** Supongamos que la primera ficha la coloca Triagupín. Tiene, pues, 3 formas distintas de colocarla. A continuación, Triangupón tiene también 3 formas distintas. Seguidamente, a Triangupín le quedan 2 formas distintas y, después, a Triangupón, otras 2. Finalmente coloca cada uno de ellos la ficha que le queda.
Tienen una sola forma de hacerlo cada uno.
Tenemos entonces, $3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36$ configuraciones distintas si comienza Triangupín. Simétricamente habrá otras 36 si el que empieza es Triangupón.
En total $36 \times 2 = 72$ configuraciones distintas.

**19.(A)** Todas las operaciones están bien hechas.

**20.(C)** Analizando las caras de los 14 cubitos, se obtiene:
$14 \times 6 = 84$ caras verdes iniciales.
Número de caras que ha pintado de rojo: 14 + 10 + 10 +12 = 46
Número de caras que quedan pintadas de verde: 84 – 46 = 38 caras.
Ahora hay pintadas de verde 38 caras.

**21.(A)** Si subo los escalones de 3 en 3 hay: $30 \times 3 = 90$ pasos.
90 : 10 = 9 pasos. El gigante dará 9 pasos.

**22.(E)** Si la probabilidad de sacar un caramelo de limón es de $\frac{1}{2}$, quiere decir que la mitad del total de caramelos son de limón y la otra mitad de menta y de fresa.
Por tanto: 8 caramelos de menta + 6 caramelos de fresa = 14 caramelos.
Hay 14 caramelos de limón.

**23.(C)** Se busca el múltiplo de 7 más próximo por defecto a 100.
El múltiplo de 7más próximo a 100 es 98. Por tanto, dentro de 98 días será martes, y dentro de 100 = (98 + 2) días será jueves.
El cumpleaños caerá en jueves.

**24.(E)** Como 5 pastores alemanes comen lo mismo que 9 chihuahuas, 15 perros pastores comerán lo mismo que 27 chihuahuas y, por tanto, estos 27 comerán lo mismo que 18 perros salchicha.
Por lo tanto 2 perros salchicha comerán lo mismo que 3 chihuahuas y en consecuencia 8 perros salchicha comerán lo mismo que 12 chihuahuas.

**25.(B)** Primero, calculamos el máximo común divisor de 24, 30 y 18 que es 6.
A continuación, dividimos el número total de canicas entre el máximo común divisor ´(24 + 30 + 18) : 6 = 12.
Se necesitan 12 cajas, de las cuales 4 son de canicas azules, 5 de verdes y 3 plateadas.

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel II*

**1. (A)** Todas las operaciones son correctas.

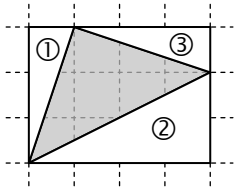
**2. (D)** Escribiendo todos los números como fracciones con denominador 1000 tenemos que: $\frac{2014}{1000}=\frac{2000}{1000}+\frac{?}{1000}+\frac{4}{1000}$ por lo que $\frac{?}{1000}=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$. Así pues, el Comenúmeros se comió un 100.

**3. (D)** Si llamamos$x$ al número de pasos que doy subiéndolos de dos en dos, habré subido $2x$ escalones. Si los subo de tres en tres daré $x$– 30pasos y subiré$3(x$– 30) escalones. Igualando el número total de escalones obtenemos la ecuación $2x = 3(x$– 30) cuya solución es $x = 90$. Así pues, hay $2 \cdot 90 = 180$ escalones y el gigante subirá la escalera en 18 zancadas.

**4. (C)** El área del rectángulo que ves en la figura es $4 \cdot 3 = 12$ y las áreas de los triángulos blancos son:

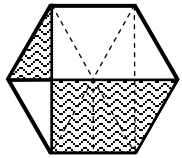
$A_1=\frac{1\cdot 3}{2}=1{,}5$, $A_2=\frac{4\cdot 2}{2}=4$ y $A_3=\frac{1\cdot 3}{2}=1{,}5$.

Así pues, el área del triángulo es $12 – (1{,}5 + 4 + 1{,}5) = 5$.




**5. (D)** Entre 1 y 100 hay 33 múltiplos de 3 (del $3= 3 \cdot 1$ al $99 = 3 \cdot 33$). Entre ellos solo hay seis que contengan un 7: 27, 57, 72, 75, 78 y 87. Encontrarlos es fácil pues un número es múltiplo de tres si la suma de sus cifras lo es. Como los números serán de la forma $a7$ o $7b$, $a$ y $b$ solo pueden ser 2, 5 y 8. Así pues el Comenúmeros se ha comido $33 – 6 = 27$ números y en la pizarra quedaron $100 – 27 = 73$ números.

**6. (A)** Trazando algunos segmentos convenientes vemos que el trapecio está compuesto de cinco triángulos y, por lo tanto, en cada triángulo he plantado $420: 5 = 84$ margaritas.



**7. (B)** Como la suma de números de las casillas que están encima y a la derecha de 3 deben sumar 12, esos números podrían ser: 9 y 3, 8 y 4 o 7 y 5. Como el 3 y el 5 ya están usados, solo nos queda una posibilidad, que sean 8 y 4. Los colocamos en el orden que queramos, pues el problema es simétrico y continuamos.

Como la suma de los números que están encima del 8 y del 5 debe ser 7, con los números que nos quedan tenemos solo pueden

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 7 |
| 8 | 5 | 2 |
| 3 | 4 | 9 |

ser: 1 y 6, pero no sabemos en qué orden. Del mismo modo sabemos que los números que están a la derecha del 4 y del 5 son las casillas son 9 y 2 y por tanto, el número que queda es el 7 y los números quedan ordenados como ves en la figura.

**8. (C)** Como 81:3 = 27, un rectángulo tendrá área 27 $cm^2$ y el otro, el doble, 54 $cm^2$.Para que el área del rectángulo pequeño sea 27 tenemos las siguientes posibilidades:

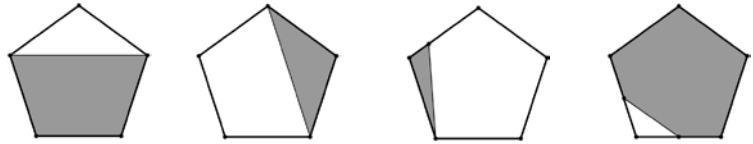
| Lado menor | Lado mayor | Perímetro | Perímetro + 34 |
|---|---|---|---|
| 1 | 27 | 56 | 90 |
| 3 | 9 | 24 | 58 |

Así pues, el perímetro del grande puede ser 90 cm o 58 cm y, por lo tanto, la suma de sus lados podría ser 45 o 29. Como los lados solo pueden ser 1 y 54; 2 y 27; 3 y 18 o 6 y 9, vemos que la única solución posible es que los rectángulos sean de 3 x 9 y de 2 x 27. Así pues, la respuesta es 9.

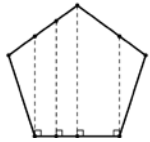
**9. (D)** Como el año 2014 tuvo 365 días, el día que está en el centro es el que ocupa la posición 183º. Comencemos a sumar: Con enero (31 días), febrero (28), marzo (31), abril (30), mayo (31) y junio (30) sabemos que el 30 de junio ocupa la posición 31 + 28 + 31+ 30 + 31 + 30= 181º. Así que Don Retorcido cumple dos días después, es decir, el 2 de julio.

**10.(E)** Como ves, se pueden formar todas estas figuras:

Trapecio Triángulo isósceles Triángulo escaleno Hexágono



Veamos ahora por qué no podemos formar un triángulo rectángulo:
El corte debería formar un ángulo recto con uno de los lados pero lo hagamos dónde lo hagamos, no obtenemos un triángulo rectángulo:

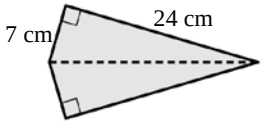


**11.(A)** Mía obtuvo 2·521 = 1042 puntos en las partidas perdidas así pues, el resto los. obtuvo en las partidas que ganó que fueron 2792 – 1042 = 350, por lo tanto jugaron 521 + 350 = 871.

**12.(E)** Si llamamos $x$ al número de quesos que se comen el primer día, el número de piratas es $4x$. El segundo día quedan $27 - x$ quesos y hacen $5\cdot(27 - x)$ trozos, que es el número de piratas. Así pues, $4x = 5(27 - x)$ cuya solución es $x = 15$ y el número de piratas es $4\cdot 15 = 60$.

**13.(A)** Trazando una diagonal vemos que la flecha está formada por dos triángulos rectángulos cuyos catetos miden 7 y 24 cm así pues el área es,

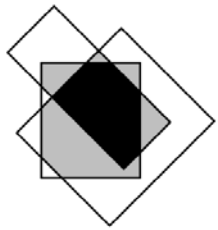
$$2\cdot\frac{7\cdot 24}{2} = 168\ \text{cm}^2.$$




**14.(B)** Los números de la cantinela de Luca son $3\cdot 0 + 1 = 1$; $3\cdot 1 + 1 = 4$; $3\cdot 2 + 1 = 7$; … El último que dice es $3\cdot 2\,0\,1\,3 + 1 = 6040$ sus cifras suman 10.

**15.(A)** Como la media de 100 números se obtiene sumándolos todos y dividiendo entre 100, la suma de los números que había al principio en la pizarra es $86\cdot 100 = 8600$ y la suma de los 80 que quedaron después es $84 \cdot 80 = 6720$. Así pues, la suma de los 20 que borró el profesor es $8600 - 6720 = 1880$ y su media es $1880 : 20 = 94$.

**16.(B)** Supongamos que las alfombras han quedado como en la figura. Marcamos de blanco la zona cubierta con una sola alfombra, que tiene área $A_1$, de gris la zona cubierta por dos alfombras, que tiene área $A_2$ y en negro la zona cubierta por las tres alfombras, con área $A_3$.



El área que ha quedado cubierta es $14 = A_1 + A_2 + A_3$ y el de las tres alfombras separadas es $20 = A_1 + 2\cdot A_2 + 3\cdot A_3$.

Como sabemos que $A_2 = 2$, tenemos que: $\begin{cases} 12 = A_1 + A_3 \\ 16 = A_1 + 3A_3 \end{cases}$

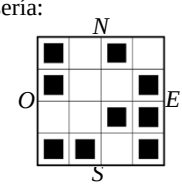
Así pues $A_3 = 2$.

**17.(A)** Llamando $x$ a lo que cuesta un lápiz e $y$ a lo que cuesta una goma obtenemos el sistema $\begin{cases} 3 = 2x + 3y \\ 4{,}3 = 3x + 4y \end{cases}$. Si multiplicamos la primera ecuación por cuatro, la segunda por tres y restamos obtenemos que $\dfrac{\begin{cases} 12 = 8x + 12y \\ 12{,}9 = 9x + 12y \end{cases}}{0{,}9 = x}$ y por tanto un lápiz cuesta 0,90 euros.

**18.(D)** La suma de los ángulos del cuadrilátero *ABEC* es 360º y por tanto el ángulo agudo $B\hat{E}C$ mide 42º + 94º + 17º = 153º y *x* mide 180º – 173º = 27º.

**19.(D)** Como el niño que no quiere caramelos tiene 11 y al repartirlos entre el resto tocan a uno sin que sobre ni falte nada, en total había 12 niños (11 que querían caramelos y el que no quería).

**20. (D)** Si Ana mirara la figura desde *S*, el máximo número de cubos sería:
$2\cdot3 + 4\cdot1 + 1\cdot2 + 3\cdot3 = 21$.
Si la mirara desde *E* el máximo sería:
$2\cdot3 + 4\cdot2 + 1\cdot2 + 3\cdot2 = 22$.
Si la mirara desde *N* el máximo sería:
$2\cdot3 + 4\cdot2 + 1\cdot1 + 3\cdot3 = 24$.
Y si la mirara desde *O*: $2\cdot2 + 3\cdot2 + 1\cdot2 + 3\cdot3 = 21$.
Así pues, el máximo número de cubos es 24 y Ana estaría en *N*.




**21.(D)** Los cuatro primeros días tenía tres cabras, entre todas comieron $4\cdot3\cdot200 = 2400$ g de pienso. Los nueve días restantes entre las dos cabras comieron $9\cdot2\cdot200 = 3600$ g así que aún quedan 20 000 – (2400 + 3600) = 14 000 g que, para una sola cabra, durarán 14 000 : 200 = 70 días.

**22.(B)** En ocho horas hay 8 · 60 = 480 minutos. Como cada 3 minutos recibe 5 mensajes, recibirá la friolera de (480 : 3) · 5 = 800 mensajes.

**23.(C)** En la fila superior de la tabla aparecen los números 1, 2, 3, …, *n* y en la de abajo aparece en número que está en la fila superior multiplicado por 4 y aumentado en una unidad, es decir, 1·4 + 1, 2·4 + 1 , 3·4 + 1, … 4·*n*+ 1. Así pues, el número que aparece debajo del 9 es 9 · 4 + 1 = 37 y el de encima del 69 es (69 – 1) : 4 = 17, luego su suma es 37 + 17 = 54.

**24.(B)** Como $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, entonces $2a = b$ y como $\frac{b}{c}=\frac{8}{5}$, entonces $8c = 5b = 5\cdot2a = 10a$, luego $c = \frac{10a}{8}=\frac{5a}{4}$. Así pues, $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{2a+\frac{5a}{4}}=\frac{a}{\frac{8a+5a}{4}}=\frac{4a}{13a}=\frac{4}{13}$.

**25.(B)** Por el enunciado deducimos que hay el mismo número de bolas verdes que amarillas y que el número de amarillas es el doble que el número de rojas. Si hay *x* bolas rojas, habrá 2*x* verdes y 2*x* amarillas y $x + 2x + 2x = 40$. Así pues, el número de bolas rojas es 40 : 5 = 8.

## XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* **III**

**1. (D)** 16 libros = 5 + 1 (de regalo) + 5 + 1 (de regalo) + 4
Alicia pagó: (5 + 5 + 4) · 2 = 14 · 2 = 28 €.

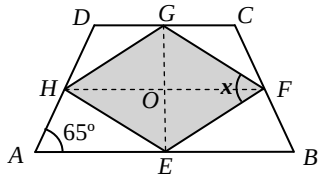
**2. (A)** Como el trapecio es isósceles $\hat{A} = \hat{B} = 65^\circ \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} = 135^\circ$

Al trazar las diagonales del rombo, como éstas se cortan en su punto medio, O, resulta que *HF* es la paralela media del trapecio y por lo tanto

$CF = FB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}DC = GC$ .

Se deduce que el triángulo *GFC* es isósceles con

$\hat{C} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \Rightarrow \hat{F} = \hat{G} = \frac{65^\circ}{2}$ .

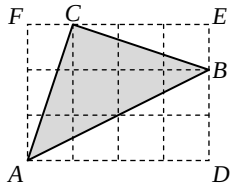



Finalmente, como $O\hat{F}C = O\hat{F}G + G\hat{F}C = \hat{B} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{65^\circ}{2} = 65^\circ \Rightarrow x = 65^\circ$ .

**3. (A)** Calculamos las raíces cuadradas de 4 778 603 y 4 778 595 y se obtienen 2186,… y 2185,…, respectivamente. El único cuadrado que hay entre ambos es $(2186)^2$ que evidentemente acaba en 6.

**4. (C)** El área de la figura sombreada es igual al área del rectángulo *ADEF* menos el área de los triángulos *ABD*, *BCE* y *AFC* .

$S = 4 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 2}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} \cdot 2 = 12 - 4 - 3 = 5$ .

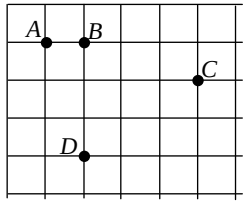



**5. (B)** $4^{15} + 8^{10} = (2^2)^{15} + (2^3)^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \cdot 2^{30} = 2^{31}$.

**6. (B)** Si analizamos solo las dos opciones de menor área:

Área ($\Delta$ *ABD*) = $\frac{1}{2}(1 \cdot 3) = \frac{3}{2}$

Área ($\Delta$ *ABC*) = $\frac{1}{2}(1 \cdot 1) = \frac{1}{2}$ es el área menor.



**7. (D)** I. $a \heartsuit b$ no puede ser positivo.

Es cierta pues escribiendo $a \heartsuit b = a^2 (a-b)(b-a) = a^2 (a-b)[-(a-b)] =$
$= -a^2 (a-b)^2 =$ (–)·(+)·(+) por ser $a$ y $b$ positivos distintos.

II. $1 \heartsuit 2 - 2 \heartsuit 1 = 3$

Es cierta ya que si hacemos los cálculos:

$1 \heartsuit 2 = 1^2 (1-2)(2-1) = 1(-1)(1) = -1$

$2 \heartsuit 1 = 2^2 (2-1)(1-2) = 4(1)(-1) = -4$

$(-1) - (-4) = -1 + 4 = 3$

III. $(a \heartsuit b) : (b \heartsuit a) = a : b$ sean cuales sean los números $a$ y $b$.

Si escribimos:

$(a \heartsuit b) : (b \heartsuit a) = a^2 (a-b)(b-a) : b^2 (b-a)(a-b) = a^2 : b^2 = (a:b)^2$

Vemos que III no es cierta con las condiciones del problema.

**8. (A)** Si llamamos ***x*** al número de caramelos que había en la bolsa, ***y*** al de niños entre los que se reparten los caramelos en la 1ª ocasión, y ***z*** al de caramelos al que tocó cada niño en el supuesto 2º reparto, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} x = ym + n \\ x = (m+1)z + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow ym + n = (m+1)z + n;\ ym = (m+1)z;\ y = \frac{(m+1)z}{m}$$

Para que $y$ resulte un número entero, $z$ ha de ser múltiplo de $m$, y como se pide un número mínimo de caramelos, $z$ será igual a $m$.

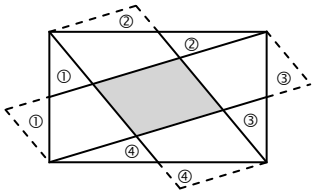
Luego $y = \dfrac{(m+1)m}{m} = m+1$; y $x = y\,m + n = (m+1)\,m + n = m^2 + m + n$

**9. (A)** Como $P(x) = x^2 + mx + n$ tiene las raíces $a$ y $\dfrac{1}{a}$ se deduce que $m = -\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$ y

$n = a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

Entonces $P(x) = x^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)x + 1$ y $P\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 - \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + 1 = 1$

**10.(D)** En la figura se observa que los triángulos marcados con el mismo número son iguales por simetría con lo que tenemos que el rectángulo dado tiene igual área que 5 romboides como el sombreado, por lo tanto su área es 60 : 5 = 12



**11.(D)** Como $72 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9$, el número buscado debe ser múltiplo de 8 y de 9.
Recordemos los criterios de divisibilidad por 8 y por 9. Un número es divisible por 8 cuando el número formado por sus 3 últimas cifras es divisible por 8; y es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
Como se pide el menor número esto exige encontrar un número con el menor número de cifras que cumpla las condiciones del problema. Lógicamente, hay que tener en cuenta el valor relativo de las cifras (el debido a la posición que ocupan).
Si el número tiene 8 cifras todas iguales a 9, su suma es $8 \cdot 9 = 72$; este número es múltiplo de 9 pero no es divisible por 8, por lo que hemos de cambiar la terna final (999) por otra que sea múltiplo de 8. Como en esta nueva terna la suma de sus cifras será menor que en la anterior, el número buscado tendrá que tener una cifra más, para que la suma de las cifras siga siendo 72.

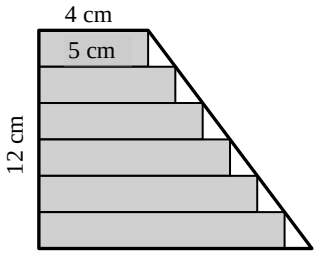
Analicemos los siguientes casos:

a) Si el número empieza por 1, tendremos que sustituir en la terna final un 9 por un 8; esta terna podría ser 899, 989 ó 998, pero ninguna de ellas es divisible por 8.

b) Si el número empieza por 2, tendremos que sustituir en la terna final dos 9 por dos 8; esta terna podría ser 889, 898 ó 988, pero ninguna es divisible por 8.

c) Si el número empieza por 3, tendremos que sustituir en la terna final los tres 9 por tres 8; esta terna sí es divisible por 8. El número que resulta es 399 999 888, que cumple todas las condiciones del problema.

**12.(D)** Altura de cada escalón = 12 : 6 = 2 cm
Anchura de cada escalón = 5 – 4 = 1 cm
En la figura se observa que el área del trapecio se puede obtener como la suma de las áreas de 6 rectángulos más la de 6 triángulos.




$$A = 4\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 2 + 7\cdot 2 + 8\cdot 2 + 9\cdot 2 + \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)\cdot 6 = 84$$

Otra forma de calcular el área sería:

$$\text{Área} = \frac{10 + 4}{2}\cdot 12 = 14 \cdot 6 = 84\,.$$

**13. (E)** Hay 3 resultados de cuadrados con 1 cifra: 1, 4, 9.
Con 2 cifras hay 6 (= 9 – 3) : 16,…, 81 ($4^2$,…, $9^2$)
Con 3 cifras hay 22 (= 31 – 9): 100,…, 961 ($10^2$,…, $31^2$)
Para llegar a la posición 100 quedan: $100 – (3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 22) = 100 – 81 =$ 19 cifras $= 4 \cdot 4 + 3 \Rightarrow$ 4 resultados de cuadrados con 4 cifras (que corresponderían a $32^2$, $33^2$, $34^2$ y $35^2$) y 3 cifras del siguiente resultado (el de $36^2$).
$36^2 = 1296$. Luego la respuesta es 9.

**14. (B) M**ultiplicando, miembro a miembro, dos de las tres ecuaciones (2ª y 3ª, por ejemplo) se obtiene $(x\cdot z)\cdot(y\cdot z)=16\Leftrightarrow (x\cdot y)\cdot z^2=16$ ; y teniendo en cuenta la primera ecuación, podemos escribir $1\cdot z^2=16$, $z=4$ . Sustituyendo este valor de $z$ en las ecuaciones 2ª y 3ª, resulta $x=\frac{1}{2}$, $y=2$ .

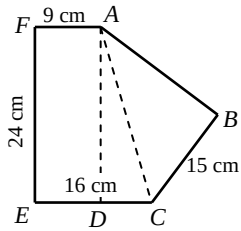
Por consiguiente, $x+y+z=\frac{13}{2}$ .

**15. (A)** Tracemos el segmento *AD* paralelo a *FE*; entonces

$DC=16-9=7$ **,** $AC=\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{625}=25$

Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo *ABC*, resulta:

$AB=\sqrt{25^2-15^2}=\sqrt{625-225}=\sqrt{400}=20.$




**16. (C)** Llamando *n* al número de estudiantes de la clase y *x* al de chicos, podemos escribir: $\frac{2x}{n}=0{,}5$ ; $x=\frac{0{,}5n}{2}=\frac{n}{4}$ ; o sea, el número de chicos es la cuarta parte de *n* ,y por tanto, el de chicas será las tres cuartas partes; es decir, el 75%.

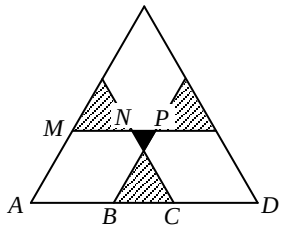
**17. (B)** Como en los cuatro casos *y* es un numero positivo y *x* es negativo, el cociente más pequeño se obtendrá para su mayor valor absoluto; es decir, cuando *y* sea lo mayor posible y el valor absoluto de *x* sea lo menor posible; esto sucede en el vértice B.

**18. (D)** Llamando *x* a la longitud del lado mayor del rectángulo e *y* a la del menor, podemos escribir el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l}\frac{y}{x}=\frac{4}{5}\\ x\cdot y=125\end{array}\right\}$. Despejando *y* en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda obtenemos:

$x\cdot\frac{4x}{5}=125\Rightarrow x^2=\frac{5\cdot 125}{4}\Rightarrow x=\frac{25}{2}$. Sustituyendo en la segunda ecuación, resulta: $\frac{25}{2}\cdot y=125,\ \ y=10$ . Por lo tanto, el perímetro del rectángulo es

$2x+2y=25+20=45$ cm.

**19. (B)** Observando la figura, vemos que $MP = 5 + 2 = 7$ y $AB = MP = 7$, por ser segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas. Por lo tanto, la longitud del lado del triángulo inicial es:
$AB + BC + CD = 7 + 5 + 7 = 19$.



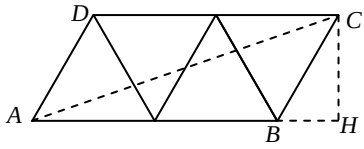

**20. (C)** En la segunda caja tiene que estar la bola número 12, por ser este número el único que no es primo de los cuatro. De las tres bolas restantes, en la tercera caja sólo puede haber metido la número 2, por ser este número par y como la número 7 no puede estar en la primera caja, tendrá que estar en la última, que es en la que pone mayor que 100.

**21. (C)** Trazando la perpendicular $CH$, resulta: $BH = \frac{1}{2}$

$$CH^2 = CB^2 - BH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$AC^2 = AH^2 + CH^2 = \left(1+1+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 7$$

y $AC = \sqrt{7}$ **.**




**22. (E)** Evidentemente, la desigualdad $64 < x^2$ sólo puede verificarse si el valor absoluto de $x$ es mayor que 8; pero, entonces, para que pueda cumplirse la otra desigualdad ( $x^3 < 64$ ), $x$ tendrá que ser un número negativo. Estas dos condiciones sólo las cumple la afirmación $x < -8$.

**23. (A)** Llamando $S_{20}$ a la suma de los 20 números borrados y $S_{80}$ a la suma de los 80 números restantes, podemos escribir:

$\frac{S_{20} + S_{80}}{100} = 86$ y $\frac{S_{80}}{80} = 84$, $S_{80} = 80 \cdot 84 = 6720$. Sustituyendo en la primera igualdad: $\frac{S_{20} + 6720}{100} = 86$, $S_{20} = 8600 - 6720 = 1880$.

Media de los 20 números borrados $= \frac{S_{20}}{20} = \frac{1880}{20} = 94.$

**24. (B)** Según la primera igualdad, $b = 2a$ . Sustituyendo en la segunda igualdad: $\frac{2a}{c} = \frac{8}{5}$, $c = \frac{5a}{4}$ ; por lo tanto, $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{2a + \frac{5a}{4}} = \frac{4a}{13a} = \frac{4}{13}$.

**25. (E)** Si *n* es par, $n^n$ es cuadrado perfecto pues, al ser *n*=2*k*, $n^n = n^{2k} = (n^k)^2$ **.** Por lo tanto, ya tenemos 50 números enteros (los pares 2, 4, 6,...100) que verifican la condición. Por otra parte, si *n* es impar podemos escribir $n = 2k+1$ y $n^n = n^{2k+1} = (n^k)^2 \cdot n$ , lo que indica que $n^n$ será cuadrado perfecto si y sólo si lo es *n*. Veamos, por lo tanto, qué cuadrados perfectos impares hay que cumplan $1 \le n \le 100$ . Son 5: 1, 9, 25, 49, 81. En definitiva, hay 50 + 5 = 55 números que verifican las condiciones exigidas.

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* IV

**1. (C)** Sea *2x* el ángulo agudo del rombo, $tg\ x = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$, por tanto,

$$tg\ 2x = \frac{2tg\ x}{1 - tg^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

**2. (A)** Si acabara en 5 → $1771565 : 5 = 354313$, ya no es múltiplo de 5, por tanto no es un cubo perfecto.

Si acabara en 4 → $1771564 : 4 = 442891$, ya no es múltiplo de 2.

Si acabara en 3 → $1771563 : 3 = 590513$, ya no es múltiplo de 3.

Si acabara en 2 → $1771562 : 2 = 885781$, ya no es múltiplo de 2.

Por tanto, tiene que acabar en 1→ $1771561 = 11^6$, que sí es un cubo perfecto.

**3. (C)** El polinomio tiene que ser de la forma $P(x) = (x - a) \cdot (x - b)$, por tanto, $P(a + b) = b \cdot a$.

**4. (C)** La suma dada corresponde a $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = (a_1 + a_{20}) \cdot 10 = S$**,**

$a_1 + a_{20} = \frac{S}{10}$**.**

La suma pedida $S_{par} = \frac{(a_2 + a_{20}) \cdot 10}{2} = (a_1 + 5 + a_{20}) \cdot 5 = \left(\frac{S}{10} + 5\right) \cdot 5 = \frac{S}{2} + 25$**.**

**5. (B)** Están delante de "becad", entre otras, todas las que empiezan por a que son 4! = 24. De las 24 que empiezan por b, solo están detrás de "becad", las dos que empiezan por bed y becda. Por tanto, hay $24 + (24 - (1 + 2 + 1)) = 44$ palabras delante de "becad", así pues, la posición que ocupa es la 45ª.

**6. (B)** $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2=2^2\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=4\cdot\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}=$

$=\dfrac{2n\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)}{6}$

**7. (E)** Observando el número de cifras de cada cuadrado tenemos.

De 1 cifra, 3, de $1^2$ a $3^2$ (1ª a 3ª posición)

De 2 cifras, 6, de $4^2$ a $9^2$ (4ª a 15ª posición)

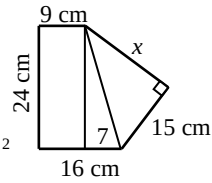
De 3 cifras, 22, de $10^2$ a $31^2$ ( 16ª a 81ª posición)

Faltan solo 5 números de 4 cifras, de $32^2$ a $36^2$ (82ª a 101ª posición). Por tanto, la solución será la penúltima cifra de $36^2=1296$ , es decir, el 9.

**8. (C)** Al ser peldaños de igual altura, cada uno mide 2 cm. Si la pendiente es -2, indica que cada uno de los triangulitos tiene por cateto horizontal 1 cm. Por tanto, la base mayor del trapecio mide 10 cm. Como $A_{escalera}=A_{trapecio}-6\cdot A_{triángulo}$ , tenemos

$$A_{escalera}=\frac{(10+4)\cdot 12}{2}-6\cdot\frac{1\cdot 2}{2}=78\,cm^2$$

**9. (C)** Usando el triángulo rectángulo de catetos 24 cm y 7 cm, obtenemos la hipotenusa $a=25$ cm, y usando el otro triángulo rectángulo conseguimos $x=20$ cm. Dividiendo la figura en un trapecio y un triángulo, obtenemos el área.

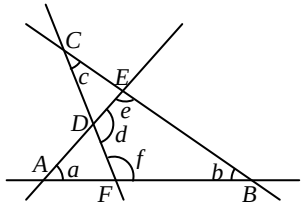



$$A_{pentágono}=A_{trapecio}+A_{triángulo}=\frac{(16+9)\cdot 24}{2}+\frac{15\cdot 20}{2}=450\,cm^2$$

**10.(E)** Escribimos la curva de la forma $y=4+\dfrac{24}{x-4}$ **,** entonces $x-4$ tiene que ser divisor de 24, obteniendo $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$. Así pues, existen 16 valores enteros de $(x,y)$.

**11.(E)** Las tres primeras afirmaciones son obviamente verdaderas y la cuarta también pues la parábola $y=x^2-2x$ , en $x=2$ toma el valor 0 y en $x=3$ toma el valor 3.

**12.(E)** Del triángulo *ABE*, sacamos que $e = 180^\circ - (a+b) = 85^\circ$ y del triángulo *BCF* sacamos que $f = 180^\circ - (b+c) = 105^\circ$. Con estos datos y observando el cuadrilátero *BEDF* sacamos el ángulo pedido $d = 360^\circ - (b+e+f) = 130^\circ$.




**13.(B)** En la lista que nos proponen solo existen dos posibilidades, que el número de pares-impares sea el mismo o que el número de pares-impares se diferencie en 1.

Escribimos los porcentajes en fracción a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{9}{20}$, c) $\frac{12}{25}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $\frac{3}{5}$.

Se ve claramente que la única lista que no existe es la que da $\frac{9}{20}$, ya que en una lista de 20 números consecutivos no puede haber 9 impares y 11 pares.

**14.(B)** Está claro que el lado más largo es el opuesto al vértice de 61º, pero, ¿es *AD* o *AC*? Como *AB* es común a los dos triángulos, para el triángulo de la derecha es el lado pequeño (opuesto a 59º) y para el de la izquierda es el mediano (opuesto a 60º) y los dos triángulos son semejantes, entonces, el triángulo más grande es el de la derecha y por tanto, el lado mayor es el lado *AC*.

**15.(D)** Los términos de la sucesión serán:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + a_1 + 2 = a_1 + a_1 + a_1 + 1 + 2$

$a_4 = a_3 + a_1 + 3 = a_1 + a_1 + a_1 + a_1 + 1 + 2 + 3$

**…**

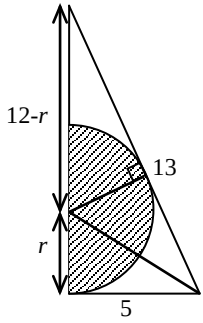
$a_{100} = 100 \cdot a_1 + 1 + 2 + 3 + ... + 99 = 100 \cdot 1 + S_{99} = 100 + \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 5050$

**16.(E)** La suma de los n primeros es $S_n = \frac{(1+n)\cdot n}{2} = 111k$ siendo $1 \le k \le 9$, entonces $n \cdot (n+1) = 222k$. Factorizando 222 obtenemos que $n \cdot (n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot k$, así que sacamos que *n* y *n* + 1 (dos números consecutivos) tienen que ser múltiplos de 6 y de 37. Solo pueden ser el 36 y 37 $\Rightarrow S_{36} = \frac{36 \cdot 37}{2} = 666$. Por tanto, la suma de las cifras será 18.

**17.(D)** Supongamos que el club tiene 100 socios. Como buscamos el porcentaje más pequeño posible, hacemos que los participantes repitan lo menos posible.
El primer día van 80, el segundo repiten 60 (y los otros 20 que no fueron el primer día), el tercero repiten 40 (más 40 de los que han faltado algún día) y el cuarto repiten 20. Así que el menor porcentaje de socios que han participado en las 4 excursiones es del 20%.

**18.(B)** Los triángulos inferiores son iguales, ya que los dos son rectángulos y tienen dos lados iguales, el común y el cateto que es el radio de la circunferencia. Así obtenemos que las medidas del triángulo superior son r, 8 y $12-r$. Aplicando Pitágoras sacamos

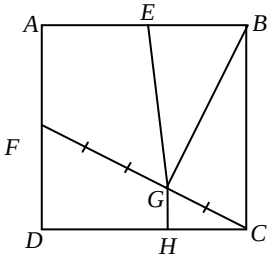
$$(12-r)^2 = 8^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{10}{3}$$



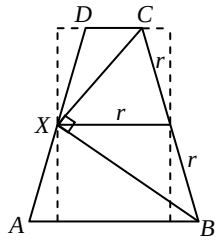

**19.(C)** Llamando *c* al cateto del triángulo rectángulo y aplicando Pitágoras tenemos que $2c^2 = 64 \Rightarrow c = 4\sqrt{2}$. Así pues el área pedida será

$$A = 8^2 + \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^2}{2} + 2 \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 144 .$$

**20.(B)** Bajando desde *G* la perpendicular *GH* al lado *DC*, la semejanza de los triángulos *FDC* y *GHC* nos dice que $\frac{1}{GH} = \frac{5}{2} \Rightarrow GH = \frac{2}{5}$ y la altura sobre *EB* del triángulo *EBG* es de $2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$, así pues el área del triángulo *EBG* es: $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$.



**21.(B)** Como en cualquier triángulo rectángulo se verifica que la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa coincide con la mitad de ésta, ya que es el radio de la circunferencia circunscrita. Así que en nuestro caso esta mediana mide 1 y al ser ésta la paralela media del trapecio, resulta que la suma de las longitudes de las dos bases es 2, por lo que el perímetro es 6.




**22.(D)** La suma de *n* enteros consecutivos empezando por el 1 es $S_n = \frac{(1+n)\cdot n}{2}$, por tanto, tenemos que buscar el mayor *n* que cumpla $\frac{(1+n)\cdot n}{2} < 857 \quad \Rightarrow n\cdot(n+1) < 1714 \Rightarrow n^2 < 1714 \Rightarrow n \le 41$**.** Probamos con $n = 41$, entonces $S_{41} = \frac{41\cdot 42}{2} = 861 > 857$, así que no vale. Si $n = 40$, $S_{40} = \frac{40\cdot 41}{2} = 820 < 857$, la diferencia se debe al número repetido que será el 37.

**23.(A)** El enunciado nos dice que $a+b=26$**,** estos números *a* y *b* podrían ser los dos impares. $a+b+c+d=41 \Rightarrow c+d=15$, de estos números uno de ellos tiene que ser par y el otro impar. $a+b+c+d+e+f=57 \Rightarrow e+f=16$, también pueden ser los dos impares. Por tanto, de entre todos los números, al menos, uno tiene que ser par.

**24.(B)** Hallamos los puntos de corte de las dos curvas resolviendo el sistema $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ (x-4)^2+9y^2=81 \end{cases}$ y obtenemos los puntos $(4,3)$, $(4,-3)$, $(-5,0)$

Es un triángulo cuya base mide 6 y la altura 9, por tanto el área será 27.

**25.(E)** Contamos los casos:
20 ceros → 1
19 ceros, 1 uno → 20 (el 1 en cada una de las posiciones)
18 ceros, 2 unos → 19 +1 (los unos juntos → 19 sitios y los unos separados)
17 ceros, 3 unos → 18+2
…
2 ceros, 18 unos → 1+19
1 cero, 19 unos → 20
20 unos → 1
En total tenemos $19\cdot 20+2=382$.

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel I*

**1. (A)** El problema se resuelve muy fácilmente efectuando la adición del resultado de la suma más el sustraendo, esto es:

$$\begin{array}{cccccccc} & 2 & 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \\ + & 2 & 1 & \mathbf{2} & 6 & \mathbf{3} & 9 \\ \hline & 4 & \mathbf{5} & 0 & \mathbf{1} & 7 & \mathbf{2} \end{array}$$

En donde es inmediato obtener las cifras comidas: 2, 3, 1, 2 y 5, cuya suma es 13.

**2. (C)** Nuestro número gigantesco es múltiplo de 5 e impar. Por lo tanto, tiene que terminar en 5.

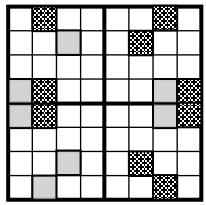
**3. (B)** Lucía lee 84 páginas en dos horas (120 minutos),por lo que lee $\frac{84}{120}$ páginas por minuto. Como le restan por leer 14 páginas, tardará en leerlas $14:\frac{84}{120}=20$ minutos.

**4. (C)** El triángulo está formado por 16 triangulitos. Dado que $\frac{3}{8}=\frac{6}{16}$ **,** basta ver cuál de las zonas sombreadas está formada por 6 triangulitos. Es la C.

**5. (B)** Yo nací el 23 de noviembre de 1992 + 10, es decir, del año 2002 y, en consecuencia, el 23 de noviembre de 2014 cumpliré 2014 – 2002 = 12 años. Por lo tanto, el 5 de abril de 2014 todavía no he cumplido los 12 años. Tengo 11 años.

**6. (C)** Como el 3 está situado 5 "divisiones" a derecha de – 2, sabemos que cada división de la recta mide una unidad. P está 5 unidades a la izquierda de – 2, por lo que representa al número – 7.
Entonces, 18 unidades a la derecha de P, está el – 7 + 18 = 11

**7. (C)** Cada cuadradito coloreado genera otros tres, de forma que los **cuatro** son simétricos con respecto a los lados comunes. En la figura, entre los coloreados por Juanito, se han señalado con el mismo número los cuadraditos que cumplen tal simetría. Está claro que disponemos de cuatro grupos distintos de cuadraditos, lo que genera la necesidad de colorear en total 16 cuadraditos como mínimo. Como Juanito solo ha coloreado 7, debe colorear otros 9 para llegar a los 16.



Por supuesto, se podría haber procedido a colorear directamente los cuadraditos que faltan, como se aprecia en la segunda figura.

**8. (D)** El número de mascotas correspondiente a los alumnos que llevaron una o dos mascotas fue: 241 × 1 + 87 × 2 = 415. Por lo que el número de mascotas correspondiente a los que llevaron 3 fue: 553 – 415 = 138 Luego el número de alumnos que llevó tres mascotas fue: 138 : 3 = 46.
Entonces, 241 + 87 + 46b= 374, fue el número de alumnos que llevó alguna mascota.
Deducimos finalmente que 450 – 374 = 76 alumnos no llevaron ninguna.

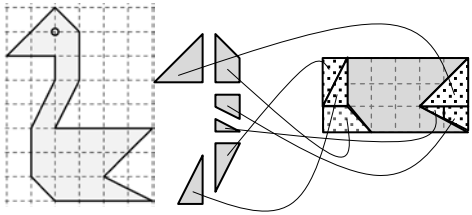
**9. (D)** Los tres ángulos miden respectivamente $x$, $(x + 10)$ y $\frac{x+(x+10)}{2} = x+5$ grados,

midiendo el mayor: $x + 10$ grados.
Por otra parte, $x + (x + 10) + (x + 5) = 180$, es decir, $3x + 15 = 180$.
Resolviendo la ecuación obtenemos: $x = 55$ grados.
En consecuencia, el ángulo mayor mide 65 grados.

**10. (E)** Todos los números impares de tres cifras y múltiplos de 57, se obtienen multiplicando 57 por 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 y 17 respectivamente.
Efectuando el cálculo de los cuatro primeros obtenemos:
171, 285, 399 y 513, entre los que ya tenemos los dos (285 y 513) que ha encontrado el abuelo. Su suma es 798.

**11.(C)** Siguiendo las instrucciones obtenemos sucesivamente:
5 + 2 = 7; 7 × 3 = 21; 21 > 100, NO; 21 × 3 = 63; 63 > 100, NO; 63 × 3 = 189;189 > 100, SÍ; Imprime 189.

**12.(C)** Solución sin palabras. Cortando la figura por el cuello en 6 piezas como se muestra más abajo y reordenándolas se obtiene un rectángulo de 6 cuadros de largo y 3 de alto.



Superficie = 6 × 3 = 18 cm$^2$
También se puede resolver aplicando el teorema de Pick.

Resulta motivante para los escolares. $Área = \frac{Pp}{2} + Pi - 1$

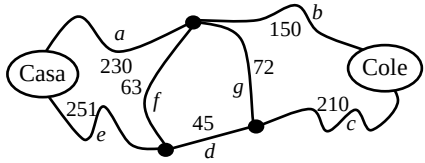
*Pp*: nº de puntos en el perímetro; *Pi*: nº de puntos en el interior

$Área = \frac{26}{2} + 6 - 1 = 18$ cm$^2$ .

Se entiende por puntos, los puntos de corte de la cuadrícula.

**13.(D)** Contando todas las cantidades en céntimos, tenemos:
$\frac{250}{5}+\frac{760}{20}+\frac{1500}{50}=118$ monedas.

**14.(B)** Midiendo todo en metros tenemos:




0,23 km = 0,23 × 1000 = 230 m
1,5 hm = 1,5 × 100 = 150 m
21 dam = 21 × 10 = 210 m
450 dm = 450 : 10 = 45 m
7,2 dam = 7,2 × 10 = 72 m
Los recorridos admisibles son:
*ab*, de 230 + 150 = 380 m
*afdc*, de 230 + 63 + 45 + 210 = 548 m
*efgc*, de 251 + 63 + 72 + 210 = 596 m
*afdgb*, de 230 + 63 + 45 + 72 + 150 = 560 m
*agc*, de 230 + 72 + 210 = 512 m
*edc*, de 251 + 45 + 210 = 506 m
*efb*, de 251 + 63 + 150 = 464 m
El más largo es el *afdgb* y el más corto el *ab*. Su diferencia es: 596 – 380 = 216 m.

**15.(C)** Hay seis maneras diferentes de rellenar una bolsita con 3 caramelos. Son las siguientes, en las que hemos representado los caramelos por su inicial:
FFF – FFM – FFL – FML – FMM - MML

**16.(A)** Como el número debe ser par, descartamos de entrada los que terminan en impar y, tanteando un poco, vemos que 36 cumple las condiciones. (Por otra parte ningún número de dos cifras, obtenido multiplicando un número por 12, comienza con 5).
La tarjeta de Irene es la A.

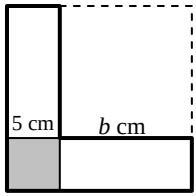
**17.(A)** Mediante sucesivos tanteos se pueden hallar los números que corresponden a cada casilla. El Tofu quedaría así:
La suma de los números de las cuatro esquinas es:
4 + 3 + 2 + 1 = 10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 3 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 4 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |

**18.(B)** El mínimo común múltiplo de los denominadores es 20, así que reduciendo las fracciones a ese denominador común tenemos, que Luz se dejó $\frac{5}{20}$, Sol se dejó $\frac{8}{20}$ y Mar se dejó $\frac{6}{20}$. La que más comió fue Luz, luego Mar y la que menos Sol.
Luego las afirmaciones A), C), D) y E) son falsas.
La única afirmación cierta es la B porque Mar comió más que Sol.

**19.(A)** Comenzaremos probando con las circunferencias más grandes posibles, esto es, de diámetro igual a la anchura. Es claro que sólo cabe una, pero no se ajusta al rectángulo. A continuación probamos con circunferencias de diámetro mitad de la anchura, es decir, de 6 cm. Vemos que a lo ancho caben exactamente 2 y a lo largo se ajustan 3, ya que $3 \times 6 = 18$. De modo que $2 \times 6 = 6$ circunferencias de diámetro 6 cm se ajustan al rectángulo de Richi, y hemos visto que la siguiente circunferencia mayor no lo hace. Por tanto, 6 es el menor número de circunferencias que se ajustan perfectamente al rectángulo.

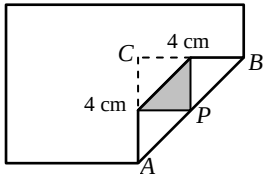
**20.(E)** A la vista de la figura está claro que el área de la **L** es:
$2 \times (5 \times b) + 5^2 = 10b + 25 = 145$, luego $10b = 120$ y $b = 12$.
El perímetro de la **L** es el mismo que el del cuadrado grande, es decir: $4 \times (12 + 5) = 68$.
También se podía haber hallado sumando todos los segmentos de la **L**.
$5 + 12 + 12 + 5 + (12 + 5) + (5 + 12) = 68$




**21.(C)** Para números de dos cifras, a partir del 10, encontramos que la primera de sus cifras está en posición par, así que, en la posición cien, se hallará la primera cifra de cierto número, *n*, de dos cifras. No es difícil ver que, al escribir desde el 1 hasta el 49, ocupamos $9 + 20 \times 4 = 89$ posiciones y como la decena de los *cincuenta* ocupa 20 posiciones, concluimos que en la posición 100 encontraremos la cifra 5.

**22.(D)** En primer lugar pasaremos todo a tiempo de 24 horas. De este modo sale de Lima, a las 16, en hora de Lima y llega a Madrid a las 14 del segundo día, en hora de Madrid. Ahora transformamos las 14 horas de la llegada a Madrid en horario de Lima. Llega a Madrid a las $14 - 6 = 8$ del segundo día en hora de Lima. Solo falta calcular el tiempo del primer y segundo día (todo en hora limeña) y sumarlos. El primer día tarda $24 - 16 = 8$ horas y el día de llegada otras 8 horas.
En total tarda $8 + 8 = 16$ horas.

**23.(A)** Dado que P es el punto medio del segmento AB, tenemos que el triángulo rectángulo isósceles, *ABC*, cuya superficie es de $\frac{4 \times 4}{2} = 8$ cm$^2$ queda dividido en cuatro pequeños triángulos rectángulos de igual área. En consecuencia, nuestra pequeña zona sombreada tiene un área de 2 cm$^2$.



**24.(D)** Basta darse cuenta de que si el número total de goles es par, la diferencia entre los resultados de ambos equipos también será par. Por lo tanto, Matem no pudo ganar por un gol.
En nuestro caso particular, con cuatro goles en total, los posibles resultados son:
4-0, 3-1 y 2-2, independientemente del equipo que gane.

**25.(A)** Convirtiendo cada uno de los tres hombrecillos grandes en cinco medianos, tendremos en total, $8 + 6 + 7 = 21$ hombrecillos medianos más un hombrecillo pequeño, es decir, 21,5 hombrecillo medianos.
Dado que éstos representan $2\,150\,000$ espectadores, cada hombrecillo mediano representará a $\dfrac{2\,150\,000}{21{,}5} = 100\,000$ espectadores.

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel II*

**1. (E)** El número que buscas ha de ser un múltiplo de $7 \cdot 9 = 63$ comprendido entre 600 y 800 y estás de suerte porque no hay muchos: 630, 693 y 756. El único que es impar es el 693, cuyas cifras suman 18.

**2. (B)** Lo primero: los ocho números colocados suman 36 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8).
Lo segundo: los cuatro lados sumados llegan a 58 (11 + 12 + 14 + 21).
Lo tercero: la diferencia entre estas sumas, 58 – 36 = 22 es la suma de las cuatro esquinas, ya que las hemos sumado dos veces al sumar los cuatro lados.
Lo cuarto: la suma de los números que no están en las esquinas es 36 – 22 = 14.

**3. (A)** ¿Cuántas bolsitas de cuatro caramelos podemos formar si puedo elegir entre estos caramelos: F–F–F–F–L–L–M–M–M? En este tipo de problemas es fundamental seguir un orden claro para estar seguros de que no nos dejamos ningún caso por computar. Como tenemos letras, una buena elección es el orden alfabético:
FFFF, FFFL, FFFM, FFLL, FFLM, FFMM, FLLM, FLMM, FMMM, LLMM, LMMM. Once bolsitas diferentes..

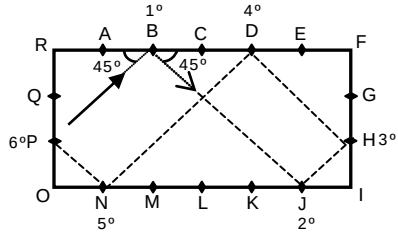
**4. (D)** Debemos descomponer en factores primos:
$18 = 2 \cdot 3^2$ $75 = 3 \cdot 5^2$ $24 = 3 \cdot 2^3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
Debemos conseguir el mcm de los números anteriores, es decir, el $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.
Así pues el 18 hay que multiplicarlo por $2^2 \cdot 5^2 = 100$; el 75 por $3 \cdot 2^3 = 24$; el 24 por $3 \cdot 5^2 = 75$; el 30 por $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$. La suma de estos números es 259

**5. (D)** Este es un problema de atención. Debemos encontrar un mensaje que difiera en una letra de uno; en dos de otro; en tres de otro; y en cuatro de otro. Así pues, miramos, comparamos, pensamos y…

| | | |
|---|---|---|
| Mensaje correcto | F F V F F | D |
| Un fallo | F V V F F | B |
| Dos fallos | F FFF V | A |
| Tres fallos | V F F V F | C |
| Cuatro fallos | V F F V V | E |

**6. (E)** La botella contiene en principio 150 cl y echamos al vaso un cuarto de esa cantidad, es decir, $\frac{1}{4} \cdot 150 = 37{,}50$ cl, que suponen los tres cuartos de la capacidad del vaso. Por tanto, el vaso tiene una capacidad de $(37{,}50 : 3) \cdot 4 = 50$ cl, es decir, medio litro.

**7. (D)** Si marcamos el recorrido que va haciendo la bola, vemos que el décimo rebote lo hará en el punto D.

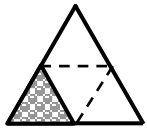



**8. (B)** Sólo hay cuatro números con esas condiciones: 23, 37, 53 y 73.

**9. (D)** En problemas de proporciones podemos jugar con cantidades arbitrarias y luego calcular la proporción deseada. Si suponemos que María tiene 100 pentágonos, Merche tendría 140, lo que supone que Merche habría de regalar 20 de sus pentágonos a María para que las dos amigas tuvieran 120 cada una.

Ya está, Merche tendría que regalar 20 de sus 140 pentágonos, es decir, $\frac{20}{140} = \frac{1}{7}$.

**10.(A)** Si trasladamos el triángulo pequeño hacia un vértice vemos que este ocupa un cuarto del grande.



**11.(C)** Si las dimensiones, en cm, del rectángulo son $a$ y $a + 8$, tendremos una de estas dos posibilidades: $2a + a + 8 = 55$ o $a + 2(a + 8) = 55$.
En el primer caso se obtiene que $a = 15{,}666\ldots$ cm y lo descartamos por no ser entero.
En el segundo caso es $a = 13$ cm. El otro lado mide 21 cm y el perímetro del rectángulo es 68 cm.

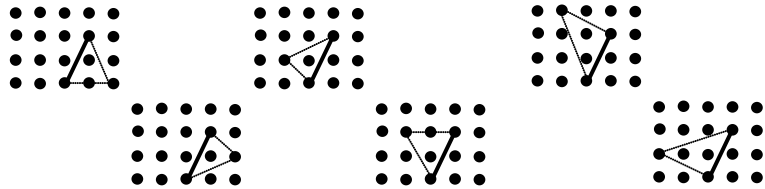
**12.(E)** Podemos formar una tabla que indique los palillos que vamos necesitando y así nos es más fácil averiguar cuántos palillos harán falta para construir el barquito que ocupe la posición $n$:

| Barquito | 1º | 2º | 3º | 4º | ... | $n$º |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Palillos necesarios | $8 = 4\cdot2$ | $12 = 4\cdot3$ | $16 = 4\cdot4$ | $20 = 4\cdot5$ | ... | $4\cdot(n+1)$ |

Así pues, para construir el barquito que hace el número 133, Nemo necesita exactamente $4\cdot134 = 536$ palillos. Luego si compra una caja de 500 palillos aún me faltan 36 palillos.

**13.(B)** Imaginemos que vamos trazando las calles dejando para la última la que es paralela. La primera calle no se cruza con ninguna; al trazar la 2ª calle se cruza con la 1ª, así que ya tenemos un cruce; la 3ª calle se cruza con la 2ª y la 1ª: tenemos dos cruces más; con la 4ª calle tendremos 3 cruces; con la 5ª, 4 cruces y con la 6ª cinco cruces; cuando tracemos la última calle ha de ser paralela a una de las anteriores, así que tendremos cinco cruces más.
En total, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 = 20$ cruces con sus correspondientes monumentos.

**14.(D)** Hay que tener en cuenta que el segmento que nos dan no puede ser el lado desigual del triángulo isósceles. Solo puede ser uno de los lados iguales. Estos son los seis casos que hay:



**15.(D)** Despacito y buena letra, o mejor dicho, despacito y buena suma:

$1 + 2 + 3 + 9 = 15$ $\quad$ $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ $\quad$ $1 + 2 + 5 + 7 = 15$
$1 + 3 + 4 + 7 = 15$ $\quad$ $1 + 3 + 5 + 6 = 15$ $\quad$ $2 + 3 + 4 + 6 = 15$.

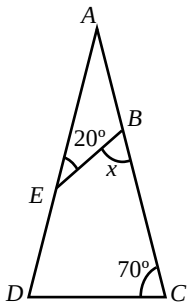
Ya no hay más, solo seis sumas.

**16.(E)** Cada cinco pasos, Joaquín avanza 3 metros y Juan Jesús 1 metro, uno al encuentro del otro. Digamos que cada "cinco-pasos" acortan en 4 metros los 166 metros de la senda. Así que si dividimos $166 : 4 = 41{,}5$, podríamos razonar así: cuando cada uno de ellos ha dado 41 "cinco-pasos" Joaquín ha recorrido $3 \cdot 41 = 123$ metros y Juan Jesús 41 metros. Esto hace un total de $123 + 41 = 164$ metros. Y esto nos induce a pensar que al paso siguiente ya se encuentran (Joaquín con 124 m y Juan Jesús con 42 m recorridos). Pero esta respuesta no está entre las posibles.
Así que debemos regresar al "cinco-pasos" anterior, es decir, al número 40. Joaquín ha recorrido $3 \cdot 40 = 120$ metros y Juan Jesús 40 metros. Y ahora sí, al tercer paso siguiente los amigos se encuentran, Joaquín ha recorrido 123 metros y Juan Jesús 43 metros.

**17.(E)** Hay 19 resultados favorables: (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

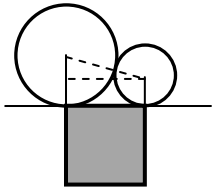
Como hay 36 casos posibles, la probabilidad pedida es $\frac{19}{36}$.

**18.(B)** El triángulo *ADC* es isósceles ya que *AE* + *ED* = *BC* + *AB*, por lo que su ángulo *D* mide 70º y entonces *A* mide 40º. En el triangulo superior *AEB*, vemos que el ángulo *B* mide 120º y ya podemos contestar que $x = 60º$..



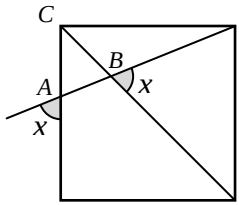

**19.(B)** Sabemos que el tiempo es igual al espacio entre la velocidad, $t = \frac{e}{v}$, así en este problema si llamamos *e* a la longitud del poste tenemos que $40 = \frac{e}{3} + \frac{e}{5}$, de donde $40 \cdot 15 = 5e + 3e \Rightarrow e = 75$ cm = 7,5 m.

**20. (C)** Si miras al dibujo verás que trazando solo dos segmentos más se forma un triángulo rectángulo y resolvemos el problema en un santiamén. La hipotenusa mide 17 cm; el cateto pequeño 3 cm; y por el teorema de Pitágoras vemos que el cuadrado del otro cateto es $17^2 - 3^2 = 280$. ¡El área del cuadrado mide 280 $cm^2$!

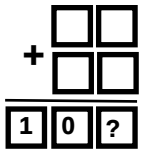


**21.(D)** Encontremos los números que se zampó Comenúmeros.
Empezamos por *a*: los primos de dos cifras menores que 20 son 11, 13, l7 y 19.
Solo el 11 cumple que sus cifras sumen un número primo, $a = 11$.
El número *b* podría ser 5, 10 ó 15. No podemos pronunciarnos todavía.
El *c* habrá que elegirlo entre el 9 o el 15.
El *d* podría ser 4 ó 9.
El *e* es primo y además es la media de *a* y *b*. Con esta condición vemos que *b* ha de ser 15 y, por tanto, $c = \frac{11+15}{2} = 13$.
Y ya vamos en cadena, $c = 15$ y $d = 4$.
El menor número de todos ellos es $d = 4$.

**22.(C)** En el triángulo $ABC$ tenemos que $\hat{A} = x = \hat{B}$ y el ángulo $\hat{C} = 45º$, por lo tanto $x + x + 45º = 180º$, de lo que se deduce que $x = 67{,}5º$.

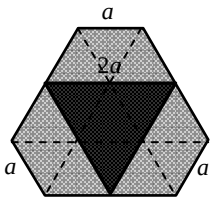



**23.(E)** Los dígitos 1 y 0 son fáciles de colocar. Encima del 0 debe haber o bien una suma que sea 9 o bien una que sea 10. La suma 9 no puede ser porque deberíamos llevarnos una de la suma de las unidades y esto es imposible con los dígitos de que disponemos. Así pues encima del 0 habrá un 4 y un 6. Nos quedan 2, 3 y 5 para completar la suma de las unidades... y esto ya nos asegura que en la interrogación ha de haber un 5.




**24.(E)** El anillo de Laura tenía $0{,}70 \cdot 30 = 21$ gramos de oro.
Si llamamos $x$ al número de los gramos de oro que hay que añadir, debe cumplirse que $0{,}80 \cdot (30 + x) = 21 + x$. Ecuación sencillita cuya solución es $x = 15$. Hay que añadir 15 gramos de oro.

**25.(E)** Dividiendo la figura en porciones menores e iguales vemos que el área de cada triangulito es $24 : 4 = 6$ cm$^2$, por lo que el área del hexágono es $13 \cdot 6 = 78$ cm$^2$.

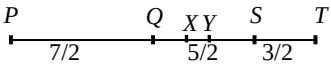


# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* III

**1. (D)** Al juntar dos conjuntos con distintos números de elementos la nueva media se obtiene como media ponderada de las primitivas. Como en el segundo conjunto hay el doble de elementos, los pesos de las medias están en proporción 1:2. Así la media total se obtiene como, $\bar{z} = \frac{4\cdot 1 + 10\cdot 2}{1+2} = 8$.

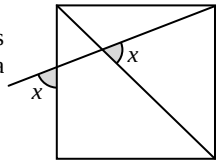
**2. (B)** Colocamos aproximadamente los puntos $Y$ y $X$ en el segmento para razonar mejor.




; $QY$ mide la mitad de $QS$, es decir, $\frac{5}{4}$, y por tanto $PY$ mide $\frac{7}{2} + \frac{5}{4} = \frac{19}{4}$. Por oro lado $PX$ mide la mitad de $PT$, es decir, $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}$, y así la distancia entre $Y$ y $X$ es, $\frac{19}{4} - \frac{15}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

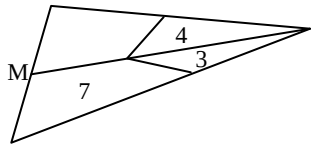
**3. (E)** Ya sabemos que la pareja 2-5 baila muy bien el producto.
Si expresamos $16^8 \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25}$, vemos aparecer 25 de esas parejas y por tanto un número que acaba en 25 ceros, llevando en cabecera $2^7 = 128$.
Así que tenemos un número de 28 cifras.

**4. (E)** En el dibujo aparece encubierto un triángulo isósceles, cuyos ángulos iguales miden $x$, y el tercer ángulo 45º. Poco queda por decir, $2x = 180º - 45º = 135º$.




**5. (C)** Queremos productos, $ab \cdot cd = eee$, pero, $eee = e \cdot 111 = e \cdot 3 \cdot 37$. Así 3 debe asociarse con parte de la cifra $e$ para formar un número de dos cifras, y para ello $e$ debe ser 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Además de multiplicar directamente $e$ por 3, podríamos sacar un factor 2 de $e$ para multiplicar a 37, y el resto de $e$ debería multiplicarse por 3, en cuyo caso $e$ será par y mayor o igual que 8, es decir 8. Así tendremos siete parejas.

**6. (B)** El segmento que divide al triángulo grande es una mediana y por tanto divide al triángulo en dos triángulos de igual área (tienen igual base e igual altura). Uno de esos dos triángulos tiene de área 7 + 3 = 10. El otro también.



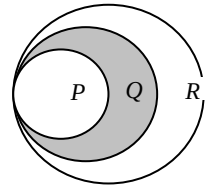
**7. (A)** La suma de 33 impares consecutivos es igual a 33 veces el de en medio. Así el de en medio es $\frac{33^{33}}{33} = 33^{32}$, y el mayor que estará dieciséis puestos más tarde diferirá del de en medio en 32 unidades.

**8. (B)** Puesto que es problemático poner en común las bases busquemos la comunidad de los exponentes. $2^{500} = \left(2^5\right)^{100}$; $3^{400} = \left(3^4\right)^{100}$; $4^{300} = \left(4^3\right)^{100}$; $5^{200} = \left(5^2\right)^{100}$; $6^{100}$. Ahora sólo resta comparar las nuevas bases, siendo la mayor $3^4$.

**9. (D)** Cuando el 2º comience la subida habrán pasado tres horas desde que lo hizo el primero. Como éste va a 3 km/h, la distancia que lleva en ese instante al primero es de 9 km.

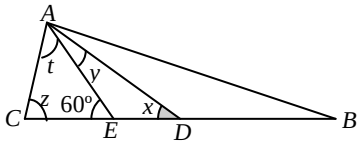
**10. (E)** Empezaremos por denominar en peso creciente a los cinco estudiantes. Sean estos, *a*, *b*, *c*, *d* y *e*. Sumando las diez pesadas por pareja obtenemos cuatro veces la suma de los pesos de los cinco jóvenes. Así $a+b+c+d+e = \frac{1156}{4} = 289$. Además la pareja de más peso estará formada por los dos de más peso, $d+e = 121$, y la segunda en peso estará formada por el de más peso y el de en medio, $d+c = 120$. Razonando ahora de forma simétrica con las pesadas menores tenemos que $a+b = 110$ y $a+c = 111$. Sumando estas cuatro últimas ecuaciones tenemos que $2a+b+2c+d+2e = 463$. Si descontamos la suma de los pesos de todos llegamos a que $a+c+e = 463-289 = 174$. Basta restar a esta suma la de $a+c$ para obtener $e = 174-112 = 62$.

**11.(E)** Los círculos son todos semejantes y la razón de semejanza de sus radios se eleva al cuadrado para hallar la de sus áreas. Así el área del círculo *P* es cuatro novenos el área del círculo *Q*, y el área de este es nueve dieciseisavos del de *R*. Así el área sombreada es cinco novenos del área de *Q* y esto consiste en $\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{16} = \frac{5}{16}$ del área de *R*.



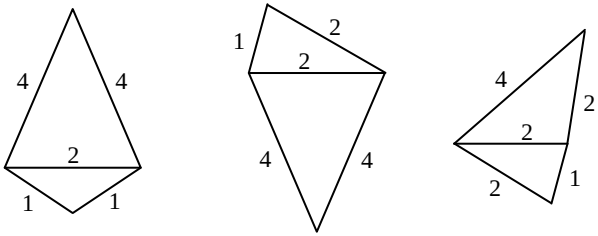

**12.(B)** $\left(1+3+5+...+p\right)+\left(1+3+5+...+q\right) = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2$**.** Si esta suma tiene que ser, $1+3+5+...+25 = 13^2$, tenemos una terna pitagórica, es decir tres medidas enteras que son los lados de un triángulo rectángulo, siendo 13 la hipotenusa. Ese triángulo es único (sólo hay una forma de escribir $13^2$ como suma de dos cuadrados de naturales positivos) y es el famoso triángulo (5, 12, 13). Luego $p = 9;\ q = 23$.

**13.(B)** Sean $x = A\hat{D}C$; $y = E\hat{A}D$; $t = C\hat{A}E$; $z = D\hat{C}A$ $D\hat{A}C = z$. Tenemos que los triángulos *ADC* y *ADB* son isósceles. Por tanto $D\hat{A}B = \frac{x}{2}$;




$t = y + \frac{x}{2}$; $x + y = 60º$; $z = t + y$; $z + t = 120º$; De las dos últimas ecuaciones obtenemos que $z = 60º + \frac{y}{2}$, y $t = 60º - \frac{y}{2}$. Como $x = 60º - y$, sustituyendo en la 2ª ecuación nos queda que: $60º - \frac{y}{2} = y + 30º - \frac{y}{2}$; de donde $y = 30º$, y por ende $x = 30º$.

**14.(C)** Tres dibujos parecen posibles:




Que la diagonal 2 sea el lado desigual de los dos triángulos isósceles, pero eso daría lugar a un imposible triángulo de lados, 1, 1 y 2.

Que la diagonal 2 sea uno de los lados iguales de uno de los triángulos y el desigual del otro.

Que la diagonal 2 sea el lado igual en los dos triángulos dando lugar a un imposible triángulo, 2, 2 y 4.

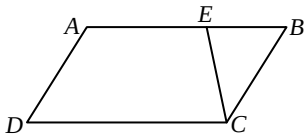
Por tanto la única opción posible es la segunda.

**15.(E)** Para que el producto sea negativo tendremos que sacar positivo en la primera tirada y negativo en la segunda o al revés. La probabilidad será: $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

**16.(E)** Para ser divisible por 36 hay que serlo por 4 y por 9. Así, para ser múltiplos de 4, nuestros números deberán acabar en 40, 44 o 48. Para serlo de 9 en el primer caso tendremos a 6840; 6444 en el segundo y 6048, o 6948 en el tercero.

**17.(D)** Si la media es $x$ tenemos que $8 + 10 + 24 + 28 + 23 + 9 + x = 7x$ , de donde, $102 + x = 7x$ , y por tanto $x = 17$ . Solo queda comprobar que el problema está bien puesto y que también 17 es la mediana del conjunto de números.

**18.(B)** Si $AE = \frac{3}{2}EB$, entonces $Ab = \frac{3}{2}EB + EB = \frac{5}{2}EB$ .

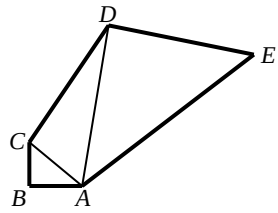



Llamando c a la medida $EB$, el área del trapecio es, $\frac{\frac{5}{2}c + \frac{3}{2}c}{2} \cdot h = 2c \cdot h$ , y $\frac{5}{2}c \cdot h$ la del paralelogramos. Luego la razón de áreas es de 2 a $\frac{5}{2}$, o mejor de 4 a 5.

**19.(D)** Tenemos que $abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104$. Son siete sumandos que suman par. Eso impide que alguno de los números, $a$, $b$ o $c$, sea impar. Si sólo fuera c impar, entonces tendríamos seis sumandos pares y uno impar. Si fueran impares $b$ y $c$, lo serían tres sumandos ($b$, $c$ y $bc$). Si $a$, $b$ y $c$ fueran impares los siete sumandos lo serían. Al tener que ser los tres pares, los cuatro primeros productos serán múltiplos de 4, y como 104 también lo es, tendremos lo propio para $a + b + c$. Razonemos con esa suma:
Si $a + b + c = 8$, los tres números serían 2, 2 y 4 y con eso la suma no llega a 104.
Si $a + b + c = 12$, la terna de números podría ser 4, 4 y 4, pero entonces la suma pasa de 104; podría ser 2, 4 y 6, y ésta funciona. Habría que descartar otras sumas y otras ternas (por ejemplo, 2, 2, 8 o 2, 2, 12) para ver que el problema está bien propuesto y que la solución es $2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$ .

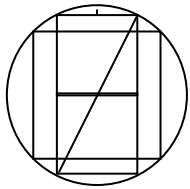
**20.(B)** Por Pitágoras, $CA = 5$, $DA = 13$, lo que nos deja $188 - 3 - 4 - 12 = 169$ , para la suma $EA + DE$ . Como $ADE$ es un triángulo rectángulo:

$DA^2 = 169 = EA^2 - DE^2 = (EA + DE) \cdot (EA - DE) = 169 \cdot (EA - DE)$ , y así tenemos que, $EA + DE = 169$, y $EA + DE = 1$, de donde $EA = 85$, $DE = 84$. El área del pentágono es: $\frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{13 \cdot 84}{2} = 582.$



**21.(D)** Si hay un número, *n*, impar de filas, la suma de los alumnos de todas las filas es *n* veces el de alumnos de la de en medio. Y como 630 es múltiplo de 3, de 5 y de 7, esos números de fila son posibles. Cuando el número, n, de filas es par, la suma de los alumnos de todas las filas es $\frac{n}{2}$ veces la suma de los alumnos de las dos filas de en medio. Si *n* es 4, la suma de esas dos filas sería 315 y ello es posible, pero no lo es si $n = 6$, ya que entonces la suma sería 210 y al diferenciarse en tres alumnos las filas, una tendría un número par y otra un número impar de alumnos.

**22.(B)** El cuadrado grande tiene por diagonal el diámetro de la circunferencia y como rombo su área es $\frac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2$.



Si al cuadrado pequeño le añadimos su simétrico respecto al centro de la circunferencia obtenemos un rectángulo inscrito de diagonal 2*R*, base *a* y altura 2*a*, teniéndose la relación pitagórica: $(2R)^2 = a^2 + (2a)^2$, de donde $5a^2 = 4R^2$. El área del cuadrado es $a^2$, luego el cociente de áreas pedido es: $(2R^2) : \left(\frac{4R^2}{5}\right) = \frac{5}{2}$.

**23.(C)** La suma, $1 + 2 + 3 + ... + 26 = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351$. Si quitamos dos de ellos, *n* y *m*, la suma estará entre 300 y 348, y el producto de los dos números quitados tendrá ese valor. Para ello el menor, *n*, será mayor que 11 (11·26 = 286) y menor que 19 $(19 \cdot 20 = 380)$. Entonces $24 < n + m < 47$, y así afinamos la suma, *S*, de los restantes. Se verifica que, $305 < S < 326$. Vayamos de 1 en 1:

Si *n* = 12, *S* debe ser múltiplo de 12 y sólo puede ser 312 o 324, con lo cual *m* será 26 o 27 (27 no puede ser). Quitando 12 + 26 = 38 a 351, obtenemos 313.
Si *n* = 13, *S* debe ser múltiplo de 13 y sólo puede ser 312 o 325, con lo cual *m* será 24 o 25. Quitando 13 + 24 = 37, o 13 + 25 = 38, a 351, obtenemos 314 o 313.
Si *n* = 14, *S* debe ser múltiplo de 14 y sólo puede ser 308 o 322, con lo cual *m* será 22 o 23. Quitando 14 + 22 = 36, o 14 + 23 = 37, a 351, obtenemos 315 o 314 .
Si *n* = 15, *S* debe ser múltiplo de 15 y sólo puede ser 315 con lo cual *m* será 21. Quitando 15 + 21 = 36 a 351, obtenemos 315 (hemos resuelto el enigma). El mcm de 15 y 21 es 15·7 = 105.

**24.(C)** La sucesión es: 1, –1, –1, 1, –1, –1, ... Se repite la secuencia 1, –1, –1. Así los 1 ocupan los lugares múltiplos de 3. Hasta 2013, tendremos, 671 unos y el doble de unos negativos, con lo cual la suma de todos será – 671. Si le añadimos el 1 de la posición 2014, obtendremos – 670.

**25.(E)** Nadal ganará en las secuencias GGG, GGPG, GPGG, PGGG, GGPPG, GPGPG, PGGPG, GPPGG, PGPGG, PPGGG. En tres set su probabilidad es $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. En cuatro set es $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{24}{81}$. En cinco set es $6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{48}{243} = \frac{16}{81}$. Su probabilidad de ganar se obtiene sumando las probabilidades anteriores, $\frac{64}{81}$.

# XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* IV

**1. (E)** Al ser $a_1 \cdot a_4 = a_1 \cdot a_1 r^3 = a_1 r \cdot a_1 r^2 = a_2 \cdot a_3$, sigue que $a_4 = \dfrac{a_2 \cdot a_3}{a_1} = \dfrac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[6]{7}}{\sqrt{7}} = \sqrt[6]{\dfrac{7^2 \cdot 7}{7^3}} = 1$.

**2. (E)** Si $x \cdot y = 105$ y ambos factores son enteros positivos, resulta que los posibles valores de la pareja $\{x, y\}$ son: $\{1, 105\}$, $\{3, 35\}$, $\{5, 21\}$, $\{7, 15\}$.
Al ser 13 cm la longitud del tercer lado, la diferencia entre $x$ e $y$ siempre será menor que 13, por lo que la única solución posible es $\{x, y\} = \{7, 15\}$.
El perímetro de dicho triángulo sería 13 + 7 + 15 = 35 cm.

**3. (B)** Si el número de aristas de la base es $a$, el total del número de aristas del prisma será $a + a + a = 3a$ y la única respuesta múltiplo de 3 serían 6 y 2010 pero, obviamente 6 no puede ser al no poder ser 2 el número de lados del polígono de la base. Así pues la respuesta es 2010.

**4. (C)** Si $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, resulta que $x \cdot y = 0$ y los puntos $(x, y)$ que verifican esta igualdad son los de las rectas $x = 0$ e $y = 0$.

**5. (B)** Tenemos que $25^{-2} = \dfrac{5^{\frac{48}{x}}}{5^{\frac{26}{x}} \cdot 25^{\frac{17}{x}}} \Leftrightarrow 5^{-4} = 5^{\frac{-26}{x}} \cdot 5^{\frac{-34}{x}} \cdot 5^{\frac{48}{x}}$ es decir $-4 = \dfrac{-12}{x} \Rightarrow x = 3$.

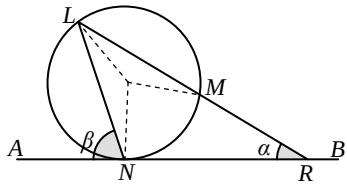
**6. (C)** $A = 98! \cdot 99! = (98!)^2 \cdot 99$; $B = 98! \cdot 100! = (98!)^2 \cdot 99 \cdot 10^2$; $C = 99! \cdot 100! = (99!)^2 \cdot 10^2$ que efectivamente es el cuadrado de $99! \cdot 10$.

**7. (A)** Nos dicen que $3(10a + b) < 10b + a$, es decir, $29a < 7b$. Al ser $\overline{ab}$ un número de dos cifras, $a > 0$ y la desigualdad anterior no se verifica si $a \geq 3$, por lo que $a = 1$ ó $a = 2$, resultando que si $a = 1$, $b = 5, 6, 7, 8$ ó $9$ y si $a = 2$, $b = 9$.
En total hay 6 números $\overline{ab}$ con la propiedad requerida.

**8. (B)** Como $ac = 46 - b$ y $abc = 240$ resulta que $b(46 - b) = 240 \Leftrightarrow b^2 - 46b + 240 = 0$
Las soluciones de esta ecuación son $b_1 = 40$ y $b_2 = 6$.
Si $b = 40$ entonces $ac = 6$ cuyas soluciones enteras no verifican la tercera igualdad $a + bc = 64$.
Luego $b = 6$ y $ac = 40$. De la igualdad $a + 6c = 64$ se deduce que $a = 64 - 6c$ y entonces $c(64 - 6c) = 40 \Leftrightarrow 6c^2 - 64c + 40 = 0$ cuya única solución entera es $c = 10$ y por lo tanto $a = 4$. La suma pedida $a + b + c$ es 4 + 6 + 10 = 20.
Otra manera de llegar a este resultado podría ser ésta.

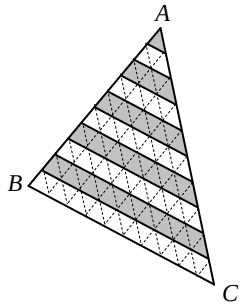
Sumando las dos últimas igualdades, resulta que $ac + b + a + bc = 110$, es decir, $(a + c)(c + 1) = 110$ y al ser $a$, $b$ y $c$ enteros positivos las únicas opciones posibles, en principio, para $(a + b)$ y $(c + 1)$ son: $\{a + b, c + 1\} = \{55, 2\}$ o $\{11, 10\}$.
Por otra parte, $c$ es un divisor de 240, con lo que $c + 1 \neq 55$ y $c + 1 \neq 10$, de donde $a + b = 55$ y $c = 1$ o bien $a + b = 10$ y $c = 10$.
De la primera opción resultaría $ab = 240$ y de la segunda $ab = 24$.
Como $a + b = 55$, $ab = 240$ no tiene solución en enteros ($x^2 - 55x + 240 = 0$ no las tiene) tenemos que $a + b = 10$, $ab = 24$, con lo que $\{a, b\} = \{6, 4\}$ y $c = 10$.
Ahora ya tenemos $a + b + c = 20$.

**9. (A)** Al ser $LM = LN$, si $O$ es el centro de la circunferencia, resulta que los triángulos $OLN$ y $OLM$ son iguales. Por otra parte $O\hat{N}A = 90^\circ$, por lo que $O\hat{N}L = 90^\circ - \beta$ y $N\hat{L}M = 2(90^\circ - \beta) = 180^\circ - 2\beta$. Así pues los tres ángulos del triángulo $LNR$ miden $180^\circ - 2\beta$, $180^\circ - \beta$ y $\alpha$.




Por lo tanto $360^\circ - 3\beta + \alpha = 180^\circ$, o sea, $180^\circ + \alpha = 3\beta$.

**10. (C)** Trazando paralelas a los lados $AB$ y $AC$ por los puntos de división de dichos lados, el triángulo queda dividido en $1 + 3 + \ldots + 19$ triángulos iguales de los cuales están sombreados $1 + 5 + \ldots + 17$.
Así pues, la fracción del área sombreada es $\frac{1+5+9+\ldots+17}{1+3+5+\ldots+19} = \frac{45}{100} = 45\,\%$.



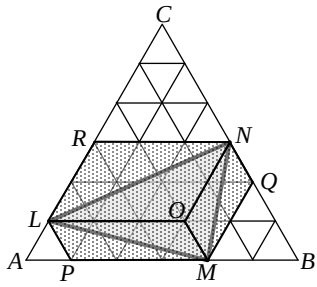

**11. (C)** Como $AC$ es una de las diagonales pequeñas de longitud $\sqrt{50}$ podemos aplicar el teorema del coseno en el triángulo $ABC$ para calcular el lado, $x$, del hexágono.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\hat{B} \Rightarrow 50 = x^2 + x^2 - 2x^2\cos 120^\circ = 2x^2 + 2x^2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$50 = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{50}{3}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$, Como el área del hexágono regular es $S = 6\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, resulta que $S = 6\cdot\frac{\frac{50}{3}\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$.

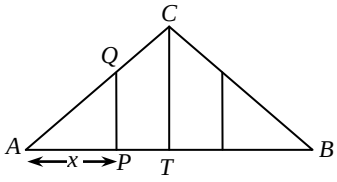
**12. (D)** Hay 15 casos en los que en el tercer lanzamiento se obtiene la suma de los dos anteriores, en concreto, (1,1,2), (1,2,3), (2,1,3), (1,3,4), (2,2,4), (3,1,4), (1,4,5), (2,3,5), (3,2,5), (4,1,5), (1,5,6), (2,4,6), (3,3,6), (4,2,6), (5,1,6). En 7 casos de ellos no aparece el número 2, por lo que la probabilidad pedida es $\frac{7}{15}$.

**13. (A)** El área del triángulo es la mitad del área del hexágono *LPMQNR* formado por tres romboides *LONR*, *LPMO* y *OMQN* de áreas respectivas 12, 6 y 4, por lo que el área del triángulo *LMN* es: $S=\frac{1}{2}(12+6+4)=11$.




**14. (D)** Si $N=\overline{abcd}$, nos dicen que $\overline{bcd}=\frac{1}{9}\overline{abcd} \Leftrightarrow 9\left(\overline{bcd}\right)=\overline{abcd}$, es decir, $9(100b+10c+d)=1000a+100b+10c+d \Leftrightarrow 8(100b+10c+d)=1000a$, con lo que $100b+10c+d=125a$. Así pues, la cifra *a* podrá tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 dando lugar a siete números distintos.

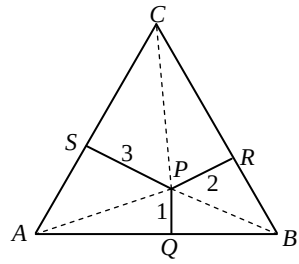
**15. (A)** Los triángulos *APQ* y *ATC* son semejantes y el área del *ATC* es el doble del área del *APQ* por lo que la razón de semejanza es $\sqrt{2}$, así que $\frac{AT}{x}=\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{AT}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.



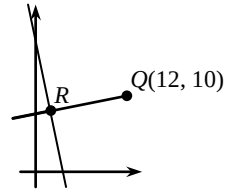

**16. (E)** Nos dicen que $\frac{a}{1-r}=7$ y que $\frac{ar}{1-r^2}=3$.

Así pues $\frac{ar}{1-r^2}=\frac{a}{1-r}\cdot\frac{r}{1+r}=7\cdot\frac{r}{1+r}=3\Rightarrow r=\frac{3}{4}$. Como $\frac{a}{1-r}=7$ resulta que $\frac{a}{1-\frac{3}{4}}=7\Rightarrow a=\frac{7}{4}$ con lo que $a+r=\frac{5}{2}$.

**17. (D)** Uniendo *P* con los vértices *A*, *B*, *C* del triángulo lo descomponemos en tres triángulos de alturas, sobre los lados del triángulo equilátero *ABC*, 1, 2 y 3. Llamando $x = AB$ y teniendo en cuenta que el área del triángulo equilátero es $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ resulta que $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}3x = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$.




**18. (B)** El ratón se para en el pié de la perpendicular desde *Q* a dicha recta. Este punto *R* será la intersección de la recta $y = 18 - 5x$ con $y - 10 = \frac{1}{5}(x - 12)$. Resolviendo el sistema se obtiene $18 - 5x = \frac{1}{5}(x - 12) \Rightarrow x = 2$ y sustituyendo $y = 18 - 10 = 8$. El punto *R* es (2, 8) y la suma de sus coordenadas 10.




**19. (A)** El triángulo es rectángulo por ser semejante al de lados 3, 4 y 5 (terna pitagórica). Si está inscrito en un círculo de radio 3, la hipotenusa, que es el diámetro, es 6. Utilizando la proporcionalidad de los lados se obtiene la longitud de los catetos $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{6}{5} \Rightarrow x = \frac{18}{5},\ y = \frac{24}{5}$ y el área $S = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}\cdot\frac{24}{5}\right) = \frac{216}{25} = 8{,}64$.

**20. (C)** Llamando *p* a la probabilidad de obtener 1, las probabilidades de obtener 2, 3, 4, 5, y 6 son 2*p*, 3*p*, 4*p*, 5*p* y 6*p*, respectivamente, luego $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$ y de aquí $p = \frac{1}{21}$. Como el suceso de obtener suma 7 está formado por los sucesos elementales (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) y (6,1), la probabilidad pedida será:

$$P(s = 7) = 2\cdot\left(\frac{1}{21}\cdot\frac{6}{21} + \frac{2}{21}\cdot\frac{5}{21} + \frac{3}{21}\cdot\frac{4}{21}\right) = \frac{2\cdot 28}{21^2} = \frac{8}{63}.$$

**21. (D)** Si $x = 0$, $y = -t$ por lo que $c = -t$. Por otra parte la abscisa del vértice de la parábola es $\frac{-b}{2a} = t$ y como además $(t, t)$ es de la parábola, $at^2 + bt - t = t$.

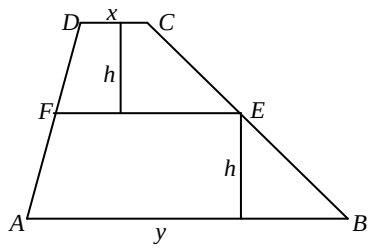
Como $t \neq 0$ y además $b = -2at$ resulta $at - 2at = 2 \Rightarrow at = -2$ y por lo tanto $b = 4$.

**22. (B)** Si $a-8$, $a-7$, $a-6$,…, $a$, $a+1$,…, $a+9$, con $a>8$, son los 18 enteros dados, su suma es $18a+9=9(a+1)$.
Como 9 es un cuadrado perfecto, también tendrá que serlo $a+1$ y el menor valor de $a>8$ que lo verifica es $a=15$ por lo que la suma es $S=9\cdot 16=225$.

**23. (E)** $120-\sqrt{x}$ debe ser un cuadrado perfecto menor o igual que 120 y como de éstos hay 11 (desde $0^2$ a $10^2$), resulta que habrá 11 números $x$ con la propiedad buscada.
Estos números son las soluciones de las ecuaciones $120-\sqrt{x}=0$, $120-\sqrt{x}=1$, $120-\sqrt{x}=4$,…, $120-\sqrt{x}=100$.

**24. (A)** $\cos(x+z)=\cos x\cdot\cos z-senx\cdot senz=\dfrac{1}{2}$. Como $\cos x=0$, $\operatorname{sen} x=\pm 1$ y por lo tanto $-senx\cdot senz=\mp senz=\dfrac{1}{2}\Rightarrow senz=\mp\dfrac{1}{2}$. El menor valor positivo de $z$ que verifica esta igualdad es $z=\dfrac{\pi}{6}$.

**25. (C)** Llamando $x$, $y$, $h$, como en la figura, resulta que los cuadriláteros $ABEF$ y $FECD$ son trapecios en donde $FE=\dfrac{x+y}{2}$.




Así pues, $\dfrac{y+\frac{x+y}{2}}{2}\cdot h=2h\cdot\dfrac{\frac{x+y}{2}+x}{2}$, es decir,
$\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}x=3x+y\Rightarrow 5x=y\Rightarrow\dfrac{y}{x}=5$.

# Participantes y relación de ganadores del XVIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Como ya es habitual la participación de estudiantes en el Concurso de Primavera es muy numerosa y a pesar de la satisfacción que nos produce ver a tantos entusiastas de las Matemáticas, nos hemos visto obligados, por problemas de tiempo y espacio, a limitar la participación de concursantes en la segunda fase. En la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes y 500 centros participantes.

Aunque se inscribieron cerca de 3000 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 2653. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | NIVEL 2 | | NIVEL 3 | | NIVEL 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | | 1º ESO, 2º ESO | | 3º ESO, 4º ESO | | 1º B, 2º B | |
| nº de participantes | 196 | 457 | 271 | 544 | 298 | 446 | 279 | 162 |
| Totales por nivel | 653 | | 815 | | 744 | | 441 | |

Los tres, y en algún caso hasta siete, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

1. Andrés Villegas Taillafer (6º Primaria) Colegio San Agustín
2. Jimena Lozano Simón (5º Primaria) Colegio Alemán
3. Javier Artero Mompó (6º Primaria) Colégio Everest
3. Daniel Carreño López (6º Primaria) Colégio Casvi
3. Pablo Mateo Torrejón (6º Primaria) CEIP Gonzalo Fernández de Córdoba
3. Beltrán Meliá García (6º Primaria) Colégio Retamar
3. David Sánchez González (6º Primaria) CEIP Andrés Segovia

**NIVEL II**

1. Alejandro Epelde Blanco (2º ESO) Montessori School Los Fresnos
2. Diego Sierra Corredera (2º ESO) Colegio San José del Parque
3. Alberto Pérez Mugía (1º ESO) Colégio Amor de Dios

**NIVEL III**

1. Daniel Puignau Chacón (4º ESO) IES Alameda de Osuna
2. Jialín Yang (4º ESO) Colegio Liceo San Pablo
3. Saúl Rodríguez Martín (3º ESO) Colegio Villa de Griñón

**NIVEL IV**

1. Ángel Prieto Naslín (2º Bchto) Liceo Francés
2. Marc Isern Hacker (1º Bchto) Colegio Alemán
3. Janos Meny (2º Bachto) Colegio Alemán

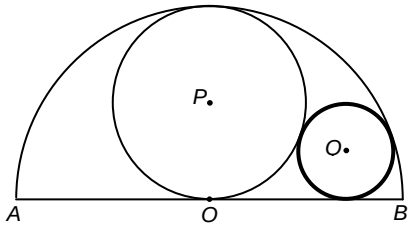
# XXXII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 14 de junio de 2014

## NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

En la figura adjunta puedes ver una semicircunferencia de centro *O* y diámetro *AB*, una circunferencia de centro *P* tangente a ella y a su diámetro *AB*, y una circunferencia de centro *Q* tangente a *AB*, a la semicircunferencia y a la circunferencia de centro *P*.
Si *OB* = 2, calcula el radio de la circunferencia de centro *Q*.




**Problema 2.**

¿Cuántos números de diez cifras, que terminan en 2014, son múltiplos de 2014?

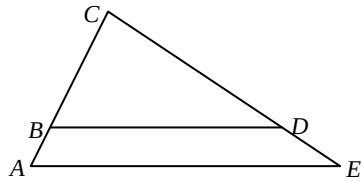
## NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)

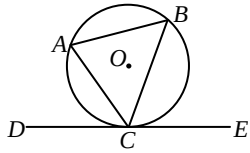
Escribe el número $\dfrac{3\sqrt{22}\sqrt{23}\sqrt{24}\sqrt{25}}{\sqrt{44}\sqrt{45}\sqrt{46}}$ como $\sqrt{b}$ en donde *b* es un número entero.

**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea *T* el número *b* del problema anterior.
En el triángulo *ACE* de la figura, el segmento *BD* es paralelo al lado *AE*. Si *CD* = *T*, *DE* = 10 y el área del triángulo *ACE* es 320, calcula el área del trapecio *ABDE*.



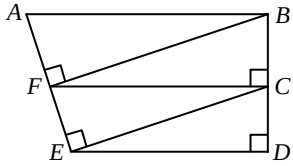
**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
En la figura adjunta, la recta *DE* es tangente a la circunferencia de centro *O* en el punto *C*, las cuerdas *AB* y *AC* tienen igual longitud y el ángulo $B\hat{C}E = \left(\frac{T}{2}\right)^o$.



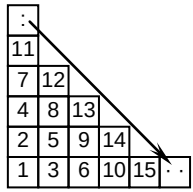

Calcula el valor del ángulo $A\hat{C}B$.

**Problema 1B.** (1 punto)
Calcula el valor de $\frac{\left(101^4-4\right)\left(101^4-1\right)}{\left(101^2-2\right)\left(101^2-1\right)} - \frac{\left(101^4-4\right)\left(101^4-1\right)}{\left(101^2-2\right)\left(101^2+1\right)}$.

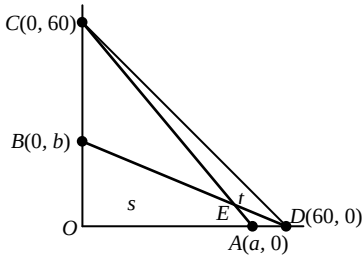
**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *n* la suma de las cifras de *T*.
El trapecio *ABDE* está dividido en cuatro triángulos rectángulos como se muestra en la figura. Si $CD = \frac{n}{2}$ y *DE* = 2*CD*, calcula el área de dicho trapecio dando el resultado en forma de fracción irreducible.




**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea $T = \frac{a}{b}$, irreducible, la respuesta del problema anterior y $k = a + b$.
Ordenamos por diagonales los números naturales en una cuadrícula, como se muestra en la figura. Si tomamos como eje de abscisas la fila de abajo (1, 3, 6, 10,…) y como eje de ordenadas la columna de la izquierda (1, 2, 4, 7,…) diremos que, por ejemplo, las coordenadas del número 9 son (2, 1), las del 5 (1, 1) y las del número 16 serán (0, 5). ¿Cuáles serán las coordenadas del número *k*?




**Problema 4.** (5 puntos)
Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *b* la suma de las coordenadas de la respuesta del problema **3B**.
Si llamamos "*t*" al área del triángulo *CED* y "*s*" al área del cuadrilátero *OAEB*, calcula *s* – *t*.



**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

Un triángulo isósceles tiene una mediana de 15 cm y una altura de 24 cm. Calcula el área de cada uno de los dos triángulos determinados con estos datos.

**Problema 2.**

Las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, con $b \neq c$, son los números reales $r$ y $s$, y las soluciones de la ecuación $x^2 + cx + b = 0$ son los números reales $r$ y $t$. Calcula $s + t$.

**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)

El área de un octógono regular es $2 + 2\sqrt{2}$. Calcula la longitud del lado de dicho octógono.

**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Calcula el número de raíces reales de la ecuación $x^3 + (T+1)x^2 + (T+1)x + 1 = 0$.

**Problema 3A.** (2 puntos)

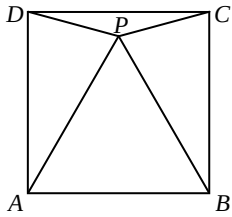
Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Calcula $\lg_3 2 \cdot \lg_8 27 + \lg_3 2 \cdot \lg_4 5 \cdot \lg_{25} T$.

**Problema 1B.** (1 punto)

El número positivo $x$ expresa la medida, en grados sexagesimales, de un ángulo. Calcula el menor número $x$ que verifica $sen x = \cos(x^2)$.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. En la figura se observa un cuadrado *ABCD* y un triángulo equilátero *ABP*. Si el área del triángulo *PBC* es $T$, calcula la suma de las áreas de los triángulos *ABP* y *PCD*.




**Problema 3B.** (2 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Calcula el número de puntos reticulares que hay en el interior del triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = T$.

Notas. 1.- Se llaman puntos reticulares a los que tienen sus coordenadas enteras.
2.- Los puntos interiores de un triángulo no pertenecen a ninguno de sus lados.

**Problema 4.** (5 puntos)
Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *s* la suma de los dígitos de la respuesta del **3B**.
Desde un punto A de un río comienza a moverse una lancha a favor de la corriente con velocidad respecto de la orilla $v = \frac{s}{a}$ km/h. En el mismo instante un bote que se encuentra en un punto B, aguas abajo, comienza a moverse, también con velocidad constante, al encuentro de la lancha y se encuentran en un punto C situado entre A y B, tal que AC = 5·CB.
Si la lancha hubiera salido desde el punto B y el bote desde el punto A se habrían encontrado en un punto D tal que AD = DB. Calcula la velocidad de la lancha y del bote en aguas quietas.

**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.**

En las rectas $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ marcamos, respectivamente, los puntos *P* y *Q* de coordenadas enteras positivas, ambas menores que 99. Calcula el número de parejas (*P*,*Q*) tales que los puntos *A* y *B* que dividen al segmento *PQ* en tres partes iguales tengan también sus coordenadas enteras.

**Problema 2.**

Encuentra, si existen, cuatro enteros positivos consecutivos cuyo producto sea el mismo que el de otros dos enteros positivos consecutivos o justifica que no existen.

**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Calcula el mayor entero *n* tal que $\left[\sqrt[n]{2014}\right] > 1$. (Recuerda: $[x]$ es la parte entera de *x*.

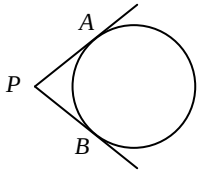
**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Obtén la mayor solución de la ecuación $(\lg_T x)^2 = \lg_T x^2$.

**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Si *n* es un entero con $1 \le n \le 10T$, calcula el número de valores de *n* para los que el producto $\left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right)$ es divisible entre 5.

**Problema 1B.** (1 punto)
Si $0 < x < 2\pi$, $x \neq \pi$, calcula el valor absoluto de la diferencia entre las soluciones de la ecuación $\sec x = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \ldots$ .

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y $k = \dfrac{4\pi}{T}$.
Si $\left(a - bi\right)^k \cdot \left(a + bi\right)^k = 512$ , calcula el valor de $a^2 + b^2$.

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior
Desde el punto *P* exterior a la circunferencia hemos trazado las tangentes *PA* y *PB* a dicha circunferencia. Si el cociente entre el mayor y el menor de los arcos *AB* es *T* + 1, obtén el cociente entre el ángulo central correspondiente al menor de dichos arcos y el ángulo $A\hat{P}B$.




**Problema 4.** (5 puntos)
Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *b* la respuesta del problema **3B**.
Un trapecio tiene tres lados iguales cuyas medidas vienen expresadas con números enteros, siendo uno de ellos la base menor. Si el perímetro del trapecio es *a*(1 – *b*) y el área $k\sqrt{k}$ , con *k* también entero, calcula el valor de *k*.

**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

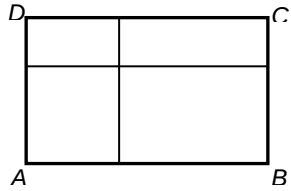
22 de noviembre de 2014

**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** Si $x$ e $y$ representan cifras distintas de cero, encuentra todos los números de siete cifras de la forma $yxyxyxy$ divisibles por 18 y que verifican que el número formado por las cinco cifras centrales, es decir, el $xyxyx$ es divisible por 3.

**2.** Encuentra el número de tres cifras $N = [abc]$, $a \neq 0$, tal que dicho número $N$ sea igual a $b \cdot (10c + b)$ y tanto $b$ como $(10c + b)$ sean números primos.

**3.** El rectángulo $ABCD$ está dividido en cuatro rectángulos como muestra la figura. Los perímetros de tres de estos rectángulos son 11, 16 y 19 cm y el cuarto no es ni el de mayor ni el de menor perímetro de los cuatro. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo $ABCD$?

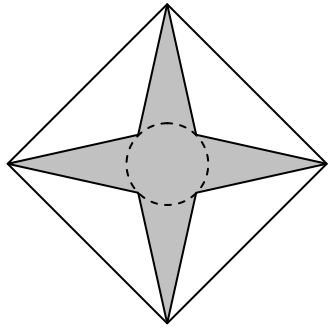


**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

22 de noviembre de 2014

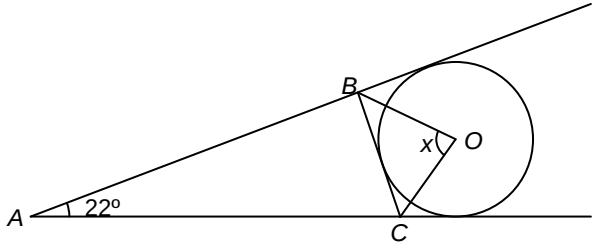
**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** La figura adjunta muestra una estrella simétrica de cuatro puntas. Las cuatro puntas de la estrella son los vértices de un cuadrado de 24 cm de lado y los otros cuatro vértices de la estrella están en una circunferencia. Si el área de la estrella (sombreada) es un tercio del área del cuadrado, calcula el radio de la circunferencia.



**2.** Halla un número de tres cifras, N = [*abc*], tal que al multiplicarlo por 3 y sumarle 1, resulte el número leído al revés, es decir, 3N + 1 = [*cba*].

**3.** En la figura se observa un triángulo *ABC* y una circunferencia de centro *O* tangente al lado *BC* y a las prolongaciones de los lados *AB* y *AC* de dicho triángulo. Si el ángulo $B\hat{A}C$ es de 22º, calcula la medida del ángulo $x = B\hat{O}C$.



## XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

22 de noviembre de 2014

**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato (45 minutos)

**1.** La circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo toca a la hipotenusa en un punto *P*. Este punto divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitudes *a* y *b*. Calcula, en términos de *a* y *b*, el área de dicho triángulo.

**2.** Si *a* y *b* son números mayores que 1, con $a < b$, encuentra el menor valor de *b* para que no haya ningún triángulo de lados 1, *a* y *b* ni de lados $\frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ y 1.

**3.** Antonio, Beatriz y Carolina juegan seis partidas de un determinado juego en el que en cada partida solo puede haber un ganador. Si la probabilidad de que gane Antonio en cada partida es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que gane Beatriz es doble de la que gane Carolina, calcula la probabilidad de que Antonio gane 3 partidas, Beatriz 2 y Carolina 1.

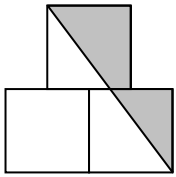
**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

22 de noviembre de 2014

**PRUEBA INDIVIDUAL** 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

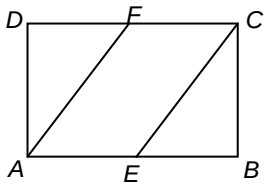
**1.** En un concurso de problemas participaron solamente estudiantes de 1º, 2º y 3º de la ESO. El cociente entre el número de participantes de 3º y de 1º fue de $\frac{5}{3}$, el cociente entre el número de participantes de 3º y de 2º fue de $\frac{8}{5}$. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, participaron en dicho concurso?

**2.** En la figura adjunta se observan tres cuadrados iguales estando el de arriba justo en medio de los otros dos. Calcula el cociente entre el área de la región sombreada y la suma de las áreas de los tres cuadrados.



**3.** Cuando dividimos 113 744 y 109 417 entre el número de tres cifras *N*, obtenemos de restos 119 y 292, respectivamente. Calcula el número *N*.

**4.** En el rectángulo *ABCD* de la figura, de dimensiones 40 y 30 cm, hemos dibujado el paralelogramo *AECF* en el que los lados *AF* y *EC* son perpendiculares a la diagonal *BD* de dicho rectángulo. Calcula el área del paralelogramo *AECF*.




**5.** Escribe todas las parejas de enteros positivos, *x* e *y*, tales que $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$.

**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

22 de noviembre de 2014

**PRUEBA INDIVIDUAL** 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

**1.** ¿Cuántas parejas de capicúas de tres cifras verifican que su suma es un capicúa de cuatro cifras?
(Por ejemplo, 232 y 989 sería una de ellas ya que 232 + 989 = 1221).

**2.** En un sistema de coordenadas dibujamos un cuadrado de vértices $A(a, 0)$, $B(b, 1)$, $C(c, 5)$ y $D(d, 4)$. Calcula su área.

**3.** ¿Cuántos números de cuatro cifras verifican que el producto de ellas es 60?

**4.** En el rectángulo $ABCD$, con $AB = 20$ y $BC = 10$ marcamos un punto $E$ en el lado $CD$ de manera que el ángulo $C\hat{B}E$ sea de 15º. Calcula la longitud del segmento $AE$.

**5.** Los números positivos $p$, $q$ y $r$ verifican que $pq + pr = 80$ y $pq + qr = 425$. Calcula $p + q + r$.

**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

22 de noviembre de 2014

**PRUEBA INDIVIDUAL** Bachillerato (90 minutos)

**1.** En el triángulo equilátero de lado $2014\sqrt{3}$ se traza la circunferencia inscrita. Calcula el diámetro del mayor de los círculos que cabe en una de las regiones comprendidas entre dicho triángulo y la circunferencia inscrita.

**2.** ¿Cuántas fracciones positivas, menores que 1, verifican que al escribirlas en forma irreducible resulta que la suma del numerador y del denominador es 1000?

**3.** Calcula el número de enteros positivos *x* que verifican que $\lg_{10}(x-40)+\lg_{10}(60-x)<2$.

**4.** Alicia puede pintar, ella sola, una habitación en 15 horas, Beatriz es el 50 % más rápida que Alicia pintando y Carlos es el doble de rápido que Alicia. Empieza Alicia a pintar la habitación, al cabo de una hora y media se le suma Beatriz y, cuando llevan pintada la mitad de la habitación, entra Carlos y las ayuda hasta que entre los tres terminan de pintar la habitación. ¿Cuánto tiempo transcurrió desde que empezó Alicia hasta que terminaron de pintar la habitación?

**5.** Si *a, b, c* y *d* son enteros positivos que suman 63, calcula el máximo valor para *ab* + *bc* + *cd*.

**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

22 de noviembre de 2014

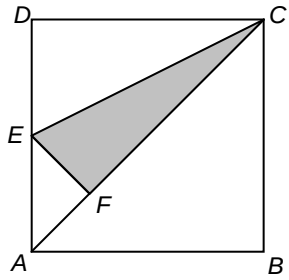
**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** Calcula el valor de la cifra *A* si el número de cinco cifras 12*A*3*B* es divisible por 4 y por 9 y *A* es distinta de *B*.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 2B
Si *a, b, c* y *d* representan enteros positivos diferentes, con $a + b + 2c = 9$ y $a + c + d = 10$, calcula el valor de *d* sabiendo que $b = \frac{T}{4}$.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 2C.
En el cuadrado *ABCD* de la figura de lado $\frac{T}{50}$, *E* es el punto medio del lado *AD* y *EF* es perpendicular a la diagonal *AC*. Calcula el área del triángulo *EFC*.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**



**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

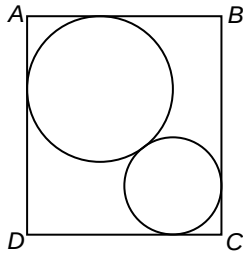
22 de noviembre de 2014

**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**3º y 4º de ESO.-**

.

**2A.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 3A y *r* la suma de las cifras de *T*.
En el interior del rectángulo *ABCD* de la figura, con *AB* = 27 y *AD* = 24, hay dos circunferencias tangentes entre sí y a los lados del rectángulo, como muestra la figura. Si el radio de la pequeña es *r*, calcula el radio de la mayor.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**




**2B.-** En una recta marcamos, de izquierda a derecha, los puntos *A, B, C, D* y E en ese orden.
Si $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}, \frac{BC}{CD}=\frac{1}{4}$ y $\frac{CD}{DE}=\frac{1}{2}$, calcula el numerador de la fracción irreducible $\frac{AC}{BE}$.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 3C.
El ángulo formado por la mediana *CM* y la hipotenusa, *AB*, del triángulo rectángulo *ABC* es de 30º. Si la altura *CH* es $\sqrt[4]{T}$, calcula el área de dicho triángulo.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

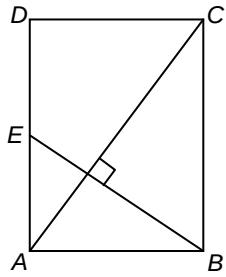
**XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

22 de noviembre de 2014

**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 1A.
En el rectángulo *ABCD* de la figura, *AB* = 100T y *E* es el punto medio de *AD.* Si las rectas *AC* y *BE* son perpendiculares, calcula el mayor entero menor que *AD*.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**




**3B.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 1B.
Las gráficas de las funciones $y = 3(x-h)^2 + j$; $y = (T-3)(x-h)^2 + k$ cortan al eje de ordenadas en los puntos (0, 2013) y (0, 2014), respectivamente. Si ambas funciones tienen dos raíces enteras, calcula *h*.
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** A partir de una determina fecha, el número de habitantes de una ciudad crece en 1200 personas y, al año siguiente, decrece en un 11 %, teniendo entonces 32 habitantes menos que al principio. Calcula la población inicial de la ciudad.
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

## CENTROS GANADORES

1. Colegio Alemán de Madrid
2. IES San Juan Bautista (Equipo A)
3. IES Diego Velázquez

## ESTUDIANTES GANADORES

NIVEL I (1º, 2º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Pablo Soto Martín | (IES José Luis Sampedro) |
| 2. | María Moya Gómez | (Colegio Fray Luis de León) |
| 2. | Noryne Riobuane | (IES Manuel Fraga) |

NIVEL II (3º, 4º ESO)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Francisco Tomás-Valiente | (IES Ramiro de Maeztu) |
| 2. | Alejandro Ruiz de la Puente | (IES Fortuny) |

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Gonzalo Gómez Abejón | (IES Ramiro de Maeztu) |
| 2. | Javier González Domínguez | (IES San Juan Bautista) |

## RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MAYOR PUNTUACIÓN

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Colegio Alemán de Madrid | 48,1 |
| 2. | IES San Juan Bautista A | 38 |
| 3. | IES Diego Velázquez | 33,1 |
| 4. | IES Ramiro de Maeztu A | 32,1 |
| 5. | Colegio King College Soto de Viñuelas A | 31 |
| 6. | IES San Juan Bautista B | 30,79 |
| 7. | IES La Estrella A | 29,3 |
| 8. | Colegio Fray Luis de León A | 27,2 |
| 9. | IES José Luis Sampedro A | 26,4 |
| 10. | Colegio Fray Luis de León B | 25,8 |

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: jueves 20 de noviembre de 2014**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

**1.** La media de los cinco enteros consecutivos $a$, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$ es $b$. ¿Cuál es la media de los cinco enteros consecutivos $b$, $b + 1$, $b + 2$, $b + 3$, $b + 4$?

A) $a + 3$ B) $a + 4$ C) $a + 5$ D) $a + 6$ E) $a + 7$

**2.** Dos rectas perpendiculares se cortan en el punto $A(6, 8)$. Si las ordenadas en el origen (corte con el eje $Y$) de ambas rectas suman cero, ¿cuál es el área del triángulo de vértices $A$ y dichos cortes con el eje $Y$?

A) 45 B) 48 C) 54 D) 60 E) 72

**3.** Si $A > B > 0$ y $A$ es el $x$ % mayor que $B$, $x$ es igual a

A) $100 \cdot \frac{A-B}{B}$ B) $100 \cdot \frac{A+B}{B}$ C) $100 \cdot \frac{A+B}{A}$ D) $100 \cdot \frac{A-B}{A}$ E) $100 \cdot \frac{A}{B}$

**4.** Lanzamos al aire cuatro dados de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos tres de ellos muestren la misma cara?

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{7}{72}$ C) $\frac{1}{9}$ D) $\frac{5}{36}$ E) $\frac{1}{6}$

**5.** ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $10^{1002} - 4^{501}$?

A) $2^{1002}$ B) $2^{1003}$ C) $2^{1004}$ D) $2^{1005}$ E) $2^{1006}$

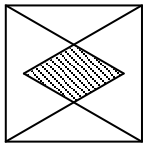
**6.** ¿Para cuántos enteros $x$ se verifica que el número $x^4 - 51x^2 + 50$ es negativo?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

**7.** Los enteros positivos $a$ y $b$ verifican que las rectas $y = ax + 5$, $y = 3x + b$ cortan al eje de abscisas en el mismo punto. ¿Cuál es la suma de todas las posibles abscisas de este punto de intersección?

A) $-20$ B) $-18$ C) $-15$ D) $-12$ E) $-8$

**8.** En el interior de un cuadrado de lado $2\sqrt{3}$ dibujamos dos triángulos equiláteros como muestra la figura. ¿Cuál es el área del rombo intersección de los dos triángulos?



A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}-1$ D) $8\sqrt{3}-12$ E) $\frac{3}{2}$

**9.** ¿Cuántos enteros positivos $x \leq 100$ verifican que $x^2 + x^3$ es un cuadrado perfecto?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

**10.** Dividimos un círculo de radio 12 en dos sectores, el menor de 120º, utilizando cada uno de ellos para formar la cara lateral de un cono. ¿Cuál es el cociente entre los volúmenes del cono pequeño y del mayor?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

**11.** En el rectángulo *ABCD*, con $AB = 6$ y $AD = 30$, sea *G* el punto medio de *AD*. Prolongamos desde *B* el lado *AB* hasta el punto *E*, con $BE = 2$, y sea *F* el punto de intersección de *ED* con *BC*. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *BFDG*?

A) $\frac{183}{2}$ B) 67 C) $\frac{135}{2}$ D) 68 E) $\frac{137}{2}$

**12.** Si la nota de cada uno de los chicos de una clase hubiera sido 4 puntos más, la media de toda la clase habría subido 1 punto. ¿Qué porcentaje de chicas había en la clase?

A) 40% B) 50% C) 75% D) 80% E) 60%

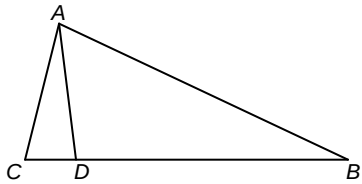
**13.** Esteban y Joaquín comienzan simultáneamente a caminar desde dos puntos distintos *A* y *B*, en sentido opuesto, por un mismo sendero y se cruzan al cabo de 3 horas. Esteban llega al punto desde el que salió Joaquín 2 horas y media antes de que Joaquín llegue al punto desde el que salió Esteban. ¿Cuántas horas duró la excursión de Joaquín?

A) 6 B) 6,5 C) 7 D) 7,5 E) 8,5

**14.** Programamos un ordenador para que transmita una cierta sucesión de cinco dígitos, ceros y unos, cinco veces. Una de las cinco veces lo hizo correctamente, otra vez tuvo un error, otra vez dos, otra vez tres y la otra vez cuatro errores. Las cinco respuestas son las que se proponen a continuación. ¿Cuál fue la correcta?

A) 00001 B) 00100 C) 01100 D) 10010 E) 10011

**15.** ¿Cuál es la longitud del lado *AB* del triángulo *ABC* sabiendo que *AC* = 3, *AD* = 3, *BD* = 8 y *CD* = 1?




A) 8 B) 8,75 C) 9

D) 9,25 E) 9,5

**16.** ¿Cuál es el mayor entero *k* para el que 85! es divisible entre $42^k$?

A) 2 B) 13 C) 41 D) 81 E) 135

**17.** En un concurso de televisión hay un premio guardado en una de cinco cajas *A*, *B*, *C*, *D* y *E* con la misma probabilidad en cada una. El concursante elige la caja *A*. El realizador del concurso, que sabe en qué caja está el premio, abre dos de las otras cuatro, la *B* y la *C*, en las no está el premio. ¿Cuál es la probabilidad de que el premio esté en la caja *D*?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

**18.** Considera el conjunto de todas las soluciones enteras $(x, y)$ de la ecuación $x^2 = y^4 + 671$. ¿Cuál es la suma de todos los valores, *y*, del conjunto de soluciones?

A) 0 B) 5 C) 36 D) 41 E) 1296

**19.** ¿Cuál es el mínimo valor de la expresión $\sqrt{4+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(2-y)^2}+\sqrt{(4-x)^2+1} \quad \forall x,\ y \in R$?

A) 3 B) $3+2\sqrt{2}$ C) 5 D) $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ E) $2+\sqrt{5}+\sqrt{2}$

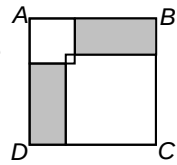
**20.** El dominio de la función $f(x)=\lg_{\frac{1}{2}}\left\langle \lg_4\left\{\lg_{\frac{1}{4}}\left[\lg_{16}\left(\lg_{\frac{1}{16}} x\right)\right]\right\}\right\rangle$ es un intervalo de longitud $\frac{m}{n}$ con *m* y *n* primos entre sí. ¿Cuál es el valor de *m* + *n*?

A) 19 B) 31 C) 271 D) 319 E) 511

**21.** Si $P(x)$ es un polinomio de tercer grado con $P(0) = k$, $P(1) = 2k$ y $P(-1) = 3k$, ¿cuál es el valor de $P(2) + P(-2)$?

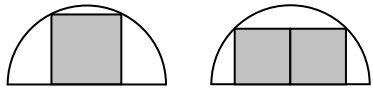
A) 0 B) *k* C) 6*k* D) 7*k* E) 14*k*

**22.** En el interior del cuadrado *ABCD* de área 196 hay dos cuadrados que se solapan como muestra la figura. Si el área del mayor de los dos es el cuádruple de la del menor y el área de la región común a ambos es 1, ¿cuál es el área de la región sombreada?




A) 64 B) 72 C) 76 D) 80 E) 84

**23.** En el dibujo se observan dos semicírculos iguales y tres cuadrados. ¿Cuál es el cociente entre las áreas de las regiones sombreadas?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

**24.** El mayor número primo conocido, formado solamente por ceros y unos es el número $\frac{10^{641}\left(10^{640}-1\right)}{9}+1$. ¿Cuántas cifras tiene?

A) 640 B) 641 C) 1280 D) 1281 E) 640·641

**25.** Si $x, y, z$ son enteros positivos menores que 10 tales que $(100x+10y+z)^2=(x+y+z)^5$ ¿Cuál es el valor de $x^2+y^2+z^2$?

A) 21 B) 23 C) 29 D) 33 E) 37

**26.** ¿Para cuántos enteros positivos *n*, resulta que $3^n + 81$ es un cuadrado perfecto?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

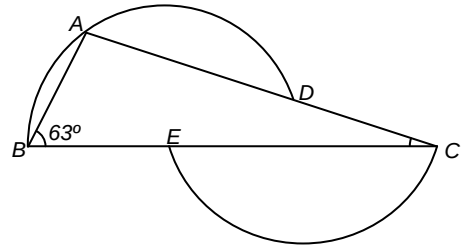
**27.** ¿Para cuántos enteros positivos *n*, se verifica que el resto de la división de 1 000 063 entre *n* es 63?

A) 29 B) 37 C) 39 D) 49 E) 79

**28.** ¿Cuál es el resto de la división de $P(x)=x^{200}-2x^{199}+x^{50}-2x^{49}+x^2+x+1$ entre $(x-1)(x-2)$?

A) $2x-1$ B) 7 C) $2x+3$ D) 1 E) $6x-5$

**29.** En la figura que observas, *E* es el centro de la circunferencia que pasa por *A*, *B* y *D*. El centro de la circunferencia que pasa por *E* y *C* es *D*. Si el ángulo en *B* es de 63º, el valor del ángulo en *C* es:




A) 18º B) 20º C) 22º D) 24º E) 26º

**30.** Si $x \geq 3$, definimos $f(x) = \lg_2(\lg_3 x) - \lg_3(\lg_2 x)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $f(x) > 0 \ \ \forall x \geq 3$ B) $f(x) < 0 \ \ \forall x \geq 3$ C) $f(x) = 0 \ \ \forall x \geq 3$

D) $f(x) = 0$ para un único valor de $x \geq 3$ E) $f(x) = 0$ para más de un valor de $x \geq 3$

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

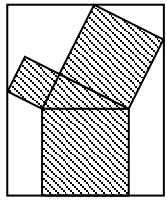
**Comunidad de Madrid**

**FASE LOCAL:** segunda prueba. Jueves 18 de diciembre de 2014
Tiempo: 3h 30 min

1. Al quitar un número de una lista de diez enteros consecutivos resulta que la suma de los nueve restantes es 2014. ¿Qué número hemos quitado?

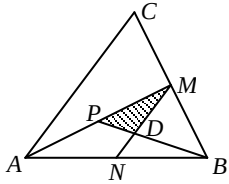
2. En una reunión hay varias personas. Se incorpora Alicia y la media de la edad aumenta en 4 años. Posteriormente se incorpora Beatriz, que es gemela de Alicia, y la media de edad vuelve a aumentar, pero en este caso solo en 3 años. ¿Cuántas personas había en la reunión antes de entrar Alicia?

3. Sobre los lados de un triángulo rectángulo, de catetos uno doble que el otro, dibujamos cuadrados hacia fuera, como se muestra en la figura. El polígono obtenido lo inscribimos en un rectángulo como puede observarse en la citada figura. ¿Cuál es el cociente entre el área del polígono rayado y el área del rectángulo en el que está inscrito?



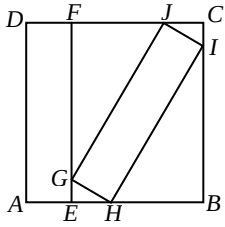
4. La gráfica de $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región.

5. En el triángulo *ABC*, de área 48, *P* es el punto medio de la mediana *AM* y *N* el punto medio del lado *AB*. ¿Cuál es el área del triángulo *MDP*?



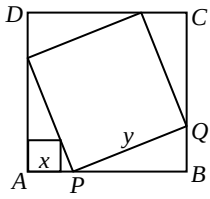

6. Una caja contiene varias bolas, todas iguales. El cociente entre el volumen ocupado por las bolas y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $\frac{1}{k}$, con *k* entero mayor que 1.
Sacamos de la caja un número primo de bolas y ahora el cociente entre el volumen ocupado por las restantes y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $\frac{1}{k^2}$. ¿Cuántas bolas había en la caja al principio?

7. En el interior del cuadrado *ABCD*, de lado 1, dibujamos dos rectángulos iguales, *AEFD* y *GHIJ*. ¿Cuánto mide el segmento *AE*?



8. Uno de los lados de un triángulo mide 10 cm y la mediana que llega a ese lado, que mide 9 cm, es perpendicular a una segunda mediana del triángulo. Calcula la longitud de la tercera mediana del triángulo.

9. En el cuadrado *ABCD* de lado 1 se inscribe un cuadrado de lado *PQ* = *y*, como muestra la figura, y en uno de los triángulos rectángulos determinado por los dos cuadrados se inscribe otro cuadrado de lado *x*. Al moverse el punto *P* sobre el lado *AB* cambian los valores de *x* e *y*. Determina *x* e *y* para que $x^2 + y^2$ sea mínimo. ¿Cuánto vale ese mínimo?




10. En el triángulo *ABC* cuyos ángulos verifican $\hat{A} < \hat{C} < 90^o < \hat{B}$ se trazan las bisectrices exteriores de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Los segmentos de estas bisectrices, cada uno hasta la prolongación del lado opuesto, miden lo mismo que el lado *AB*. Calcula la medida del ángulo $\hat{A}$.

# LI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## Prueba de selección
## Comunidad de Madrid

**Primera sesión, viernes 16 de enero de 2015**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Demuestra que $(ax+by)^2 \le ax^2+by^2$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a+b=1,\ a,b \ge 0$. ¿En qué casos se da la igualdad?

2. Sean $r$ y $s$ dos rectas paralelas, y $A$ un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto $B$ de la recta $r$, sea $C$ el punto de la recta $s$ tal que $B\hat{A}C = 90^\circ$, y sea $P$ el pie de la perpendicular desde $A$ sobre la recta $BC$. Demuestra que, independientemente de qué punto $B$ de la recta $r$ tomemos, el punto $P$ está sobre una circunferencia fija.

3. Un campeonato de baloncesto se ha jugado por sistema de liga a dos vueltas (cada par de equipos se enfrentan dos veces) y sin empate (si el partido acaba en empate hay prórrogas hasta que gane uno de los dos). El ganador del partido obtiene 2 puntos y el perdedor 1 punto. Al final del campeonato, la suma de los puntos obtenidos por todos los equipos, salvo el campeón, es de 2015 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado el campeón?

**Segunda sesión**
**Sábado 17 de enero de 2015**

Tiempo: 3 horas y media

4. Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de las tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda ni el de la de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos "¿puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?". Una vez que ha respondido (todos oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá "Sí".

5. El triángulo $ABC$ es isósceles en $C$, y sea $\Gamma$ su circunferencia circunscrita. Sea $M$ el punto medio del arco $BC$ de $\Gamma$ que no contiene a $A$, y sea $N$ el punto donde la paralela a $AB$ por $M$ vuelve a cortar a $\Gamma$. Se sabe que $AN$ es paralela a $BC$. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo $ABC$?

6. Sean $x, y, z$ reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Halla el valor máximo alcanzado por
$$\sqrt{x}+\sqrt{2y+2}+\sqrt{3x+6}.$$
¿Para qué valores de $x, y, z$ se alcanza dicho valor máximo?

## XXª OLIMPIADA de MAYO
## Primer Nivel
## Mayo de 2014

Olimpíada de Mayo
*Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática*

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

### PROBLEMA 1

Un número natural *N* es *bueno* si sus dígitos son 1, 2 o 3 y todos los números de 2 dígitos formados por dígitos ubicados en posiciones consecutivas de *N* son números distintos. ¿Hay algún número bueno de 10 dígitos? ¿Y de 11 dígitos?

### PROBLEMA 2

Beatriz tiene tres dados en cuyas caras están escritas letras diferentes. Al tirar los tres dados sobre una mesa, y eligiendo cada vez solamente las letras de las caras de arriba, formó las palabras
OSA , VIA , OCA , ESA , SOL , GOL , FIA , REY , SUR , MIA , PIO , ATE , FIN , VID.
Determinar las seis letras de cada dado.

### PROBLEMA 3

Se tienen nueve cajas. En la primera hay 1 piedra, en la segunda hay 2 piedras, en la tercera hay 3 piedras, y así siguiendo, en la octava hay 8 piedras y en la novena hay 9 piedras. La operación permitida es sacar el mismo número de piedras de dos cajas distintas y colocarlas en una tercera caja. El objetivo es que todas las piedras estén en una sola caja. Describir cómo hacerlo con el número mínimo de operaciones permitidas. Explicar porqué es imposible lograrlo con menos operaciones.

### PROBLEMA 4

Sea *ABC* un triángulo rectángulo e isósceles, con $\hat{C} = 90^o$. Sean *M* el punto medio de *AB* y *N* el punto medio de *AC*. Sea *P* tal que *MNP* es un triángulo equilátero con *P* en el interior del cuadrilátero *MBCN*. Calcular la medida del ángulo $C\hat{A}P$.

### PROBLEMA 5

Dadas 6 bolitas: 2 blancas, 2 verdes, 2 rojas, se sabe que hay una blanca, una verde y una roja que pesan 99 g cada una y que las demás bolitas pesan 101 g cada una. Determinar el peso de cada bolita usando dos veces una balanza de dos platos.
ACLARACIÓN: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

**XXª OLIMPIADA de MAYO**
**Segundo Nivel**
**Mayo de 2014**

Olimpíada de Mayo
*Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática*

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

## PROBLEMA 1

El sendero que va del pueblo hasta el refugio en la montaña tiene 76 km. Un grupo de andinistas lo recorrió en 10 días, de manera tal que en dos días consecutivos nunca caminaron más de 16 km, pero en tres días consecutivos siempre caminaron por lo menos 23 km. Determinar la máxima cantidad de kilómetros que pudieron haber recorrido en un día.

## PROBLEMA 2

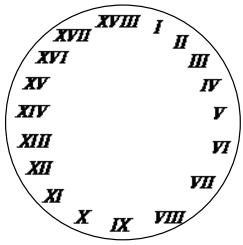
En un cuadrilátero convexo *ABCD*, sean *M*, *N*, *P* y *Q* los puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* respectivamente. Si los segmentos *MP* y *NQ* dividen al *ABCD* en cuatro cuadriláteros con la misma área, demostrar que *ABCD* es un paralelogramo.

## PROBLEMA 3

Ana y Luca juegan al siguiente juego. Ana escribe una lista de $n$ números enteros distintos. Luca gana si puede elegir cuatro números distintos, $a$, $b$, $c$ y $d$, de modo que el número: $a + b - (c + d)$ sea múltiplo de 20.
Determinar el mínimo valor de $n$ para el que, cualquiera que sea la lista de Ana, Luca pueda ganar.

## PROBLEMA 4

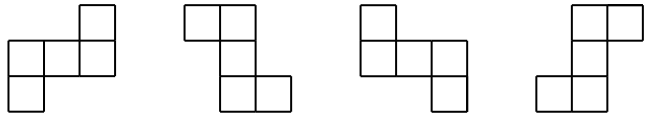
En una excavación en la antigua Roma se encontró un reloj inusual con 18 divisiones marcadas con números romanos (ver figura).




Desgraciadamente el reloj estaba roto en 5 pedazos. La suma de los números en cada pedazo era la misma. Mostrar de qué manera pudo estar roto el reloj.

**PROBLEMA 5**

Cada casilla de un tablero de $n \times n$, con $n \geq 3$, está coloreada con uno de 8 colores. ¿Para qué valores de $n$ se puede afirmar que alguna de estas figuras incluida en el tablero, contiene dos casillas del mismo color?



# XX OLIMPIADA DE MAYO – 2014. RESULTADOS DE ESPAÑA

**PRIMER NIVEL**

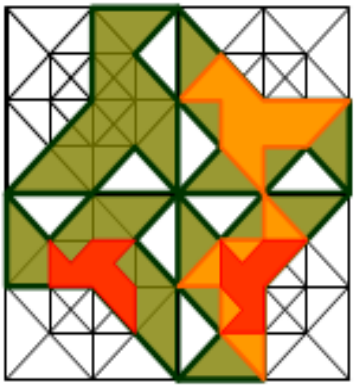
| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Pérez Mugía, Alberto | ORO |
| 2 | Soto Martín, Pablo | PLATA |
| 3 | Sánchez González, Víctor David | PLATA |
| 4 | Andrés Torrijos, Jorge | BRONCE |
| 5 | Domínguez Monreal, Hernán | BRONCE |
| 6 | Durán Fernández, Javier | BRONCE |
| 7 | Morales Aguilar, Claudia María | BRONCE |
| 8 | Aguilar Ramírez, Alexander | MENCIÓN |
| 9 | Zhang, Shenghao | MENCIÓN |
| 10 | Morales Gómez, Carlos | MENCIÓN |

**SEGUNDO NIVEL**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Olmo de Casas, Pablo del | ORO |
| 2 | Mondría Terol, Teresa | PLATA |
| 3 | Rodríguez Martín, Saúl | PLATA |
| 4 | Carbonié del Burgo, Diego | BRONCE |
| 5 | Cendón Palomo, Pablo | BRONCE |
| 6 | Epelde Blanco, Alejandro | BRONCE |
| 7 | Steimann Martínez Mora, Antonio | BRONCE |
| 8 | Arranz Toro, Diego | MENCIÓN |
| 9 | Andrés Gorrochategui, Víctor | MENCIÓN |
| 10 | Crisanto García, Svetlin | MENCIÓN |

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
**Comunidad de Madrid**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM



# XX Concurso de Primavera

# MATEMÁTICAS

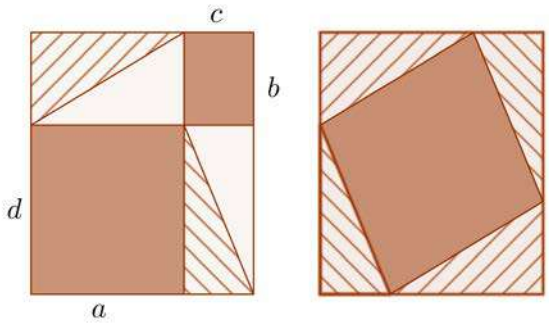
## 2016

Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alfredo Martínez Sanz*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Hugo Fernández Hervás*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*María Gaspar Alonso-Vega,*
*María Moreno Warleta*
*María Olbés Fernández*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pablo Martínez Dalmau*
*Pilar Ruiz Cervigón*
*Víctor Manuel Sánchez González*

*Suma geométrica de rectángulos y desigualdad del producto escalar*
*(El origen del teorema de Pitágoras)*




$$a \cdot d + b \cdot c \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

## *Presentación*

El matemático, microscopio y telescopio en ristre, desentraña (que no inventa) la verdad matemática ("sea lo que sea que esto signifique"). El profesor de matemáticas es el juglar que canta, guarnece y colorea alguno de sus escenarios. El Concurso de Primavera, en su 20 aniversario (y veinte años son muchos) rinde tributo a tanto anónimo poeta, enamorado de la estrella pitagórica.
Escrito queda.

El Comité Organizador

**AGRADECIMIENTOS**

A los participantes y colaboradores del Concurso.

A la Facultad de Matemáticas.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

Al Área de Formación del Profesorado dentro de la Dirección General de la Mejora de la Calidad de la Enseñanza de la Consejería de Educación.

A Educamadrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A Smartick.

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 25 de febrero de 2015**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** ¿Cuál de los resultados de estas operaciones es el mayor?

**A)** 2 x 0 + 1 + 5 **B)** 2 + 0 + 1 x 5 **C)** 2 + 0 x (1 + 5)
**D)** (2 – 0) x (1 + 5) **E)** 2 + 0 – 1 + 5

**2** El perro de los músicos de Bremen pesa 15,4 kg, el gato pesa 3,35 kg y el gallo, 850 g. ¿Cuánto peso soporta el pobre burrito?

**A)** 196 hg **B)** 868,75 kg **C)** 2725 dag **D)** 1037,5 hg **E)** 196 dag

**3** Merche tiene cinco años menos que Juanje, Alfredo tiene cuatro años más que Juanje y Pilar tiene doce años menos que Alfredo. ¿Cuántos años de diferencia hay entre Merche y Pilar?

**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**4** Kikirika pone 79 huevos en tres meses y Kokoroka pone 55 huevos en dos meses. ¿Cuántos huevos pondrán las dos gallinas juntas en un año?

**A)** 636 **B)** 638 **C)** 646 **D)** 648 **E)** 650

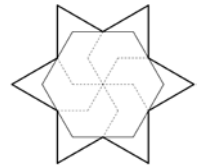
**5** Don Retorcido le ha pedido a Luis que dibuje un ángulo recto. Cuando lo ha medido ha dicho muy enfadado: ¡A este ángulo le faltan siete grados! ¿Cuánto medía el ángulo de Luis?

**A)** 93º **B)** 83º **C)** 97º **D)** 173º **E)** 353º

**6** Francisco ha pensado un número. Primero le ha sumado 3; después, ha multiplicado el resultado por 4 y por último le ha restado 8. Si el resultado final ha sido 64, ¿cuál es la suma de las cifras del número que había pensado Francisco?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 16

**7** El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 24 $cm^2$. El área, en $cm^2$, de la estrella es:



**A)** 27 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 40

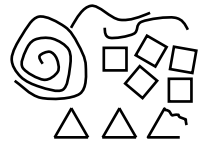
**8** Esteban corre todos los días tres cuartos de hora. Si hoy ha salido a las dos menos veinte de la tarde, ¿a qué hora volverá a casa?

**A)** 15: 15 **B)** 15: 05 **C)** 14: 35 **D)** 14: 25 **E)** 14: 15

**9** Carmen tiene tres gatitos. Jaimito come cada dos horas, Juanito cada tres horas y Jorgito cada cuatro horas. Si ahora están comiendo los tres a la vez, ¿dentro de cuántas horas volverán a comer los tres juntos?

**A)** 6 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 20 **E)** 12

**10** Irene tiene una cuerda muy larga. Con ella podría hacer 36 cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuántos triángulos equiláteros de 3 cm de lado puede hacer con su cuerda?

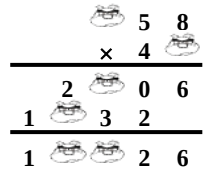


**A)** 32 **B)** 31 **C)** 27 **D)** 16 **E)** 6

**11** Martita compró tres bolis y dos cuadernos, pagó con 20 euros y le devolvieron 12,50 euros. Si un cuaderno cuesta un euro más que un boli, ¿cuántos euros cuesta un boli?

**A)** 1,10 **B)** 3,50 **C)** 0,70 **D)** 2,25 **E)** 7,50

**12** ¡Ya está aquí Comenúmeros! Y esta vez se ha puesto morado con una multiplicación ¿Cuál es la suma de las seis cifras que se ha comido el bribón?



**A)** 30 **B)** 32 **C)** 33 **D)** 35 **E)** 41

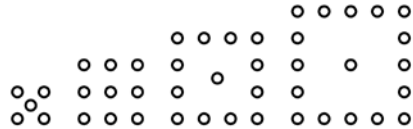
**13** Ana y su tío Gonzalo cumplen años el mismo día. Como Ana ha cumplido 13 años y Gonzalo 31, pueden usar las mismas velitas, una con un **3** y otra con un **1**. ¿Cuántos años han de pasar como mínimo para que esto vuelva a ocurrir?

**A)** 29 **B)** 23 **C)** 43 **D)** 41 **E)** 11

**14** Siete sandías y un melón pesan lo mismo que tres sandías y siete melones. ¿Cuántas sandías pesan lo mismo que nueve melones?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**15** Santiago está colocando sus monedas de un euro siguiendo el patrón que ves en la figura. Lleva hechos cuatro pasos del patrón. Si aún le quedan monedas para completar tres pasos más sin que le sobre ni le falte ninguna moneda, ¿cuánto dinero tiene Santiago?



**A)** 29 € **B)** 90 € **C)** 107 € **D)** 119 € **E)** 152 €

**16** Si a dos millones diecisiete mil veinticuatro le resto un millón novecientos treinta mil quinientos cinco, ¿cuál es el número que más se aproxima al resultado?

**A)** 8 000 **B)** 56 000 **C)** 85 000 **D)** 120 000 **E)** 240 000

**17** Isabel forma números de cuatro cifras usando solo los dígitos 1, 2, 5, 8 y 9, sin repetir. Por ejemplo, ha formado el 2185 y el 5891. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor número que puede formar?

**A)** 8594 **B)** 860 **C)** 8000 **D)** 8888 **E)** 8852

**18** María se había propuesto estudiar cuatro horas esta tarde pero se ha pasado una hora y cuarto con la Play, media hora jugando con el ordenador, 35 minutos "*guasapenando"*, tres cuartos de hora viendo su serie favorita y 20 minutos colgada del teléfono hablando con su novio. ¡Ay María!, ¿cuántos minutos has estudiado en realidad?

**A)** 25 **B)** 45 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 35

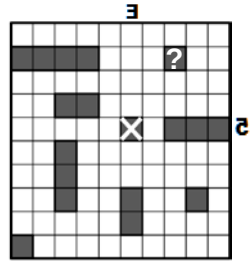
**19** *¿Qué me pongo?, ¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

**A)** 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

**20** Juanito va a celebrar su cumpleaños por todo lo alto. Ha leído en las recetas de su madre que para hacer un bizcocho para seis personas necesita cuatro huevos. ¿Cuántas docenas de huevos necesitará para hacer un gran bizcocho si en total se van a juntar 135 amigos?

**A)** Seis **B)** Seis y media **C)** Siete **D)** Siete y media **E)** Noventa

**21** Violetta y León están jugando a los barcos. Violetta, que es un poco tramposilla, ve la cuadrícula de León reflejada en un espejo que hay detrás de él y le acaba de hundir un barco en la casilla E5. ¿Qué casilla debe decir Violetta para hundirle el barco marcado con una interrogación?




**A)** I3 **B)** H9 **C)** C9 **D)** B3

**E)** C2

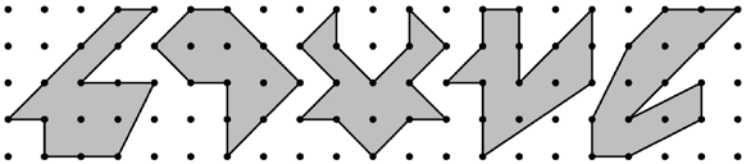
**22** Cuando Lino llora, Luca espera pacientemente dos minutos hasta ponerle el chupete. Una vez que se lo ha puesto, Lino deja de llorar durante siete minutos pero después lo tira y vuelve a llorar. Si Luca le puso el chupete por última vez hace cuatro minutos, ¿cuántas veces tendrá que ponérselo en la próxima hora?

**A)** 6 **B)** 5 **C) 7** **D)** 11 **E)** 9

**23** En una bolsa hay 60 bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

**A)** 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

**24** ¿Qué figura ocupa más?



**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**25** Don Retorcido ha multiplicado dos números consecutivos y te da el resultado en forma de producto: 2 x 3 x 5 x 7 x 23. ¿Cuál es la suma de esos dos números?

**A)** 127 **B)** 139 **C)** 145 **D)** 151 **E)** 143

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 25 de febrero de 2015**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Cuatro amigas van al parque de atracciones y a la hora de pagar hablan así:
Wissal: "¡Ay!, se me olvidó el dinero, ya os lo pagaré"
Arancha: "Pues yo solo he traído 16 euros, aquí los pongo"
María: "Está bien, yo puedo poner estos 47 euros"
Ana: "Pues yo aporto los 21 euros que faltan".
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

**A)** Arancha debe a María 5 euros **B)** Ana está en paz, ni le deben, ni debe
**C)** Wissal debe a María 21 euros **D)** Arancha debe a Ana 5 euros
**E)** Cada entrada cuesta más de 16 euros

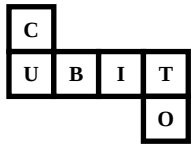
**2** ¿Cuál de estas longitudes equivale a medio millón de milímetros?

**A)** Medio hectómetro **B)** Medio kilómetro **C)** Quinientos decámetros
**D)** Cien mil metros **E)** Cinco kilómetros

**3** Ahí están Comenúmeros y Don Retorcido hablando de sus cosas.
He pensado cinco números *a*, *b*, *c*, *d*, *e* –dice Retorcido– y fíjate, todos son enteros positivos de una sola cifra y todos distintos; *a* es impar; *b* es un cuadrado perfecto; *c* es primo; *d* es par; *e* es múltiplo de 3. ¡Adivínalos, listillo!
No puedo –contesta Comenúmeros–, necesito más pistas.
Es difícil engañarte, ahí van dos pistas nuevas: el producto de *a* por *c* es *e* y el producto de *b* por *d* es el producto de los otros tres.
¿Cuál es la suma de los cinco números que pensó don Retorcido?

**A)** 20 **B)** 12 **C)** 19 **D)** 27 **E)** 24

**4** Plegando adecuadamente la figura que ves puedes formar el CUBO CUBITO. ¿Cuál es la cara opuesta a C?




**A)** U **B)** B **C)** I **D)** T
**E)** O

**5** Ardillo quiere comprar avellanas y el avellanero le muestra estas ofertas:
OFERTITA: Una avellana por solo 12 céntimos.
OFERTA: Seis avellanas por 60 céntimos.
OFERTÓN: Once avellanas por 99 céntimos.
Si Ardillo quiere comprar exactamente 580 avellanas, ni una más ni una menos, para sus amigos del pinar, ¿cuál es el mínimo precio que puede pagar?

**A)** 54,72 € **B)** 52,32 € **C)** 56 € **D)** 56,72 € **E)** 58,12 €

**6** Comenúmeros está hambriento y enfadado. ¡Oh, no!, allá se ven ocho números despistados.

| 40 | 80 | 100 | 101 | 190 | 200 | 260 | 292 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Nos tememos lo peor... ay, ay, ay, ay. Comenúmeros se ha comido a cuatro números y aún tiene tiempo de pensar así: "he tragado ya una buena suma y lo mejor es que aún me queda por comer el doble de lo que ya me he zampado". ¿Cuál es el mayor número que se ha comido el insaciable Comenúmeros?

**A)** 101 **B)** 200 **C)** 260 **D)** 190 **E)** 292

**7** Seis perros y cuatro gatos comen lo mismo que siete perros y dos gatos, que comen lo mismo que…

**A)** Nueve perros **B)** Cuatro perros y siete gatos **C)** Quince gatos
**D)** Cinco perros y seis gatos **E)** Seis perros y seis gatos

**8** Si un cuarto de $8^{12}$ es igual a $2^n$, el valor de $n$ es:

**A)** 34 **B)** 10 **C)** 13 **D)** 32 **E)** 12

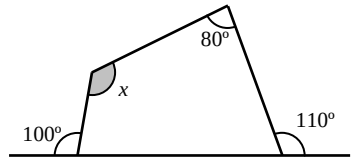
**9** La máxima carga que puede aguantar un globo es una cesta que contiene 60 kilos de harina. En cambio, dos globos como el anterior pueden sostener juntos, como máximo, esa misma cesta con 200 kilos de harina. ¿Sabrías cuántos kilos pesa la cesta?

**A)** 60 **B)** 75 **C)** 80
**D)** 100 **E)** 140

**10** El producto de tres números consecutivos es $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$. ¿Cuál es la suma de los tres números?

**A)** 75 **B)** 78 **C)** 81 **D)** 85 **E)** 86

**11** ¿Cuánto mide el ángulo $x$ de la figura?




**A)** 100º **B)** 110º **C)** 120º
**D)** 130º **E)** 140º

**12** En mi clase hay cuatro niñas más que niños. Si hubiera el doble de niños y la mitad de niñas, seríamos cuatro estudiantes más. ¿Cuántos somos en total?

**A)** 29 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 32 **E)** 28

**13** En esta suma, letras diferentes representan cifras también diferentes. Siguiendo esa representación, ¿qué palabra representa el número 8195?

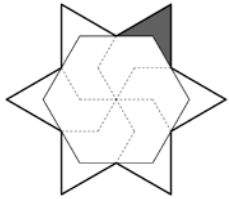
$$\begin{array}{cccc} & O & L & A \\ + & B & O & A \\ \hline O & S & O & S \end{array}$$

**A)** OLAS **B)** SOLA **C)** LOBA **D)** LOSA **E)** BOLA

**14** ¿Cuál es el menor número natural que multiplicado por 35613,472 da como resultado un entero?

**A)** 1000 **B)** 50 **C)** 250 **D)** 125 **E)** 25

**15** En la figura vemos una estrella de seis puntas con un área de 720 $mm^2$. ¿Cuál es el área, en $mm^2$, de la punta de flecha sombreada?



**A)** 30 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 48

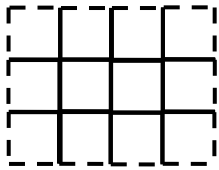
**16** Cuando Lino llora, Luca espera pacientemente dos minutos hasta ponerle el chupete. Una vez que se lo ha puesto, Lino deja de llorar durante siete minutos pero después lo tira y vuelve a llorar. Si Luca le puso el chupete por última vez hace cuatro minutos, ¿cuántas veces tendrá que ponérselo en la próxima hora?

**A)** 6 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 11 **E)** 9

**17** ¿Qué área, en $cm^2$, tiene un triángulo de lados 10 cm, 10 cm y 12 cm?

**A)** 48 **B)** 32 **C)** 40 **D)** 60 **E)** 52

**18** En una cuadrícula, un rectángulo de 4 unidades de base y 3 de altura tiene en su interior 17 segmentos de longitud 1 (9 son verticales y 8 son horizontales). ¿Cuántos segmentos tendrá en su interior un rectángulo de 40 unidades de base y 30 de altura?



**A)** 1060 **B)** 2330 **C)** 2360 **D)** 2400 **E)** 2540

**19** En las caras de un dado aparecen estos números: –3, –2, –1, 0, 1, 2. Si lo tiras dos veces y multiplicas los resultados obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de que el producto sea negativo?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{11}{36}$ **D)** $\frac{13}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

**20** *¿Qué me pongo?, ¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

**A)** 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

**21** ¿Cuántos números del 1 al 1000 cumplen que la suma de sus cifras es igual a 4?

**A)** 15 **B)** 12 **C)**16 **D)** 20 **E)** 14

**22** La diferencia entre el ángulo mayor y el mediano de un triángulo son 23º; y entre el mayor y el pequeño son 31º. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

**A)** 67º **B)** 69º **C)** 73º **D)** 75º **E)** 78º

**23** Don Retorcido ha pedido a cinco alumnos que eligiera su número natural favorito; que lo multiplicase por 38; que luego sumara 37 al producto anterior; y por último, que escribiera en la pizarra el resultado final. Como por arte de magia, don Retorcido dijo "mis poderes matemáticos me aseguran que solo uno de vosotros ha hecho bien las operaciones". Y tú, ¿tienes también poderes? Si estos son los cinco resultados, ¿cuál es el correcto?

**A)** 471 **B)** 1901 **C)** 496 **D)** 476 **E)** 493

**24** Si bailamos las letras de la palabra BARCO pueden formarse bastantes palabras, con o sin sentido. Si ordenamos todas ellas alfabéticamente, ¿en qué puesto aparece la temida COBRA?

**A)** 64 **B)** 48 **C)** 52 **D)** 55 **E)** 56

**25** Si tres cuartos de $a$ es igual a cinco octavos de $b$, ¿cuál de estas igualdades es la correcta?

**A)** $3a = 2b$ **B)** $2a = 3b$ **C)** $5a = 2b$ **D)** $5a = 6b$ **E)** $6a = 5b$

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 25 de febrero de 2015**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

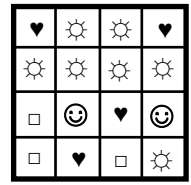
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En el cuadrado que ves, cada uno de los cuatro símbolos tiene un valor diferente, y la suma de los valores de los símbolos de cada fila está a la derecha. ¿Cuál es el valor de ☺ ?

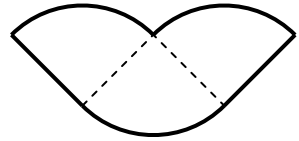



**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**2** En una fábrica de reparación de ordenadores, Diego repara tres ordenadores en el mismo tiempo que Mónica repara dos, pero Kira es más rápida que ambos: mientras Mónica repara uno, ella repara tres. En el tiempo que Diego repara nueve ordenadores, ¿cuántos repararían entre los tres?

**A)** 30 **B)** 24 **C)** **27** **D)** 81 **E)** 33

**3** Dividimos un círculo de área $36\pi$ en cuatro cuadrantes, de los que cogemos tres y los disponemos como muestra la figura. ¿Cuál es el perímetro de dicha figura?

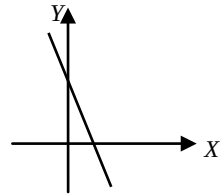


**A)** $6\pi + 12$ **B)** $9\pi + 12$ **C)** $9\pi + 18$ **D)** $27\pi + 12$ **E)** $27\pi + 24$

**4** Si $x = 2y$ entonces $(x - y)\cdot(2x + y)$ es igual a:

**A)** $5y^2$ **B)** $y^2$ **C)** $3y^2$ **D)** $6y^2$ **E)** $4y^2$

**5** Una recta corta a los ejes *X* e *Y* como se muestra en la figura. Una posible ecuación de la recta es:

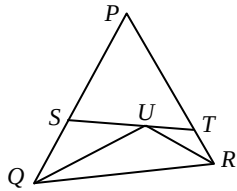



**A)** $y = 2x + 7$ **B)** $y = 4$ **C)** $y = -3x - 5$ **D)** $y = 5x - 2$ **E)** $y = -2x + 3$

**6** Existen enteros positivos *x*, de dos cifras, tales que al dividir 109 entre *x*, el resto es 4. ¿Cuál es la suma de todos estos *x*?

**A)** 36 **B)** 56 **C)** 50 **D)** 71 **E)** 35

**7** En el dibujo que observas, $PQ = 19$, $QR = 18$ y $PR = 17$. Marcamos los puntos $S$ en $PQ$, $T$ en $PR$ y $U$ en $ST$, de forma que $QS = SU$, $UT = TR$. ¿Cuál es el perímetro del triángulo $PST$?

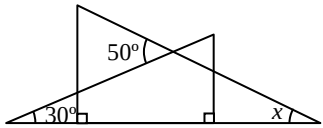



**A)** 36 **B)** 35 **C)** 37 **D)** 34 **E)** 38

**8** Hay un único entero impar entre 400 y 600 divisible entre 5 y entre 11. ¿Cuál es la suma de sus dígitos?

**A)** 12 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 16 **E)** 18

**9** ¿Cuál es el valor de $x$ en la siguiente figura?




**A)** 10º **B)** 20º **C)** 30º **D)** 40º **E)** 50º

**10** Si $x$ e $y$ son enteros positivos tales que $x > y$, $x + xy = 391$, ¿cuál es el valor de $x + y$?

**A)** 37 **B)** 39 **C)** 41 **D)** 42 **E)** 45

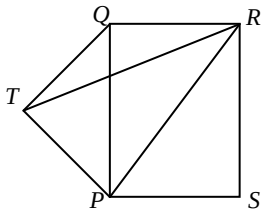
**11** Si el punto $(p, q)$ está en la recta $y = \frac{2}{5}x$ y el área del rectángulo que se muestra es 90, ¿cuál es el valor de $p$?

**A)** 12 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 30

**12** En una bolsa hay 2 canicas rojas y otras 2 azules y en una segunda bolsa hay 2 canicas rojas, 2 azules y $x$ canicas verdes. Sacamos de cada una de las bolsas dos canicas, sin reemplazamiento, y resulta que la probabilidad de que las dos canicas sean del mismo color es igual en una bolsa que en la otra. ¿Cuál es el valor de $x$?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**13** En el dibujo puedes observar un rectángulo $PQRS$ y un triángulo rectángulo isósceles $PTQ$ de hipotenusa $PQ = 4$. Si $QR = 3$, el área del triángulo $PTR$ es:

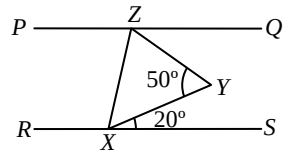



**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**14** Recorriendo el mismo camino, Joaquín hace la primera mitad a 6 km/h y el resto a 12 km/h, mientras que Esteban en el primer tercio camina sólo a 5 km/h pero el resto lo hace a 15 km/h. Si Joaquín tardó $x$ horas en hacer todo el camino y Esteban tardó $y$ horas, ¿cuál es el cociente $\frac{x}{y}$?

**A)** $\frac{9}{8}$ **B)** $\frac{7}{5}$ **C)** $\frac{15}{16}$ **D)** $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{10}{9}$

**15** En el dibujo de la derecha, las rectas $PQ$ y $RS$ son paralelas. ¿Cuál es el valor del ángulo $Q\hat{Z}Y$?

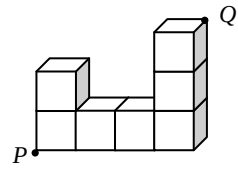



**A)** 30º **B)** 20º **C)** 40º **D)** 50º **E)** 60º

**16** Don Retorcido, que aún escribe cartas, se ha gastado 10 € en sellos de 50, 20 y 10 céntimos. Si ha comprado la décima parte de sellos de 20 que de 10, ¿cuántos sellos compró en total?

**A)** 30 **B)** 44 **C)** 62 **D)** 63 **E)** 66

**17** Colocamos siete cubos idénticos de lado 1 como se muestra en la figura. ¿Cuál es la distancia entre los vértices $P$ y $Q$?

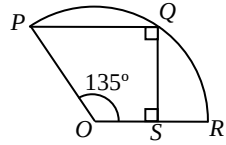



**A)** $\sqrt{20}$ **B)** $\sqrt{26}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{18}$ **E)** $\sqrt{30}$

**18** Elijo dos números distintos del conjunto $\{-3, -1, 0, 2, 4\}$ y luego los multiplico. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números elegidos sea 0?

**A)** $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**19** En el dibujo que observas, los puntos $P$, $Q$ y $R$ están en una circunferencia de centro $O$ y radio 12. Si el ángulo $P\hat{O}R$ es de 135º, ¿cuál es el área del trapecio rectángulo $OPQS$?




**A)** 216 **B)** 144 **C)** 108 **D)** 112,5 **E)** 114,6

**20** Si *x*, *y*, *z*, representan dígitos diferentes, ninguno cero, en la suma que ves el valor de *x* es:

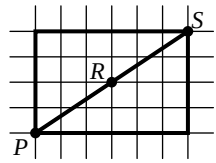
$$\begin{array}{r} x\ x\ x \\ y\ y\ y \\ +\ z\ z\ z \\ \hline z\ y\ y\ x \end{array}$$

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**21** Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali.
¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

**22** En la figura se observa una cuadrícula, un rectángulo $6 \times 4$ y una de sus diagonales que solo pasa por tres vértices de la cuadrícula: *P*, *R* y *S*. Si el rectángulo tuviera de dimensiones $60 \times 45$, ¿por cuántos vértices de la cuadrícula pasaría una diagonal de dicho rectángulo?

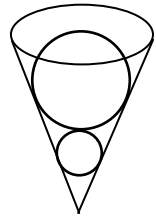



**A)** 13 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 19

**23** Para cada número [*abcd*] de cuatro cifras $(a \neq 0)$, llamamos "suma descendente" de dicho número al número [*abcd*] + [*bcd*] + [*cd*] + [*d*]. Por ejemplo, la suma descendente de 4089 es 4089 + 089 + 89 + 9 = 4276.
Si la suma descendente de [*abcd*] es 2014, ¿cuál es el valor de $a + b + c + d$?

**A)** 12 **B)** 15 **C)** 13 **D)** 11 **E)** 10

**24** En un cono lleno totalmente de agua introducimos dos esferas tangentes entre sí y tangentes al cono como se muestra en la figura (la mayor toca la base del cono). Si el radio de la mayor es el doble que el de la pequeña y el volumen del agua que aún queda en el cono es $2016\pi$, ¿cuál es el radio de la esfera pequeña?



**A)** $2\sqrt{2}$ **B)** 6 **C)** $4\sqrt[3]{2}$ **D)** $6\sqrt{2}$ **E)** **8**

**25** Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9 formamos números de cinco cifras con las siguientes características:
· La cifra de las unidades de millar es mayor que la de las centenas.
· La cifra de las unidades de millar es mayor que la de las decenas de millar.
· La cifra de las decenas es mayor que la de las centenas.
· La cifra de las decenas es mayor que la de las unidades.
¿Cuántos números podemos formar?

**A)** 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 19 **E)** 10

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 25 de febrero de 2015**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Al hacer unas compras en unas rebajas, Luisa se ahorró 25 euros. Si pagó 250 €, ¿cuál de las siguientes opciones es la más próxima al porcentaje que se ahorró?

**A)** 8% **B)** 9% **C)** 10% **D)** 11% **E)** 12%

**2** En un recinto del zoo solo hay avestruces y cebras. El número de patas que se contaban era 28 más que el doble del número de cabezas. ¿Cuántas cebras había?

**A)** 4 **B)** 7 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 28

**3** Si $x+y+z=1$, $x+y-z=2$, $x-y-z=3$, ¿cuál es el valor de $xyz$?

**A)** $-2$ **B)** $-\frac{1}{2}$ **C)** 0 **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** 2

**4** ¿Cuántos enteros positivos verifican que al eliminarles la última cifra el nuevo número es $\frac{1}{14}$ del original?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)**4

**5** Empezando por la izquierda, ¿qué digito ocupa el octavo lugar del resultado del producto 7 216 848 248 168 566 432 · 125?

**A)** 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 3

**6** Si *a*, *b* y *c* son enteros positivos con $a<b<c$, tales que $ab+ac+bc=abc$, ¿cuál es el valor de $a+b+c$?

**A)** 1 **B)** 4 **C)** 9 **D)** 11 **E)** No existen tales números

**7** ¿Cuál es el menor número primo que tiene dos sietes?

**A)** 77 **B)** 177 **C)** 277 **D)** 377 **E)** 577

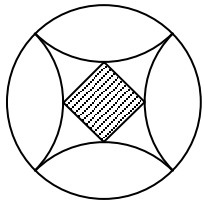
**8** Escribimos tres números de dos cifras cada uno, de manera que los seis dígitos que utilizamos son diferentes. ¿Cuál es el mayor valor posible para la suma de estos tres números?

**A)** 237 **B)** 246 **C)** 255 **D)** 264 **E)** 273

**9** ¿Cuál es la suma de las cifras del mayor capicúa de cuatro cifras, divisible entre 15?

**A)** 18 **B)** 20 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36

**10** En la figura se observa un círculo de radio 1 y en su interior cuatro arcos de circunferencia, también de radio 1, que encierran un cuadrado. La figura tiene cuatro ejes de simetría. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?



**A)** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B)** $2-\sqrt{2}$ **C)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

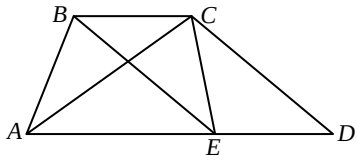
**D)** $\sqrt{2}-1$ **E)** $\frac{1}{2}$

**11** El conjunto de puntos que equidistan de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la recta $y=-3$, viene dado por la gráfica de:

**A)** $y+2=3x^2$ **B)** $y+2=-3x^2$ **C)** $x^2+y^2-1=(y+3)^2$

**D)** $x^2+y^2=(y+4)^2$ **E)** Nada de lo anterior

**12** Dibujamos un trapecio *ABCD* y un segmento *BE* paralelo al lado *CD* del trapecio. Si llamamos *x* al área del trapecio *ABCE* e *y* al área del triángulo *ACD*, la relación que existe entre *x* e *y* es:



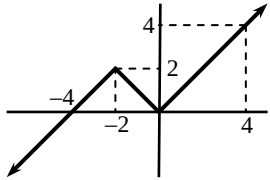

**A)** $x=y$ **B)** $x>y$ **C)** $x<y$

**D)** Depende del tipo de trapecio **E)** Faltan datos para poder contestar

**13** Sea *N* el menor entero positivo cuyos dígitos suman 2015. ¿Cuál es el primer dígito de $N+1$?

**A)** 9 **B)** 7 **C)** 5 **D)** 3 **E)** 1

**14** Si $y=f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(f(x))]=0$?



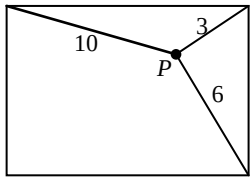

**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1

**E)** 0

**15** La suma de 35 enteros es *S*. Intercambiamos dos dígitos de uno de estos enteros y la nueva suma es *T*. Entonces $S-T$ es siempre divisible entre:

**A)** 9 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 11

**16** Las distancias de un punto $P$ a tres de los vértices de un rectángulo, como muestra la figura, son: 3, 6 y 10. ¿Cuál es la distancia al cuarto vértice?




**A)** 13 **B)** $\sqrt{127}$ **C)** 7

**D)** $\sqrt{109}$ **E)** 15

**17** El valor del número $b$ tal que $\log_b 10 + \log_b 10^2 + ... + \log_b 10^{10} = 110$ es:

**A)** $\sqrt{10}$ **B)** $e + 1$ **C)** 10 **D)** 20 **E)** $10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{10}}$

**18** Si $\sqrt{16+\sqrt{16+\sqrt{16+...}}}$ es el número $x$, ¿cuál es el valor de $x$?

**A)** $2\sqrt{2}$ **B)** 4 **C)** $\frac{1+\sqrt{65}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{65}-1}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{65}}{2}$

**19** Encendemos a la vez dos velas cilíndricas de la misma altura pero de diferente grosor. Una de ellas se consume en 4 horas, la otra en 3 horas. Suponiendo que se consumen a ritmo constante y que la duración es proporcional a la cantidad de cera, ¿qué tiempo ha pasado desde que las encendimos hasta el momento en que la altura de la primera es el doble de la altura de la segunda?

**A)** 1 h **B)** 1h 12min **C)** 2h **D)** 2h 12min **E)** 2h 24min

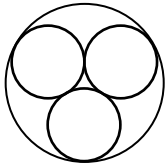
**20** Las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son $x$ e $y$, mientras que la longitud de la hipotenusa es $x + y - 4$. ¿Cuál es la longitud del radio de la circunferencia inscrita?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 9

**21** ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^5 + 2x^3 + 8x^2 + 16 = 0$ ?

**A)** Cinco **B)** Cuatro **C)** Tres **D)** Dos **E)** Una

**22** Tres circunferencias de igual radio, tangentes entre sí, están inscritas en otra circunferencia de radio 1 como muestra la figura. ¿Cuál es el radio de cada una?



**A)** $2-\sqrt{3}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **D)** $2\sqrt{3}-3$

**E)** $\frac{1}{2}$

**23** El número 3 puede escribirse como suma de dos o más enteros positivos de tres formas diferentes: $2 + 1$, $1 + 2$, $1 + 1 + 1$. ¿De cuántas formas diferentes puede escribirse el número 5?

**A)** 7 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 15

**24** Seis estudiantes de diversos países de Europa comparten piso en un curso del proyecto "Erasmus". Todos ellos hablan solamente dos idiomas: Ángela habla alemán e inglés; Ulrike, alemán y español; Karin, francés y español; Dieter, alemán y francés; Pierre, francés e inglés y Rocío, inglés y español. Si elegimos dos de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que puedan hablar en una lengua que entienda bien cada uno?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** $\frac{5}{6}$

**25** Una caja tiene 900 tarjetas cada una numerada con un número desde el 100 hasta el 999. Berta va a extraer de la caja algunas tarjetas y apuntará la suma de los dígitos de cada una. Por ejemplo, si toma las tarjetas 187, 205 y 945 apuntará 16, 7 y 18. ¿Cuántas tarjetas debe tomar como mínimo para poder garantizar que tomará al menos tres de ellas con la misma suma de dígitos?

**A)** 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 18 de abril de 2015**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Don Retorcido ha viajado a China y se ha traído de allí una regla pero las unidades no son centímetros sino *cuns*. Para establecer la equivalencia entre *cuns* y centímetros ha puesto mi regla en centímetros junto a la suya en *cuns*…

¿Cuántos *cuns* son un centímetro?

**A)** 0,3 **B)** 0,6 **C)** 1,5 **D)** 3 **E)** 3,3

**2** Cuando Silvia y Jesús bailan el chotis, cada nueve pasos dan una vuelta completa. ¿Qué ángulo giran con cada paso?

**A)** 5º **B)** 10º **C)** 20º **D)** 40º **E)** 60º

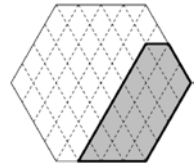
**3** El pasado 20 de marzo hubo un eclipse parcial de Sol. Si el eclipse comenzó a las 9:11 y finalizó a las 11:03, ¿cuánto tiempo duró?

**A)** 1 hora y 8 minutos **B)** 2 horas y 8 minutos **C)** 1 hora y 52 minutos
**D)** 2 horas y 52 minutos **E)** 3 horas y 12 minutos

**4** PILAR escoge al azar una letra de entre las nueve de PRIMAVERA. ¿Cuál es la probabilidad de que la letra elegida esté en su nombre?

**A)** $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**5** Ana ha comprado un terreno en forma de hexágono regular. Por ahora ha puesto un cerco a la parte sombreada para criar gallinas y ha gastado 240 metros de alambre. ¿Cuántos metros más de alambre debe comprar para terminar de bordear el jardín completamente sin quitar nada del cercado actual?



**A)** 225 **B)** 240 **C)** 300 **D)** 330 **E)** 480

**6** Julián y Lucía han decidido ahorrar. Julián se propone ahorrar 30 céntimos cada día y Lucía decide que el primer día ahorrará un céntimo; el segundo ahorrará dos céntimos; el tercero, tres y así, cada día ahorrará un céntimo más que el día anterior. ¿Cuántos días han de pasar para que ambos tengan la misma cantidad de dinero ahorrado?

**A)** 35 **B)** 103 **C)** 12 **D)** 59 **E)** 300

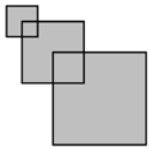
**7** En una tienda de animales hay doce hámsters, dieciséis cobayas y ocho chinchillas. Quieren meterlos en jaulas de manera que en cada jaula haya el mismo número de animales y sin mezclar especies. ¿Cuántas jaulas necesitarán como mínimo?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 15

**8** En la cabalgata de Reyes, Ana cogió dos caramelos más que Bea, que cogió siete más que Carlos. Bea cogió cinco caramelos menos que Dani y Dani tres menos que Eva. Si en total cogieron 68 caramelos, la suma de las cifras del número de caramelos que cogió Ana es:

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**9** Rafa tiene tres cuadrados, uno de 2 cm de lado, otro de 4 cm de lado y el tercero de 6 cm de lado. Los ha colocado con los lados paralelos y los vértices de los grandes en los centros de los pequeños, como ves en la figura. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área de la figura que ha formado?



**A)** 32 **B)** 51 **C)** 27 **D)** 16 **E)** 6

**10** Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos pero estos son muy astutos y deciden que sólo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli." ☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente." ☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve ."

**A)** Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

**11** ¿Qué número se aproxima más al resultado de la multiplicación 2980 x 0,003?

**A)** 0,09 **B)** 0,89 **C)** 0,9 **D)** 9 **E)** 89

**12** Joaquín colocó los números ordenadamente en seis columnas, como ves en la figura. ¿En qué columna colocó el 436?

**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

| **A** | **B** | **C** | **D** | **E** | **F** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | … | … |

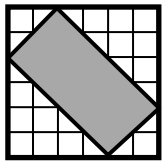
**13** Si sumo los 100 primeros números, es decir: 1 + 2 + 3 + 4 +…+ 99 + 100, el resultado es 5050. ¿Cuánto me dará la suma de los 100 primeros números pares, es decir: 2 + 4 + 6 + 8 +…+ 198 + 200?

**A)** 5050 **B)** 5250 **C)** 5252 **D)** 10 100 **E)** 20 200

**14** Javier tiene una gran colección de cuadrados y triángulos. Ha contado los lados de todos ellos y hay 41. ¿Cuál es mínimo número de triángulos que puede tener su colección?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 9

**15** ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?

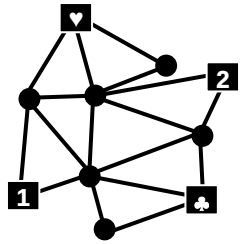


**A)** $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{5}{9}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**16** Un cuadrado, un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Si el área del cuadrado es 36 $cm^2$, ¿cuánto mide, en cm, el lado del hexágono regular?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 6

**17** Laura está jugando a poner ♥, ♦ y ♣ en los vértices de sus triángulos de tal manera que cada triángulo tenga los tres símbolos. ¿Qué símbolos deberá poner en los vértices 1 y 2?




**A)** 1(♥) 2(♣) **B)** 1(♦) 2(♦) **C)** 1(♣) 2(♥)

**D)** 1(♥) 2(♦) **E)** 1(♦) 2(♥)

**18** Al pobre Comenúmeros le sienta mal el 7 así que no puede comer números que contengan al 7 entre sus cifras (como el 37) o que sean múltiplos de 7 (como el 21). Si se ha encontrado una lista con los números del 1 al 100, ¿cuántos números se comerá?

**A)** 33 **B)** 70 **C)** 30 **D)** 59 **E)** 67

**19** Un bombero está en el peldaño central de una escalera. Consigue subir cinco peldaños pero las llamas lo rodean y debe bajar ocho. De nuevo sube cinco peldaños. Si aún le quedan doce peldaños para llegar a la parte superior, ¿cuántos peldaños tiene la escalera?

**A)** 30 **B)** 15 **C)** 28 **D)** 14 **E)** 29

**20** Hemos hecho bolsas de veinte caramelos para repartir en una fiesta de cumpleaños. Antes del reparto nos damos cuenta de que hay treinta niños y no tenemos bolsas suficientes, así que quitamos cuatro caramelos de cada bolsa, hacemos alguna bolsa más y al final cada uno recibe su bolsa, no sobrando ningún caramelo. ¿Cuántas bolsas teníamos al principio?

**A)** 20 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

**21** Sofía hizo esta florida cuenta **38 +** ❀ **x (17 –** ❀**)** sustituyendo cada flor por un 2. Santi sustituyó las flores por otro número pero ¡oh casualidad! los dos obtuvieron el mismo resultado. ¿Cuál es la suma de las cifras del número que usó Santi?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** Eso es imposible.

**22** Pepa, Pepe y Pipo van juntos al colegio. Todos caminan a la misma velocidad. Pepa, que es la que vive más lejos, sale de casa a las 8:10, Pepe baja al portal a las 8:12 y Pipo a las 8:17 y nunca ninguno espera a los otros. Si la casa de Pipo está a 720 metros del colegio y siempre llegan a las 8:25, ¿qué distancia, en metros, separa las casas de Pepa y Pipo?

**A)** 630 **B)** 180 **C)** 450 **D)** 360 **E)** 900

**23** Una machacona canción dice: *Un pasito pa'lante María,* ***un*** *pasito pa'trás. Un pasito pa'lante María,* ***dos*** *pasitos pa'trás. Un pasito pa'lante María,* ***tres*** *pasitos pa'trás*… Si María cayó exhausta al terminar la estrofa: *Un pasito pa'lante María,* ***veinte*** *pasitos pa'trás*, ¿cuántos pasos le separaban del punto en el que comenzó a bailar?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 190

**24** He escrito los números del 1 al 6 desperdigados por la pizarra. Como algunos estaban muy juntitos, mi hermana se creyó que había tres números, todos ellos de dos cifras y muy contenta dijo: "Esos tres números suman 102, ¿a que sí?" Si mi hermana nunca se equivoca en las sumas, ¿cuál de estos números no puede ser uno de los tres que sumó?

**A)** 14 **B)** 34 **C)** 53 **D)** 52 **E)** 16

**25** José María puso a sus nietos en fila de mayor a menor y les repartió caramelos. Al mayor le dio unos cuantos, al segundo el doble que al mayor, al tercero le dio el doble que al segundo y así hasta llegar al más pequeño. Si en total repartió 155 caramelos, ¿cuántos nietos tiene José María?

**A)** 3 **B)** 4 **C) 5** **D)** 6 **E)** No se puede saber

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 18 de abril de 2015**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Al conde Eric le gusta firmar con una suma en la que letras diferentes representan cifras diferentes. Si la **D** vale 5, ¿cuánto vale la letra **I**?

$$\begin{array}{r} \text{C O N} \\ + \quad \text{D E} \\ \hline \text{E R I C} \end{array}$$

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 3 **E)** 2

**2** La cuarta parte del doble de la quinta parte del triple de 600 es...

**A)** 300 **B)** 180 **C)** 480 **D)** 160 **E)** 200

**3** Merche y María forman la inicial de sus nombres con palillos y ya han construido las tres primeras. Merche dice: "María, si siguiéramos así, ¿cuántos palillos habrá en la **M** número 100?"

**A)** 402 **B)** 400 **C)** 420 **D)** 414 **E)** 600

**4** Si en un cubo de dos decímetros de arista he conseguido meter 7 kilos de arroz sin dejar un solo hueco, ¿cuántos kilos de arroz cabrán en otro cubo, todavía mayor, que tenga arista doble que el anterior?

**A)** 32 **B)** 28 **C)** 40 **D)** 56 **E)** 14

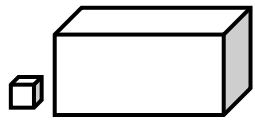
**5** Francisco pensó en el número 12, sumó sus cifras (1 + 2 = 3) y multiplicó el resultado por 4 (3 · 4 = 12) y asombrado dijo: *¡Ahí va! Si he obtenido el número que había pensado.* ¿Cuántos números de dos cifras cumplen que si sumo sus cifras y multiplico el resultado por cuatro obtengo el número de partida?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**6** En el gran banquete se han servido el doble de platos de pollo que de pavo. Dos tercios de los platos de pollo eran de muslos y el resto de pechugas. En cambio, de los platos de pavo solo un cuarto fueron de muslos y el resto de pechugas. ¿Qué fracción de los platos de pechuga eran de pavo?

**A)** $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{9}{17}$ **C)** $\frac{8}{9}$ **D)** $\frac{7}{12}$ **E)** $\frac{5}{12}$

**7** Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?

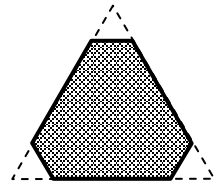


**A)** 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

**8** Si $4^{10a} = 8^{6b}$, entonces:

**A)** $10a = 9b$ **B)** $5a = 3b$ **C)** $5a = 12b$ **D)** $10a = 12b$ **E)** $10a = 3b$

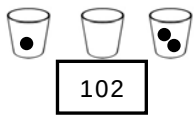
**9** Adrián ha dibujado su bandera en una gran tela: un triángulo equilátero de lado 2015 mm del que se recorta en cada vértice un triangulito, también equilátero, de lado 5 mm. ¿Cuánto mide, en mm, el perímetro de la bandera?

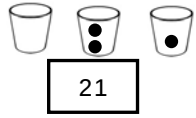


**A)** 6045 **B)** 6015 **C)** 6000 **D)** 6030

**E)** 6010

**10** Con tres vasos y tres piedrecitas juego a formar números. Aquí tienes dos ejemplos para que lo entiendas:

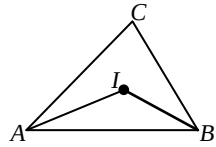



¿Cuántos números distintos puedo conseguir si siempre utilizo las tres piedras?

**A)** 8 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 10

**11** El punto *I*, incentro, es el punto en el que se cortan las bisectrices interiores del triángulo *ABC*. Si el ángulo $A\hat{C}B = 76^\circ$, el ángulo $A\hat{I}B$ mide:



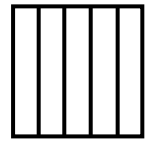

**A)** 128º **B)** 114º **C)** 118º **D)** 116º

**E)** 104º

**12** Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

**A)** 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

**13** Dividimos un cuadrado en cinco rectángulos iguales, cada uno de ellos de perímetro 72 cm. ¿Cuántos centímetros mide el lado del cuadrado?



**A)** 36 **B)** 30 **C)** 26 **D)** 32 **E)** 38

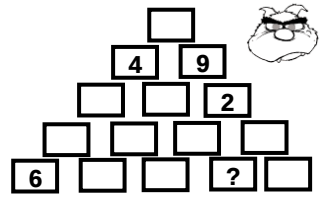
**14** Dos impresoras tienen que imprimir 440 carteles. En un minuto, la rápida imprime siete carteles y la lenta solo seis. Comienzan juntas a funcionar y al cabo de un rato la rápida se estropea por lo que la lenta deberá seguir trabajando 17 minutos más. ¿Cuántos carteles imprimió la rápida?

**A)** 217 **B)** 168 **C)** 210 **D)** 175 **E)** 182

**15** En el cociente de la división 10 000 : 7 la cifra de las unidades es 8. ¿Cuál es la cifra de las unidades en el cociente de 1000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 : 7?

**A)** 1 **B)** 4 **C)** 2 **D)** 8 **E)** 7

**16** En el muro de mi colegio estaban colocados los números del 1 al 15 en una cascada triangular de tal manera que cada número es resta de los dos sobre los que se apoya. Pero vino Comenúmeros y se comió todos menos cuatro. ¿Qué número ocupaba el lugar de la interrogación?




**A)** 1 **B)** 10 **C)** 3
**D)** 13 **E)** 15

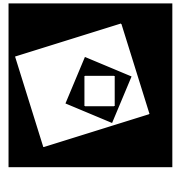
**17** ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras hay con la condición de que cuatro de ellas sean iguales y la otra diferente?

**A)** 81 **B)** 90 **C)** 91 **D)** 80 **E)** 100

**18** En un determinado año hay exactamente cuatro viernes y cuatro lunes en el mes de enero. ¿Qué día de la semana es el día 20 de dicho mes?

**A)** Domingo **B)** Sábado **C)** Viernes **D)** Lunes **E)** Nada de lo anterior

**19** Teresita ha diseñado esta bonita figura a partir de cuadrados de lados 2, 3, 7 y 10 cm. ¿Qué porcentaje del cuadrado mayor está coloreado de negro?



**A)** 49 % **B)** 50 % **C)** 51 % **D)** 56 % **E)** 62 %

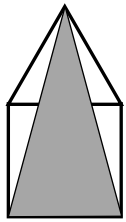
**20** Dos canguros gemelos se disponen a realizar una prueba. Saltarín se coloca en la salida (donde deja marcada ya su primera huella) y empieza a dar saltos de 54 cm hasta que llega a la meta. Después, Brincador se sitúa exactamente sobre la primera huella de Saltarín y comienza a dar saltos de 72 cm hasta llegar a la meta. Los jueces han contabilizado un total de 73 huellas desde la salida hasta la meta. ¿Qué longitud, en cm, tenía la prueba? Observa que las huellas comunes, como las de la salida, solo se cuentan una vez.

**A)** 2376 **B)** 2400 **C)** 2592 **D)** 2600 **E)** 2808

**21** En el último examen, el niño Jacinto empezó fatal, acertando únicamente 12 de las 30 primeras preguntas pero luego contestó correctamente dos tercios de las restantes. Si su nota final fue un 6 sobre 10, ¿cuántas preguntas tenía el examen?

**A)** 120 **B)** 100 **C)** 90 **D)** 180 **E)** 23

**22** Usando algunos vértices de un cuadrado y de un triángulo equilátero hemos formado el triángulo sombreado. ¿Cuánto mide el ángulo inferior derecho del triángulo gris?



**A)** 79º **B)** 72º **C)** 65º **D)** 75º **E)** 80º

**23** En una bolsa metes los veinte primeros números primos y luego sacas dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea impar?

**A)** $\frac{19}{20}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{20}{19}$ **D)** 0 **E)** $\frac{1}{10}$

**24** Si aumentamos la base de un rectángulo en un 20 % y disminuimos su altura en un 20 %, ¿qué le ocurre al área de dicho rectángulo?

**A)** Disminuye en un 10 % **B)** Aumenta en un 6 % **C)** No varía
**D)** Disminuye en un 4 % **E)** Aumenta en un 10 %

**25** Tengo tres recipientes **A**, **B** y **C**, todos ellos llenos de agua hasta su mitad. Primero vierto el agua de **C** en **B**, y **B** se llena hasta sus tres cuartos; a continuación vierto el contenido que ahora tiene **B** en **A** y resulta que **A** se llena hasta sus cuatro quintos. Si la capacidad de **C** son ocho litros, ¿cuántos litros caben en **A**?

**A)** 28 **B)** 30 **C)** 36 **D)** 40 **E)** 20

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 18 de abril de 2015**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En un bombo de lotería quedan cuatro bolas. Dos con número par y dos con número impar. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

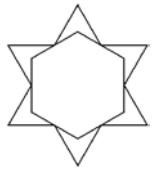
**2** $\frac{(n+3)!}{n!} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$. (Recuerda que, por ejemplo, 6! = 6·5·4·3·2·1) El factor primo más grande de *n* es:

**A) 5** **B)** 7 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 17

**3** Si $\begin{cases} x+y=76 \\ x-y=44 \\ u+v=y \\ u \cdot v = x \end{cases}$, el valor de $u^2+v^2$ es:

**A)** 89 **B)** 136 **C)** 145 **D)** 169 **E)** 170

**4** El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 $cm^2$. El área, en $cm^2$, de la estrella es:

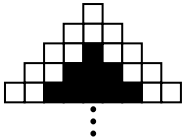


**A)** 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24

**5** El producto de cuatro números consecutivos es $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$. ¿Cuál es la suma de sus terminaciones?

**A)** 10 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 21 **E)** 24

**6** Cleopatra dibuja pirámides empezando por la cima. Hoy se le ha antojado dibujar una de 32 pisos y en la figura ya lleva cinco, coloreando de la forma que ves a partir del tercero. Cuando haya terminado su gran pirámide, ¿cuál será la diferencia entre cuadraditos negros y blancos empleados?



**A)** 850 **B)** 654 **C)** 776 **D)** 128 **E)** 668

**7** Un polinomio $P(x)$ de grado 4 y coeficiente principal 1, tiene las raíces, 3, 4, 5 y 6. Entonces la suma $P(2) + P(7)$ es igual a:

**A)** 48 **B)** 44 **C)** 36 **D)** 32 **E)** 24

**8** La suma de todos los productos de dos factores distintos de los números del 1 al 5 es 85. ¿Cuál es la suma de todos los productos de dos en dos de los números del 1 al 6?

**A)** 168 **B)** 169 **C)** 172 **D)** 173 **E)** 175

**9** El área de un hexágono regular en $cm^2$, viene dada por el mismo número que su perímetro en cm. ¿Cuántos centímetros mide su lado?

**A)** $\frac{3\sqrt{3}}{10}$ **B)** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **D)** $2\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{3}$

**10** Un comerciante desea etiquetar un producto para que al hacer un descuento del 20 % obtenga un beneficio del 25 %. Si el producto le costó 200 €, ¿qué precio debe poner en la etiqueta?

**A)** 280,50 € **B)** 350 € **C)** 300 € **D)** 312,50 € **E)** 330,50 €

**11** En una progresión aritmética de nueve términos, el quinto es 4. ¿Cuánto suman los nueve términos?

**A)** 36 **B)** 37 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

**12** Cuatro cigüeñas deciden que cada una emigrará a un punto cardinal diferente:
Ajá dice: "Ejé se irá al Norte y Ujú no irá al Este"
Ejé dice: "Yo no iré al Norte y Ojó irá al Oeste"
Ojó afirma: "Ejé irá al Este y Ujú al Oeste"
Ujú, por último, declara: "Ajá se va al Sur y Ojó al Este"
Cada una de las cigüeñas dice una verdad y una mentira. ¿A dónde emigrarán Ajá y Ejé?

**A)** Ajá (Sur), Ejé (Oeste) **B)** Ajá (Norte), Ejé (Oeste) **C)** Ajá (Este), Ejé (Norte)
**D)** Ajá (Norte), Ejé (Sur) **E)** Ajá (Sur), Ejé (Este)

**13** Alejandra, Celia y Hugo tienen algunas canicas. Hugo tiene el triple de canicas que Celia y Celia el doble de canicas que Alejandra. Hugo decide dar alguna de sus canicas a Celia y otras a Alejandra hasta que los tres tengan el mismo número de canicas. ¿Qué fracción de sus canicas le dio Hugo a Celia?

**A)** $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**14** Dos cilindros rectos, A y B, tienen el mismo volumen. El radio de la base del B es el 10 % más grande que el de A. ¿Cuál es la relación entre las alturas de ambos cilindros?

**A)** La altura de B es el 10 % menos que la de A
**B)** La altura de A es el 10 % más que la de B
**C)** La altura de B es el 21 % menos que la de A
**D)** La altura de A es el 21 % más que la de B
**E)** La altura de B es el 80 % de la de A

**15** Los puntos $\left(\sqrt{7}, a\right)$ y $\left(\sqrt{7}, b\right)$ son puntos distintos de la gráfica de $y^2 + x^4 = 2x^2y + 1$. ¿Cuál es el valor de $|a - b|$?

**A)** 1 **B)** $\frac{7}{2}$ **C)** 2 **D)** $\sqrt{1+7}$ **E)** $1+\sqrt{7}$

**16** El área de un rectángulo, de dimensiones enteras, es $A$ cm$^2$ y su perímetro $P$ cm. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser $A + P$?

**A)** 100 **B)** 102 **C)** 104 **D)** 106 **E)** 108

**17** Considera el conjunto de todas las fracciones $\frac{x}{y}$ siendo $x$ e $y$ enteros positivos primos entre sí. ¿Cuántas de estas fracciones verifican que si aumentamos en una unidad tanto el numerador como el denominador, el valor de la fracción crece en un 10 %?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** Infinitas

**18** Cada uno de los siete días de la semana, Isa hace exactamente un deporte. Corre tres días pero nunca dos días consecutivos. Los lunes juega a baloncesto y los miércoles a voley. También hace natación y juega al tenis pero nunca juega al tenis el día siguiente de correr o nadar. ¿Qué día de la semana hace natación?

**A)** Domingo **B)** Martes **C)** Miércoles **D)** Viernes **E)** Sábado

**19** Si mediante $a \lozenge b$ representamos la operación $a - \frac{1}{b}$, ¿cuál es el valor de $[(1 \lozenge 2) \lozenge 3] - [1 \lozenge (2 \lozenge 3)]$?

**A)** $-\frac{7}{30}$ **B)** $-\frac{1}{6}$ **C)** 0 **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{7}{30}$

**20** La recta $12x + 5y = 60$ forma un triángulo con los ejes de coordenadas. ¿Cuál es la suma de las alturas de ese triángulo?

**A)** 20 **B)** $\frac{360}{17}$ **C)** $\frac{107}{5}$ **D)** $\frac{43}{2}$ **E)** $\frac{281}{13}$

**21** Una lista de 5 enteros positivos verifica las siguientes propiedades:
- El único número de la lista que aparece más de una vez es el 8.
- La mediana es 9.
- La media es 10.

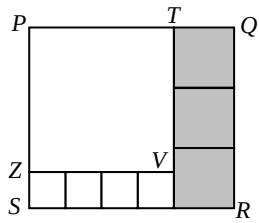
¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en dicha lista?

**A)** 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 24 **E)** 25

**22** ¿Cuántos enteros $n$ con $5000 \leq n \leq 6000$ verifican que el producto de sus cifras es cero?

**A)** 332 **B)** 270 **C)** 301 **D)** 272 **E)** 299

**23** Dividimos el rectángulo *PQRS* en ocho cuadrados como muestra la figura. El lado de cada cuadrado sombreado es 10. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado grande *PTVZ*?




**A)** 18 **B)** 24 **C)** 16 **D)** 23 **E)** 25

**24** Esteban y María han heredado cada uno una parcela. El cociente entre las áreas de la parcela de Esteban y la de María es $\frac{3}{2}$. Siembran maíz y trigo en cada una de las parcelas, siendo $\frac{7}{3}$ el cociente de la superficie dedicada al maíz y al trigo en el total de las dos parcelas. En la parcela de Esteban, dicho cociente es $\frac{4}{1}$. ¿Cuál es la relación entre la superficie dedicada al maíz y la dedicada al trigo en la parcela de María?

**A)** $\frac{11}{9}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{3}{7}$ **E)** $\frac{1}{4}$

**25** Si $a$, $b$ y $c$ son tres números que verifican: $a + b = 3$, $ac + b = 18$, $bc + a = 6$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones verifica el número $c$?

**A)** Es suma de dos primos diferentes

**B)** Es un primo menor que 3

**C)** Es un número múltiplo de 6.

**D)** Es múltiplo de 11

**E)** Es 3

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 18 de abril de 2015**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

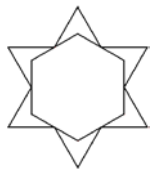
**1** En un bombo de lotería quedan $2n$ bolas, la mitad pares y la mitad impares. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{n}{2n-1}$ **C)** $\frac{n}{2n+1}$ **D)** $\frac{n-1}{2n-1}$ **E)** $\frac{n-1}{2n}$

**2** ¿Cuál es el factorial más pequeño que es múltiplo de $3^{29}$ ?

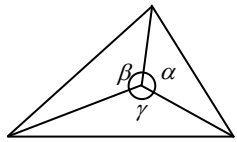
**A)** 50! **B)** 54! **C)** 58! **D)** 60! **E)** 63!

**3** Si el lado de la estrella mide 6, ¿cuál es el perímetro del hexágono regular inscrito de la figura?



**A)** $24\sqrt{3}$ **B)** 48 **C)** $36\sqrt{2}$ **D)** $27\sqrt{3}$ **E)** $18\sqrt{6}$

**4** Los ángulos de un triángulo miden, 42º, 58º y 80º. El incentro del triángulo forma con los vértices los ángulos, $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$. La mayor diferencia entre dos de estos ángulos es:




**A)** 16º **B)** 19º **C)** 18º **D)** 8º **E)** 9º

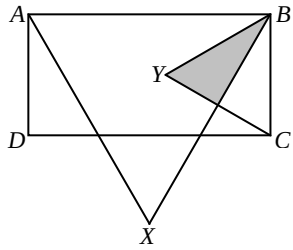
**5** La suma de todos los productos de dos factores diferentes de los números del 1 al 6 es 175. ¿Cuál es la suma de los productos de dos en dos de los números del 1 al 7?

**A)** 343 **B)** 336 **C)** 329 **D)** 325 **E)** 322

**6** ¿Cuál es el primer natural, $n$, que verifica que: $\log 1 + \log 2 + \log 3 + ... + \log n > 10$ ?

**A)** 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

**7** En el rectángulo $ABCD$ de la figura, $AB = 2$ y $BC = 1$. Si tanto $ABX$ como $BCY$ son triángulos equiláteros, ¿cuál es el área de la zona sombreada?




**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ **C)** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{5}}{8}$

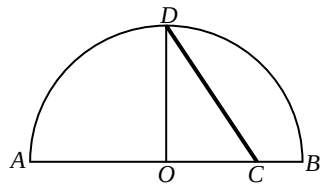
**8** En *Numerolandia* hay exactamente 9 ciudades cuyos nombres son: Uno, Dos, Tres,… y Nueve. El presidente del país decide construir carreteras entre las ciudades de la siguiente forma: dos ciudades distintas tienen una carretera directa que las une, si y sólo si, con sus nombres se puede formar un número de dos cifras múltiplo de 3. (Así por ejemplo, Dos y Uno están unidas puesto que 21 ó 12 es múltiplo de 3, pero en cambio Seis y Cuatro no, pues ni 64 ni 46 son múltiplos de 3). ¿Cuántas carreteras tiene que construir?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**9** En una caja hay dos bolas rojas, dos verdes y dos amarillas, todas de igual tamaño. Alicia coge dos bolas de la caja, luego Bea coge otras dos de las restantes y finalmente Carlos coge las dos últimas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas que coge Carlos sean del mismo color?

**A)** $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**10** En la figura adjunta, $O$ es el centro de la semicircunferencia y $OD$ es perpendicular al diámetro $AB$.
Si $AC = a$ y $CB = b$, ¿cuánto vale $DC$?



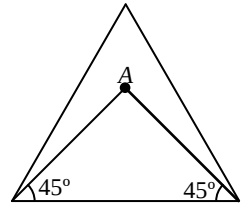

**A)** $\frac{a+b}{2}$ **B)** $\frac{2ab}{a+b}$

**C)** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ **D)** $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{2}}$ **E)** $\frac{a^2}{b}$

**11** Si el 50 % de $P$ es el 20 % de $Q$ , ¿qué porcentaje de $Q$ representa $P$?

**A**) 60 % **B**) 50 % **C**) 40 % **D**) 20 % **E**) 30 %

**12** Joaquín tiene un terreno con forma de triángulo equilátero de 1 km de lado como el de la figura. Desea construir una casa en el punto $A$ y caminos perpendiculares a cada lado desde dicho punto. ¿Cuál es, en km, la longitud total de los tres caminos?



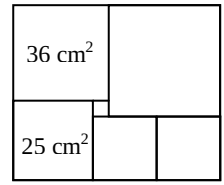

**A)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B)** 0,8 **C)** $0{,}45\sqrt{5}$

**D)** 0,85 **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**13** De la lista formada por {–1, –2, –3, –4, –5} elegimos cuatro números diferentes: *a*, *b*, *c* y *d*. ¿Cuál es el mayor valor posible para la expresión $a^b + c^d$?

**A)** $\frac{5}{4}$ **B)** $\frac{7}{8}$ **C)** $\frac{31}{32}$ **D)** $\frac{10}{9}$ **E)** $\frac{26}{25}$

**14** Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?




**A)** 50 **B)** 44 **C)** 46 **D)** 52 **E)** 48

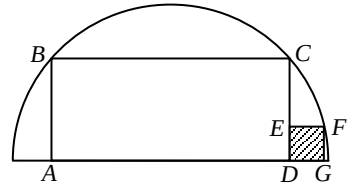
**15** En el triángulo isósceles *ABC* con $AB = AC = x + 1$ y $BC = 2x - 2$, en donde $x > 1$, su área viene dada por la expresión:

**A)** $(x-1)\sqrt{2x^2+2}$ **B)** $2(x-1)\,4$ **C)** $\frac{1}{2}(x+1)^2$ **D)** $(x+1)(x-1)$ **E)** $2(x-1)\sqrt{x}$

**16** ¿Cuál es el área del triángulo determinado por las rectas $y = -2x + 8$, $y = \frac{1}{2}x - 2$, $x + 2 = 0$?

**A)** 15 **B)** 27 **C)** 30 **D)** 36 **E)** 45

**17** La figura adjunta muestra un rectángulo *ABCD* inscrito en una semicircunferencia y su diámetro. Las dimensiones del rectángulo son *AB* = 12 y *BC* = 28. Se ha construido un cuadrado *DEFG* como ves en la figura. ¿Cuál de los siguientes números es el al área del cuadrado *DEFG*?




**A)** 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

**18** La progresión aritmética $\{a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots, a + (n-1)d\}$ de *n* términos verifica las siguientes propiedades:

- La suma de los términos: primero, tercero, quinto y así sucesivamente hasta llegar al último de la progresión original, es 320.
- La suma de los términos: primero, cuarto, séptimo, décimo y así sucesivamente hasta el último de la progresión original, es 224.

¿Cuál es la suma de todos los términos de la progresión?

**A)** 656 **B)** 640 **C)** 608 **D)** 704 **E)** 672

**19** Los puntos de corte de las parábolas $y = ax^2 - 2$ e $y = 4 - bx^2$ ($a > 0$, $b > 0$) con los ejes de coordenadas son los vértices de un cuadrilátero de área 12. ¿Cuál es el valor de $a + b$?

**A)** 1 **B)** 1,5 **C)** 2 **D)** 2,5 **E)** 3

**20** Si $\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} = 1$, ¿cuál es el valor de $a$?

**A)** 9 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 36

**21** Los ceros del polinomio $p(x) = x^2 - ax + 2a$ son números enteros. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de $a$?

**A)** 7 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 18

**22** En una moneda trucada la probabilidad de obtener cara al ser lanzada es de $\frac{1}{4}$. Cuando la lanzamos $n$ veces resulta que tiene la misma probabilidad de obtener dos caras que de obtener tres caras. ¿Cuál es el valor de $n$?

**A)** 5 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 13

**23** En una circunferencia inscribimos un cuadrilátero $ABCD$ en el que $B\hat{A}C = 70^\circ$, $A\hat{D}B = 40^\circ$, $AD = 4$ y $BC = 6$. ¿Cuál es el valor de $AC$?

**A)** $3+\sqrt{5}$ **B)** 6 **C)** $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ **D)** $8-\sqrt{2}$ **E)** 7

**24** El centro de un círculo de radio 2 es a la vez vértice de un triángulo equilátero de lado 4. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la región interior al círculo pero exterior al triángulo y el área de la región interior al triángulo pero exterior al círculo?

**A)** $8-\pi$ **B)** $\pi+2$ **C)** $2\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** $4\left(\pi-\sqrt{3}\right)$ **E)** $2\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$

**25** Para cada número compuesto $n$ definimos $r(n)$ como la suma de los factores en la descomposición en factores primos de $n$. Por ejemplo, $r(50) = 12$ puesto que $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ y $2 + 5 + 5 = 12$. ¿Cuál es el recorrido de la función $r(n)$?
Nota: El recorrido de $r = \{r(n)$, con $n$ número compuesto$\}$

**A)** Conjunto de enteros positivos **B)** Conjunto de los números compuestos
**C)** Conjunto de los pares mayores que 3 **D)** Conjunto de los enteros mayores que 3
**E)** Conjunto de los enteros mayores que 4.

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **D** | 1 | **A** | 1 | **B** |
| 2 | **A** | 2 | **B** | 2 | **E** | 2 | **D** |
| 3 | **C** | 3 | **E** | 3 | **B** | 3 | **D** |
| 4 | **C** | 4 | **E** | 4 | **A** | 4 | **C** |
| 5 | **B** | 5 | **B** | 5 | **E** | 5 | **E** |
| 6 | **B** | 6 | **B** | 6 | **D** | 6 | **D** |
| 7 | **D** | 7 | **D** | 7 | **A** | 7 | **C** |
| 8 | **D** | 8 | **A** | 8 | **E** | 8 | **C** |
| 9 | **E** | 9 | **C** | 9 | **B** | 9 | **C** |
| 10 | **A** | 10 | **C** | 10 | **B** | 10 | **B** |
| 11 | **A** | 11 | **D** | 11 | **D** | 11 | **D** |
| 12 | **C** | 12 | **E** | 12 | **B** | 12 | **A** |
| 13 | **E** | 13 | **E** | 13 | **C** | 13 | **A** |
| 14 | **D** | 14 | **D** | 14 | **A** | 14 | **A** |
| 15 | **D** | 15 | **D** | 15 | **A** | 15 | **A** |
| 16 | **C** | 16 | **C** | 16 | **D** | 16 | **B** |
| 17 | **A** | 17 | **A** | 17 | **B** | 17 | **A** |
| 18 | **E** | 18 | **B** | 18 | **D** | 18 | **C** |
| 19 | **D** | 19 | **E** | 19 | **C** | 19 | **E** |
| 20 | **D** | 20 | **D** | 20 | **D** | 20 | **B** |
| 21 | **E** | 21 | **A** | 21 | **B** | 21 | **E** |
| 22 | **C** | 22 | **E** | 22 | **C** | 22 | **D** |
| 23 | **B** | 23 | **E** | 23 | **C** | 23 | **E** |
| 24 | **E** | 24 | **A** | 24 | **B** | 24 | **D** |
| 25 | **B** | 25 | **E** | 25 | **C** | 25 | **C** |

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **A** | 1 | **E** | 1 | **D** | 1 | **B** |
| 2 | **D** | 2 | **B** | 2 | **A** | 2 | **E** |
| 3 | **C** | 3 | **A** | 3 | **B** | 3 | **A** |
| 4 | **D** | 4 | **D** | 4 | **B** | 4 | **B** |
| 5 | **A** | 5 | **C** | 5 | **C** | 5 | **E** |
| 6 | **D** | 6 | **B** | 6 | **C** | 6 | **D** |
| 7 | **D** | 7 | **A** | 7 | **A** | 7 | **B** |
| 8 | **C** | 8 | **A** | 8 | **E** | 8 | **E** |
| 9 | **B** | 9 | **D** | 9 | **B** | 9 | **C** |
| 10 | **D** | 10 | **E** | 10 | **D** | 10 | **C** |
| 11 | **D** | 11 | **A** | 11 | **A** | 11 | **C** |
| 12 | **D** | 12 | **C** | 12 | **D** | 12 | **E** |
| 13 | **D** | 13 | **B** | 13 | **B** | 13 | **D** |
| 14 | **D** | 14 | **E** | 14 | **D** | 14 | **E** |
| 15 | **A** | 15 | **C** | 15 | **C** | 15 | **E** |
| 16 | **D** | 16 | **C** | 16 | **B** | 16 | **E** |
| 17 | **C** | 17 | **A** | 17 | **B** | 17 | **E** |
| 18 | **B** | 18 | **A** | 18 | **E** | 18 | **C** |
| 19 | **E** | 19 | **D** | 19 | **A** | 19 | **B** |
| 20 | **D** | 20 | **C** | 20 | **E** | 20 | **D** |
| 21 | **C** | 21 | **A** | 21 | **A** | 21 | **C** |
| 22 | **A** | 22 | **D** | 22 | **D** | 22 | **D** |
| 23 | **E** | 23 | **E** | 23 | **B** | 23 | **B** |
| 24 | **C** | 24 | **D** | 24 | **A** | 24 | **D** |
| 25 | **C** | 25 | **D** | 25 | **A** | 25 | **D** |

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel I*

**1. (D)** Calculamos el resultado de las operaciones y los comparamos.

A) $2 \times 0 + 1 + 5 = \mathbf{6}$

B) $2 + 0 + 1 \times 5 = \mathbf{7}$

C) $2 + 0 \times (1 + 5) = \mathbf{2}$

D) $(2 - 0) \times (1 + 5) = \mathbf{12}$

E) $2 + 0 - 1 + 5 = \mathbf{6}$

El resultado mayor es el que corresponde a la operación de la letra D.

**2. (A)** Sumamos los pesos en la misma unidad de medida:

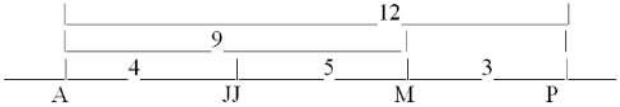
15,4 kg + 3,35 kg + 0,85 kg = 19,6 kg

19,6 kg = 196 hg

El pobre burrito soporta 196 hg.

**3. (C)** La diferencia de edad entre Alfredo y Merche es de: 4 + 5 = 9 años. Como la diferencia de edad entre Alfredo y Pilar es de 12 años, la diferencia de edad entre Merche y Pilar es: 12 – 9 = 3 años.

También, el resultado se puede obtener fácilmente representando en una recta los nombres ordenados de mayor a menor edad y señalando en cada tramo las diferencias de edad.




**4. (C)** Kikirikí pone $\frac{79}{3} \times 12 = 79 \times 4 = 316$ huevos al año

Kokorokó pone: $\frac{55}{3} \times 12 = 55 \times 4 = 330$ huevos al año

Entre las dos gallinas ponen: 316 + 330 = 646 huevos al año.

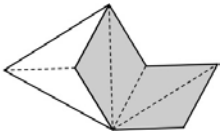
**5. (B)** El ángulo recto mide 90º. 90º – 7º = 83º. El ángulo dibujado por Luis medía 83º.

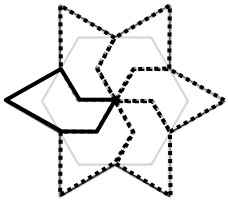
**6. (B)** Para hallar el número que ha pensado Francisco, resolvemos el problema empezando por el final y realizando las operaciones de forma inversa.

64 + 8 = 72; 72 : 4 = 18; 18 – 3 = 15.

El número que había pensado Francisco es 15. La suma de sus cifras es 6.

**7. (D)** Podemos dividir la estrella en 6 piezas iguales, tal y como se muestra en la figura. La parte sombreada tiene un área de $24 : 6 = 4$ cm$^2$ y, en consecuencia, cada uno de los 4 triangulitos medirá 1 cm$^2$. Dado que la punta de la estrella consta de dos de esos triangulitos, el área de la figura es de $4 + 2 = 6$ cm$^2$. Por tanto, el área de la estrella será de $6 \times 6 = 36$ cm$^2$.





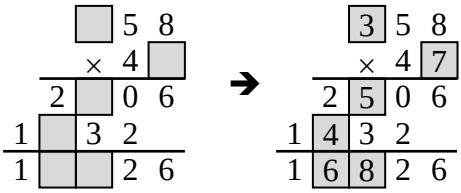
**8. (D)** Las dos menos veinte, (1:40) más tres cuartos de hora (0:45) son las 2:15 h
1:40 + 0:45 = 1:85 = 2:25 h de la tarde que son las 14:25 h.
Esteban volverá a casa a las 14:25 h.

**9. (E)** Calculamos el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 que es 12.
Carmen da de comer a los tres gatitos cada 12 horas.

**10.(A)** Primero, calculamos la longitud de la cuerda multiplicando el perímetro de un cuadrado por 36, y a continuación, dividimos la cantidad obtenida entre el perímetro del triángulo equilátero.
Longitud de la cuerda: $(4 \times 2) \times 36 = 288$ cm.
Perímetro del triángulo: $3 \times 3 = 9$ cm.
Número de triángulos que puede hacer: $288 : 9 = 32$ triángulos.

**11.(A)** Los 3 bolis ($b$) y los dos cuadernos ($c$) valen: $20 - 12{,}50 = 7{,}50$ €
Si llamamos $b$ al precio de un boli y $c$ al precio de un cuaderno, $3b + 2c = 7{,}50$
1 cuaderno cuesta 1 euro más que un boli. $c = 1 + b$, luego 2 cuadernos cuestan 2 euros más que 2 bolis. $2c = 2 + 2b$.
Sustituimos en $3b + 2c = 7{,}50$ y obtenemos: $3b + (2 + 2b) = 7{,}50$.
Eso significa que 5 bolis cuestan: $(7{,}50 - 2) = 5{,}50$ €.
Un boli cuesta $5{,}50 : 5 = 1{,}10$ €.

**12.(C)** Primero, buscamos las cifras que ha comido el Comenúmeros en la multiplicación mediante tanteos.
Después, sumamos las cifras:
3 + 7 + 5 + 4 + 6 + 8 = 33
La suma de las cifras que se ha comido el bribón es 33.



**13.(E)** Utilizando una tabla como la siguiente averiguaremos cuando vuelve a ocurrir que los años de Ana y de su tío tengan las mismas cifras:

| Años ANA | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Años GONZALO | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | … |

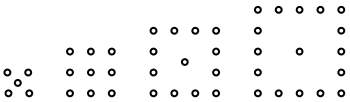
Cuando Ana tenga 24 años, su tío tendrá 42
Como mínimo tendrán que pasar: 24 – 13 = 11 años.

**14.(D)** Si 7 sandías y 1 melón pesan lo mismo que 3 sandías y 7 melones; entonces, 4 sandías pesan lo mismo que 6 melones. De aquí se deduce que 3 melones pesan lo mismo que 2 sandías, luego 9 (9 = 3 × 3) melones pesarán lo mismo que (3 × 2 = 6) 6 sandias
Planteando una proporción:

$$\frac{4\ sandías}{6\ melones} = \frac{x\ sandías}{9\ melones} \rightarrow x = \frac{4 \times 9}{6} = 6$$

6 sandías pesan lo mismo que 9 melones.

**15.(D)** Con el número de monedas de cada figura construimos una tabla para buscar regularidades.



5 9 13 17

| FIGURA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº MONEDAS | 5 | 9 | 13 | 17 | | | |
| | | + 4 | + 4 | + 4 | | | |

Analizando la tabla se observa que para construir cada figura necesita 4 monedas más que en la figura anterior.
La tabla se completaría así:

| FIGURA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº MONEDAS | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 |

El número de monedas empleadas se calcula sumando todos los términos de la serie: 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + 29 = 119
Santiago tiene 119 euros.

**16.(C)** 2 017 024 – 1 930 505 = 86 519
El número, de los propuestos, más próximo a 86 519 es 85 000.

**17.(A)** Los números mayor y menor de cuatro cifras que se pueden formar con las cifras dadas son:
Número mayor: 9852; número menor: 1258.
La diferencia es: 9852 – 1258 = 8594.

**18.(E)** Expresamos todas las cantidades en minutos:
75 + 30 + 35 + 45 + 20 = 205 min 4 horas = 240 min
Ha estudiado 240 – 205 = 35 minutos.

**19.(D)** Al número total de combinaciones de prendas le restamos las que ya se ha probado
$4 \times 7 \times 3 = 84$ combinaciones. $84 - 25 = 59$.
Se podrá probar 59 combinaciones más.

**20.(D)** Si para 6 personas necesita 4 huevos, para 3 personas necesitará 2 huevos.
Como $135 = 45 \times 3$, necesitará $45 \times 2 = 90$ huevos.
¿Cuántas docenas son 90 huevos?
90 : 12 = 7, 5 siete docenas y media.

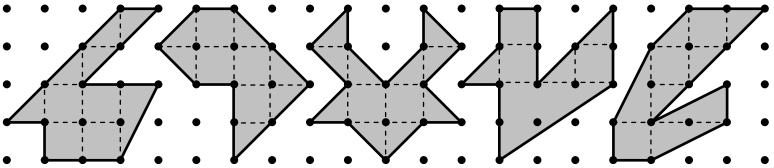
Planteando una proporción: $\frac{4}{6} = \frac{x}{135} \rightarrow x = \frac{4 \times 135}{6} = 90$
Juanito necesitará siete docenas y media de huevos.

**21.(C)** En la imagen reflejada, las letras y los números que designan columnas y filas, respectivamente, quedan a la derecha del tablero.
El barco marcado con una interrogación corresponde a la casilla C2
Violeta debe decir C2

**22.(A)** La secuencia de "lloros" y "chupete" es de 9 minutos: 2 de lloros y 7 con chupete.
Para la próxima hora hay que añadir 4 minutos que Lino tiene el chupete y varias secuencias de 9 minutos.
60 + 4 = 64; 64 : 9 = 7 y resto 1.
En la próxima hora Luca tendrá que poner el chupete a Lino 7 veces más.

**23.(B)** El número de bolas verdes se obtiene restando al total de las bolas, las rojas y las azules.
$\frac{1}{2}$ de 60 = 30, son rojas. $\frac{3}{10}$ de 60 = 18 son azules.
Las restantes son verdes. 60 – 30 – 18 = 12.

**24.(E)** Si descomponemos cada una de las figuras en cuadrados y triángulos rectángulos de áreas fáciles de determinar podemos determinar fácilmente el área de cada polígono.



Tomando como unidad el cuadrado de la retícula, tenemos:
Figura A. 4 cuadrados + 5 triángulos de área 0,5 + 1 triángulo de área 1 = 7,5.
Figura B. $4 + 6 \cdot 0{,}5 = 7$.
Figura C. $2 + 10 \cdot 0{,}5 = 7$.
Figura D. $3 + 3 \cdot 0{,}5 + 3 = 7{,}5$
Figura E. $3 + 4 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 1 = 8$.
La figura que ocupa más es la E.

Si conocemos y aplicamos la fórmula de Pick a cada una de las figuras, podemos comparar los resultados.

Fórmula de Pick: Área $= I + \frac{B}{2} - 1$, donde $I$ son los puntos de la retícula interiores a la figura y $B$ son los puntos de la retícula que están en el borde de la figura.

Figura A: $2 + \frac{13}{2} - 1 = 7{,}5$ Figura B: $3 + \frac{10}{2} - 1 = 7$

Figura C: $1 + \frac{14}{2} - 1 = 7$ Figura D: $2 + \frac{13}{2} - 1 = 7{,}5$

Figura E: $3 + \frac{12}{2} - 1 = 8$

La figura E es la que ocupa más.

**25. (B)** La raíz cuadrada del producto de los números dados es un número decimal comprendido entre los dos números consecutivos.
$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 23 = 4830$. Puesto que $69 < \sqrt{4830} \cong 69{,}5 < 70$, los dos números buscados son 69 y 70; $69 = 3 \times 23$; $70 = 2 \times 5 \times 7$;
La suma de los dos números es 139.

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel II*

**1. (D)** Como en total pagaron 16 + 47 + 21 = 84 euros, cada entrada costó 84 : 4 = 21 euros. Así pues, Wissal le debe 21€ a María, Arancha le debe 5 € a María y Ana está en paz. Es incorrecto que Arancha le deba 5 € a Ana

**2. (B)** Medio kilómetro son 0,5 km = 500 000 mm. Es decir, medio millón de milímetros. Medio hectómetro y quinientos decámetros son 50 000 mm. Cien mil metros son diez millones de milímetros y cinco kilómetros son cinco millones.

**3. (E)** Como $a \cdot c = e$ y $b \cdot d = a \cdot c \cdot e = e \cdot e = e^2$ por lo que $d$ también es un cuadrado perfecto y el producto será múltiplo de 9. Como los únicos cuadrados perfectos de una sola cifra son 1, 4 y 9 y *d*es par, $d = 4$ y $b = 9$. Así pues $e = 6$, $a = 3$ y $c = 2$ y la suma de todos ellos es 3 + 9 + 2 + 4 + 6 = 24.

**4. (E)** La O.

**5. (B)** Ardillo debe intentar comprar el máximo de avellanas con el *ofertón* pues así cada avellana le costará solo 9 céntimos. Dividiendo vemos que 580 = 11 · 52 + 8. Si compra 52 lotes con el *ofertón* aún tendrá que comprar 8 avellanas más y lo que le convienen es comprar un lote de *oferta* y dos de *ofertita*.

Así pues pagará 52 · 99 + 60 + 2 · 12 = 5232 céntimos = 52,32 euros.

**6. (B)** La suma de todos los números es 1263. Como aún le queda el doble de lo que se ha comido, la suma de los que se ha comido es 1263/3 = 421. Como lo más pequeños que se puede haber comido con 40, 80 y 100, que suman 220, el número más grande que se podría haber comido sería 421 – 220 = 201. Ese número no está en la lista pero si se hubiera comido el 40, 80 y 101, el cuarto sería 200 que sí está en la lista.

**7. (D)** Llamando $p$ a la cantidad de comida que come un perro y $g$ a la que come un gato, podemos escribir la siguiente igualdad: $6p + 4g = 7p + 2g$ y, restando $6p$ y $2g$ de ambos miembros obtenemos $2g = p$ es decir, un perro come como dos gatos.
Como $6p + 4g = 5p + p + 4g = 5p + 2g + 4g = 5p + 6g$, con esa comida podría darle de comer a cinco perros y seis gatos.
Para asegurarnos que no es ninguna de las otras respuestas observa que:
$6p + 4g = 6p + 2p = 8p < 9p$; $6p + 4g = 4p + 8g > 4p + 7g$; $6p + 4g = 16g > 15g$ y $6p + 4g < 6p + 6g$.

**8. (A)** Debemos buscar un número $n$ que cumpla $8^{12} : 4 = 2^n$. Para ello escribimos los números como potencias de base 2 y usamos propiedades de potencias de igual base.

$$\frac{8^{12}}{4} = \frac{\left(2^3\right)^{12}}{2^2} = \frac{2^{36}}{2^2} = 2^{34} \quad \text{y} \quad n = 34.$$

**9. (C)** Un globo puede cargar 60 kg y una cesta y, por tanto, dos globos podrían cargar 120 kg y dos cestas. Al usar una sola cesta puedo meter 200 – 120 = 80 kg más de harina y, por tanto, una cesta pesa 80 kg.

**10.(C)** En ese producto aparecen los números: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 7 y 13. Agrupemos estos números en tres productos para obtener tres números consecutivos.
Solo uno de ellos podrá ser múltiplo de tres así pues, uno de los números es múltiplo de $3^3 = 27$. ¡Ya lo tenemos! Como no puede ser 54 pues es demasiado grande, los números son $2 \cdot 13 = 26$, $3^3 = 27$ y $2^2 \cdot 7 = 28$ y la suma buscada es 81.

**11.(D)** Los ángulos de la base miden $180º - 100º = 80º$ y $180º - 110º = 70º$. Como la suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero es 360º, $x = 360 - (2 \cdot 80 + 70) = 130º$.

**12.(E)** Si llamamos $x$ al número de niños, el número de niñas es $x + 4$ y en total hay $2x + 4$ estudiantes. Si sumamos el doble de niños con la mitad de niñas obtendremos $2x + 8$. Plantemos pues la ecuación:

$$2x + \frac{x+4}{2} = 2x + 8 \rightarrow \frac{x+4}{2} = 8 \rightarrow x + 4 = 16 \rightarrow x = 12 \cdot$$

Así pues hay 12 chicos y 16 chicas y en total son 28 estudiantes.

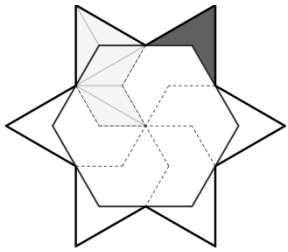
**13.(E)** La letra O debe ser 1 pues de la suma de dos cifras no me puedo llevar más que 1. OSOS solo puede ser 1010 pues, como O es 1, la suma de las cifras de la izquierda podría ser 10 o 11 (si me llevara una) pero S es par (pues es A + A).
Así que O = 1, S = 0, A = 5, L = 9 y B = 8 y el número 8195 se representa con la palabra BOLA.

**14.(D)** Si multiplicamos por 1000 seguro que obtenemos un entero. Veamos si podemos multiplicar por un número menor. Para ello simplifiquemos la fracción

$$\frac{35613472}{1000} = \frac{17806736}{500} = \frac{8903368}{250} = \frac{4451684}{125}.$$

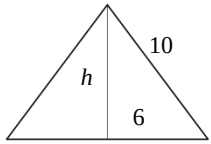
Luego nos basta con multiplicar por 125: $35613{,}472 \cdot 125 = 4451684$.

**15.(D)** Observa que podemos dividir la estrella en 36 triangulitos iguales y que la punta de flecha contiene dos de ellos. Como el área total de la estrella es 720 $mm^2$, el área de la punta de flecha es $720/18 = 40$ $mm^2$.



**16.(C)** Desde que le pone el chupete una vez hasta la próxima pasan 9 minutos. La primera vez se lo pondrá a los tres minutos de comenzar la hora y, a partir de ese momento, quedan $57 = 9 \cdot 6 + 3$ minutos para acabar la hora por lo que se lo tendrá que poner otras seis veces más. En total se lo pondrá 7 veces.

**17.(A)** Como el triángulo es isósceles, podemos calcular la altura sobre el lado desigual con el teorema de Pitágoras. $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.




Si estás familiarizado con las ternas pitagóricas, te habrás dado cuenta de que esta es el doble de la ultra conocida terna 3, 4, 5 y, por tanto, sin hacer ningún cálculo puedes obtener $h = 8$.

El área es $\frac{12 \cdot 8}{2} = 48$ cm$^2$.

**18.(B)** Tendrá 39 líneas verticales de 30 unidades de longitud y 29 horizontales de 40 unidades. En total $39 \cdot 30 + 29 \cdot 40 = 1170 + 1160 = 2330$ segmentos.

**19.(E)** Hay que tener cuidado al contar. Lo mejor es elaborar una tabla con todos los resultados posibles. Como ves, hay 36 resultado posibles y solo 12 de ellos son favorables de manera que la probabilidad buscada es $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

| • | **–3** | **–2** | **–1** | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **–3** | 9 | 6 | 3 | 0 | –3 | –6 |
| **–2** | 6 | 4 | 2 | 0 | – | – |
| **–1** | 3 | 2 | 1 | 0 | – | – |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | – | – | – | 0 | 1 | 2 |
| **2** | – | – | – | 0 | 2 | 4 |

**20. (D)** Por cada pantalón podrá ponerse siete camisetas así que, entre pantalón y camiseta tiene $4 \cdot 7 = 28$ combinaciones. Además, cada una de esas combinaciones puede ponérsela con tres zapatillas distintas lo que hacen un total de $28 \cdot 3 = 84$ modelitos distintos. Como ya se ha probado 25, puede dudar aún entre $84 - 25 = 59$ posibilidades.

**21.(A)** De una cifra está solo el 4, de dos cifras están el 13, el 22, el 31 y el 40. Con tres cifras la cosa se complica, podemos usar las cifras 1-1-2 o 1-3-0 o 2-2-0 o 4-0-0 combinadas de todas las formas posibles pero teniendo en cuenta que la primera no puede ser cero. Vayamos con cuidado: 112, 121 y 211, 103, 130, 301 y 310, 202 y 220 y por último 400. En total hemos obtenido 15 números.

**22.(E)** Si llamamos $x$ a la medida del ángulo mayor en grados. Entonces, el mediano mide $x - 23$ y el pequeño $x - 31$. Como la suma de los tres ángulos debe ser 180º, obtenemos la ecuación $x + (x - 23) + (x - 31) = 180 \rightarrow 3x - 54 = 180 \rightarrow x = 78$º.

**23.(E)** Si partimos de un número natural $a$ y realizamos las operaciones que nos manda Don Retorcido, obtenemos las expresiones $38a + 37$ luego el número obtenido será impar (pues $38a$ es par) lo que elimina automáticamente los números 496 y 476. Para ver qué pasa con los otros tres, podemos restarles 37 y ver si el resultado es divisible entre 38 (es decir, primero entre 2 y luego entre 19), es par. Esto es equivalente a sumarles1 y ver si el resultado es divisible entre 19. Desde luego parece más rápido pero, ¿sabrías explicar por qué es equivalente? Comprobamos todos ellos y vemos que $472 = 19 \cdot 24 + 16$, $1902 = 19 \cdot 100 + 2$ y $494 = 19 \cdot 26$ luego ese es único correcto y el número que habían pensado es 12 (= 26 : 2 – 1).

**24.(A)** Vamos despacio: Que empiecen con A hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (que son todas las formas posibles de ordenar las legras B-R-C-O. Que empiecen con B otras 24. Que empiecen con CA hay $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ y también hay 6 que empiecen con CB. Vamos a escribir las que empiezan con CO por orden alfabético hasta llegar a COBRA: COABR, COARB; COBAR y la próxima es COBRA.
Así pues, hay: $24 + 24 + 6 + 6 + 3 = 63$ delante de ella y COBRA ocupa la posición número 64.

**25.(E)** Escribimos la igualdad $\frac{3a}{4} = \frac{5b}{8}$ y ahora, multiplicando ambos miembros por 8, llegamos a la igualdad: $6a = 5b$

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* III

**1.(A)** Observando la segunda fila averiguamos el valor del sol, ☼ = $24:4=6$
Con esta información y fijándonos en la primera fila, conseguimos el corazón,
♥ = $(26-2\cdot 6):2=7$
Con la última fila sabemos que dos cuadraditos valen $33-6-7=20$, así que □ = 10.
Por último de la tercera fila sacamos que ☺ = $(27-10-7):2=5$

**2.(E)** Diego reparará 9. Como Mónica repara $\frac{2}{3}$ de los ordenadores que repara Diego, entonces Mónica reparará 6. Y Kira repara el triple que Mónica, por tanto, Kira reparará 18. En total: $9+6+18=33$ ordenadores.

**3.(B)** Como el área del círculo es $36\pi \Rightarrow 36\pi = \pi \cdot r^2$, y sacamos que $r = 6$.

El perímetro de la figura está formado por dos radios y $\frac{3}{4}$ de la circunferencia, es decir, $P = 2\cdot 6 + \frac{3}{4}\cdot 2\pi\cdot 6 = 12+9\pi$

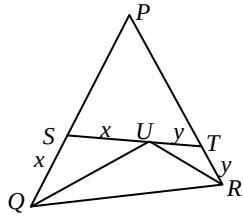
**4.(A)** Sustituimos $x = 2y$, nos queda $(2y-y)\cdot(2\cdot 2y+y)=5y^2$

**5.(E)** Con esa gráfica, la pendiente tiene que ser negativa y la ordenada en el origen positiva. Solo cumple estas condiciones $y=-2x+3$

**6.(D)** Dividir 109 entre $x$ que dé resto 4, es igual que dividir 105 entre $x$ y que la división sea exacta. Por tanto, factorizamos $105=3\cdot 5\cdot 7$. Todos los divisores de 105 que tengan dos cifras serán 15, 21 y 35. La suma pedida será 71.

**7.(A)** $\begin{cases} PS = 19-x \\ ST = x+y \\ PT = 17-y \end{cases}$

El perímetro pedido será $P = 19-x+x+y+17-y = 36$



**8.(E)** Como es múltiplo de 5, el número tiene que acabar en 0 ó 5, pero al ser el número impar, solo nos queda el 5. Al estar comprendido entre 400 y 600 solo tenemos dos posibilidades 4*a*5 o 5*a*5. Para que sea múltiplo de 11 en el primer caso $9-a=0$, por tanto $a=9$. Y en el segundo $10-a=0$ no puede ser ya que *a* es una cifra. Concluimos que el número es el 495 y la suma pedida 18.

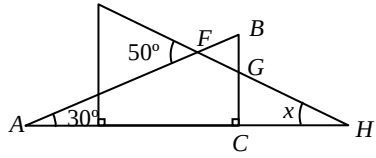
**9.(B)** $\hat{B}=60^{\circ}$ porque *ABC* es un triángulo rectángulo y $\hat{A}=30^{\circ}$.

$B\hat{F}G=50^{\circ}$ por ser opuesto por el vértice del ángulo de 50º del enunciado.

$B\hat{G}F=70^{\circ}$ ya que es el único ángulo que falta del triángulo *FBG*.

$C\hat{G}H=70^{\circ}$ por ser opuesto por el vértice del anterior.

Por último, $x=20^{\circ}$ porque *CGH* es un triángulo rectángulo y $C\hat{G}H=70^{\circ}$.




**10.(B)** Si $x+xy=391\Leftrightarrow x(1+y)=391$. Para saber qué dos números multiplicados dan 391 busco sus factores $391=17\cdot 23$, como $x>y$, $x=23$, $y+1=17$. Así que $x+y=39$.

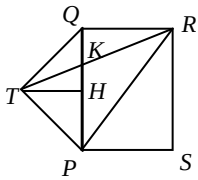
**11.(D)** Si $(p,q)\in r$, entonces se puede escribir $\left(p,\frac{2p}{5}\right)$. Por otro lado, el área del rectángulo será $A=p\cdot q$, es decir, $90=p\cdot\frac{2p}{5}$, de donde sacamos que $p=15$.

**12.(B)** En la primera bolsa, la probabilidad de sacar dos del mismo color será: $P=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, mientras que en la segunda bolsa será:

$P=\frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{2}{4+x}\cdot\frac{1}{3+x}+\frac{x}{4+x}\cdot\frac{x-1}{3+x}=\frac{x^2-x+4}{(4+x)(3+x)}$. Como las dos probabilidades son iguales $\frac{1}{3}=\frac{x^2-x+4}{(4+x)(3+x)}$, operando llegamos a $x^2+7x+12=3x^2-3x+12$, que tiene por soluciones 0 y 5, como $x>0$, la única solución válida es $x=5$.

**13.(C)** Para conseguir el área pedida, vamos a dividir el triángulo *PTR* en dos triángulos *PKT* y *PKR*. Los dos tienen la misma base *PK* y las alturas son *HT* y *QR* respectivamente.

Como el triángulo *PTQ* es isósceles, la altura cae en la mitad de la hipotenusa y aplicando el teorema de la altura tenemos que $TH^2 = 2 \cdot 2$, por tanto, $TH = 2$




Aplicamos la semejanza de triángulos a *RQK* y *THK* ya que los dos son rectángulos y tienen ángulos opuestos por el vértice. $\frac{TH}{QR} = \frac{HK}{QK}$, $\frac{2}{3} = \frac{HK}{QK}$ y sabemos que $HK + QK = 2$, por tanto, $\frac{2}{3} = \frac{HK}{2 - HK}$, donde $HK = \frac{4}{5}$.

Entonces, $PK = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$ y ya tenemos el área: $A = \frac{\frac{14}{5} \cdot 2}{2} + \frac{\frac{14}{5} \cdot 3}{2} = 7$

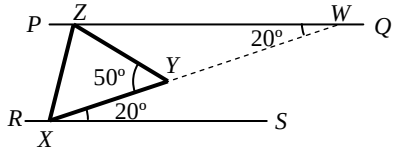
**14.(A)** Vamos a fijarnos en los tiempos de cada uno $t = \frac{d}{v}$.

El tiempo que tarda Eugenio será $x = \frac{\frac{d}{2}}{6} + \frac{\frac{d}{2}}{12} = \frac{d}{8}$

El tiempo que tarda Esteban será $y = \frac{\frac{d}{3}}{5} + \frac{\frac{2d}{3}}{15} = \frac{d}{9}$

Por tanto, $\frac{x}{y} = \frac{\frac{d}{8}}{\frac{d}{9}} = \frac{9}{8}$.

**15.(A)** Prolongo la recta *XY* hasta que corte a la *PQ* en el punto *W*. Los ángulos $Y\hat{X}S = Y\hat{W}Z = 20^\circ$ son iguales por ser alternos internos. $Z\hat{Y}W = 130^\circ$ por ser suplementario de $Z\hat{Y}X$, por último, observando el triángulo *ZYW* sacamos el ángulo pedido $Q\hat{Z}Y = 30^\circ$



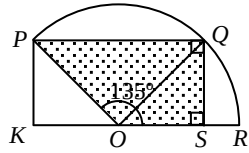
**16.(D)** Don Retorcido compra *x* sellos de 20 céntimos, 10*x* sellos de 10 céntimos e *y* sellos de 50 céntimos. En total compra $11x + y$ sellos pagando 10 euros. Tenemos que $1000 = 20x + 100x + 50y \Rightarrow 100 = 12x + 5y$ , con *x*, *y* números enteros. Así que para que esto se cumpla, *x* tiene que ser múltiplo de 5. Si $x = 5 \Rightarrow y = 8$. No puede ser otro múltiplo de 5 porque si $x = 10 \Rightarrow y = -4$.

Por tanto, Don Retorcido compra 50 sellos de 10 céntimos, 5 sellos de 20 céntimos y 8 sellos de 50 céntimos, en total 63 sellos.

**17.(B)** El problema consiste en hallar la diagonal del ortoedro de lados 4, 1 y 3. $d = \sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{26}$

**18.(D)** Primero contamos todas las posibles combinaciones de agrupar los cinco números tomados de dos en dos. $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ . De todas éstas, las que el producto da cero son aquellas parejas en las que está incluido el 0. Son 4. Por tanto, la probabilidad será $P = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ .

**19.(C)** Nos ayudamos del segmento adicional *OQ* y del triángulo rectángulo *OPK*.




$P\hat{O}K = 45^o$ ya que es suplementario del ángulo dado, $O\hat{P}K = 45^o$ por ser el ángulo que falta al triángulo rectángulo *OPK*. Por tanto el triángulo *OPK* es rectángulo isósceles y la hipotenusa mide 12 ya que es el radio de la circunferencia. Aplicando Pitágoras sacamos los catetos $x^2 + x^2 = 12^2 \rightarrow x = 6\sqrt{2}$ . El triángulo *PKO* es igual que el *QSO*. Por tanto, $OS = 6\sqrt{2}$ , $PQ = 12\sqrt{2}$ y $QS = 6\sqrt{2}$ . El área del trapecio pedida será $A = \frac{\left(12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\right) \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 108$

**20.(D)** Empecemos por *z*. Mirando la solución *z* solo puede ser 1, ya que si fuera 2, $x + y + 2 \geq 20$ , solo podría ser si $x = y = 9$, pero no es posible por el enunciado que dice que $x \neq y \neq z$ , por tanto $z = 1$.

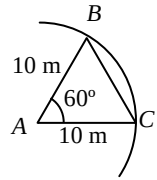
Observando las unidades $x + y + z = 10 + x$ , por tanto $y = 9$.

De la columna de las decenas tenemos que $x + y + z + 1 = y$, con los datos que ya tenemos $x + 9 + 1 + 1 = 19$, $x = 8$.

**21.(B)** Para que Carolina esté a la misma distancia de Bea que de Ali, el triángulo formado entre ellas tiene que ser equilátero, y por tanto, todos los ángulos 60º. Por tanto, para que Carolina esté más cerca de Bea que de Ali, el ángulo $B\hat{A}C$ tiene que ser menor de 60º.

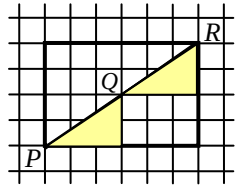
Hay que tener en cuenta que Bea se puede mover en uno de los lados o en el otro del segmento que forman AC.

Observando el ángulo $B\hat{A}C$ y aplicando la ley de Laplace, encontramos la probabilidad. $P = \frac{120^o}{360^o} = \frac{1}{3}$.




**22.(C)** Si consideramos la recta PR de la figura, tiene una pendiente de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Significa que podemos dibujar dos triángulos de abscisa 3 y ordenada 2. Por tanto pasa por 3 vértices.

Planteando de modo similar en el rectángulo de lados 60 y 45.




Sabemos que la pendiente de la diagonal será $m = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. El problema se reduce en averiguar cuántos triángulos rectángulos podemos dibujar, cuya hipotenusa coincide con la diagonal, y tiene abscisa 4 y ordenada 3. Es decir, $60:4 = 45:3 = 15$. Como podemos dibujar 15 triángulos, la diagonal pasa por 16 vértices.

**23.(C)** El número *abcd*, es el número $1000 + 100b + 10c + d$.

La suma descendente será $1000a + 100b + 10c + d + 100b + 10c + d + 10c + d + d = =$ $1000a + 200b + 30c + 4d = 2014$.

Fijándonos en las unidades $4d = 4$. $\begin{cases} 4d = 4 \\ 4d = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ d = 6 \end{cases}$

· Si $d$ = 6, 3c acabaría en 9 y solo puede ser si $c$ = 3. En este caso 2$b$ tiene que acabar en 9 y es imposible.

· Si $d$ = 1, 3c acabaría en 1 y solo puede ser $c$ = 7. En este caso 2$b$ debe acabar en 8 y entonces $b$ = 4 o $b$ = 9.. Si fuera $b$ = 9, entonces $a$ = 0 (imposible), así que tiene que ser $b$ = 4 y por tanto $a$ = 1.

Hemos obtenido el número 1471, cuyas cifras suman 13.

**24.(B)** $V_{agua} = V_{cono} - V_{esferas} = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{4}{3}\pi(2r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 2016\pi$ donde $R$ es el radio de la base del cono y $r$ el radio de la esfera pequeña.

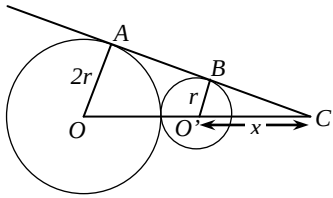
Aplicando semejanza de triángulos $OAC$ y $O'BC$, $\frac{2r}{r} = \frac{2r + r + x}{x} \Rightarrow x = 3r$.

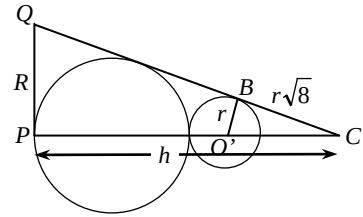
$h = 2r + 2r + r + x = 8r$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $O'BC$, obtenemos que el cateto desconocido, $BC$, mide $r\sqrt{8}$

Aplicando semejanza en los triángulos $QPC$ y $O'BC$ obtenemos:

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{\sqrt{8}r} \Rightarrow R = \frac{r \cdot h}{r\sqrt{8}} = \frac{r \cdot 8r}{r\sqrt{8}} = r\sqrt{8}$$




Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos: $\frac{8r^2 \cdot 8r}{3} - \frac{32r^3}{3} - \frac{4r^3}{3} = 2016 \Rightarrow r = 6$.

**25.(C)** Leyendo las condiciones del enunciado, sabemos que el número buscado tendrá esta forma _ □ _ □ _ donde en cada uno de los cuadrados tiene que haber una cifra más grande que sus cifras contiguas.

Como tenemos que usar 1, 3, 5, 7 y 9, la cifra más pequeña para poner en un cuadrado será el 5 ya que tiene que ser mayor que sus dos contiguas. Si en un cuadrado ponemos el 5, en el otro tenemos que poner un 9 ya que si usamos el 7, quedaría el 9 fuera del lugar contiguo al 5 o al 7 y eso no puede ser. Obtendríamos _ 5 _ 9 _, solo hay dos posibilidades 1 5 3 9 7 ó 3 5 1 9 7 y las cifras simétricas 79351 y 79153.(4 formas)

Nos quedan más posibilidades poniendo en los cuadrados el 7 y el 9. En este caso no hay restricciones para colocar las otras tres. Por tanto habrá 3! formas de colocarlas y sus simétricas. (12 formas)

En total, 4 + 12 = 16.

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* IV

**1. (B)** Si se ahorró 25 € y pago 250 €, el precio de las compras era 275 €, y el porcentaje de ahorro fue $\frac{25}{275}\times 100 = \frac{100}{11} = 9{,}0909...$

**2. (D)** Sea $x$ el número de avestruces e $y$ el número de cebras. Según el enunciado

$$2x + 4y = 28 + 2\cdot(x+y) \quad \Rightarrow \quad 2y = 28 \quad \Rightarrow \quad y = 14$$

**3. (D)**
$$\left.\begin{array}{ll} E_1 & x+y+z=1 \\ E_2 & x+y-z=2 \\ E_3 & x-y-z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} E_1-E_2 & 2z=-1 \\ E_1+E_3 & 2x=4 \\ E_2-E_3 & 2y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x\cdot y\cdot z = \frac{1}{2}$$

**4. (C)** Sea $y$ la última cifra del número buscado. Entonces, $10x + y = 14x \Rightarrow y = 4x$. Como $y$ es entero con una sola cifra, sólo existen dos posibilidades, $x = 1, y = 4$ o $x = 2, y = 8$.

**5. (E)** Teniendo en cuenta que $125 \cdot 8 = 1000$, separando de dos en dos las cifras del número dado desde su izquierda, tenemos los siguientes productos:

| | | | 7 | 2 | 1 | 6 | 8 | 4 | 8 | 2 | 4 | 8 | 1 | 6 | 8 | 5 | 6 | 6 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 72 | 9 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | 2 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 84 | | | | 1 | 0 | 5 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 82 | | | | | | 1 | 0 | 2 | 5 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 48 | | | | | | | | | 6 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | 2 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |
| 85 | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | 6 | 2 | 5 | | | | | |

La cifra que ocupa el octavo lugar desde la izquierda es 2 + 1 = 3.

Otro método más rápido sería:

7 216 848 248 168 566 432 · 125 = 7 216 848 248 168 566 432 000 : 8 = 90210603…

**6. (D)** Si $ab + ac + bc = abc \quad \Rightarrow \quad \frac{ab}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{bc}{abc} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$

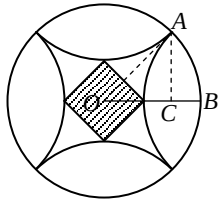
Los únicos enteros positivos que verifican dicha relación son $a = 2$, $b = 3$, $c = 6$, y su suma es $a + b + c = 11$.

**7. (C)** Los números más pequeños que tienen dos sietes son 77 (que es múltiplo de 7 y de 11), 177 (que es múltiplo de 3 y de 59), 277 (que no tiene divisores distintos de 1 y de 277), etc… El menor que es primo es 277.

**8. (C)** Para que la suma sea la máxima posible, las cifras de las decenas deben ser las mayores posibles, y lo mismo deben ser las de las unidades, por tanto los números serán 96, 85 y 74, que suman 255. (También suman 255 todas las combinaciones posibles de 9, 8 y 7 como cifras de las decenas y 6, 5 y 4 como cifras de las unidades).

**9. (C)** El mayor capicúa de cuatro cifras divisible por 15 es 5775 (debe terminar en 5 y la suma de sus cifras debe ser múltiplo de 3). La suma de sus cifras es 24.

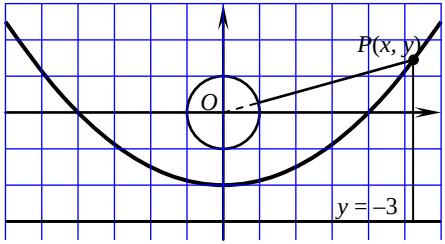
**10. (B)** Como el triángulo $OCA$ es rectángulo e isósceles y además $OA = 1$, entonces $OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $CB = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.




La mitad de la diagonal del cuadrado cuyo lado queremos hallar mide $1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$.

Y el lado del cuadrado mide $\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$.

**11. (D)** El conjunto de puntos que equidistan de una circunferencia y una recta exterior a la misma es una parábola, que coincide con el conjunto de puntos que equidistan del centro de la circunferencia y una recta paralela a la recta dada y a una distancia de ella igual al radio de la circunferencia. Por tanto el conjunto que nos piden es la parábola con foco en el origen y directriz y = – 4, es decir, $x^2 + y^2 = (y + 4)^2 \Rightarrow x^2 - 16 = 8y$.



**Otro método es:** Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, $r$ la recta dada y $C$ la circunferencia, se cumplirá que: $d(P, r) = d(P, C)$.

Como $P$ debe estar por encima de la recta $r$, la ordenada $y$ del punto será $y > -3$, por lo que $d(P, r) = y - (-3) = y + 3$.

La distancia del punto a la circunferencia será, $d(P, C) = d(P, O) - radio$ y como el centro de la circunferencia es $O(0, 0)$ y el radio es 1 tendremos:

$$d(P, r) = d(P, C) \Rightarrow y + 3 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - 1 \Rightarrow (y+4)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 8y = x^2 - 16.$$

**12. (A)** El área del trapecio $ABCE$ es $\frac{(AD - ED) + BC}{2}.h$ y como $ED = BC$ resulta $\frac{AD \cdot h}{2}$ que es también el área del triángulo $ACD$. Por tanto las dos áreas son iguales.

**13. (A)** El menor entero positivo cuyos dígitos suman 2015 es un número formado por un 8 seguido de 223 nueves ($2015 = 9 \times 223 + 8$).
Así el primer dígito del siguiente número es 9.

**14. (A)** La ecuación $f(x) = k$, con $k \in (0, 2)$ tiene tres soluciones, si $k = 0$ o $k = 2$ tiene dos soluciones y para cualquier otro valor de $k$, la ecuación tiene una única solución. Así $f[f(f(x))] = 0$ tiene dos soluciones para $f(f(x))$, que son 0 y $-4$. Ahora $f(f(x)) = 0$ tiene dos soluciones para $f(x)$, que son $f(x) = 0$ y $f(x) = -4$, mientras que $f(f(x)) = -4$ tiene una única solución para $f(x)$, que es $f(x) = -8$. Por último, $f(x) = 0$ tiene dos soluciones para $x$ mientras que $f(x) = -4$ y $f(x) = -8$ tienen una solución cada una. Por tanto, 4 soluciones:

$$f[f(f(x))] = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \\ f(x) = -4 \Rightarrow x = -8 \end{cases} \\ f(f(x)) = -4 \Rightarrow f(x) = -8 \Rightarrow x = -12 \end{cases}$$

**15. (A)** Sea $S = z_1 + z_2 + ... + z_k + ... + z_{35}$ y sea $z_k$ el entero al que hemos intercambiado dos dígitos obteniendo $z_k^*$. Escribimos el número $z_k$ en su forma polinómica:

$z_k = a_n \cdot 10^n + ... a_j \cdot 10^j + ... + a_k \cdot 10^k + ... + a_0 \cdot 10^0$, siendo $a_j$ y $a_k$ los dígitos que intercambiamos, de modo que $z_k^* = a_n \cdot 10^n + ... a_k \cdot 10^j + ... + a_j \cdot 10^k + ... + a_0 \cdot 10^0$.

La nueva suma es $T = z_1 + z_2 + ... + z_k^* + ... + z_{35}$, y la diferencia $S - T = z_k - z_k^* =$

$$= a_j \cdot 10^j + a_k \cdot 10^k - a_k \cdot 10^j - a_j \cdot 10^k = (a_j - a_k) \cdot (10^j - 10^k) = (a_k - a_j) \cdot 10^j \cdot (10^{k-j} - 1)$$

El factor $10^{k-j} - 1$ es múltiplo de 9, para todo valor de $k$ y de $j$.

**16. (B)** Consideremos unos ejes de coordenadas paralelos a los lados del rectángulo y con origen en *P*. Si los vértices *B* y *D* son *B*(*a*, *b*) y *D*(*x*, *y*) entonces *A*(*x*, *b*) y *C*(*a*, *y*).

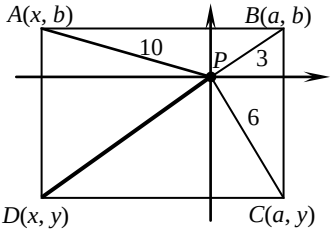
Tenemos que hallar $d(P, D) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Conocemos, $d(P, A) = \sqrt{x^2 + b^2} = 10$

$d(P, B) = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$

$d(P, C) = \sqrt{a^2 + y^2} = 6$.

Podemos expresarlo mediante el sistema




$$\left.\begin{array}{l} E_1: \ x^2 + b^2 = 10^2 \\ E_2: \ a^2 + b^2 = 3^2 \\ E_3: \ a^2 + y^2 = 6^2 \end{array}\right\} E_1 + E_3 - E_2: \ x^2 + y^2 = 100 + 36 - 9 = 127 \Rightarrow d(P, D) = \sqrt{127}$$

**17. (A)** $\log_b 10 + \log_b 10^2 + \log_b 10^3 + ... + \log_b 10^{10} = 110 \ \Rightarrow \ (1 + 2 + 3 + ... + 10)\log_b 10 = 110$

$\Rightarrow \ 55 \cdot (\log_b 10) = 110 \ \Rightarrow \ \log_b 10 = 2 \ \Rightarrow \ b = \sqrt{10}$ .

**18. (C)** $x = \sqrt{16 + \sqrt{16 + \sqrt{16 + ...}}} \ \Rightarrow \ x = \sqrt{16 + x} \ \Rightarrow \ x^2 - x - 16 = 0$ .

Y resolviendo la ecuación de segundo grado: $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 64}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{65}}{2}$ .

(Se ha considerado sólo la raíz positiva porque *x* es un número positivo).

**19. (E)** Si la duración es proporcional a la cantidad de cera, y el grosor de cada vela es constante, para cada vela la duración es proporcional a la altura consumida de la vela. Llamando *h* a la altura inicial de cada vela y $h_{c_i}$ a la altura consumida en la vela *i* al cabo del tiempo *t*, tenemos que $\dfrac{h_{c_1}}{t} = \dfrac{h}{4}$ *y* $\dfrac{h_{c_2}}{t} = \dfrac{h}{3}$. Por tanto $h_{c_1} = \dfrac{h \cdot t}{4}$ *y* $h_{c_2} = \dfrac{h \cdot t}{3}$ .(1)

Ahora, nos piden el tiempo que debe transcurrir para que $h - h_{c_1} = 2 \cdot (h - h_{c_2})$, es decir para que $h + h_{c_1} = 2 \cdot h_{c_2}$ . Sustituyendo las expresiones (1) en esta ecuación tenemos: $h + \dfrac{h \cdot t}{4} = 2 \cdot \dfrac{h \cdot t}{3}$ Y dividiendo la ecuación por *h*, tenemos $1 + \dfrac{t}{4} = \dfrac{2t}{3}$ , que conduce a $5 \cdot t = 12 \ \Rightarrow \ t = \dfrac{12}{5} horas = 2 \ horas \ y \ 24 \ minutos$ .

**20. (B)** Para calcular el radio de la circunferencia inscrita tendremos en cuenta que el área del triángulo es $A = p \cdot r$, donde $p$ es el semiperímetro y $r$ el radio de la circunferencia inscrita. Así $A = \frac{x+y+x+y-4}{2} \cdot r = (x+y-2)r$. Como el triángulo es rectángulo, el área es también $A = \frac{x \cdot y}{2}$. Por tanto $r = \frac{x \cdot y}{2(x+y-2)}$

Al ser un triángulo rectángulo se verifica el teorema de Pitágoras y $x^2 + y^2 = (x+y-4)^2 = x^2 + y^2 + 16 + 2xy - 8x - 8y$.

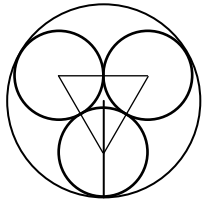
Simplificando, tenemos que $x \cdot y = 4x + 4y - 8 = 4 \cdot (x+y-2)$ y entonces $r = \frac{4 \cdot (x+y-2)}{2(x+y-2)} = \frac{4}{2} = 2$.

**21. (E)** El valor $x = -2$ es una raíz de la ecuación, y dividiendo obtenemos:

$x^5 + 2x^3 + 8x^2 + 16 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4x + 8)$.

Aquí ya podemos observar que no hay más raíces, pues el polinomio original sólo admite raíces negativas, pero el divisor de cuarto grado solo admitiría raíces positivas. Por lo tanto no hay más raíces.

**22. (D)** La altura del triángulo cuyos vértices son los centros de las tres circunferencias vale $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2r = r\sqrt{3}$.



El radio de la circunferencia circunscrita a las tres circunferencias tangentes, que conocemos, se puede expresar como la suma del radio de una de las circunferencias más los $\frac{2}{3}$ de la altura del triángulo, es decir, $1 = r + \frac{2}{3} r\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{3+2\sqrt{3}} = \frac{3(2\sqrt{3}-3)}{12-9} = 2\sqrt{3} - 3$.

**23. (E)** Para obtener el total de formas de descomposición de 5 como suma de sumandos enteros positivos, podemos razonar del siguiente modo: Hay que colocar uno, dos tres o cuatro signos más en los espacios entre unos: $1_1_1_1_1$. Los unos que no tienen signo entre ellos se agrupan sumándose. Por ejemplo, con un solo signo más hay cuatro posibilidades distintas: $1+1_1_1_1 = 1+4$ ;

$1_1+1_1_1 = 2+3$ ; $1_1_1+1_1 = 3+2$ ; $1_1_1_1+1 = 4+1$.

Esto es combinaciones de 4 elementos (los huecos) tomados de 1 en 1, $\binom{4}{1} = 4$.

Con dos signos más, hay 6 posibilidades, $\binom{4}{2}=6$. Con tres signos más hay otras 4 posibilidades $\binom{4}{3}=4$. Por último, con cuatro signos más, hay una posibilidad $\binom{4}{4}=1$, que corresponde a 1+1+1+1+1. En total son 4 + 6 + 4 + 1 = 15.

También podríamos haber calculado $\sum_{k=1}^{4}\binom{4}{k}=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}-1=2^4-1=15$.

**24. (D)** Si disponemos los datos en forma de tabla, tenemos:

| | Alemán | Inglés | Francés | Español |
|---|---|---|---|---|
| Ángela | X | X | | |
| Ulrike | X | | | X |
| Karin | | | X | X |
| Dieter | X | | X | |
| Pierre | | X | X | |
| Rocío | | X | | X |

De las $\binom{6}{2}=15$ posibles parejas que se pueden formar, sólo en tres NO hay posibilidad de entendimiento (Ángela-Karin, Ulrike-Pierre y Dieter-Rocío).

Por eso, la probabilidad de que se entiendan es $p(\textit{Entenderse})=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

**25. (C)** En total hay 27 posibles sumas de dígitos: desde 1 hasta 27. Hay dos sumas que sólo pueden aparecer en una tarjeta, 1 y 27. La suma 2 sólo puede aparecer en dos tarjetas. El resto de sumas pueden aparecer en tres o más tarjetas, para estar seguros que tenemos al menos tres tarjetas con la misma suma de dígitos, deberemos extraer 2×24 + 4 + 1 = 53. (Al extraer 2×24 + 4, en el peor de los casos tendremos dos tarjetas con cada una de las sumas desde 3 hasta 26, más dos tarjetas con suma 2, más una tarjeta con suma 1 más una tarjeta con suma 27. Si extraemos una tarjeta más, con seguridad se debe repetir una de las 24 sumas entre 3 y 26, con lo que habrá al menos tres tarjetas con la misma suma).

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* I

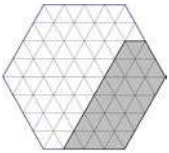
**1. (A)** Observando las dos reglas vemos que 6 *cuns* equivalen 20 *cms*, luego un centímetro será 6 : 20 = 0,3 *cuns*.

**2. (D)** Con cada paso giran 360º : 9 = 40º.

**3. (C)** Poniendo las 11:03 como las 10:63 es muy fácil hacer la diferencia.
(10 h 63 min) – (9 h 11 min) = (10 – 9) h (63 – 11) min = 1 h 52 min
Obteniendo así que el eclipse duró una hora y 52 minutos.

**4. (D)** Los casos favorables son 6; las 9 letras de PRIMAVERA menos las M, V y E, que no aparecen en PILAR. En consecuencia, la probabilidad pedida es $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

**5. (A)** Dividiendo el hexágono en triángulos equiláteros iguales es inmediato ver que la cerca de 240 metros contiene 16 lados, por lo que cada lado de dichos triángulos mide $\frac{240\text{ m}}{16}=15\text{ m}$.



Dado que faltan 15 lados de triángulo para completar la cerca, Ana debe comprar $15 \times 15$ m = 225 m de alambre.

**6. (D)** Durante los primeros 29 días Julián va ahorrando más dinero que Lucía. El día 30 ahorran la misma cantidad, 30 céntimos. A partir del día 30 es Lucía la que ahorra más dinero. Como el día 31 compensa el céntimo que ahorró de menos que el día 29, el 32 compensa el día 28 y así sucesivamente, tendrán que pasar otros 29 días para compensar los 29 primeros. En total han de pasar 29 + 1 + 29 = 59 días para que ahorren la misma cantidad.

Otra forma de resolverlo es mediante el álgebra y la suma de los términos de una progresión. Sean $x$ los días que deben pasar para que ambos tengan la misma cantidad de dinero.

Lucía tendrá: $1+2+3+...+x=\frac{1+x}{2}\cdot x$ céntimos y Juan $30x$ céntimos. Por tanto $\frac{1+x}{2}x=30x$, de donde $\frac{1+x}{2}=30\Rightarrow 1+x=2\cdot 30=60\Rightarrow x=59$ días.

**7. (D)** Si queremos que en cada jaula haya el mismo número de animales y sin mezclar especies, tenemos que buscar un divisor común de 12, 16 y 8. Y, para que el número de jaulas sea mínimo, debemos poner en cada jaula el máximo número de animales,

es decir, el máximo común divisor de 12, 16 y 8, que es 4. Por lo que necesitaremos 3 jaulas de hamsters, 4 de cobayas y 2 de chinchillas. En total 9 jaulas con 4 animales en cada una.

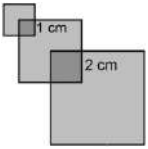
**8. (C)** Nombrando el número de caramelos, que cada criatura cogió, por la inicial de cada nombre, el enunciado nos dice:

$B = A - 2$; $\quad C = B - 7 = (A - 2) - 7 = A - 9$;

$D = B + 5 = (A - 2) + 5 = A + 3$; $\quad E = D + 3 = (A + 3) + 3 = A + 6$;

Como $A + B + C + D + E = 68$, tendremos:
$A + (A - 2) + (A - 9) + (A + 3) + (A + 6) = 68 \rightarrow 5A - 2 = 68 \rightarrow 5A = 70$, de donde $A = 14$.
Ana cogió 14 caramelos y, por tanto, la suma de sus cifras es 5.

**9. (B)** Sumando las áreas de los tres cuadrados obtenemos:
$2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$ cm$^2$. Pero hemos sumado dos veces el área de cada uno de los dos cuadraditos oscuros. Debemos, pues, restar $1^2 + 2^2 = 5$ cm$^2$ al área total obtenida antes.
El área de la figura es: $56 - 5 = 51$ cm$^2$.




**10.(D)** Supongamos que Diofanto dice la verdad, esto implica que no ha sido él, pero también implica que todos los demás mienten; Cantor miente y, por tanto, **Bernoullí dice la verdad**. Pero, como sabemos, también **Bernoullí miente**. Contradicción que nos demuestra que Diofanto no dice la verdad y que por tanto ha sido él, Diofanto, quien ha desordenado los números de Don Retorcido.

**11.(D)** $2980 \times 0{,}003 = 8{,}94$. Claramente, el número que más se aproxima a 8,94 es el 9.

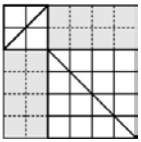
**12.(D)** Efectuando la división entera de 436 entre 6 obtenemos 72 de cociente y 4 de resto. Esto significa que al colocar los 436 números hemos llenado completamente 72 filas y cuatro columnas de la fila 73. El 436 ocupará la columna D.

**13.(D)** Comparando $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 198 + 200$ con $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 99 + 100$, observamos que cada uno de los 100 sumandos de la primera suma es el doble del correspondiente de la segunda. Dado que el resultado de ésta es 5050, la suma pedida valdrá $5050 \times 2 = 10\,100$.

**14.(D)** Tomemos los 41 lados y vayamos construyendo triángulos, de uno en uno, hasta que quede un número de lados que sea múltiplo de 4. El número de lados que van quedando disponibles sucesivamente es: 38, 35, 32…

Vemos que tras construir 3 triángulos es posible, por primera vez, construir cuadrados con el resto de los lados sin que sobre ninguno. (32 : 4 = 8)
Por consiguiente, el mínimo número de triángulos que puede tener Javier es 3.

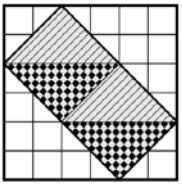
**15.(A)** Reordenando el cuadrado, como se muestra en la figura, vemos que la fracción coloreada es: $\frac{8+8}{6\times 6}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$



El problema puede resolverse de múltiples formas, como por ejemplo:

Si seccionamos el rectángulo sombreado en cuatro triángulos de base 4 y altura 2, como se aprecia en la figura, es sencillo calcular el área de la parte sombreada:

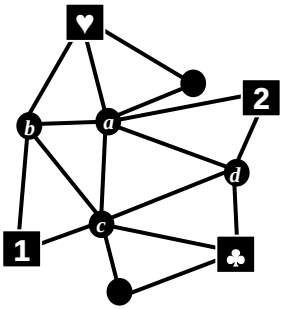
$4\times\left(\frac{2\times 4}{2}\right)=16$ unidades cuadradas.



Dado que el área del cuadrado es de 36 unidades cuadradas, la fracción coloreada es: $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$.

**16.(D)** Nos dicen que el área del cuadrado es 36 cm$^2$. Entonces su lado será $\sqrt{36}=6$ cm y el perímetro de cada uno de los tres polígonos 6 × 4 = 24 cm. Por lo tanto, el lado del hexágono medirá $\frac{24}{6}=4$ cm.

**17.(D)** En el vértice *a* hay un trébol ya que *c* y *d* estarán ocupados por un corazón y un rombo. En el *b* obligatoriamente hay un rombo y entonces en *c* hay un corazón y en *d* un rombo.
Finalmente se deduce que en 1 hay un trébol y en 2 un corazón.




**18.(B)** Comenúmeros no se comerá:
a) Los 14 múltiplos de 7 menores que 100: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 y 98
b) Los números que contengan el 7 en las decenas, excepto el 70 y el 77: 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78 y 79.
c) Los números que contengan el 7 en las unidades, excepto el 7 y el 77: 17, 27, 37, 47, 57, 67, 87 y 97.
En total se comerá 100 – (14 + 8 + 8) = 100 – 30 = 70 números.

**19.(E)** Interpretando numéricamente los pasos del bombero tenemos: 5 – 8 + 5 = +2, lo que significa que, tras las subidas (+) y las bajadas (–), está situado 2 peldaños por encima del central. Dado que aún le quedan 12 peldaños hasta la parte superior, tenemos 14 peldaños por encima del central y otros 14 por debajo, es decir, la escalera tiene 14 + 1 + 14 = 29 peldaños.

**20.(D)** Hay 20 – 4 = 16 caramelos en cada bolsa.
16 × 30 niños = 480 caramelos.
Había 480 : 20 = 24 bolsas.

**21.(C)** Sofía obtuvo 38 + 2 × (17 – 2) = 68 o, lo que es lo mismo, 2 × (17 – 2) = 30, es decir, 2 × 15 = 30. Ahora es fácil encontrar la solución de Santi. Partimos de que el producto del factor *x*, la flor, por el factor (17 – *x*) es igual a 30 y tenemos además la solución de Sofía que lleva a: 2 × 15 = 30. Basta pensar en poner 15 × 2 = 30, para tener 15 × (17 – 15) = 30 y concluir que Santi sustituyó la flor por el número 15. La suma de sus cifras es 6.

**22.(A)** Pipo tarda en llegar al colegio 8 minutos y recorre 720 metros, luego la velocidad (de los tres) es $\frac{720\ metros}{8\ \min} = 90\ m/\min$.

Pepa, por su parte, camina durante 15 minutos, por lo que recorrerá una distancia igual a 90 × 15 = 1350 metros. Por tanto, la distancia entre las casas de Pepa y Pipo es: 1350 – 720 = 630 metros.

**23.(E)** María da 20 *pasos pa`lante* y (1 + 2 + 3 +…+ 20) *pasos pa`tras*, por consiguiente le separan $1+2+3+...+19=\frac{1+19}{2}\cdot 19=190$ pasos del punto en que comenzó.

**24. (C)** La suma de las tres cifras de las unidades tiene que terminar en 2. Para que esto ocurra los tres números pueden ser: dos impares y uno par o los tres pares. Como en las soluciones solamente hay un número impar, el 53, es éste número que no puede ser uno de los que sumó mi hermana.

**25.(C)** Sea *x* el número de caramelos que dio al menor, tendremos entonces:
*x* + 2*x* + 4*x* + 8*x* +… = 155. Esto equivale a (1 + 2 + 4 + 8 +…)*x* = 155 = 31 × 5, donde hemos descompuesto 155 en factores primos.
Como es imposible que la suma del paréntesis del primer miembro sea 5, deducimos que (1 + 2 + 4 + 8 +…) = 31, es decir, (1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 31. Y los cinco sumandos del paréntesis nos dicen que José María tiene cinco nietos.

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* II

**1. (E)** Algunas letras son fáciles de desentrañar: La E debe ser 1; la C debe ser 9; la R es un 0.
Seguimos: la N es un 8. Solo nos queda la O que, después de algún descarte, deducimos que será un 7 y, por tanto, la I es un 2.

$$\begin{array}{cccc} & C & O & N \\ + & & D & E \\ \hline E & R & I & C \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 9 & 7 & 8 \\ + & & 5 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 9 \end{array}$$

**2. (B)** Empezamos por el final: el triple de 600 es 1800; la quinta parte de 1800 es 360; el doble 360 es 720; la cuarta parte de 720 es 180.
También podríamos haberlo hecho de golpe: $\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{5}\cdot 3\cdot 600 = \frac{3}{10}\cdot 600 = 180$ .

**3. (A)** Observando cómo se van formando las **M** vemos que para construir la que ocupa el lugar $n$ se necesitan $2n$ palillos para los tramos oblicuos y $2(n+1)$ palillos para las patas. Es decir, un total de $2n + 2(n+1) = 4n + 2$.
Para la **M** que ocupa el lugar 100º ($n = 100$) se necesitan $4\cdot 100 + 2 = 402$ palillos.

**4. (D)** El enunciado nos asegura que 7 kg de arroz ocupan 8 $dm^3$.
Como la arista del cubo mayor mide 4 dm, su volumen es de 64 $dm^3$, por lo que caben $8\cdot 7 = 56$ kg de arroz.

**5. (C)** Representamos el número como $\underline{a}\,\underline{b}$ donde $a$ es la cifra de las decenas y $b$ la de las unidades. Observa que el número vale $\underline{a}\,\underline{b} = 10a + b$.
Las condiciones del problema nos aseguran que: $4(a + b) = 10a + b$, y ya es fácil:
$4(a + b) = 10a + b \Rightarrow 4a + 4b = 10a + b \Rightarrow 3b = 6a \Rightarrow b = 2a$
Es decir, la cifra de las unidades debe ser el doble que la de las decenas.
Hay, pues, cuatro números con esas propiedades: 12, 24, 36 y 48.

**6. (B)** Las fracciones y los dibujos se llevan muy bien. Así que hagamos dibujos para representar esas fracciones.
Lo primero: el dibujo que representa al pollo tiene que ser el doble de grande que el dibujo del pavo.
Lo segundo: como el pavo hay que dividirlo en cuatro partes y el pollo en tres partes, lo mejor será dividir ambos en doce partes y todo será más sencillo.

Lo tercero: representamos el pavo con doce unidades y, por tanto, el pollo con veinticuatro.
Lo cuarto: señalamos qué partes corresponden a muslo y qué partes son de pechuga, según el enunciado del problema.

PAVO

| | | |
|---|---|---|
| Mu | Mu | Mu |
| Pe | Pe | Pe |
| Pe | Pe | Pe |
| Pe | Pe | Pe |

POLLO

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mu | Mu | Mu | Mu | Pe | Pe |
| Mu | Mu | Mu | Mu | Pe | Pe |
| Mu | Mu | Mu | Mu | Pe | Pe |
| Mu | Mu | Mu | Mu | Pe | Pe |

Según el esquema hay diecisiete partes de pechuga, nueve de las cuales son de pavo. La fracción, es $\frac{9}{17}$.

**7. (A)** Vamos a tratar de calcular las dimensiones del bloque inicial.
Como 65 solo puede descomponerse de dos formas, $65 = 65\cdot1 = 13\cdot5$, deducimos ya que dos de las dimensiones han de ser 13 y 5 (observa que no puede ser 65 y 1 porque si no, nos quedaríamos sin bloque al quitar esa cara).
Las dimensiones iniciales son $a$, 13 y 5.
Al quitar la cara de los 65 cubitos me queda un bloque de dimensiones a –1, 13 y 5.
Ahora hay que quitar otra cara de 30 cubitos, que solo podré hacerlo con la de dimensiones a–1 y 5: $(a-1)\cdot5 = 30 \Rightarrow a = 7$.
El bloque inicial tiene dimensiones 13, 7 y 5, lo que nos asegura que estaba formado por $13\cdot7\cdot5 = 455$ cubitos.
Como hemos quitado 95 cubitos, ahora nos quedan 360 cubitos.

**8. (A)** Escribamos esa igualdad con potencias de la misma base para así poder usar sus propiedades:

$$4^{10a} = 8^{6b} \Rightarrow \left(2^2\right)^{10a} = \left(2^3\right)^{6b} \Rightarrow 2^{20a} = 2^{18b} \Rightarrow 20a = 18b \Rightarrow 10a = 9b$$

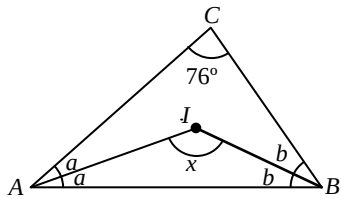
**9. (D)** Cada lado largo de la bandera hexagonal mide 2015 – 10 = 2005 mm y cada lado corto 5 mm. El perímetro es $3\cdot2005 + 3\cdot 5 = 6030$ mm.

**10.(E)** Empezamos por el número menor y seguimos ordenadamente hasta terminar:

3 – 12 – 21 – 30 – 102 – 111 –102 – 120 – 201 – 210 – 300

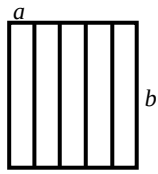
Podemos formar diez números.
¿Te atreves ahora con cuatro vasos y tres piedrecitas?

**11.(A)** Como *AI* y *BI* son bisectrices podemos asegurar que los ángulos con la letra *a* son iguales y lo mismo pasa con los ángulos llamados *b*.
Si nos fijamos ahora en el triángulo *ABI*, observamos que $x = 180^o - (a + b)$. Así que si calculamos a + b, habremos resuelto el problema.
En el triángulo *ABC* tenemos que $2a + 2b + 76^o = 180^o$, es decir, $2a + 2b = 104$ y, por tanto, $a + b = 52$.
Hemos terminado: $x = 180^o - (a + b) = 180^o - 52^o = 128^o$.




**12.(C)** Fijémonos en la serie de Don Retorcido a ver si descubrimos algo:
3 4 6 7 9 10 12 13 15 17 18 19 ...
¡Solo aparecen los múltiplos de tres y los múltiplos de tres más uno!
Así pues, en la serie estarán estos números:
2013 2014 2016 2017 2019 2020 ...
El número que no aparece es el 2015.

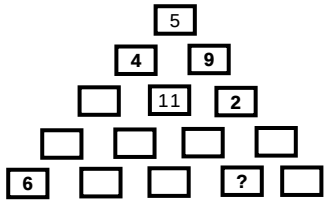
**13.(B)** Si llamamos *a* al lado menor de cada rectángulo y *b* al lado mayor, conocemos estas dos relaciones:
I. Como se forma un cuadrado: $5a = b$
II. El perímetro de cada rectángulo es 72 cm: $2a + 2b = 72$
La segunda relación podemos escribirla como $2a + 10a = 72$, de donde deducimos que $a = 6$.
Por tanto, el lado del cuadrado es $5 \cdot 6 = 30$ cm.




**14.(E)** Primero trabajan ambas *m* minutos, en este tiempo la rápida imprimó 7*m* carteles y la lenta 6*m* carteles, es decir, un total de 13*m* carteles.
Después la lenta trabajó 17 minutos más e imprimió $17 \cdot 6 = 102$ carteles.
Tenemos pues que $13m + 102 = 440$, de donde $m = 26$ minutos.
La grande imprimió $26 \cdot 7 = 182$ carteles. (Y la lenta $26 \cdot 6 + 102 = 258$ carteles)

**15.(C)** Toca dividir. Fíjate que 1:7 = 0,142857 142857 ...
Para hacer la superdivisión que piden habrá que mover la coma hacia la derecha 33 lugares (que son los ceros que tiene el dividendo). Como el cociente se repite en bloques de seis números y $33 = 5 \cdot 6 + 3$, vemos que la cifra de las unidades será la que ocupa el tercer lugar en dicho bloque: el 2.

**16.(C)** Hay que descubrir con cuidado los números que se comió nuestro amigo. Solo podemos escribir un número cuando estemos plenamente seguros.
En una primera ojeada ponemos el 5 y el 11.
Seguimos: debajo del 4 hay un 11, así que a la derecha del 11 podría estar el 15, (15 – 11 = 4) o bien el 7, (11 – 7 = 4). Pero fíjate que el 15 solo podrá estar en la fila de la base porque no hay números cuya resta sea 15 (recuerda que solo trabajamos con los números del 1 al 15). O sea, ponemos un 7.
El siguiente paso será decidir que pareja pones debajo del 11.
Así, poco a poco, puedes rellenar la cascada...
En la interrogación había un 3.

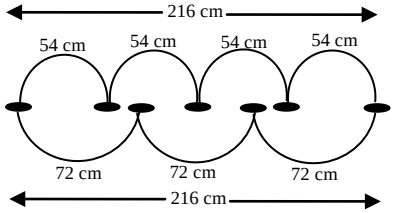



**17.(A)** Al trabajar con capicúas de cinco cifras está claro que la cifra diferente ha de ser la central y las otras cuatro todas iguales. Has de tener cuidado con no repetir y con la cifra cero.
Si 0 es la central, tenemos nueve números (cifras del 1 al 9): 11011, 22022,...
Si 1 es la central, tenemos ocho números (el 0 no vale porque 00100 = 100 tiene sólo tres cifras y no podemos repetir el 1: 11111).
Si la cifra central es 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, el caso es similar al anterior y hay ocho capicúas por caso.
En total hay $9 + 9 \cdot 8 = 81$ capicúas con las condiciones requeridas.

**18.(A)** La única posibilidad válida es que el día 1 del mes de enero sea el martes. De esta manera, el día 20 es domingo. (Mira tus nudillos, el mes de enero tiene 31 días)

**19.(D)** Como el área del cuadrado grande son 100 $cm^2$, el porcentaje pedido coincide con el área de la zona negra.
La zona pequeña coloreada de negro tiene un área de $3^2 - 2^2 = 5$.
La zona grande coloreada de negro tiene un área de $10^2 - 7^2 = 51$.
El área de la zona negra total es 51 + 5 = 56. Es decir, el 56% del cuadro mayor.

**20. (C)** La clave de este problema es averiguar cuáles son las huellas comunes, y eso nos sugiere ir en busca del mínimo común múltiplo: mcm(54, 72) = 216.
Podemos hacer este dibujo que representa las huellas de Saltarín y Brincador:




Así que, sin contar la huella del punto de partida, vemos que cada 216 cm se marcan seis huellas.
Como hay marcadas 73 huellas (la de la salida más otras 72), vemos que el recorrido total está formado por 72:6 = 12 tramos de 216 cm, es decir, 2592 cm.

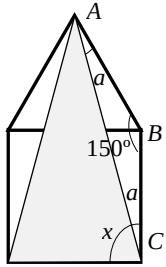
**21.(A)** Si llamamos $x$ al número de preguntas que tenía la segunda parte del examen podemos formar esta ecuación:

$$\frac{preguntas\ \ acertadas}{preguntas\ \ totales} = nota\ \ final \Rightarrow \frac{12+\frac{2x}{3}}{30+x} = \frac{6}{10} \Rightarrow 10\left(12+\frac{2x}{3}\right) = 6(30+x)$$

es decir, $120+\frac{20x}{3} = 180+6x$.

La solución de la ecuación es $x = 90$, por lo que el examen constaba de un total de 30 + 90 = 120 preguntas.

**22.(D)** El triángulo $ABC$ es isósceles porque $AB$ y $BC$ miden lo mismo, además su ángulo $B$ mide 90º + 60º = 150º. Por tanto, $2a + 150º = 180º$ y entonces $a = 15º$. El ángulo buscado mide $x = 90º - 15º = 75º$.




**23.(E)** El empujón para resolver este problema es observar que el primer número primo, 2, es par y ya todos los demás son impares. Así, para obtener suma impar es obligatorio que uno de los números sea el 2.
El problema pasa a ser ¿cuántas parejas pueden formarse con la condición de que uno de los números sea el 2 y el otro a elegir entre diecinueve?

$$p = \frac{parejas\ \ favorables}{parejas\ \ posibles} = \frac{19+19}{20\cdot 19} = \frac{1}{10}$$

Lo aclaramos:
Las parejas posibles son 20 (posibilidades del primer número) multiplicado por 19 (posibilidades del segundo número).
Las parejas favorables son 19 (estando el 2 como primer número) más otras 19 (estando el 2 como segundo número).

**24.(D)** Muchos problemas de porcentajes podemos atacarlos dando valores concretos a las medidas que intervienen y luego calcular el porcentaje y contestar.
Si suponemos que la base mide 10 m y la altura 10 m, su área será de 100 $m^2$ (¿Has visto qué bien hemos elegido esas medidas?).
La base aumenta un 20 %, es decir, aumenta 2 m y pasa a ser 12 m.
La altura disminuye un 20%, es decir, disminuye 2 m pasa a ser 8 m.
El área es 8 ·12 = 96 $m^2$.
Así pues, el área ha disminuido 4 m2, es decir, ha disminuido un 4 %.
No ha sido difícil.

**25.(D)** Vamos a llamar 2*a*, 2*b*, 2*c*, a la capacidad de los recipientes A, B, C, así, cada uno de ellos tiene respectivamente *a*, *b*, *c*, agua.

El primer trasvase nos asegura que $b+c=\frac{3}{4}$ de 2*b*, es decir:

$b+c=\frac{3}{4}\cdot 2b \Rightarrow b+c=\frac{6b}{4}$, al operar se obtiene que $b = 2c$.

El segundo trasvase nos asegura que $a+b+c=\frac{4}{5}$ de 2*a*, que al desarrollar se resume en $3a = 5b + 5c$.
Como la capacidad de C son 8 litros, $c = 4$ y sustituyendo; $b = 8$ y $a = 20$.
La capacidad de A son 40 litros.

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* III

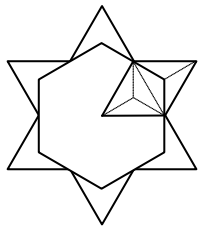
**1. (D)** Para que la suma sea impar debemos haber sacado una bola par y otra impar. La probabilidad de sacar primero par y después impar es, $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. A ésta habrá que sumar la probabilidad de sacar primero impar y después par (otro tercio). La probabilidad pedida es $\frac{2}{3}$.

**2. (A)** $\frac{(n+3)!}{n!}=2^3\cdot 3^3\cdot 7\cdot 13$ **.** La división da por otro lado, $(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$. Sólo uno de los tres factores es múltiplo de 3, y por tanto múltiplo de $3^3$. Uno debe ser múltiplo de 13 y otro de 7. El reparto de doses nos da la solución: $26 \cdot 27 \cdot 28$. Luego $n$ es 25.

**3. (B)** $\begin{cases} x+y=76 \\ x-y=44 \\ u+v=y \\ u\cdot v=x \end{cases}$. Las dos primeras ecuaciones nos permiten fácilmente (sumando y restando) hallar $x = 60$; $y = 16$. Así sustituyendo en las otras dos ecuaciones obtenemos un sistema relacionado con la ecuación de segundo grado: $u^2-16u+60=0$, obteniéndose $u=\begin{cases}10\\6\end{cases}$, y en paralelo, $v=\begin{cases}6\\10\end{cases}$, siendo en cualquier caso $u^2+v^2=136$.

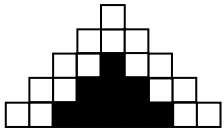
También podríamos (sin calcular expresamente $u$ y $v$) haber usado la igualdad, $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv=16^2-2\cdot 60=136$.

**4. (B)** Dibujando dos apotemas, vemos en cada punta de la estrella un rombo que queda dividido en una cabeza de flecha y una cometa. El área de la cabeza de flecha es la mitad de la de la cometa, y por tanto el área de la estrella es vez y media la del hexágono.



**5. (C)** $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3) = 2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 17$ **.** Los factores primos, 5, 7, 11 y 17, hay que repartirlos entre los cuatro números consecutivos, y el tamaño de lo que queda nos induce a pensar que cada uno de ellos se queda con uno de los primos. Luego habrá dos pares (se repartirán los tres doses) y uno o dos múltiplos de tres. Un poquito más de cavilación, nos da la solución, $33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36$.

**6. (C)** El total de cuadraditos es $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\cdot 32 - 1) = 32^2$.
El de cuadraditos negros es $1 + 3 + 5 + \ldots + (2\cdot 30 - 1) = 30^2$.
La diferencia entre blancos y negros es:
$(32^2 - 30^2) - 30^2 = 1024 - 1800 = -776$.
Hay 776 cuadraditos negros más que blancos.



**7. (A)** El polinomio es $P(x) = (x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)$, luego $P(2) + P(4) = 24 + 24 = 48$.

**8. (E)** La suma de los productos de dos en dos de los números del 1 al 6 se puede descomponer en la suma de los productos de dos en dos de los números del 1 al 5, y la suma de los productos de 6 por los números del 1 al 5.
Esta última suma es, $6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 90$.
El resultado pedido es, $90 + 85 = 175$.

**9. (B)** El perímetro de un hexágono es $6l$ y el área es $6\cdot\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$, y (unidades de medida aparte) esos números deben ser iguales, con lo que, $1 = \dfrac{l\sqrt{3}}{4}$, luego $l = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

**10.(D)** Dicho de otra forma, lo que quiere es que el 80 % del precio de venta sea el 125 % de 200 €, o en lenguaje algebraico, $0{,}8\,x = 1{,}25\cdot 200$; es decir, $x = \dfrac{250}{0{,}8} = 312{,}5$ €.

**11.(A)** El quinto término de nueve es el de en medio, y en una progresión aritmética ése es la media; luego la suma es: $9 \cdot 4 = 36$.

**12.(D)** 1) Si Ejé va al Norte, Ajá dice en esto la verdad y miente al decir que Ujú no irá al Este. Si Ujú va al Este, Ojó miente al decir que Ejé irá al Este y dice la verdad al afirmar que Ujú va al Oeste. Hemos llegado a una contradicción. Por tanto Ejé no va al Norte, y es verdad que Ujú no va al Este. 2) Si Ejé va al Sur, Ujú dice la verdad cuando dice que Ojó va al Este, y Ojó la verdad cuando dice que Ujú va al Oeste. Así sólo queda el Norte para Ajá.

**13.(B)** Si llamamos $n$ al número de canicas de Alejandra, Celia tiene $2n$ y Hugo $6n$. Así entre los tres tienen 9 $n$, y por tanto en un reparto igualitario deberían tener cada uno $3n$. Es Hugo quien tiene que repartir canicas. Tiene que darle $n$ a Celia, lo que supone $\frac{1}{6}$ de las que él tiene.

**14.(D)** El volumen del cilindro A es $\pi r^2 h_1$, igual al de B, $\pi (1{,}1r)^2 h_2$.

Así: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{(1{,}1r)^2}{r^2} = 1{,}21$.

**15.(C)** Si $\left(\sqrt{\pi}, a\right)$ y $\left(\sqrt{\pi}, b\right)$ pertenecen a la curva, $y^2 + x^4 = 2x^2 y + 1$, se tiene que verificar que $a^2 + \pi^2 = 2\pi a + 1$ y $b^2 + \pi^2 = 2\pi b + 1$. Restando ambas expresiones nos queda que: $a^2 - b^2 = 2\pi(a - b)$. Dividiendo por $(a - b)$, que según el enunciado es distinto de 0, obtenemos que $a + b = 2\pi$. Sumando las expresiones nos queda, $a^2 + b^2 + 2\pi^2 = 2\pi(a + b) + 2$, y cambiando el valor calculado para $a + b$, llegamos a, $a^2 + b^2 = 2\pi^2 + 2$, quedando por resolver el sistema,

$\begin{cases} a + b & = 2\pi \\ a^2 + b^2 & = 2\pi^2 + 2 \end{cases}$, que se transforma en $\begin{cases} a + b & = 2\pi \\ a \cdot b & = \pi^2 - 1 \end{cases}$, y acaba derivando en la ecuación $a^2 - 2\pi a + (\pi^2 - 1) = 0$, de soluciones, $\pi + 1$ y $\pi - 1$, que se corresponden (no necesariamente en ese orden) con los valores de $a$ y $b$.

Luego $|a - b| = 2$.

**16.(B)** Sean $n$ y $m$ $(n \le m)$ los lados del rectángulo. Así, $A + P = n \cdot m + 2n + 2m$. Se trata de ver para qué valores de suma (entre los propuestos) hay soluciones enteras para $n$ y $m$. Veamos como va la cosa con $n = 1$. $A + P = 3m + 2$, y entonces la suma menos 2 debe ser múltiplo de 3. De las opciones que tenemos sólo ocurre con 104. Si $n = 2$, llegamos a $A + P = 4m + 4$, y entonces, de las dadas, valen 100, 104 y 108. Si $n = 3$, $A + P = 5m + 6$, y vale 106. La única suma que aún no ha funcionado es 102, con lo cual, si el problema está bien puesto (y lo está; basta acabar el razonamiento dando a $n$ valores consecutivos hasta 8) hemos terminado.

**17.(B)** Debemos estudiar las soluciones enteras de la ecuación, $\frac{x+1}{y+1}=\frac{11x}{10y}$, que podemos escribir en la forma, $xy+11x-10y=0$, o como, $(x-10)\cdot(y+11)=-110$. Las descomposiciones de 110 en dos factores enteros positivos son: 11 y 10, 22 y 5, y, 55 y 2. Como $x$ e $y$ son positivos, $x$ debe ser menor que 10 para que el producto anterior dé negativo. Nos quedan así dos soluciones para el problema, $x = 5$, $y = 11$; $x = 8$, $y = 44$, pero la última no reúne el requisito de valores primos entre sí.

**18.(E)** Los martes tiene que correr, ya que si no, de jueves a domingo tendría que correr. tres días y dos de ellos serían consecutivos. De jueves a domingo tiene que correr dos días y nadar uno, y por ello el jueves debe jugar al tenis, ya que no puede hacerlo después de haber corrido o nadado. Debe por tanto nadar el sábado para que los dos días que faltan de correr no sean consecutivos.

**19.(A)** $[(1\lozenge 2)\lozenge 3]-[1\lozenge(2\lozenge 3)]=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\lozenge 3\right]-\left[1\lozenge\left(2-\frac{1}{3}\right)\right]=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(1-\frac{3}{5}\right)=$

$=\frac{1}{6}-\frac{2}{5}=-\frac{7}{30}$.

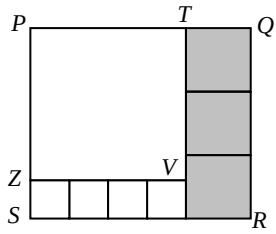
**20.(E)** El triángulo que se forma es un triángulo rectángulo de vértices: (0, 0), (5, 0) y (0, 12). Dos alturas son los catetos, 5 y 12, y la tercera (altura sobre la hipotenusa) se obtiene igualando áreas: $\frac{cateto\cdot cateto}{2}=\frac{hipotenusa\cdot altura}{2}$. Como la hipotenusa es 13, la altura es $\frac{60}{13}$, y la suma de alturas: $17+\frac{60}{13}=\frac{281}{13}$.

**21.(A)** Como hay cinco números y la mediana es 9, el 8 sólo puede estar dos veces. Como la media es 10 los dos números que faltan deben ser mayores que 9 y sumar 25. Al ser enteros, el mayor como mucho puede ser 15.

**22.(D)** Nos preguntan por números entre 5000 y 6000 que tienen algún cero entre sus cifras. Contemos los que comienzan por 5 y no tienen ningún 0. Tenemos el 5 como unidad de millar, nueve cifras para las centenas, nueve cifras para las decenas y nueve para las unidades. Así hay $1\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 729$. El resto ($1001 - 729 = 272$), tienen algún 0 entre sus cifras.

**23.(B)** El cuadrado PTVZ tiene de lado 20 + $x$ , de forma que, $4\cdot(10-x)=20+x$ .
Así, $x=4$ .

**24.(A)** Podemos (al ser un problema de proporciones) suponer una superficie arbitraria para uno de los dos terrenos. Supondremos que Esteban tiene una parcela de 30 ha, y por tanto la de María es de 20 ha. El terreno dedicado a maíz por Esteban serán los $\frac{4}{5}$ de 30, es decir 24 ha.




Sea $x$ el área dedicada por María al maíz.

Entonces tenemos que: $\frac{24+x}{6+(20-x)}=\frac{7}{3}$ , de donde, $x=11$ ha. La proporción maíz/trigo de la parcela de María es: $\frac{11}{9}$ .

**25.(A)** De $\begin{cases} a+b=3 \\ ac+b=18 \end{cases}$ se obtiene $a\cdot(c-1)=15$ .

De $\begin{cases} a+b=3 \\ bc+a=6 \end{cases}$ ; se obtiene $b\cdot(c-1)=3$ .

Por tanto, $a+b=\frac{15}{c-1}+\frac{3}{c-1}=3$ y por tanto $c-1=\frac{18}{3}=6$ ; es decir $c$ = 7.

De las respuestas ofrecidas sólo es válida A).

# XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* IV

**1. (B)** La suma de las bolas será impar si ambas son de distinta paridad. Así pues el suceso pedido es $A = (P_1 \cap I_2) \cup (I_1 \cap P_2)$ en donde $P_1$, $P_2$, $I_1$, $I_2$ representan los sucesos:

$P_i$ la bola extraída es par en la extracción i.

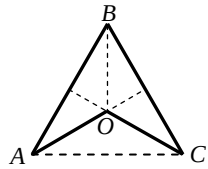
$I_i$ la bola extraída es impar en la extracción i.

$$p(A) = p(P_1 \cap I_2) + p(I_1 \cap P_2) = \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} + \frac{n}{2n} \cdot \frac{n}{2n-1} = \frac{2n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$$

**2. (E)** Veamos el número de veces que aparece el factor 3 en cada una de las respuestas. Para simplificar empecemos por 60!.
En 60! hay 20 múltiplos de 3, 6 múltiplos de 9 y 2 múltiplos de 27. Así que el número de veces que aparece el factor 3 en 60! es 20 + 9 + 2 = 28, con lo que no será múltiplo de $3^{29}$, siendo entonces 63! la respuesta pedida, ya que 63! tiene 21 + 7 + 2 = 30 veces el factor 3.

**3. (A)** Observando el triángulo equilátero de arriba, *ABC*, de lado 6, la simetría de la figura nos lleva a decir que *O* es el baricentro de dicho triángulo, por lo que:

$$AO = \frac{2}{3}\left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$



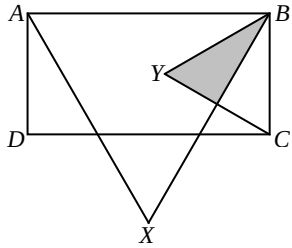

Por lo tanto el lado del hexágono es $4\sqrt{3}$ y su perímetro $24\sqrt{3}$ .

**4. (B)** Los ángulos $\alpha, \beta, \gamma$, en algún orden, son:
$180º - (21º + 40º) = 119º$, $180º - (21º + 29º) = 130º$ , $180º - (40º + 29º) = 111º$
La diferencia entre el mayor y el menor es $130º - 111º = 19º$.

**5. (E)** Los productos de dos factores del 1 al 7 que no aparecen en el producto de dos factores del 1 al 6 son: $1 \cdot 7$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 7$, $4 \cdot 7$, $5 \cdot 7$ y $6 \cdot 7$, cuya suma es:
$7 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 7 \cdot 21 = 147$.
Por lo tanto la respuesta pedida es 175 + 147 = 322..

**6. (D)** $\log 1 + \log 2 + ... + \log n = \log(1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n)$ que será mayor que 10 sólo si n! > $10^{10}$.
Como $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10}$ comparamos los factoriales de 11, 12, 13, 14 y 15 con este número. Si empezamos por el central, 13! = $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ basta comparar $3^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 13 \cdot 77 \cdot 243$ con $5^8 = 5^4 \cdot 5^4 = 625 \cdot 625$.
$13 \cdot 77 \cdot 243 < 13 \cdot 80 \cdot 250 = 13 \cdot 20\,000 = 260\,000 < 360\,000 = 600^2 < 625^2$.
Probamos con 14! que se reduciría a comparar $14 \cdot 13 \cdot 77 \cdot 243$ con $625 \cdot 625$.
Pero $14 \cdot 77 > 625$ y $13 \cdot 243 > 625$. Así pues la respuesta es $n = 14$.

**7. (B)** Sabemos que $A\hat{B}Y = 30^o$ y $A\hat{B}X = 60^o$ por lo que $Y\hat{B}X = 30^o$ y como $B\hat{Y}C = 60^o$ se deduce que el triángulo sombreado es rectángulo y su área es la mitad del triángulo *BYC*, es decir, $\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}$




**8. (E)** Basta contar los números de dos cifras distintas, ninguna de ellas cero, tales que la suma de éstas sea múltiplo de 3 en los que la cifra de las decenas sea menor que la de las unidades (para no repetir la carretera a contar).

Éstos son: 12, 15, 18, 24, 27, 36, 39, 45, 48, 57, 19 y 78, en total hay 12.

**9. (C)** Veamos en primer lugar la probabilidad de que Carlos coja las dos amarillas. La simetría del problema nos conducirá a que el resultado pedido será el anterior multiplicado por 3.

Carlos cogerá las dos amarillas si en las cuatro extracciones anteriores ninguna ha sido amarilla. Esta probabilidad es:

$$p\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4\right) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

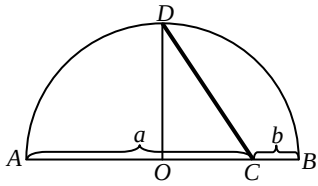
La probabilidad de que Carlos coja las dos bolas del mismo color es $3\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{5}$.

**10. (C)** En el triángulo rectángulo *ODC* tenemos que:

$OD = OA = \frac{a+b}{2}$ y $OC = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2}$.

Entonces $DC^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$,

por lo que $DC = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

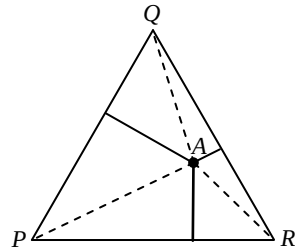



**11. (C)** Sabemos que $\frac{50P}{100} = \frac{20Q}{100}$, es decir, $P = \frac{2}{5}Q = \frac{40}{100}Q$.

Por lo tanto *P* es el 40 % de *Q*.

.

**12. (E)** La longitud total de los caminos desde *A* es la suma de las distancias desde *A* a los tres lados del triángulo. En un triángulo equilátero dicha suma es la altura del triángulo, independientemente de la situación del punto *A* interior al triángulo, puesto que, Área *PQR* = Área *PAR* + Área *QAR* + Área *PAQ*, de donde:



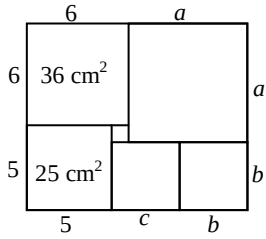

$$\frac{1}{2}l\cdot h=\frac{1}{2}l\cdot h_1+\frac{1}{2}l\cdot h_2+\frac{1}{2}l\cdot h_3\Rightarrow h=h_1+h_2+h_3\,.$$

Así que la longitud total es: $l\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**13. (D)** Los exponentes deben ser pares para que las correspondientes potencias sean positivas. El –5 lo debemos descartar pues la potencia correspondiente aportará muy poco. Así que $\{a, b, c, d\}=\{-1, -2, -3, -4\}$ con $\{b, d\}=\{-2, -4\}$.

Tomando $a = -1$ y $b = -4$ tenemos $(-1)^{-4}+(-3)^{-2}=1+\dfrac{1}{9}=\dfrac{10}{9}$.

**14. (D)** Nombrando a los lados de los cuadrados como indica la figura, resulta que:

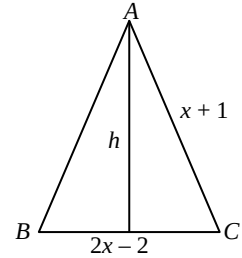



$$\begin{cases} a+b=11 \\ b+c+5=6+a \\ a-6=c-(a-b) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a+b=11 \\ -a+b+c=1 \\ 2a-b-c=6 \end{cases}$$

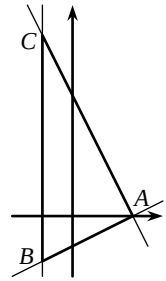
De donde se obtiene $a = 7$, $b = 4$, $c = 4$ y el perímetro pedido es $2\cdot(6 + 7) + 2\cdot(6 + 5) = 48$. .

**15. (E)** La altura, *h*, sobre *BC* viene dada por $h=\sqrt{(x+1)^2-(x-1)^2}=\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$.

Así pues el área será: $\dfrac{1}{2}(2x-2)\cdot 2\sqrt{x}=2(x-1)\sqrt{x}$.



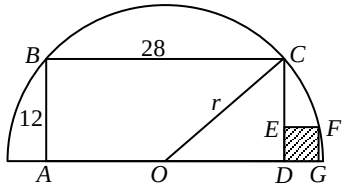
**16. (E)** El triángulo en cuestión es el de la figura, que es rectángulo ya que las pendientes de las rectas que determinan los lados *BA* y *CA* son $\frac{1}{2}$ y –2, respectivamente.




Los vértices son *A*(4, 0), *B*(–2, –3) y *C*(–2, 12). Los catetos son $AC = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$ y $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$.

El área es $\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 45$.

**17. (E)** El triángulo *ODC* nos permite hallar el radio de la semicircunferencia $r = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{340}$




Si llamamos *x* al lado del cuadrado *DEFG* y consideramos el triángulo rectángulo *OGF* podemos escribir $OF^2 = r^2 = OG^2 + FG^2$, es decir, $340 = (14 + x)^2 + x^2 = 2x^2 + 28x + 196$.

Resolviendo la ecuación obtenida, $x^2 + 14x - 72 = 0$ resulta *x* = 4 y por lo tanto el área pedida es 16.

**18. (C)** Como el número de términos de una progresión aritmética es $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$, en la progresión 1, 3, 5,…, *n* habrá $\frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ términos y en la progresión 1, 4, 7,…, *n* habrá $\frac{n-1}{3} + 1 = \frac{n+2}{3}$ términos.

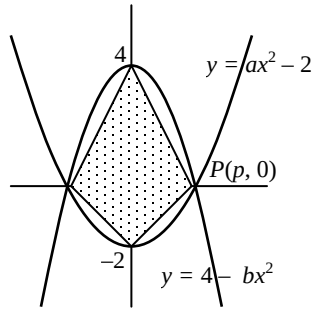
Como $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n = 320$ podemos escribir $320 = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot \frac{n+1}{2}$.

Análogamente $224 = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$. Si dividimos ambas expresiones se obtiene,

$\frac{320}{224} = \frac{3(n+1)}{2(n+2)} \Rightarrow n = 19$.

De la relación $320 = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot \frac{19+1}{2}$ se deduce que $\frac{a_n + a_1}{2} = 32$ y por lo tanto la suma de todos los términos de la progresión será, $S = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot n = 32 \cdot 19 = 608$.

**19. (B)** Las parábolas en cuestión son las del dibujo, siendo el área del cuadrilátero $\frac{6\cdot 2p}{2}=12$ de donde $p = 2$. Como el punto $P(2, 0)$ pertenece a ambas parábolas , $0 = 4a - 2$ y $0 = 4 - 4b$, así que $a=\frac{1}{2}$, $b = 1$ y $a+b=\frac{3}{2}$.




**20. (D)** Como $\lg_b c=\frac{1}{\lg_c b}$ escribimos $\lg_a 2+\lg_a 3+\lg_a 4=1$, es decir, $\lg_a 24=1$ y $a = 24$.

**21. (C)** Si $x_1$ y $x_2$ son as raíces del polinomio, $x_1 + x_2 = a$ y $x_1 \cdot x_2 = 2a$, es decir, $x_1\cdot x_2=2(x_1+x_2)\Rightarrow x_1(x_2-2)=2x_2$.

Si $x_2 = 2$ no se daría la igualdad, así que $x_2 \neq 2$ y $x_1=\frac{2x_2}{x_2-2}=2+\frac{4}{x_2-2}$ y al ser $x_1$ un número entero, $x_2 - 2$ debe ser $\pm 1$, $\pm 2$ ó $\pm 4$.

$x_2 - 2 = 1$ nos lleva a $x_1 = 6$ y $x_2 = 3$, de donde $a = 9$
$x_2 - 2 = –1$ nos lleva a $x_1 = –2$ y $x_2 = 1$, de donde $a = –1$
$x_2 - 2 = 2$ nos lleva a $x_1 = 4$ y $x_2 = 4$, de donde $a = 8$
$x_2 - 2 = –2$ nos lleva a $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, de donde $a = 0$
$x_2 - 2 = 4$ nos lleva a $x_1 = 3$ y $x_2 = 6$, de donde $a = 9$
$x_2 - 2 = –4$ nos lleva a $x_1 = 1$ y $x_2 = –2$, de donde $a = –1$

Con lo que los posibles valores de $a$ son: 9, –1, 8 y 0. La suma es 16.

**22. (D)** Al lanzarla $n$ veces la probabilidad de obtener 2 caras es, $\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ y la de obtener 3 caras es, $\binom{n}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$.

Al ser ambas probabilidades iguales, podemos escribir que $\binom{n}{2}\cdot\frac{3}{4}=\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{4}$, es decir, $\frac{3n(n-1)}{2\cdot 4}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 4}$ y al ser $n \neq 0$, $n \neq 1$, se obtiene $3=\frac{n-2}{3}$ de donde $n = 11$.

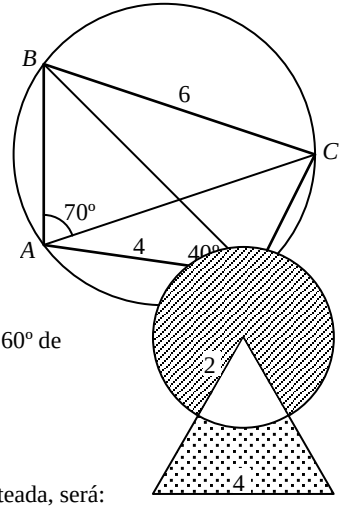
**23. (E)** La situación del problema es la del dibujo. Los ángulos $A\hat{D}B$ y $A\hat{C}B$ son iguales porque son inscritos que abarcan el mismo arco.

Por lo tanto $A\hat{C}B = 40^\circ$ y el ángulo que falta en el triángulo *ABC* es:

$A\hat{B}C = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ) = 70^\circ$

En consecuencia *ABC* es isósceles y los lados *BC* y *AC* son iguales.

La respuesta es $BC = AC = 6$.




**24. (A)** Si designamos con *C* al área del círculo, con *T* al área del triángulo y con *S* al área del sector de 60º de amplitud, tenemos:

$$C = 4\pi\ ,\ T = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ ,\ S = \frac{1}{6}4\pi = \frac{2}{3}\pi\ .$$

La diferencia de ambas zonas, la rayada y la punteada, será:

$$(C - S) - (T - S) = C - T = 4\pi - 4\sqrt{3} = 4\left(\pi - \sqrt{3}\right).$$

**25. (C)** Veamos que cualquier número $a > 3$ está en el recorrido de la función. En efecto:

- Si *a* es par, tomamos $b = 2^{\frac{a}{2}} = 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2$ con $\frac{a}{2}$ veces el factor 2.

  Entonces $r(b) = 2 + 2 + ... + 2 = 2\cdot\frac{a}{2} = a$ .

- Si *a* es impar, tomamos $b = 2^{\frac{a-3}{2}}\cdot 3 = 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2\cdot 3$ con $\frac{a-3}{2}$ veces el factor 2 .

  Entonces $r(b) == 2\cdot\frac{a-3}{2} + 3 = a$ .

Así pues, cualquier entero mayor que 3 pertenece al recorrido de la función. Sin embargo 1, 2, 3 no lo están pues si $r(z) = 1$, $r(z) = 2$ ó $r(z) = 3$, implica que *z* no es compuesto.

# Participantes y relación de ganadores del XIX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes de 527 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3469 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3129. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | NIVEL 2 | | NIVEL 3 | | NIVEL 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | | 1º ESO, 2º ESO | | 3º ESO, 4º ESO | | 1º B, 2º B | |
| nº de participantes | 244 | 532 | 414 | 604 | 394 | 481 | 258 | 202 |
| Totales por nivel | 776 | | 1018 | | 875 | | 460 | |

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

1. Jimena Lozano Simón (6º Primaria) Colegio Alemán
2. Sergio Pérez Plaza (5º Primaria) Colégio Agustiniano
3. Raúl Sanz Belmar (6º Primaria) CP Pardo Bazán (Leganés)
3. Miguel Soto Martín (6º Primaria) CP Miguel de Cervantes (Tres Cantos)

**NIVEL II**

1. Pablo Soto Martín (2º ESO) IES José Luis Sampedro (Tres Cantos)
2. Víctor D. Sánchez González (1º ESO) IES Francisco Umbral (Ciempozuelos)
3. Lucas Cuesta Araujo (2º ESO) IES Blas de Otero

**NIVEL III**

1. Alejandro Epelde Blanco (3º ESO) Montessori School (Los Fresnos)
2. Pablo del Olmo Casas (4º ESO) IES Las Canteras (Collado Villalba)
3. Saúl Rodríguez Martín (4º ESO) Colegio Villa de Griñón (Griñón)

**NIVEL IV**

1. Daniel Puignau Chacón (1º Bchto) IES Alameda de Osuna
2. Ismael Sierra del Río (2º Bchto) IES San Mateo
3. Gonzalo Gómez Abejón (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu
3. Marc Isern Hacker (1º Bchto) Colegio Alemán

# RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XIX CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo2015

| NIVEL I | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 293 |
| CP MIGUEL DE CERVANTES | Tres Cantos | 277 |
| COLEGIO AGUSTINIANO | Madrid | 263 |
| COLEGIO INTERNACIONAL PINOSIERRA | Tres Cantos | 257 |
| COLEGIO HÉLADE | Boadilla del Monte | 257 |
| COLEGIO NTRA. SRA. DEL RECUERDO | Madrid | 251 |
| CP ANTONIO OSUNA | Tres Cantos | 248 |
| COLEGIO EUROPEO DE MADRID | Las Rozas | 247 |
| COLEGIO VALLMONT | Villanueva del Pardillo | 245 |
| COLEGIO AMANECER | Alcorcón | 244 |

| NIVEL II | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES BLAS DE OTERO | Madrid | 289 |
| COLEGIO CASVI-BOADILLA | Boadilla del Monte | 272 |
| IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO | Tres Cantos | 271 |
| COLEGIO JOYFE | Madrid | 270 |
| COLEGIO SAN AGUSTÍN | Madrid | 261 |
| COLEGIO ARCÁNGEL RAFAEL | Madrid | 259 |
| COLEGIO AMOR DE DIOS | Madrid | 252 |
| RUNNYMEDE COLLEGE | Alcobendas | 251 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 250 |
| COLEGIO SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 247 |

| NIVEL III | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES EL BURGO DE LAS ROZAS | Las Rozas | 255 |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 228 |
| MONTESSORI SCHOOL LOS FRESNOS | Alpedrete | 227 |
| COLEGIO VIRGEN DE ATOCHA | Madrid | 222 |
| COLEGIO VILLA DE GRIÑÓN | Griñón | 218 |
| COLEGIO ALAMEDA DE OSUNA | Madrid | 212 |
| IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO | Tres Cantos | 209 |
| COLEG NTRA. SRA. DE LAS MARAVILLAS | Madrid | 207 |
| IES GRAN CAPITÁN | Madrid | 204 |
| COLEGIO SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 201 |

| NIVEL IV | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES SAN MATEO | Madrid | 324 |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 281 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 262 |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 250 |
| IES ALAMEDA DE OSUNA | Madrid | 236 |
| RUNNYMEDE COLLEGE | Alcobendas | 222 |
| LICEO FRANCÉS | Madrid | 221 |
| IES LA ESTRELLA | Madrid | 219 |
| IES PABLO NERUDA | Leganés | 218 |
| IES ANTARES | Rivas-Vaciamadrid | 218 |

# XXXIII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 13 de junio de 2015

**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

En la siguiente posible suma cada letra representa un dígito (0, 1, 2,…, 9), letras diferentes representan dígitos diferentes y ninguno de las tres números empiezan por cero. Encuéntrala o demuestra que no existe tal suma.

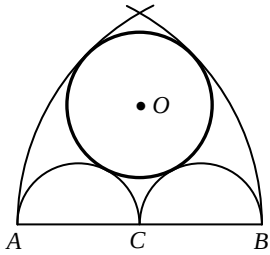
$$\begin{array}{r} S\ E\ V\ E\ N \\ +\quad\ O\ N\ E \\ \hline E\ I\ G\ H\ T \end{array}$$

**Problema 2.** (7 puntos)

En la figura adjunta puedes observar:

- Dos semicircunferencias iguales de diámetros $AC = CB = 10$ cm.
- Una circunferencia de centro $O$ tangente a las dos semicircunferencias anteriores y también tangente a los arcos de centros $A$ y $B$ y radio $AB$.

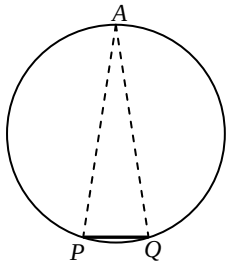
Calcula el radio de esta circunferencia de centro $O$.




Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Si $P, U, I, G$ son enteros positivos tales que $P^2 + U^2 = 20$ y $I^2 + G^2 = 10$, obtén el producto $P \cdot U \cdot I \cdot G$.

**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Inscribimos en una circunferencia un polígono regular de $n$ lados. En la figura observamos que $P$ y $Q$ son vértices consecutivos del polígono y $A$ es otro vértice de dicho polígono tal que $A\hat{P}Q = A\hat{Q}P = T \cdot P\hat{A}Q$. Calcula el valor de $n$.



**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Para sumar fracciones no siempre es la mejor forma escribirlos con el mismo denominador. Si descompones hábilmente cada una de las fracciones podrás obtener de una manera fácil la suma siguiente.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{T(T+1)}$$

**Problema 1B.** (1 punto)
Calcula el mayor divisor primo de 15! – 13! (Nota. 6! es el producto 6·5·4·3·2·1)

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. Si el lado del octógono regular *ABCDEFGH* es $\frac{T}{19}$, obtén el valor de $AC^2 - AD$.

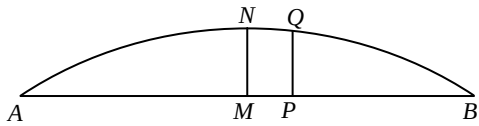
**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y $m = 300 \cdot T$. Calcula el número de dos cifras (*AB*) tal que $3 \cdot (BA) + (AB) = m$.

**Problema 4.** (5 puntos)

Sea $\frac{a}{c}$, irreducible, la respuesta del problema **3A,** *b* la respuesta del problema **3B** y *m* la media aritmética de los enteros positivos *a*, *b* y *c*.
Sea *S* una lista de enteros positivos, no necesariamente distintos, entre los que está el número *m*. La media aritmética de los números de *S* es 39. Sin embargo, si quitamos de la lista el número *m*, la media aritmética de los restantes números de la lista es 37. ¿Cuál es el mayor número que puede aparecer en *S*?

**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)
En la figura se observa un segmento circular en el que *M* es el punto medio de la cuerda *AB*. Los segmentos *MN* y *PQ* son perpendiculares a la cuerda.
Si *MN* = 10, *PQ* = 9 y *PB* = 27 determina la longitud de la cuerda *AB*.




**Problema 2.** (7 puntos)
En cierta competición matemática por equipos, de tres componentes cada equipo, se exige que los equipos sean mixtos. Con los alumnos de 4º de ESO del "Club de Matemáticas" de mi instituto se pueden formar 25 equipos diferentes con esas características.
¿Cuántos estudiantes de 4º de ESO hay en el "Club de Matemáticas"?

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Lanzamos al aire una moneda equilibrada *n* veces. Calcula el menor valor de *n* para el que la probabilidad de que la moneda muestre todas las veces lo mismo, es decir, siempre cara o siempre cruz, sea menor del 10 %.

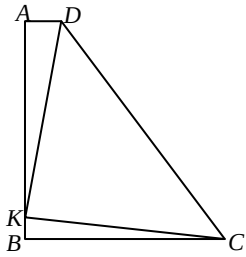
**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. Calcula el menor entero positivo *n* para que en el dominio de la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + n}$ haya al menos *T* enteros positivos.

**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. Calcula el menor número real positivo *x* tal que $\frac{[x]}{x-[x]} = T$ . (Recuerda: [*x*] representa la parte entera de *x*)

**Problema 1B.** (1 punto)
Los vértices del pentágono *ABCDE* son los puntos *A*(0, 0), *B*(2, 0), *C*(6, 6), *D*(2, 6) y *E*(0, 2). Calcula su área.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. La longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son las soluciones de la ecuación $x^2 - 3Tx + T^2 = 0$ se puede expresar como $a\sqrt{b}$ en donde *a* y *b* son enteros positivos. Calcula el mayor valor posible de *a*.

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
En el trapecio rectángulo *ABCD* de la figura, el lado *DC* mide *T* cm y las bases *AD* = 3 cm y *BC* = 15 cm. Si *DK* = *CK*, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento *AK*?




**Problema 4.** (5 puntos)
Sean $\frac{a_1}{a_2}$ y $\frac{b_1}{b_2}$ (fracciones irreducibles) las respuestas correspondientes a los problemas **3A** y **3B**, respectivamente.
En una fiesta todos se saludan entre sí una vez, excepto Pedro que se tuvo que ir antes de que llegaran algunos y no pudo saludar a todos. Si hubo en total $(a_1 + a_2 + b_1 + b_2)$ saludos, calcula el número de personas que saludaron a Pedro.

**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{AH}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{AD}]$ determinados por cuatro de los vértices del octógono regular *ABCDEFGH*. Si escribimos el vector $\vec{w}$ como $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ para un único par (*a, b*) de números reales, ¿cuál es ese par?

**Problema 2.** (7 puntos)

Para cada entero positivo *k* se considera la progresión aritmética infinita $S_k$ cuyo primer término es *k* y su diferencia $k^2$. Por ejemplo $S_3$ = {3, 12, 21, 30,…}. Calcula la suma de todos los *k* tales que 306 es un elemento de $S_k$.

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

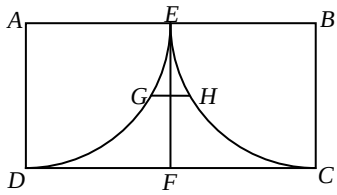
**Problema 1A.** (1 punto)
Si $\varphi$ es un ángulo tal que $0º < \varphi < 180º$ y $sen16º \cdot cos286º - cos16º \cdot sen(-106º) = sen\,\varphi$, ¿cuál es el módulo del número complejo $cos\,\varphi + i\,sen\,\varphi$?

**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Sean *x* e *y* números reales tales que $|x + y - T| + |x - y + 11| = 0$. Calcula el valor de *y*.

**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
La gráfica de la función $y = f(x)$ es simétrica tanto respecto de la recta $x = 4$ como respecto del punto (8, *T*). Si (3, 7) y (11, *k*) son puntos de la gráfica, calcula el valor de *k*.

**Problema 1B.** (1 punto)
Dos círculos concéntricos verifican que el área del pequeño es igual al área de la corona circular que determinan. Si el radio del círculo pequeño es 1 cm, calcula la longitud de un segmento tangente al círculo pequeño cuyos extremos son puntos de la circunferencia que delimita al círculo mayor.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior.
En el rectángulo $ABCD$ de la figura, $AD = T$, $E$ y $F$ son los puntos medios de los lados $AB$ y $DC$ respectivamente, los arcos $\overset{\frown}{DGE}$ y $\overset{\frown}{CHE}$ tienen por centro los vértices $A$ y $B$ respectivamente y $G$ y $H$ son puntos de la mediatriz del segmento $EF$. Si la longitud del segmento $GH$ la escribimos como $p - q\sqrt{3}$, calcula el par de enteros positivos $(p, q)$.




**Problema 3B.** (2 puntos)

Sea $T = (p, q)$ la respuesta del problema anterior y $r = \dfrac{p}{2q}$.

Calcula la distancia más corta entre un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto de la recta $3x + 4y = 12$.

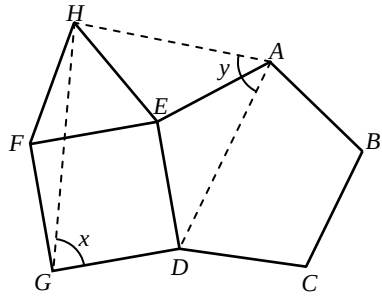
**Problema 4.** (5 puntos)
Sea $a$ la respuesta del problema **3A** y $b$ la respuesta del problema **3B** y $T = a \cdot b$.
Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión aritmética y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una progresión geométrica.
Consideramos la sucesión $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \ldots$ donde cada $c_n = a_n + b_n$.
Si $c_1 = T - 6$, $c_2 = T - 3$, $c_3 = 2T + 1$ y $c_4 = T - 5$. Calcula $c_5$.

## XV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

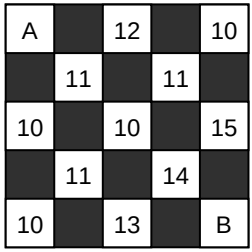
21 de noviembre de 2015

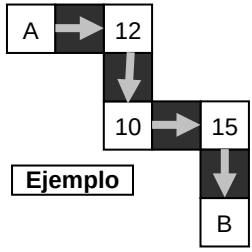
**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** La figura muestra un pentágono regular, *ABCDE*, un cuadrado, *DEFG*, y un triángulo equilátero, *EFH*.
¿Cuál es la diferencia entre los ángulos $D\hat{G}H = x$ y $H\hat{A}D = y$?




**2.** En la cuadrícula de la figura se parte del cuadradito A y se llega al B. En cada movimiento solo se puede avanzar hacia la derecha o hacia abajo. Por cada cuadradito que se pasa se suma una cantidad, 5 puntos si es negro o el número que aparece si es blanco.
En el camino del ejemplo se sumaría, 5 + 12 + 5 + 10 + 5 + 15 + 5, en total 57.
¿Cuántos caminos hay que sumen 51? Márcalos sobre la figura.



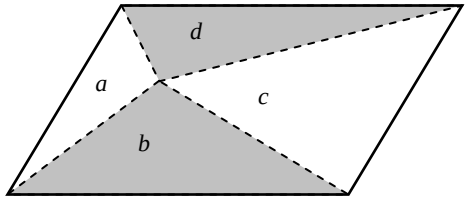

**3.** La suma de cuatro números primos diferentes es también un número primo. La suma de alguna pareja de esos cuatro, también es un número primo y la suma de alguna terna de esos números, también es un número primo. ¿Cuáles han de ser esos cuatro números primos para que cumplan las condiciones anteriores y la suma de los cuatro sea la menor posible?

**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** Marco escribe varios enteros positivos en la pizarra de forma que sólo dos de ellos son múltiplos de 2. Sin embargo hay exactamente trece que son múltiplos de 13. Si $M$ es el mayor de todos, ¿cuál es el menor valor posible de $M$?

**2.** Encuentra una fracción $\frac{m}{n}$, con $m \neq n$, tal que las seis fracciones $\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \frac{m+3}{n+3}, \frac{m+4}{n+4}, \frac{m+5}{n+5}$ puedan simplificarse.

**3.** Desde un punto, elegido al azar en el interior de un paralelogramo, trazamos segmentos a cada uno de sus vértices formando los triángulos *a, b, c* y *d* como muestra la figura.
Prueba que Área (*a*) + Área (*c*) = Área (*b*) + Área (*d* ).



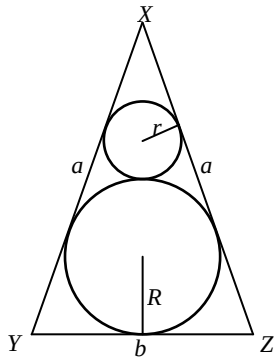

**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato. (45 minutos)

**1.** Bea y Carlos desarrollan el siguiente juego: Ambos eligen, alternativamente, un número de la lista 1, 2, 3, 4,…, 31. Empieza Bea y luego, cada uno elige un número que no haya sido elegido con anterioridad. El perdedor es aquel que tiene que elegir un número que no sea primo con alguno de los ya elegidos. Escribe un número que pueda elegir Bea con el que siempre va a ganar, independientemente de cómo se desarrolle el juego y justifica por qué ganaría.

**2.** En el cuadrado mágico de la figura cada fila columna o diagonal suman lo mismo. Si *a, b, c, x, y, z* son números positivos, determina el producto $x \cdot y \cdot z$ en términos de *a, b* y *c*. (Todos los logaritmos que aparecen están en base 10)

| | | |
|---|---|---|
| $\lg a$ | $\lg b$ | $\lg x$ |
| $p$ | $\lg y$ | $\lg c$ |
| $\lg z$ | $q$ | $r$ |

**3.** En el interior del triángulo isósceles $XYZ$ con $XY = XZ = a$, $YZ = b$ y $b < 2a$, dibujamos dos circunferencias, de radios $R$ y $r$, tangentes entre sí y tangentes al triángulo como muestra la figura. Escribe una expresión para $\frac{R}{r}$ en términos de $a$ y $b$.



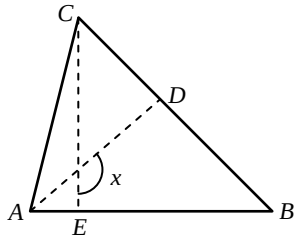
**PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** En el triángulo *ABC* el ángulo $\hat{B}$ es el 25 % mayor que el ángulo $\hat{C}$ y el 50 % mayor que el ángulo $\hat{A}$. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\hat{B}$?

**2.** Nueve helados cuestan 11 € y *a* céntimos y 13 helados cuestan 15 € y *b* céntimos, siendo *a* y *b* números enteros positivos menores que 100. ¿Cuál es el precio de cada helado?

**3.** Si los números *a*, *b* y *c* verifican las ecuaciones $a + b + c = 500$, $3a + 2b + c = 1000$, ¿cuál es el valor de $3a + 4b + 5c$?

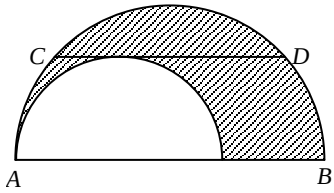
**4.** En el triángulo *ABC* de la figura, *AD* es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y *CE* es la altura desde *C*. Si el ángulo *x* es el doble del ángulo $\hat{A}$, ¿cuántos grados mide el ángulo *x*?




**5.** Los enteros positivos *a*, *b* y *c* son todos diferentes y ninguno de ellos es un cuadrado perfecto. Sin embargo $a \cdot b$, $a \cdot c$ y $b \cdot c$, los tres son cuadrados perfectos. ¿Cuál es el menor valor posible de $a + b + c$?

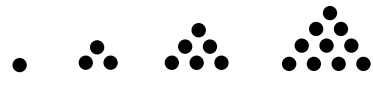
**PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** El dibujo muestra dos semicircunferencias. La cuerda *CD*, paralela a *AB*, es tangente a la semicircunferencia pequeña y tiene una longitud de 32 cm. Calcula el área de la región rayada.




**2.** ¿Cuántos, de los 2015 primeros números triangulares, son múltiplos de 5?

(Recuerda. Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10,…



**3.** Isa y Luisa salen a correr a la vez de cada uno de los extremos de una pista rectilínea. Las dos corren a velocidad constante, pero Isa es más rápida que Luisa. Cuando llegan al extremo opuesto de la pista se dan la vuelta y siguen corriendo a la misma velocidad, cruzándose repetidas veces. La primera vez que se cruzan lo hacen a 20 m del extremo del que partió Luisa y la segunda vez a 10 m del otro extremo. ¿Qué longitud tiene la pista?

**4.** Calcula los enteros *m* y *n* que verifican la igualdad $2^{m+1} + 2^m = 3^{n+2} - 3^n$.

**5.** Cortamos un hexágono regular de 2 cm de lado en dos trozos mediante un segmento paralelo a uno de los lados. Si el cociente entre las áreas de estos dos trozos es $\frac{1}{5}$. Calcula la longitud del segmento.

## **PRUEBA INDIVIDUAL** **Bachillerato** (90 minutos)

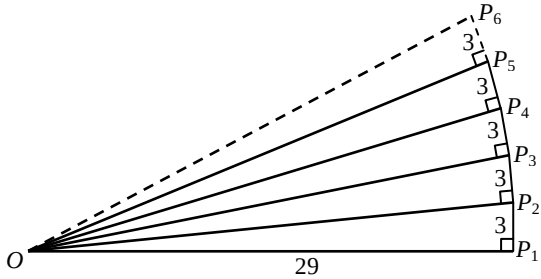
**1.** La longitud de cada uno de los lados de un rombo es igual a la media geométrica de las longitudes de las diagonales. Calcula la medida del ángulo mayor del rombo.
(Recuerda. La media geométrica de *a* y *b* es $\sqrt{a \cdot b}$ )

**2.** La sucesión creciente $\{a_n\}$ = {1, 3, 4, 9, 10, 12, 13,…} está formada por los números que, o son potencia de 3 o son suma de dos o más potencias distintas de 3. ¿Cuál es el término $a_{70}$?

**3.** Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 Marta escribe todos los números de siete dígitos que no tienen ningún dígito repetido. Los escribe en una larga lista ordenándolos de menor a mayor. Si parte la lista por la mitad, ¿cuál es el último número de la primera mitad?

**4.** Encuentra el único número real *x* tal que $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10} = x$ .

**5.** El dibujo muestra una sucesión de puntos, $P_1$, $P_2$, $P_3$,… describiendo una espiral en torno al punto *O*. El segmento que une cada punto $P_n$ con el siguiente, $P_{n+1}$, es perpendicular a $OP_n$ y tiene longitud 3.
Si $OP_1$ = 29, ¿cuál es el siguiente valor de *n* para el que $OP_n$ es un número entero?



**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

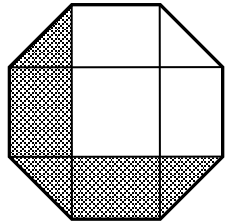
**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** ¿Cuántos kilómetros son 25 millones de milímetros?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "T" la respuesta del problema 2B

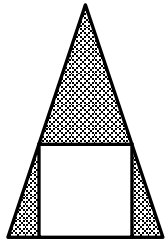
La figura adjunta representa un octógono regular de lado *T* dividido en varias zonas por cuatro diagonales. Cinco de ellas están sombreadas y cuatro no. ¿Cuál es la diferencia entre el área de la zona en blanco y el área de la zona sombreada?



**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "T" la respuesta del problema 2C.

En el triángulo isósceles de altura $\frac{3}{4}T$ y base $\frac{1}{2}T$ inscribimos un cuadrado como se observa en la figura. Calcula el área de la zona sombreada.



**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

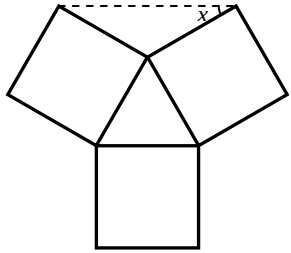
**3º y 4º de ESO.-**

.

**2A.-** Sea "T" la respuesta del problema 3A y $n = \sqrt[3]{T}$. Los enteros positivos *b* y *c* verifican que las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + bx + c$ difieren en *2n*. Encuentra el menor valor posible para *b* + *c*.

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**2B.-** Sobre cada lado de un triángulo equilátero se construye un cuadrado como muestra la figura. ¿Cuánto mide el ángulo *x*?




**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Si aumentamos la base de un triángulo un $\frac{100}{T}$ % y disminuimos la altura en un *p* % el área no varía. ¿En qué porcentaje, *p*, ha disminuido la altura?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En el triángulo isósceles *ABC* los lados *AB* y *BC* miden 5*T* cada uno y el lado *AC* mide *6T*. Si *D* es el punto medio del lado *AC* y *E* y *F* son los pies de las perpendiculares desde *D* a *BC* y *BA*, respectivamente. Calcula el área del triángulo *DEF*.

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**3B.-** Sea "T" la respuesta del problema 1B y $n = \sqrt{\frac{T}{2}}$.

¿Cuántos subconjuntos de {1, 2, 3,…, *n*} tienen exactamente uno o dos números primos?

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** ¿Cuántas semanas hay en 8! minutos?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: viernes 27 de noviembre de 2015**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

**1.** ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

A) $44 \cdot 777$ B) $55 \cdot 666$ C) $77 \cdot 444$ D) $88 \cdot 333$ E) $99 \cdot 222$

**2.** Javier tarda 16 minutos en llegar desde casa al Instituto. Sus pasos son de 75 cm cada uno y da 90 pasos por minuto. Su hermano Santiago va por el mismo camino, da 100 pasos por minuto pero cada paso es de solo 60 cm. ¿Cuántos minutos tarda Santiago en llegar al Instituto?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

**3.** Al simplificar $\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt{\frac{27}{4}}\right)^2$ obtenemos:

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

**4.** Si $\frac{b}{a}=2$ y $\frac{c}{b}=3$, ¿cuál es el cociente $\frac{a+b}{b+c}$?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

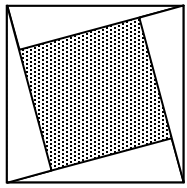
**5.** Si $p$, $q$ y $r$ son primos diferentes, ¿cuál de los siguientes números es el menor cubo perfecto que tiene a $n=p\cdot q^2\cdot r^4$ como uno de sus divisores?

A) $p^8\cdot q^8\cdot r^8$ B) $\left(p\cdot q^2\cdot r^2\right)^3$ C) $\left(p^2\cdot q^2\cdot r^2\right)^3$ D) $p^3\cdot q^3\cdot r^6$ E) $4\cdot p^3\cdot q^3\cdot r^3$

**6.** Si $8^m=27$, ¿cuál es el valor de $4^m$?

A) 3 B) 4 C) 9 D) 13,5 E) No existe ese $m$

**7.** En el interior de un cuadrado dibujamos cuatro triángulos rectángulos de hipotenusa el cuádruple de la altura sobre ella, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el cociente entre la longitud del lado del cuadrado sombreado y el lado del cuadrado inicial?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

**8.** ¿Cuál es el área de un sector circular cuyo perímetro coincide con la longitud de la circunferencia a la que pertenece si el área del círculo correspondiente es 1?

A) $\frac{\pi-1}{\pi}$ B) $\frac{1}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{360}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**9.** En la caja A hay $a$ monedas de 1 € y en la B, $b$ monedas también de 1 €. Los números $a$ y $b$ son impares y $a > b$. ¿Cuál es el menor número de monedas que hay que pasar de la caja A a la B para que en la caja B haya más monedas que en A?

A) $\frac{b-a+2}{2}$ B) $\frac{a-b+2}{2}$ C) $\frac{b+a-2}{2}$ D) $\frac{a-b-2}{2}$ E) $\frac{a+b+2}{2}$

**10.** Ali y Bea juegan un cierto número de partidas de un determinado juego. Por cada partida jugada (no hay empates) el ganador recibe 2 puntos y el perdedor recibe 1 punto. Al final, Ali ganó 4 partidas y Bea obtuvo 10 puntos. ¿Cuántas partidas jugaron?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) No es posible determinarlo

**11.** Después de ir paseando durante 8 km a una velocidad de 4 km/h, Isa empieza a correr a una velocidad de 8 km/h. ¿Cuántos minutos debe estar corriendo para que la velocidad media a lo largo de todo el recorrido sea de 5 km/h?

A) 15 B) 20 C) 30 D) 35 E) 40

**12.** Si la media de dos números positivos es el 30 % menor que el mayor, ¿qué porcentaje será mayor que el menor?

A) 75% B) 70% C) 30% D) 25% E) 20%

**13.** En el cuadrado de la figura 1, $E$ y $F$ son los puntos medios de los lados a los que pertenecen. ¿Qué fracción del área del cuadrado representa el pentágono $GECFH$?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{4}{15}$

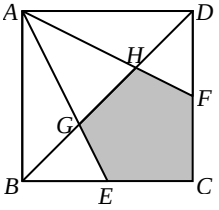



Figura 1.

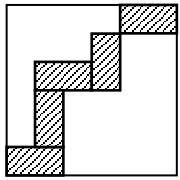


Figura 2.

**14.** En el interior de un cuadrado de 24 cm de lado dibujamos cinco rectángulos iguales, como muestra la figura 2. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, de cada uno de ellos?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 32

**15.** El volumen de un paralelepípedo recto de 32 $cm^2$ de área total es 8 $cm^3$. Si las tres dimensiones están en progresión geométrica, la suma, en cm, de las longitudes de todas las aristas es:

A) 28 B) 32 C) 36 D) 40 E) 44

**16.** Si lanzamos un dado normal seis veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número mayor o igual que 5 al menos cinco veces?

A) $\frac{13}{729}$ B) $\frac{12}{729}$ C) $\frac{2}{729}$ D) $\frac{3}{729}$ E) Nada de lo anterior

**17.** ¿Cuántos números podemos escribir como suma de dos enteros positivos distintos, si cada uno de ellos debe ser menor o igual que 100?

A) 196 B) 197 C)198 D)199 E) 200

**18.** ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos una cifra repetida?

A) 62·72 B) 52·72 C) 52·82 D) 42·82 E) 42·92

**19.** Dos coches, A y B, recorren la misma distancia. El coche A recorre la mitad de la distancia a $k$ km/h y la otra mitad a $v$ km/h. El coche B va la mitad del tiempo a $k$ km/h y la otra mitad a $v$ km/h. Si la velocidad media de A ha sido $x$ km/h y la de B $y$ km/h, entonces:

A) $x \leq y$ B) $y \leq x$ C) $x = y$ D) $x < y$ E) $x > y$

**20.** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\big|x-\big|2x+1\big|\big|=3$ ?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

**21.** En el lado *BC* del triángulo *ABC* marcamos un punto *D* tal que $C\hat{A}D = D\hat{A}B = 60^{\circ}$. Si *AC* = 3 y *AB* = 6, la longitud de *AD* es:

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 3,5 E) 4

**22.** Si *A*, *B* y *C* no están alineados, ¿cuál es el valor mínimo del área del triángulo *ABC* si *A*(0, 0), *B*(36, 15) y las coordenadas de *C* son números enteros?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{13}{2}$ E) No existe tal mínimo

**23.** Si $|x|+x+y=10$ y $x+|y|-y=12$, $x+y$ es igual a:

A) – 2 B) 2 C) $\frac{18}{5}$ D) $\frac{22}{3}$ E) 22

**24.** Si $tg\alpha$ y $tg\beta$ son las soluciones de la ecuación $x^2-px+q=0$ y $\frac{1}{tg\alpha}$ y $\frac{1}{tg\beta}$ son las soluciones de la ecuación $x^2-rx+s=0$, $r{\cdot}s$ es necesariamente igual a:

A) $p{\cdot}q$ B) $\frac{1}{p{\cdot}q}$ C) $\frac{p}{q^2}$ D) $\frac{q}{p^2}$ E) $\frac{p}{q}$

**25.** En la sucesión 1, 3, 2, -1, -3,… en la que cada término, después de los dos primeros, es igual al anterior menos el anterior al anterior, es decir, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$. ¿Cuál es la suma de los 100 primeros términos de esta sucesión?

A) 5 B) 4 C) 2 D) 1 E) -1

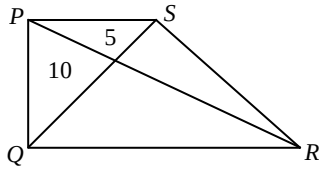
**26.** En un rectángulo de lados 6 y 11, trazamos las bisectrices de cada uno de los ángulos en los extremos de uno de los lados de longitud 11. Dichas bisectrices dividen al otro lado de longitud 11 en tres partes. Las longitudes de estas partes son:

A) 1, 9, 1 B) 6, 1, 6 C) 3, 5, 3 D) 4, 3, 4 E) 5, 1, 5

**27.** Si *p* es primo y las dos raíces de la ecuación $x^2+px-444p=0$ son enteros, entonces:

A) $1 < p \le 11$ B) $11 < p \le 21$ C) $21 < p \le 31$ D) $31 < p \le 41$ E) $41 < p \le 51$

**28.** En el trapecio rectángulo *PQRS* trazamos las diagonales, siendo 5 y 10 las áreas de dos de los triángulos que determinan, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del trapecio?




A) 60 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

**29.** María escribió varios enteros positivos distintos, ninguno mayor que 100, tales que su producto no era divisible por 18. ¿Cuántos escribió como mucho?

A) 5 B) 17 C) 68 D) 69 E) 90

**30.** ¿Cuál es el valor de la suma $\lfloor \log_2 1 \rfloor + \lfloor \log_2 2 \rfloor + \lfloor \log_2 3 \rfloor + \ldots + \lfloor \log_2 1023 \rfloor + \lfloor \log_2 1024 \rfloor$?

A) 8192 B) 8204 C) 9218 D) $\lfloor \log_2 (1024!) \rfloor$ E) Nada de lo anterior

(Recuerda. [*x*] representa la parte entera de *x*).

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

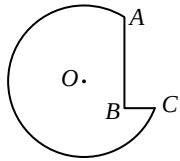
**FASE LOCAL:** segunda prueba. Viernes 18 de diciembre de 2015
Tiempo: 3h 30 min

**1.** Sea N el mayor múltiplo de 8 cuyos dígitos son todos distintos. ¿Cuál es el resto de la división de N entre 1000?

**2.** El lado del cuadrado *ABCD* mide 13 y los puntos *E* y *F* son exteriores al cuadrado con $BE = DF = 5$ y $AE = CF = 12$. Calcula $EF^2$.

**3.** En cierta universidad, el Departamento de Matemáticas tiene tres secciones: Puras, Estadística y Computación. En cada sección hay dos profesores y dos profesoras. Se forma un comité con 6 personas, 3 hombres y 3 mujeres de forma que debe haber 2 personas de cada sección. Calcula el número de comités que pueden formarse.

**4.** La cuchilla de un cortacésped tiene la forma de la figura. El radio del círculo es $\sqrt{50}$ cm, la longitud de *AB* es 6 cm y la de *BC* 2 cm. Si el ángulo en *B* es de 90º, calcula el cuadrado de la distancia, en $cm^2$, desde *B* hasta el centro, *O*, del círculo.




**5.** En el triángulo de Pascal, cada elemento que aparece es la suma de los dos que tiene encima.

Alguna de las filas del triángulo son:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fila 0: | | | | | 1 | | | | |
| Fila 1: | | | | 1 | | 1 | | | |
| Fila 2: | | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| Fila 3: | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| Fila 4: | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |

¿En qué fila aparecerán tres elementos consecutivos en la razón 3 : 4 : 5?

**6.** Hay un primo *p* para el que $16p + 1$ es el cubo de un entero. Calcula dicho primo.

**7.** En el triángulo *ABC*, $AB = \frac{20}{11}AC$. Sea *D* el punto de corte del lado *BC* con la bisectriz del ángulo $\hat{A}$, *M* es el punto medio de *AD* y *P* el punto de corte del lado *AC* con la prolongación de *BM*. Si $\frac{PC}{PA} = \frac{m}{n}$, irreducible, calcula $m + n$.

**8.** En un trapecio isósceles de bases $\log 192$ y $\log 3$ y altura $\log 16$, escribimos el perímetro en la forma $\log(2^p \cdot 3^q)$ siendo *p* y *q* enteros positivos. Calcula $p + q$:

**9.** En el trapecio *ABCD*, de bases *BC* y *AD*, *BC* = 1000 y *AD* = 2016. Si $\hat{A} = 37^\circ$ y $\hat{D} = 53^\circ$ y *M* y *N* son los puntos medios de *BC* y *AD* respectivamente, calcula la longitud *MN*.

**10.** En cierta competición matemática quedan 8 estudiantes de todo el territorio español, de los cuales 3 son de la Comunidad de Madrid. La prueba que deben pasar consiste en resolver unos problemas por parejas, hechas aleatoriamente. Si $\frac{m}{n}$, irreducible, es la probabilidad de que una de las cuatro parejas constituidas esté formada por dos estudiantes de Madrid, calcula $m + n$.

# LII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## Prueba de selección
## Comunidad de Madrid

**Primera sesión, viernes 15 de enero de 2016**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Hallar *B*.

2. En un triángulo *ABC* la bisectriz por *A*, la mediana por *B* y la altura por *C* son concurrentes y además la bisectriz por *A* y la mediana por *B* son perpendiculares. Si el lado *AB* mide una unidad, determinar la medida de los otros dos lados.

3. Cada 20 minutos durante una semana se trasvasa una cantidad exacta de litros de agua (siempre la misma cantidad) desde un tanque con 25 000 litros a otro depósito inicialmente vacío. Desde este segundo depósito, a intervalos regulares de tiempo, se extrae primero 1 litro, luego2, luego 3, etc. Justo al final de la semana coinciden el último trasvase y la última extracción, quedando en ese momento vacío el segundo depósito. Determinar cuánta agua se ha extraído en total durante la semana, en caso de que los datos del problema lo permitan.
   (Se supone que los trasvases y las extracciones se realizan instantáneamente. El primer trasvase se hace pasados los primeros 20 minutos y la primera extracción, pasado el primer intervalo de tiempo.)

**Segunda sesión, Sábado 16 de enero de 2016**
Tiempo: 3 horas y media

4. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó en el club más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuánto deberá pagar en total el *n-ésimo* socio?

5. Dos circunferencias *C* y *C'* son secantes en dos puntos *P* y *Q*. La recta que une los centros corta a *C* en *R* y a *C'* en *R'*, la que une *P* y *R'* corta a *C* en $X \neq P$ y la que une *P* y *R* corta a *C'* en $X' \neq P$. Si los tres puntos *X*, *Q*, *x'* están alineados se pide:
   (i) hallar el ángulo $\angle XPX'$.
   (ii) Demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = r \cdot r'$, donde *d* es la distancia entre los centros de las circunferencias y *r* y *r'* sus radios.

6. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación:

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20$$

**XXIª OLIMPIADA de MAYO**
**Primer Nivel**
**Mayo de 2015**

Olimpíada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

## PROBLEMA 1

El profe pensó en secreto un número *S* de tres dígitos. Los alumnos *A*, *B*, *C* y *D* intentaron adivinarlo, diciendo, respectivamente, 541, 837, 291 y 846. El profe les dijo: "Cada uno de vosotros ha acertado exactamente un dígito de *S* y en la posición correcta. Además, para cada dígito de *S* hubo al menos un acierto". ¿Cuál es el número *S*?

## PROBLEMA 2

Tenemos 6 monedas indistinguibles, 4 son auténticas, todas del mismo peso, y 2 son falsas, una es más liviana que las auténticas y la otra, más pesada que las auténticas. Las dos falsas pesan, en conjunto, lo mismo que dos monedas auténticas. Hallar dos monedas auténticas utilizando dos veces una balanza de dos platos, sin pesas.
ACLARACIÓN: Una balanza de dos platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

## PROBLEMA 3

En el cuadrilátero *ABCD*, el ángulo $\hat{C}$ es el triple del ángulo $\hat{A}$. Sean *P* en el lado *AB* tal que $D\hat{A}P = 90^o$ y *Q* en el lado *AD* tal que $B\hat{Q}A = 90^o$. Los segmentos *DP* y *BQ* se cortan en *O* de modo que *BO* = *CO* = *DO*. Calcular la medida de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$.

## PROBLEMA 4

Decimos que un número es *supersticioso* cuando es igual a 13 veces la suma de sus cifras. Encontrar todos los números supersticiosos.

## PROBLEMA 5

En una casa se reúnen veintiséis personas. Alicia es amiga de solo una persona, Bruno es amigo de dos personas, Carlos es amigo de tres, Daniel de cuatro, Elías de cinco, y así siguiendo cada persona es amiga de una persona más que la persona anterior, hasta llegar a Yvonne, la persona número veinticinco, que es amiga de todos. ¿De cuántas personas es amiga Zoila, la persona número veintiséis?
ACLARACIÓN: Si A es amigo de B entonces B es amigo de A.

**XXIª OLIMPIADA de MAYO**
**Segundo Nivel**
**Mayo de 2015**

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

## PROBLEMA 1

Ana y Celia venden varios objetos y obtienen por cada objeto tantos euros como objetos vendieron. El dinero obtenido está constituido por algunos billetes de 10 euros y menos de 10 monedas de 1 euro. Deciden repartir el dinero del siguiente modo: Ana toma un billete de 10 euros y después Celia, y así sucesivamente hasta que Ana toma el último billete de 10 euros, y Celia se lleva todas las monedas de 1 euro. ¿Cuántos euros más que Celia se llevó Ana? Dar todas las posibilidades.

## PROBLEMA 2

Se tiene un tablero de 7×7. Se desea pintar algunas de sus casillas de manera tal que cualquier subtablero de 3×3 tenga más casillas pintadas que sin pintar. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que se deben pintar? Mostrar una configuración con esa cantidad de casillas pintadas y explicar porqué no es posible con menos.
ACLARACIÓN: Un subtablero de 3×3 es un cuadrado formado por 9 casillas del tablero.

## PROBLEMA 3

Sea *ABCDEFGHI* un polígono regular de 9 lados. Los segmentos *AE* y *DF* se cortan en *P*. Demostrar que *PG* y *AF* son perpendiculares.

## PROBLEMA 4

En una pizarra están escritos los primeros 510 enteros positivos: 1, 2, 3, ..., 510. Una operación consiste en borrar dos números cuya suma sea un número primo. ¿Cuál es el máximo número de operaciones seguidas que se puede hacer? Mostrar cómo se logra y explicar porqué no se puede hacer más operaciones.

## PROBLEMA 5

Se tienen 65 puntos del plano. Se trazan todas las rectas que pasan por dos de ellos y se obtienen exactamente 2015 rectas distintas. Demostrar que al menos cuatro de los puntos están alineados.

# XXI OLIMPIADA DE MAYO – 2015. RESULTADOS DE ESPAÑA

**PRIMER NIVEL**

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Sánchez González, Víctor David | ORO |
| 2 | Domínguez Monreal, Hernán | PLATA |
| 3 | Villegas Taillefer, Andrés | PLATA |
| 4 | Martínez Caldas, Diego | BRONCE |
| 5 | Soto Martín, Miguel | BRONCE |
| 6 | Bonilla Rangel, Marta | BRONCE |
| 7 | Andrés Torrijos, Jorge | BRONCE |
| 8 | Moreno Nieto, Mª Ángeles | MENCIÓN |
| 9 | Turuelo Menéndez, Javier | MENCIÓN |
| 10 | Domínguez del Campo, Cristina | MENCIÓN |

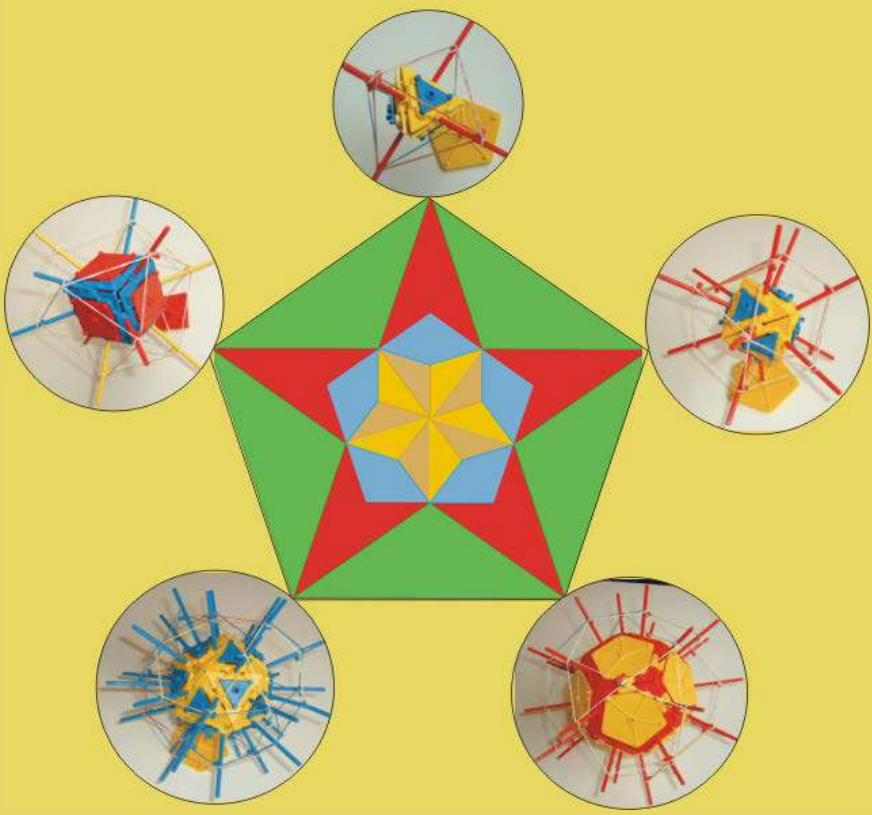
**SEGUNDO NIVEL**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Epelde Blanco, Alejandro | ORO |
| 2 | Rodríguez Martín, Saúl | PLATA |
| 3 | Soto Martín, Pablo | PLATA |
| 4 | Alonso Ciria, Pablo | BRONCE |
| 5 | Arenas Ferrándiz, Manuel | BRONCE |
| 6 | Zhang, Shenghao | BRONCE |
| 7 | Ruiz de la Puente, Alejandro | BRONCE |
| 8 | Ridouane, Noryne | MENCIÓN |
| 9 | Pérez Mugía, Alberto | MENCIÓN |
| 10 | Monrobel Ugidos, Paula | MENCIÓN |

Dirección General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza
CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
**Comunidad de Madrid**

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

# XXI concurso de primavera Matemáticas 2017



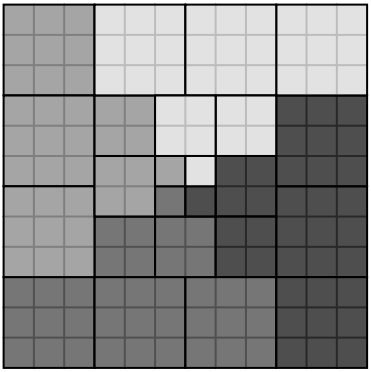
Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alfredo Martínez Sanz*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Hugo Fernández Hervás*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*Marco Castrillón López*
*María Gaspar Alonso-Vega,*
*María Moreno Warleta*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pablo Martínez Dalmau*
*Pilar Ruiz Cervigón*
*Víctor Manuel Sánchez González*

*"...*
*Quién pudiera como tú, a la vez quieto y en marcha, cantar siempre el mismo verso pero con distinta agua.*
*..."* *Romance del río Duero (Gerardo Diego)*

*...Suma de los primeros cubos*



La base del cuadrado marco es $4 \cdot 3$, pero también (mirando la diagonal) $2 \cdot (1+2+3)$.

$$4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 2^2 + 12 \cdot 3^2 = 4 \cdot \left(1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2\right) = 4 \cdot \left(1^3 + 2^3 + 3^3\right) = \left(4 \cdot 3\right)^2 = \left(2 \cdot (1+2+3)\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(1 + 2 + 3 + \ldots + n\right)^2$$

## *Presentación*

Se le acusó al poeta de mirar tanto a la Luna que no veía donde pisaba. Se defendió con un "y tú más":
"Vosotros miráis la *realidad* y guasapeáis con vuestros móviles, pero ni veis ni habláis".

El Comité Organizador

**AGRADECIMIENTOS**

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

Al grupo empresarial El Corte Inglés.

A Smartick.

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 2 de marzo de 2016**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

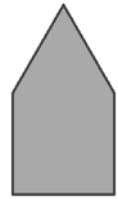
**1** ¿Con cuál de estas operaciones se obtiene el número mayor?

**A)** $20 \times 1{,}6$ **B)** $(20-1)\times 6$ **C)** $20\times(1+6)$ **D)** $20{,}1 \times 6$ **E)** $20 + 16$

**2** Miriam ha dibujado un círculo y luego, con mucha paciencia, ha trazado 2016 diámetros diferentes. ¿En cuántos gajos ha quedado dividido su círculo?

**A)** 2016 **B)** 2032 **C)** 4032 **D)** 2017 **E)** 4030

**3** Juntando un cuadrado y un triángulo equilátero hemos formado un pentágono de perímetro 40 cm. ¿Cuál era el perímetro del triángulo?



**A)** 24 cm **B)** 18 cm **C)** 20 cm **D)** 16 cm
**E)** 30 cm

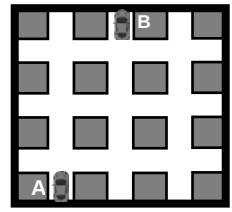
**4** El producto $60 \times 24 \times 365 \times 2$ representa...

**A)** Las horas que hay en dos años
**B)** Los días que hay en 120 años
**C)** Los minutos que hay en dos años
**D)** Los días que hay en 730 años
**E)** Los segundos que hay en dos años

**5** Cinco lombrices se encuentran en el borde de un reloj, justo en la marca de las TRES, y deciden explorar el perímetro del reloj arrastrándose hacia arriba: Pepa recorre 110º, Pepe recorre 450º, Pepi recorre 124º, Pepo recorre tres cuartos de reloj y Pepu recorre medio reloj más la tercera parte de la otra mitad. ¿Qué lombriz se ha detenido más cerca de las OCHO?

**A)** Pepa **B)** Pepe **C)** Pepi **D)** Pepo **E)** Pepu

**6** A Maribel se le ha roto el mando de su coche teledirigido y ya solo puede ir hacia adelante y girar a la derecha. Tiene el coche en A y quiere aparcarlo en B. ¿Cuántos giros a la derecha tendrá que hacer como mínimo para conseguirlo?




**A)** 4 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 3
**E)** Es imposible hacer la maniobra.

**7** Don Retorcido ha escrito en la pizarra todos los números desde el 1 al 200. Después, en un despiste de Don Retorcido, Comenúmeros se ha tragado siete múltiplos de 15. ¿Cuántos múltiplos de quince quedan aún en la pizarra?

**A)** 15 **B)** 13 **C)** 193 **D)** 6 **E)** 5

**8** Cornelia Lamur siempre despide sus Whatsapp con tres emoticonos. Pero no usa cualquiera, a ella solo le gustan estos cuatro: 💔, ☺, 💋, 😘. Aquí tienes tres posibles despedidas de Cornelia: 😘💋😘, 😘😘💋 y 💔☺💋. ¿De cuántas formas puede despedirse Cornelia?

**A)** 81 **B)** 12 **C)** 27 **D)** 24 **E)** 64

**9** Multiplicamos un número por 3, al resultado le sumamos 2, después lo dividimos entre 4 y al restarle 5 obtenemos 15. ¿Cuál era el número de partida?

**A)** 14 **B)** 26 **C)** 29 **D)** 126 **E)** 234

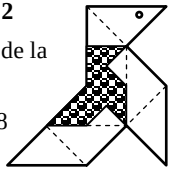
**10** Este año para Halloween compramos una calabaza de 2 kg. Después de vaciarla y decorarla pesaba 1500 gramos. ¿Qué fracción de la calabaza hemos desechado?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{15}{20}$ **D)** $\frac{2}{15}$ **E)** $\frac{13}{15}$

**11** Los 28 niños y niñas de la guardería terminaron la clase muy contentos. Había 10 con una pegatina verde en la frente, 12 con una pegatina roja en el cuello y 9 que iban sin pegatina. ¿Cuántos salieron felices con dos pegatinas?

**A)** 6 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 13 **E) 2**

**12** En la figura podemos apreciar dos pajaritas semejantes. Si el área de la mayor es 72 $cm^2$, el área de la pequeña, en $cm^2$, es:



**A)** 18 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 48

**13** La editorial Paganini envió cromos a un colegio para los alumnos de 5º y 6º de primaria. Tocaban a 25 cromos por alumno y sobraban 8. Como cuatro de los niños no quisieron coger cromos, se repartieron todos los cromos sobrantes y tocaron a tres cromos más. ¿Cuántos niños cogieron cromos?

**A)** 42 **B)** 40 **C)** 38 **D)** 36 **E)** 32

**14** En esta suma cada letra representa una cifra diferente. ¿Cuál es la cifra B?

$$\begin{array}{rccc} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ + & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \hline & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{B} \end{array}$$

**A)** 6 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 2 **E)** 9

**15** Elisa ha dibujado un cuadrado de 4 metros de lado y ha señalado uno de los vértices y los dos puntos medios de los lados a los que no pertenece dicho vértice. Con estos tres puntos ha formado un triángulo. ¿Cuál es, en $m^2$, el área de ese triángulo?

**A)** 6 **B)** 5,5 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**16** He calculado que por cada diez vueltas de la rueda de mi bici avanzo 18 metros. ¿Cuántas vueltas ha dado hoy que he recorrido cuatro kilómetros y medio?

**A)** 5000 **B)** 4500 **C)** 250 **D)** 500 **E)** 2500

**17** Cuando Ainhoa cumplió nueve años su padre le dijo: "cuando tú naciste yo tenía tres veces la edad que tienes ahora". ¿Cuántos años tiene el padre de Ainhoa?

**A)** 36 **B)** 38 **C)** 54 **D)** 45 **E)** 27

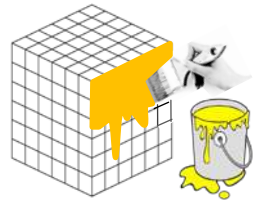
**18** Cuatro aves se encuentran en la laguna verde y hablan así:
Pito dice: yo no vivo en el lago Noss y por el camino me encontré con la que vive en Nass.
Poto dice: creo que me estoy enamorando de la que vive en Nass.
Pato dice: ni de casualidad me iría a vivir a Ness ni a Nass.
Peto dice: cada una vivimos en lagos diferentes y además sé que Pito vive en Niss.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

**A)** Pato vive en Niss **B)** Ni Pato ni Peto viven en Nass
**C)** Pito vive en Nass **D)** Pato vive en Noss
**E)** Poto no vive en Ness

**19** Si sumamos las edades de los hermanos Tita, Tito y Titi por parejas obtenemos nueve, once y doce años. ¿Cuántos años tiene el mediano?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 3 **E)** 7

**20** Francisco ha coloreado las seis caras de este cubo formado por cubitos de un centímetro de arista. ¿Cuántos cubitos tienen ahora exactamente dos caras coloreadas?



**A)** 48 **B)** 72 **C)** 60 **D)** 112 **E)** 152

**21** Don Retorcido se ha inventado la operación torreta. Observa en qué consiste:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & \\ \hline b & c \\ \hline \end{array} = a \times (b + c)$$

¿Cuál de estas cinco torretas da como resultado un número sin decimales?

**A)** $\begin{array}{|c|c|}\hline 5 & \\ \hline 7{,}5 & 0{,}4 \\ \hline \end{array}$ **B)** $\begin{array}{|c|c|}\hline 1{,}2 & \\ \hline 0{,}6 & 5{,}4 \\ \hline \end{array}$ **C)** $\begin{array}{|c|c|}\hline 0{,}7 & \\ \hline 3{,}2 & 6{,}8 \\ \hline \end{array}$ **D)** $\begin{array}{|c|c|}\hline 9{,}1 & \\ \hline 1{,}3 & 2{,}3 \\ \hline \end{array}$ **E)** $\begin{array}{|c|c|}\hline 5{,}3 & \\ \hline 3{,}5 & 1{,}5 \\ \hline \end{array}$

**22** En una caja hay cinco bolas rojas, ocho negras y seis verdes. Añadiendo bolas, ¿con cuál de las siguientes opciones se consigue que la probabilidad de sacar bola roja sea $\frac{1}{3}$?

**A)** Dos rojas y tres negras **B)** Dos verdes y una negra

**C)** Cuatro rojas y una verde **D)** Tres rojas y dos negras

**E)** Dos rojas, una negra y dos verde.

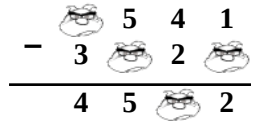
**23** Jaimito ha sacado de quicio a su profesora y esta le ha mandado escribir NOHABLARÉENCLASENOHABLARÉENCLASENOHABL… hasta que se le seque el bolígrafo. Justo cuando terminó de escribir la letra número 999 se secó el bolígrafo. ¿Cuál fue la última letra que escribió Jaimito?

**A)** C **B)** L **C)** A **D)** S **E)** E

**24** Cinco pelotas pesan lo mismo que una peonza y un yoyó. Una peonza pesa lo mismo que dos pelotas y un yoyó. ¿Cuántas pelotas pesan lo mismo que dos peonzas?

**A)** 5 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 6 **E)** 7

**25** A Comenúmeros le ha dado hambre resolver tantos problemas y se ha comido algunas cifras de esta resta. ¿Cuánto suman los números que se ha comido el muy glotón?



**A)** 17 **B)** 19 **C)** 15 **D)** 11 **E)** 13

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 2 de marzo de 2016**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Multiplicamos un número por 4, al resultado le sumamos 2, después lo dividimos entre 3 y al restarle 5 obtenemos el número de partida. ¿Cuál es este número?

**A)** 10 **B)** 13 **C)** 16 **D)** 19 **E)** 22

**2** En una caja están las primeras nueve bolas de billar, numeradas del 1 al 9. Cinco letras amigas van cogiendo por turno una bola y luego se ordenan de menor a mayor según el número que les ha tocado: P < R < I < M < A. La R está feliz porque es la única que tiene un número primo y la P está triste porque su número es justo la mitad que el de M.
¿Cuánto suman los cinco números de nuestras amigas PRIMA?

**A)** 33 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 30 **E)** 28

**3** Usando enteros positivos diferentes solo hay un cuarteto {1, 2, 3, 5} cuya suma sea 11. ¿Cuántos cuartetos de enteros positivos diferentes hay que sumen 15?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 3

**4** Lola compara el precio de un billete de avión para NY en dos agencias, Rayantour y Vuelinair. La diferencia de precio entre los dos billetes es de 70 euros, y el precio del billete con la agencia Vuelinair vale los dos tercios del precio del billete en Rayantour. ¿Cuántos euros cuesta el billete más caro?

**A)** 280 **B)** 244 **C)** 210 **D)** 420 **E)** 235

**5** La suma de las tres cifras del número que está pensando Joaquín es cinco. La diferencia entre el mayor y el menor número que cumplen esa condición es:

**A)** 138 **B)** 396 **C)** 387 **D)** 199 **E)** 421

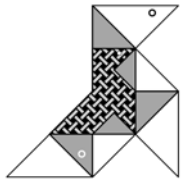
**6** Al descomponer 2016 en factores podemos escribir $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7^1$. Siguiendo ese esquema, $\Delta^\Delta \times \Delta^\Delta \times \Delta^\Delta$ y usando esos mismos números: 1, 2, 2, 3, 5, 7, ¿cuál es el menor producto que podemos formar?

**A)** 1400 **B)** 31 **C)** 150 **D)** 256 **E)** 200

**7** Julia dice: "tengo una hermana más que hermanos". Y su hermano Julio dice: "tengo el doble de hermanas que de hermanos". ¿Cuántos hermanos son en total, entre chicas y chicos?

**A)** 9 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 10

**8** En la figura podemos apreciar tres pajaritas semejantes. Si la mayor tiene de perímetro 72 cm, el perímetro de la pequeña, en cm, es:



**A)** 18 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 48

**9** Cuando Ainhoa cumplió nueve años su padre le dijo: "cuando tú naciste yo tenía tres veces la edad que tienes ahora". ¿Cuántos años tiene el padre de Ainhoa?

**A)** 36 **B)** 38 **C)** 54 **D)** 45 **E)** 27

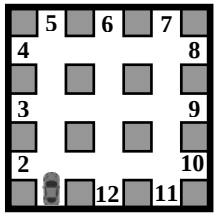
**10** Juan sube las escaleras de su casa dando zancadas de dos en dos escalones y las baja a zancadas de tres en tres. Si para subir da siete zancadas más que para bajar, ¿cuántos escalones tiene la escalera de su casa?

**A)** 42 **B)** 26 **C)** 91 **D)** 35 **E)** 65

**11** El reloj de la cocina atrasa 5 minutos cada dos horas y el mío adelanta 5 minutos cada hora. A las 8:00 puse los dos relojes en hora y al volver del colegio mi reloj marcaba una hora más que el de la cocina. ¿A qué hora volví del cole?

**A)** 16:00 **B)** 16:45 **C)** 15:40 **D)** 15:30 **E)** 14: 45

**12** A Maribel se le ha roto el mando de su coche teledirigido y ya solo puede ir hacia adelante y girar a la derecha. Tiene el coche aparcado en la plaza número 1 y lo quiere mover a otra plaza diferente. ¿Cuál es la suma de los números de las plazas a las que no podrá llegar?




**A)** 30 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 0

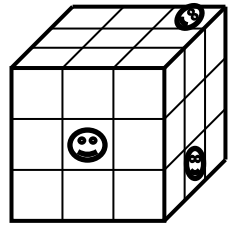
**13** María y Esteban juegan al "pilla-pilla". María está a 150 metros de Esteban que comienza a perseguirla. Si Esteban avanza 10 metros cada vez que María avanza 6, ¿cuántos metros habrá recorrido Esteban cuando pille a María?

**A)** 286 **B)** 375 **C)** 524 **D)** 853 **E)** 301

**14** Elena y Alba se entretienen formando esta cadena: ♥♦♦♥♦♦♥♦♦♥♦♦...
¿Qué posición ocupará en esta cadena el rombo número 97?

**A)** 144 **B)** 194 **C)** 145 **D)** 147 **E)** 146

**15** Con 27 cubitos he formado un cubo y he pintado tres cabecitas sonrientes como puedes ver en mi dibujo. Luego he quitado los cubitos con las cabecitas sonrientes y todos los que se tocan con ellos, cara con cara. ¿Cuántos cubitos quedan?



**A)** 12 **B)** 18 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 13

**16** Rosalinda cuida su jardín de esta manera: cada día riega o bien 12 claveles o bien 8 tulipanes. Si al final de la semana ha regado un total de 76 flores, ¿cuántos días se ocupó de los claveles?

**A)** 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

**17** Don Retorcido ha escrito en la pizarra todos los números desde el 1 al 400. Después, en un despiste de Don Retorcido, Comenúmeros se ha tragado siete cuadrados perfectos. ¿Cuántos cuadrados perfectos quedan escritos en la pizarra?

**A)** 17 **B)** 13 **C)** 23 **D)** 12 **E)** 31

**18** El mínimo común múltiplo de 99 y 999 es:

**A)** 10 989 **B)** 98 901 **C)** 99 999 **D)** 8991 **E)** 111 111

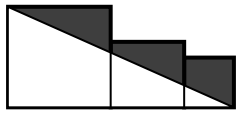
**19** Mi rectángulo es especial: cada lado mide un número entero de centímetros, la base mide siete centímetros más que la altura, la suma de las longitudes de tres de sus lados es 70 cm. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de mi rectángulo?

**A)** 96 **B)** 98 **C)** 92 **D)** 86 **E)** 100

**20** Don Retorcido se encuentra con dos enteros positivos, los observa, los estudia, los revuelve, reflexiona y exclama: ¡qué cosa tan bonita, la suma de estos dos números es el doble de su resta! ¿Qué podemos asegurar con seguridad de esos dos números?

**A)** Son iguales **B)** Uno es la mitad del otro **C)** Uno es el triple del otro
**D)** Su producto es 28 **E)** Es imposible, Don Retorcido se ha confundido

**21** Rocío ha juntado tres cuadrados de lados 5 cm, 6 cm y 9 cm como muestra su dibujo. ¿Qué área, en $cm^2$, ocupa la parte sombreada?

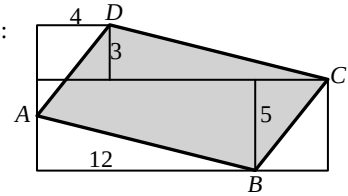


**A)** 52 **B)** 50 **C)** 71 **D)** 92 **E)** 42

**22** El número 1*a*69*b* es múltiplo de 2, 9 y 11. ¿Cuánto vale el producto $a \cdot b$?

**A)** 0 **B)** 2 **C)** 24 **D)** 16 **E)** 8

**23** El área del paralelogramo *ABCD* sombreado es:




**A)** 72 **B)** 56 **C)** 63

**D)** 97 **E)** 60

**24** Una epidemia de fraccionitis está afectando a los pobres habitantes de Matelandia. El primer mes se infectó el 10% de la población. En el segundo mes, el 10% de los enfermos sanó y el 10% de los sanos enfermó. ¿Qué porcentaje de la población padece fraccionitis en este momento?

**A)** 19% **B)** 18% **C)** 10% **D)** 9% **E)** 1%

**25** ¡Ayyy, que se acaba el tiempo!, tic-tac, tic-tac,… Cada cuarto de hora la manecilla de las horas gira un ángulo de …

**A)** 0,5º **B)** 2,5º **C)** 7,5º **D)** 15º **E)** 30º

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 2 de marzo de 2016**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

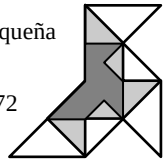
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En un bombo de lotería quedan cinco bolas. Tres con número par y dos con número impar. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{3}{4}$

**2** En la figura podemos apreciar tres pajaritas semejantes. Si la pequeña tiene de perímetro 18 cm, el perímetro de la grande, en cm, es:

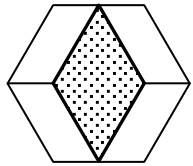


**A)** 24 **B)** 32 **C)** 36 **D)** 48 **E)** 72

**3** Si $\begin{cases} x^2+y^2 = 212 \\ x+y = 18 \end{cases}$, el valor de $\left|x^2-y^2\right|$ es:

**A)** 288 **B)** 252 **C)** 216 **D)** 180 **E)** 144

**4** En un hexágono regular, aprovechando los puntos medios de dos lados opuestos hemos construido un rombo de lados paralelos a cuatro lados del hexágono. Si el hexágono regular tiene un área de 48 $cm^2$, la del rombo, en $cm^2$, es:



**A)** 32 **B)** 30 **C)** $24\sqrt{3}$ **D)** 24 **E)** 16

**5** 2016 es múltiplo de 16. ¿Cuántos números de la forma $2000 + b$, con $b$ natural y menor que 1000, son divisibles por b?

**A)** 12 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 24

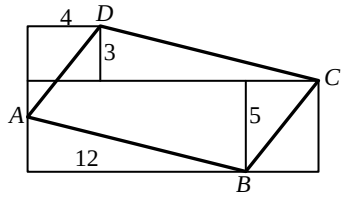
**6** El mínimo común múltiplo de 999 y 9999 es:

**A)** 1 109 889 **B)** $10^6 - 1$ **C)** $10^{12} - 1$ **D)** 110 889 **E)** 333 333 333

**7** La suma de todos los productos de cinco en cinco de los números del 1 al 6 acaba en:

**A)** 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**8** El área del paralelogramo *ABCD* es:




**A)** 72 **B)** 56 **C)** 63 **D)** 97 **E)** 60

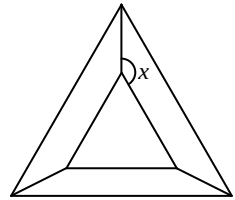
**9** Los números 3, *b* y *c* están en progresión geométrica. En cambio, 2*b*, 3*b* y 48 están en progresión aritmética. La suma de la razón y la diferencia de ambas progresiones es:

**A)** 16 **B)** 15 **C)** 12 **D)** 10 **E)** 7

**10** Si *m* es un entero par y *n* es un entero impar, ¿cuál de los siguientes números es un entero impar?

**A)** $3m + 4n$ **B)** $5mn$ **C)** $(m + 3n)^2$ **D)** $m^3 \cdot n^3$ **E)** $5m + 6n$

**11** En el interior de un triángulo equilátero dibujamos otro triángulo, también equilátero, con los lados paralelos al primero y con el mismo centro, como indica la figura. ¿Cuál es el valor del ángulo *x*?

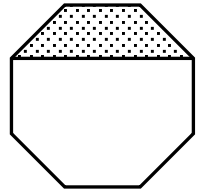



**A)** 100º **B)** 110º **C)** 120º **D)** 130º **E)** 150º

**12** ¿Cuál de los siguientes números tiene exactamente 8 divisores?

**A)** 90 **B)** 60 **C)** 50 **D)** 45 **E)** 30

**13** En el octógono regular de la figura, el área de la zona sombreada es de 3 $cm^2$. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área del octógono?

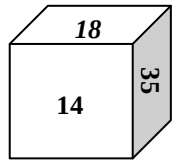


**A)** 9 **B)** 10 **C)** $8+4\sqrt{2}$ **D)** 12 **E)** $8\sqrt{2}$

**14** Si *p, q* y *r* son enteros positivos tales que $p+\dfrac{1}{q+\dfrac{1}{r}}=\dfrac{25}{19}$, ¿cuál es el valor de $p \cdot q \cdot r$?

**A) 6** **B)** 10 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 42

**15** En el dibujo de la derecha, las rectas $PQ$ y $RS$ son paralelas. ¿Cuál es el valor del ángulo $Q\hat{Z}Y$ ?




**A)** 30º **B)** 20º **C)** 40º

**D)** 50º **E)** 60º

**16** En la ecuación $N \cdot U \cdot (M + E + R + O) = 33$, cada letra representa un dígito diferente. ¿De cuántas formas diferentes podemos elegir el valor de las letras?
Por ejemplo: $3 \cdot 1 \cdot (2 + 4 + 0 + 5)$ sería una de ellas.

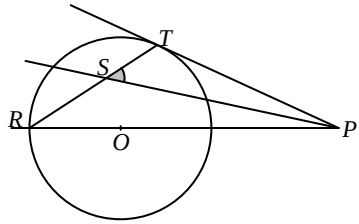
**A)** 12 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 48 **E)** 60

**17** En una zona pantanosa las ranas son azules o verdes. Desde el año pasado el número de ranas azules ha crecido un 60 % mientras que el de ranas verdes ha decrecido en la misma proporción, otro 60 %. Ahora resulta que el cociente entre el número de ranas azules y el de ranas verdes es el mismo que el cociente entre el número de ranas verdes y el de ranas azules que había antes. ¿En qué porcentaje ha decrecido el número total de ranas?

**A)** 5 % **B)** 10 % **C)** 20 % **D)** 25 %

**E)** Hay las mismas ranas que antes

**18** Desde un punto $P$ exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro $O$ y otra tangente en $T$, como muestra la figura. La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento $RT$ en $S$. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$ ?




**A)** 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º

**D)** 45º **E)** 52,5º

**19** Don Retorcido tiene una calculadora tan antigua que solo le funcionan las teclas [ON], [+], [−], [×] y [÷], pero el funcionamiento de las mismas es un poco particular, solo suma o resta. Cuando pulsa [ON] marca 0. Cuando pulsa [+] suma 51 y si pulsa [−] resta 51. Al pulsar [×] suma 85 y si se pulsa [÷] resta 85. El otro día intentó llegar a 2016 y no lo consiguió. ¿Cuál es el número más próximo a 2016 que se puede conseguir?

**A)** 2005 **B)** 2006 **C)** 2007 **D)** 2017 **E)** 2023

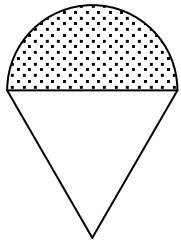
**20** El resultado de $9^{20} + 9^{20} + 9^{20}$ es:

**A)** $27^{20}$ **B)** $9^{60}$ **C)** $3^{23}$ **D)** $3^{41}$ **E)** $27^{60}$

**21** A las 12:00 de la mañana sale un AVE de Sevilla a Zaragoza y a las 12:40 sale otro de Zaragoza a Sevilla. Ambos circulan a la misma velocidad constante y tardan 3 horas y media en hacer el trayecto. ¿A qué hora se cruzan?

**A)** 13:45 **B)** 14:00 **C)** 14:05 **D)** 14:15 **E)** 14:25

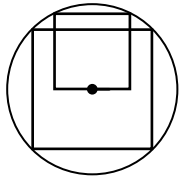
**22** Tomando como diámetro el lado de un triángulo equilátero hemos dibujado un semicírculo. El cociente entre el área del semicírculo y la del triángulo es:



**A)** 1 **B)** $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ **C)** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ **D)** $\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}$

**E)** $\frac{\pi}{3}$

**23** En la figura se observa un cuadrado inscrito en una circunferencia y otro más pequeño con dos vértices en la circunferencia. El centro de la circunferencia es el punto medio de un lado del cuadrado pequeño. El cociente entre las áreas de los cuadrados es:

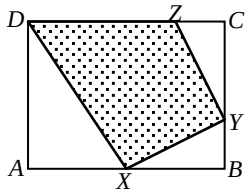


**A)** $\frac{5}{2}$ **B)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **C)** 3 **D)** 2 **E)** $\frac{3}{\sqrt{5}}$

**24** Tiramos dos veces un dado cuyas caras están numeradas con: – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2. Si multiplicamos los dos números obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto negativo?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{11}{36}$ **E)** $\frac{13}{36}$

**25** En tres de los lados del rectángulo *ABCD* hemos tomado los puntos *X*, *Y*, *Z*, de manera que $AX = XB$, $CY = 2 \cdot BY$, $DZ = 3CZ$. Con los puntos *D*, *X*, *Y*, *Z*, se determina un cuadrilátero. ¿Qué fracción del área del rectángulo representa el área del cuadrilátero *DXYZ*?




**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{7}{12}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{5}$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 2 de marzo de 2016**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

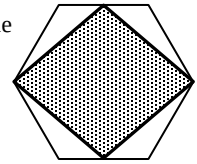
**1** En un bombo de lotería quedan $2n + 1$ bolas, $n + 1$ pares y $n$ impares. Si damos vueltas al bombo y extraemos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea impar?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{n-1}{2n+1}$ **C)** $\frac{n}{2n+1}$ **D)** $\frac{n+1}{2n+1}$ **E)** $\frac{n-1}{2n}$

**2** ¿Cuál es el factorial más pequeño que es múltiplo de $2^{29}$?

**A)** 32! **B)** 31! **C)** 30! **D)** 25! **E)** 24!

**3** El área del rombo inscrito al hexágono regular de la figura es de 24 cm$^2$. La del hexágono regular, en cm$^2$, es:



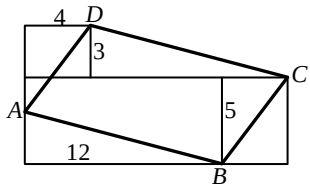
**A)** 27 **B)** 30 **C)** $24\sqrt{3}$ **D)** 36

**E)** 48

**4** El polinomio de segundo grado en $x$ con coeficientes reales, $ax^2 + bx + a$, verifica que:

**A)** Su raíz es doble **B)** Sus raíces son inversas **C)** Sus raíces son opuestas
**D)** Sus dos raíces son reales **E)** Sus dos raíces son estrictamente complejas

**5** El seno de uno de los ángulos del paralelogramo *ABCD* es:




**A)** $\frac{65}{3\sqrt{17\cdot 41}}$ **B)** $\frac{19}{\sqrt{17\cdot 41}}$

**C)** $\frac{24}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{41}}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{56}{65}$

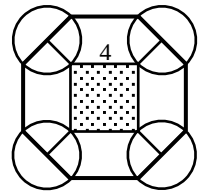
**6** La hipérbola, $y = \frac{2x+1}{x-1}$, puede ser escrita en forma implícita mediante la ecuación, $(x - a) \cdot (y - b) = k$. ¿Cuál es el valor de $k$?

**A)** 1 **B)** –1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** – 4

**7** La suma de todos los productos de ocho en ocho de los números del 1 al 9 acaba en:

**A)** 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**8** El lado del cuadrado central de la figura mide 4 cm. El área, en $cm^2$, del octógono regular es:




**A)** $32\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** 48 **C)** $32\cdot\left(4-\sqrt{2}\right)$

**D)** $128\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)$ **E)** 64

**9** ¿Cuál es el dígito de las decenas de $2016^2 - 2016$?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**10** Los números $x$ e $y$ satisfacen las ecuaciones $x(y + 2) = 100$; $y(x + 2) = 60$. ¿Cuál es el valor de $x - y$?

**A)** 60 **B)** 50 **C)** 40 **D)** 30 **E)** 20

**11** María fue a nadar ayer. Cuando había hecho un quinto de la distancia prevista se tomó un descanso. Después de hacer seis largos más había cubierto un cuarto de lo que iba a hacer. ¿Cuántos largos tenía programado hacer?

**A)** 40 **B)** 72 **C)** 80 **D)** 100 **E)** 120

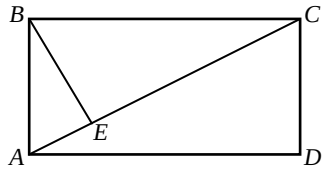
**12** En la tienda todos los precios son de la forma $a$,99 €, en donde $a$ es un número entero positivo. Si un día me gasté 65,76 €, ¿cuántos artículos compré?

**A)** 4 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 24 **E)** Hay varias posibilidades

**13** En una lista de cinco enteros la media es 9, la mediana 10 y la moda 11. ¿Cuál es el entero más pequeño que podemos escribir?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**14** Los lados del rectángulo de la figura son uno el doble que otro. Si $BE$ es perpendicular a la diagonal $AC$, ¿cuál es el cociente entre el área del triángulo $ABE$ y el área del rectángulo $ABCD$?




**A)** $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{1}{8}$

**D)** $\frac{1}{10}$ **E)** $\frac{1}{12}$

**15** ¿Para qué enteros $n$, mayores que 1, se verifica que $4^n - 1$ es un número primo?

**A)** Para todos los primos mayores que 4 **B)** Para todos los impares mayores que 4

**C)** Para todos salvo $n = 2$ y $n = 3$ **D)** Sólo para $n = 15$

**E)** Para ninguno

**16** Un día un estudiante le dijo a Don Retorcido que todos los enteros de la forma $8n + 3$, con $n$ entero positivo, tenían un divisor primo que era también de la forma $8q + 3$, con $q$ entero positivo. Don Retorcido le hizo notar que eso no era verdad mostrándole un contraejemplo. ¿Qué números de estos le mostró?

**A)** 19 **B)** 33 **C)** 91 **D)** 99 **E)** 803

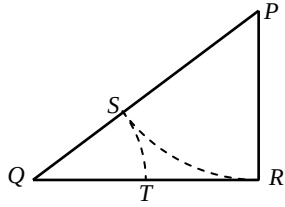
**17** ¿Cuántos puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 50$ tienen al menos una de las coordenadas entera?

**A)** 16 **B)** 30 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 100

**18** Dos vértices de un cuadrado son los puntos (1, 0) y (2, 0). ¿Cuál de las siguientes rectas lo divide en dos trozos de igual área?

**A)** $2y = x$ **B)** $3y = x$ **C)** $3y = 2x$ **D)** $2y = \sqrt{2}x$ **E)** $4y - x = 0$

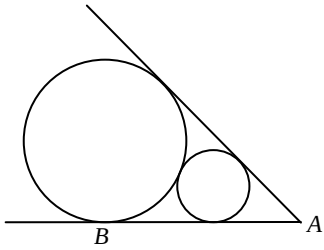
**19** El triángulo $PQR$ es rectángulo en $R$. La circunferencia con centro $P$ y radio $PR$ corta a $PQ$ en $S$ y la circunferencia con centro $Q$ y radio $QS$ corta a $QR$ en $T$. Si $T$ es el punto medio del lado $QR$, ¿cuál es el cociente entre $QS$ y $SP$?




**A)** $\frac{7}{12}$ **B)** $\frac{5}{12}$ **C)** $\frac{5}{8}$

**D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**20** En la figura se observan dos circunferencias de radios 90 y 40, respectivamente, tangentes entre sí y tangentes a dos rectas que se cortan en el punto $A$. Si $B$ es un punto de tangencia, ¿cuál es la distancia de $A$ a $B$?



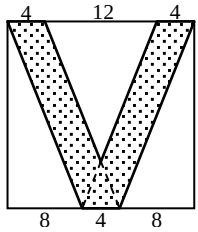

**A)** 216 **B)** 220 **C)** 224

**D)** 236 **E)** 240

**21** La solución de la ecuación $5^x - 5^{x-2} = 120\sqrt{5}$ es un número racional $\frac{a}{b}$, irreducible. ¿Cuál es el valor de $a \cdot b$?

**A)** 2 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 28

**22** En el cuadrado de la figura, de lado 20 cm, hemos dibujado esta "V" con las dimensiones que se indican. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, que ocupa la letra "V"?




**A)** 136 **B)** 150 **C)** 164 **D)** 188

**E)** 200

**23** Si $a$, $b$ y $c$ son enteros positivos con $abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104$, $a^2 + b^2 + c^2$ es igual a:

**A)** 49 **B)** 51 **C)** 54 **D)** 56 **E)** 60

**24** Si $tg\,x + tg\,y = 25$ y $ctg\,x + ctg\,y = 30$, ¿cuál es el valor de $tg\,(x + y)$ ?

**A)** 100 **B)** 120 **C)** 150 **D)** 180 **E)** 200

**25** En el complejo $z = 9 + bi$ en el que $b > 0$, se verifica que las partes imaginarias de $z^2$ y de $z^3$ son iguales. ¿Cuál es el valor de $b$?

**A)** 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 25 **E)** 30

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2016**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Don Retorcido escribió todos los números de tres cifras que son múltiplos de 5 y la suma de sus cifras es 8. ¿Cuántos números escribió Don Retorcido?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**2** Este año hemos aprendido a hacer punto y entre todos hemos hecho una bufanda muy colorida que mide cinco metros. Unos niños hicieron 7 franjas rojas de 15 centímetros cada una; otros niños hicieron 12 franjas verdes de 2 decímetros cada una y los niños más pequeños hicieron 6 franjas moradas de 125 milímetros cada una. La franja central la hizo el profesor de color azul. ¿Cuánto medía la franja que hizo nuestro profe?

**A)** 36,35 dm **B)** 1475 mm **C)** 13 cm **D)** 8 dm **E)** 2,96 m

**3** Inés tarda una hora y cuarto desde que se levanta hasta que llega al cole. Está en el colegio seis horas y media y, cuando sale, tarda en llegar a su casa cuarenta y cinco minutos. Si llega a su casa a las cinco menos cuarto, ¿a qué hora se levanta Inés?

**A)** 8:00 **B)** 9:45 **C)** 7:45 **D)** 8:30 **E)** 8:15

**4** Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

**A)** 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

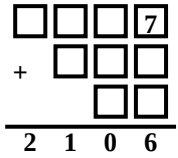
**5** Rafa colecciona monedas de diez céntimos y tiene una curiosa forma de ordenarlas: hace el cuadrado más grande posible con ellas y con las que le sobran hace un montoncito. Si tiene en total 26 euros, ¿cuántas monedas habrá en el montoncito?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 10 **E)** 20

**6** Luisa es muy olvidadiza y ha pensado que a partir de ahora todas sus contraseñas serán tres letras distintas de su nombre seguidas de dos cifras. Por ejemplo: LSU22 y ASL05 son dos posibles contraseñas. ¿Cuántas contraseñas diferentes hay en total?

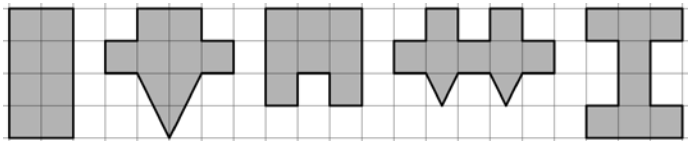
**A)** 120 **B)** 500 **C)** 2700 **D)** 6000 **E)** 12 000

**7** Si completas esta suma con los números del 1 al 9 sin repetir ninguno, ¿qué tres números pondrás en la columna de las decenas?
(El 7 ya está puesto).




**A)** 2, 6 y 5 **B)** 5, 6 y 9 **C)** 2, 8 y 9 **D)** 2, 3 y 5 **E)** 4, 8 y 9

**8** Estas cinco figuras tienen igual área, pero ¿cuál es la que tiene mayor perímetro?



**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**9** La edición que tengo de El Quijote tiene 1106 páginas. He calculado que cada página tiene unas 1548 letras. ¿Qué número aproxima mejor el número de letras que tiene El Quijote?

**A)** 1 500 000 **B)** 1 550 000 **C)** 1 600 000 **D)** 1 650 000 **E)** 1 700 000

**10** Cervantes nació en Alcalá de Henares el 29 de septiembre de 1547 y ayer, viernes 22 de abril, se cumplieron 400 años de su muerte. ¿Cuántos años tenía Miguel de Cervantes cuando murió?

**A)** 23 **B)** 47 **C)** 68 **D)** 69 **E)** 70

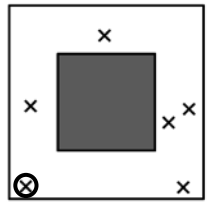
**11** ¿Cuántas vueltas da en tres días la aguja de los minutos de un reloj?

**A)** 72 **B)** 216 **C)** 720 **D)** 2160 **E)** 4320

**12** He pensado tres números distintos del 1 al 9. Si sumo los tres obtengo como resultado 10. ¿Cuál de estos números no puede ser el resultado de multiplicarlos?

**A)** 14 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30

**13** Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?



**A)** Bea **B)** Carla **C)** Dani **D)** Emilio **E)** Fani

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** Si repartiera mis caramelos entre mis compañeros de clase, cada uno tocaría a cuatro y sobrarían dos. También podría repartir mis canicas y, como tengo 26 canicas más que caramelos, cada uno tocaría a cinco y sobrarían siete. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de canicas que tengo?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 9 **E)** 14

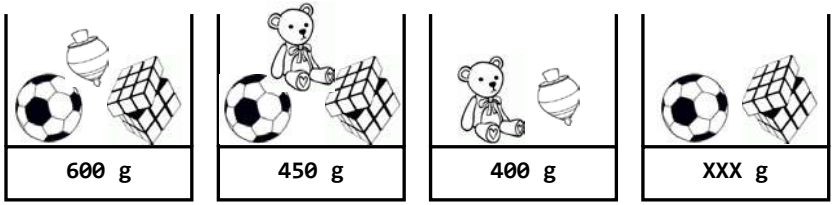
**15** ¿ Hansel y Gretel salieron de su casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

**A)** 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

**16** Un ratón le dice a un elefante: “Solo tu trompa pesa 5000 veces más que yo”. A lo que el elefante contesta: “Pues sí que eres pequeño. Yo peso 40 veces lo que pesa mi trompa”. Si el elefante pesa 5600 kg, ¿cuántos gramos pesa el ratoncito?

**A)** 28 **B)** 560 **C)** 140 **D)** 56 **E)** 112

**17** He puesto en una báscula algunos de mis juguetes, pero la báscula se ha roto en la cuarta pesada. ¿Cuánto marcaría si no se hubiese roto?




**A)** 400 **B)** 425 **C)** 375 **D)** 300 **E)** 325

**18** Javier escribió un número de cuatro cifras y Comenúmeros se comió la cifra de las centenas. Si el número no tenía cifras repetidas y la cifra que se comió no era ni la más grande ni la más pequeña y era impar, ¿qué cifra se zampó?

**3 8 5**

**A)** 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**19** Irene observa en el laboratorio cómo se reproducen unas bacterias. El primer día había 1000, el segundo día había el doble que el primero, el tercer día había el triple que el segundo y el cuarto había cuatro veces lo que había el tercero. De seguir a ese ritmo, ¿cuántas bacterias dirías que habrá el décimo día?

**A)** Menos de sesenta mil **B)** Cerca de cuatro millones

**C)** Unas treinta y seis millones **D)** Trescientos sesenta millones aproximadamente

**E)** Más de tres mil millones

**20** En mi colección de figuras geométricas hay tres círculos azules y dos rojos, dos cuadrados verdes, tres azules y uno rojo, cinco triángulos verdes y cuatro rojos. A Marta no le gustan los círculos ni el color rojo. Si coge una figura sin mirar, ¿qué probabilidad tiene de que le toque algo que no le guste?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{3}{20}$ **D)** $\frac{7}{20}$ **E)** $\frac{13}{20}$

**21** Entre Lucía, Julián y Orlando se han comido trece churros y siete porras. Todos comieron piezas enteras y más de una de cada cosa. Orlando comió la misma cantidad de churros que de porras. Julián comió el triple de churros que de porras y Lucía comió la misma cantidad de porras que Julián. ¿Cuántos churros comió Lucía?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** No se puede saber

**22** El rectángulo gris tiene 54 cm de perímetro y su base es el doble de su altura. A su lado hemos dibujado un rectángulo y cuatro cuadrados. ¿Cuál es el área del rectángulo formado por esas seis figuras?

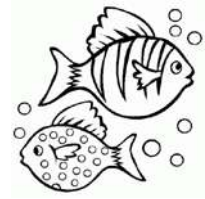
**A)** 108 $cm^2$ **B)** 252 $cm^2$ **C)** 1008 $cm^2$

**D)** 148 $cm^2$ **E)** 504 $cm^2$

**23** Ana, Blas, Cris, Dani y Elia juegan a un juego en el cada uno es ratón o zorro. Los ratones siempre dicen la verdad mientras que los zorros mienten siempre.
Ana dice que Blas es un ratón. Cris dice que Dani es un zorro.
Elia dice que Ana no es un zorro. Blas dice que Cris no es un ratón.
Dani dice que Ana y Elia son animales distintos. ¿Cuántos zorros hay?

**A)** 1 **B)**2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

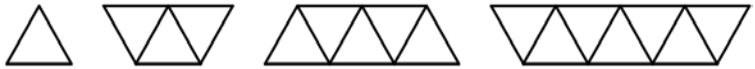
**24** Yo antes tenía quince pececitos bebé y un bote de comida para peces me duraba doce días. Ahora han crecido y comen el doble que antes y, como ya no me caben en la pecera, he regalado cinco a Joaquín. ¿Cuántos días me durará ahora un bote de comida?



**A)** 9 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 6

**E)** 15

**25** Juanje construye triángulos con palillos. Primero hizo uno y usó tres palillos, después hizo tres y usó siete palillos, después cinco y usó once palillos…



¿Cuántos palillos necesita para construir la figura que está formada por 101 triángulos?

**A)** 253 **B)** 203 **C)** 303 **D)** 304 **E)** 202

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2016**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Pancho miente los lunes, miércoles y viernes, y el resto de los días dice la verdad. Un día se encuentra con don Olvidadizo y mantienen este diálogo:
(Don Olvidadizo) ¿Qué día es hoy Pancho?
(Pancho) Ay, qué cabeza tiene usted, hoy es lunes.
(Don Olvidadizo) ¿Y qué día será mañana?
(Pancho) Pues, ¿qué va a ser?, será jueves.
¿Qué día de la semana tuvo lugar esa conversación?

**A)** Lunes **B)** Martes **C)** Miércoles **D)** Jueves **E)** Viernes

**2** Todos los amigos se fueron juntos a comer y en el restaurante llenaron un montón de mesas de siete. Como estaban muy apretados, la encargada trajo tres mesas más y ahora volvieron a ocuparlas pero mucho más anchos: eran seis por mesa. ¿Cuántos amigos eran?

**A)** 84 **B)** 45 **C)** 63 **D)** 168 **E)** 126

**3** Cuando Comenúmeros está hambriento no hay quien le pare. Esta vez las víctimas han sido algunos múltiplos de 86, distintos, de tres cifras. Se ha puesto a comer algunas cifras como un loco:

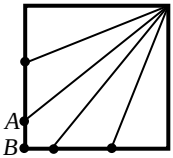
¿Cuánto suman las ocho cifras que ha devorado Comenúmeros?

**A)** 38 **B)** 25 **C)** 32 **D)** 28 **E)** 19

**4** Para hacer sus manualidades, Delia y Álvaro han cogido dos cuerdas que necesitan cortarlas en trocitos de 20 cm. Cuando Delia divide su cuerda, al final le sobran 14 cm. Si la cuerda de Álvaro tiene triple longitud que la de Delia, ¿cuántos centímetros le sobrarán después de cortarla en trocitos de 20 cm?

**A)** 18 **B)** 6 **C)** 2 **D)** 14 **E)** 12

**5** Ismael ha dividido un cuadrado de lado 60 cm en cinco partes de igual área y ha hecho un dibujo para que lo entiendas.
¿Cuántos centímetros mide el segmento *AB*?

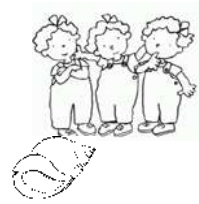



**A)** 10 **B)** 24 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 12

**6** Don Retorcido llama *repedós* a los números de cuatro cifras que tienen exactamente dos cifras iguales. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor *repedós*?

**A)** 8885 **B)** 8985 **C)** 9975 **D)** 8787 **E)** 8997

**7** Las tres mellizas han salido a buscar caracolas por la playa. Ana ha reunido 48 conchas, Elena 60 y Teresa 72. Deciden hacer paquetitos, cada una con sus conchas, con igual número de caracolas en cada paquete, para que cada niña reparta sus tesoros. ¿Cuál es el menor número de paquetes que tienen que hacer entre las tres trillizas para empaquetar todas las caracolas?

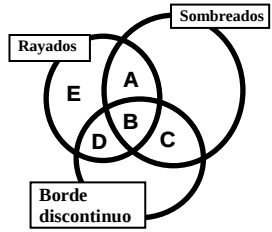


**A)** 30 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 3

**8** Don Pintón elabora sus propios colores para sus cuadros. Tiene muchos botes iguales de tres colores distintos: blanco, amarillo y rojo. Elige tres botes al azar y los mezcla. ¿Con esta técnica, cuántos colores distintos puede obtener don Pintón?

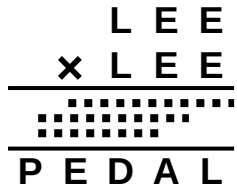
**A)** 8 **B)** 10 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 27

**9** Observa el diagrama que te mostramos.
¿En qué región debemos colocar a este triángulo?




**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D
**E)** E

**10** Don Retorcido es peculiar: lee y monta en bicicleta a la vez. Y además tiene tiempo para inventarse otro problema:
Si letras diferentes representan cifras diferentes, ¿cuánto vale la letra **D** en esta multiplicación?




**A)** 4 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 5
**E)** 8

**11** En mi rectángulo, el doble de la base es igual a la mitad del triple de la altura. Si el perímetro mide 84 cm, ¿cuántos $cm^2$ mide su área?

**A)** 441 **B)** 405 **C)** 440 **D)** 432 **E)** 360

**12** Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo solo recuerdo que el mayor número era 21.
Cuando ya iba a reventar se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta. ¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

| + | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 12 | |
| | 10 | | |
| | 13 | | |

**A)** 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

**13** Al multiplicar por cuatro, NOTAR se dio la vuelta y se convirtió en RATÓN. Si letras diferentes representan cifras diferentes, ¿cuánto suma un **R+A+T+O**?

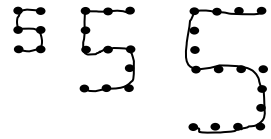
**A)** 25 **B)** 12 **C)** 19 **D)** 27 **E)** 22

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** Ha habido otra gran fiesta de diez números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9. Han formado cinco parejas para bailar y fíjate, han sumado los dos números de cada pareja y han resultado cinco números primos diferentes. Si el 1 y el 4 siempre bailan juntos, ¿cuál de estas parejas sí se ha formado?

**A)** 2 y 5 **B)** 2 y 3 **C)** 3 y 8 **D)** 0 y 7 **E)** 5 y 6

**15** A Isa no se le dan nada bien los números CINCO y por eso, su madre le ha hecho una plantilla con puntos para que aprenda a escribirlos. Aquí tienes los tres primeros CINCOS de Isa que, como ves, van creciendo cada vez más. ¿Cuántos puntitos tendrá el CINCO que ocupa el lugar 55?



**A)** 330 **B)** 276 **C)** 281 **D)** 165 **E)** 550

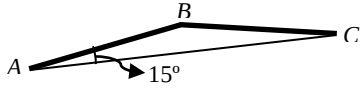
**16** Si se dibuja en una hoja una circunferencia y un cuadrado, ¿cuál es el máximo número de puntos de la circunferencia que pueden estar en los lados del cuadrado?

**A)** Uno **B)** Cuatro **C)** Ocho **D)** Dieciséis **E)** Infinitos

**17** Si aumento los lados de un cuadrado en un cierto porcentaje, su área aumenta un 96%. ¿En qué porcentaje hubiera disminuido su área si en vez de alargar los lados, los acorto en dicho porcentaje?

**A)** 4% **B)** 64% **C)** 96% **D)** 48% **E)** 36%

**18** *AB* y *BC* son dos lados consecutivos de un polígono regular que, para chincharos un poco, no hemos querido terminar de dibujar. A cambio os damos el valor de un ángulo y debéis averiguar cuántos lados tiene nuestro polígono.

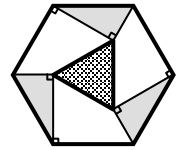



**A)** Ocho **B)** Nueve **C)** Diez **D)** Once **E)** Doce

**19** ¿Cuántas cifras tiene el número $8^{672} \times 25^{1008}$?

**A)** 2016 **B)** 2017 **C)** 1680 **D)** 1683 **E)** 1000

**20** Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 $cm^2$, ¿cuál es el área, en $cm^2$, del triángulo central?



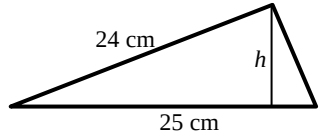
**A)** 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15

**E)** 24

**21** Cuatro ardillas han encontrado un saco lleno de piñones. La primera se comió tres cuartos del total; la segunda tres cuartos de lo que quedó; la tercera tres cuartos de lo que quedó. La cuarta dijo: *A mí me tocaron los últimos tres piñones que quedaban, ¡qué ricos me supieron!* ¿Cuántos piñones había al principio en el saco?

**A)** 432 **B)** 240 **C)** 144 **D)** 324 **E)** 192

**22** La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y el cateto mayor, 24 cm. ¿Cuántos centímetros mide la altura *h* que cae sobre la hipotenusa?




**A)** 5,25 **B)** 6,12 **C)** 6,72

**D)** 6 **E)** 6,24

**23** Cinco amapolas se dan besos entre sí. Ja, Ka y Li dieron besos a dos amigas; Oh y Uh solo dieron un beso a una amiga; Oh y Li se dieron un beso. ¿Qué beso de los siguientes es seguro que no se produjo?

**A)** Ja – Ka **B)** Ka – Li **C)** Li – Uh **D)** Ja – Li **E)** Ja – Uh

**24** Mari Carmen se jubila este curso y sus alumnos han decidido hacerle un bonito regalo: pentágonos y hexágonos. Se ha puesto muy contenta y en total ha contado 282 lados y 49 figuras. Si los que regalaron hexágonos hubieran regalado pentágonos y los que regalaron pentágonos hubiesen regalado hexágonos, ¿cuántos lados habría en total?

**A)** 282 **B)** 270 **C)** 257 **D)** 331 **E)** 260

**25** Don Retorcido solo comete errores cada cien mil millones de segundos. ¿Cuál de estas opciones se acerca más a ese tiempo?

**A)** 300 años **B)** 30 años **C)** 3000 siglos **D)** 3000 días **E)** 3000 años

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2016**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

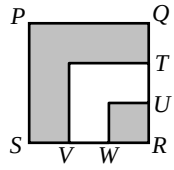
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En el cuadrado $PQRS$ de lado 3, los puntos $T$, $U$, $V$ y $W$ dividen a cada lado en partes iguales. Si todos los ángulos que aparecen en la figura son rectos, ¿cuál es el cociente entre el área de la superficie sombreada y el área de la superficie en blanco?



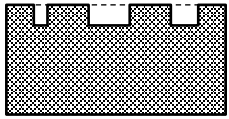

**A)** 2 **B)** $\frac{7}{3}$ **C)** $\frac{7}{4}$ **D)** $\frac{5}{4}$ **E)** 3

**2** En el cuadrado mágico de la figura, la suma de cada fila, cada columna y cada diagonal es la misma.
¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | 13 | $b$ |
| 19 | $c$ | 11 |
| 12 | $d$ | 16 |

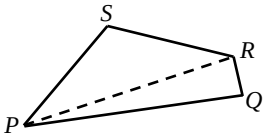
**A)** 46 **B)** 47 **C)** 49 **D)** 50 **E)** 54

**3** De una pieza rectangular de metal, de dimensiones 80×40, cortamos tres pequeños rectángulos, todos de la misma altura y bases 5, 15 y 10 como se observa en la figura. Si el área de la pieza resultante es 2990, ¿cuál es la altura de estos rectángulos?



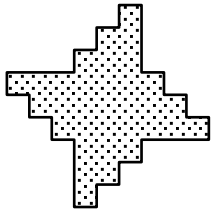
**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**4** La diagonal $PR$ del cuadrilátero $PQRS$ divide a éste en dos triángulos isósceles en los que $PS = RS$ y $PQ = PR$. Si el perímetro de cada uno de los triángulos es 22 y el del cuadrilátero 24, ¿cuánto mide el lado $PS$?




**A)** 6 **B)** 6,5 **C)** 7 **D)** 7,5 **E)** 8

**5** Todos los ángulos de la figura son rectos, los cuatro lados mayores son de la misma longitud y todos los demás, más pequeños, también son iguales. Si el área de la figura es 528, ¿cuál es su perímetro?



**A)** 72 **B)** 92 **C)** 132 **D)** 144 **E)** 264

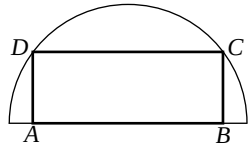
**6** Si $\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1\right):\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+1\right)=11$ con $a$, $b$ y $c$ enteros positivos, ¿cuántas ternas $(a, b, c)$ verifican que $a + 2b + c \leq 40$?

**A)** 33 **B)** 37 **C)** 40 **D)** 42 **E)** 45

**7** ¿Para cuántos enteros $n$ se verifica que $72\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$ es un entero?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**8** El rectángulo $ABCD$ está inscrito en un semicírculo. Si la longitud del diámetro es 20 y la del lado $AB$ es 16, ¿cuál es la longitud del lado $AD$?




**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**9** Los puntos $A(-1, q)$ y $B(-3, r)$ pertenecen a una recta paralela a la de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $r - q$?

**A)** 3 **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $-\frac{3}{4}$ **D)** $-\frac{4}{3}$ **E)** $-3$

**10** Si un triángulo equilátero tiene el mismo perímetro que un hexágono regular, ¿cuál es el cociente entre el área del triángulo y el área del hexágono?

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{\sqrt{6}}{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\frac{4}{9}$

**11** La media de tres números es 7 unidades mayor que el pequeño y 9 unidades menor que el mayor. Si la mediana de los tres es 6, ¿cuál es su suma?

**A)** 24 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 48

**12** Todas las reservas de petróleo de Alaska durarían 35 años si sólo las consumiera EEUU. Si también las consumiera China durarían solamente 10 años. ¿Cuántos años durarían si sólo las consumiera China?

**A)** 13 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 22 **E)** 25

**13** Si $|u-10|=v$ y $u<10$, ¿cuál es el valor de $u-v$?

**A)** $10-2v$ **B)** $10+2v$ **C)** $10-2u$ **D)** $10$ **E)** $|u-10|-u$

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** ¿Cuál de las siguientes gráficas no corta al eje de ordenadas, *OY*?

**A)** $x^2+y^2=2xy$ **B)** $|y|+4=|x|$ **C)** $\sqrt{x}=6-\sqrt{y}$

**D)** $8^x+8^y-65=0$ **E)** $\frac{x}{10}-\frac{10}{y}=\frac{x+10}{6}$

**15** Si $A$ y $B$ son enteros positivos con $A<B$, ¿qué fracción es la mayor?

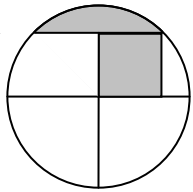
**A)** $\frac{A-1}{B-1}$ **B)** $\frac{A^2-1}{B^2-1}$ **C)** $\frac{A^3-1}{B^3-1}$ **D)** $\frac{A+1}{B+1}$ **E)** Depende de $A$ y $B$

**16** Si los cuatro enteros $C$, $D$, $C+D$ y $C-D$ son números primos, su suma tiene que ser:

**A)** múltiplo de 2 **B)** múltiplo de 3 **C)** múltiplo de 5

**D)** múltiplo de 7 **E)** un número primo

**17** La zona sombreada está formada por un cuadrado y un segmento circular. Si el radio de la circunferencia mide 4, el área $A$ de la zona sombreada verifica:



**A)** $12{,}5<A<12{,}6$ **B)** $A=\pi\sqrt{12}$ **C)** $A=\pi^2$

**D)** $A>12{,}6$ **E)** $A=3\left(\pi+\sqrt{2}\right)$

**18** Juanje escoge al azar tres números del conjunto {1, 2, 3, 4} y María Jesús uno del conjunto {2, 4, 6, 8, 10}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número que escoge María Jesús sea mayor que la suma de los tres que escogió Juanje?

**A)** $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**19** En una circunferencia de radio $r = \frac{5}{\sqrt{2}}$ inscribimos un triángulo rectángulo. Si las longitudes de los catetos vienen dadas por enteros diferentes, ¿cuál es el producto de estas longitudes?

**A)** 33 **B)** 32 **C)** 30 **D)** 27 **E)** 7

**20** ¿Cuántos puntos de la recta determinada por $P(3, 5)$ y $Q(19, 45)$ están entre $P$ y $Q$ y tienen coordenadas enteras?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 10

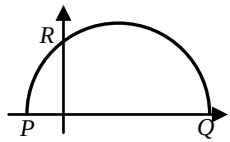
**21** ¿Cuántos enteros entre 3 y 89 no pueden escribirse como suma de exactamente dos elementos del conjunto {1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55}?

**A)** 34 **B)** 43 **C)** 51 **D)** 55 **E)** 57

**22** La media de una lista de tres impares consecutivos es 7. Si añadimos otro entero positivo $m$ a la lista, distinto de los tres, la media de la nueva lista también es un entero. ¿Cuál es la suma de los tres menores valores de $m$ que podemos añadir?

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 21 **D)** 29 **E)** 33

**23** En la figura adjunta los puntos $P(-4, 0)$ y $Q(16, 0)$ son los extremos del diámetro de una semicircunferencia. Si el punto $R(0, t)$ también pertenece a la semicircunferencia, $t$ es:




**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**24** ¿Cuál es la probabilidad de que un número de 10 cifras contenga los 10 dígitos?

**A)** $\frac{9 \cdot 9!}{10^{10}}$ **B)** $\frac{10!-9!}{10^9 - 1}$ **C)** $\frac{9!}{9 \cdot 10^9}$ **D)** $\frac{10!-9!}{10^{10} - 1}$ **E)** $\frac{9!}{10^9}$

**25** Nuestro asiduo profesor, además de Retorcido es un poco presumido; al preguntarle su edad salió con este acertijo:

*"El número de años que cumplí ayer es un primo de dos cifras. Si le sumo los que tiene mi hijo obtengo otro número primo, pero si se los resto obtengo un múltiplo de 3 y de 11. Si sumo las cifras de mi edad con las cifras de la edad de mi hijo obtengo 8"*

¿Cuánto suman las cifras de la edad de don Retorcido?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2016**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

**No contestes en ningún caso al azar**. Recuerda que es mejor dejar una pregunta en blanco que contestarla erróneamente.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

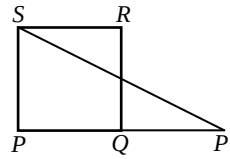
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En una asociación benéfica formada por padres, profesores y alumnos de un centro, el 25% del dinero donado proviene de los padres. El resto lo donan entre profesores y alumnos. El cociente entre el dinero donado por los profesores y el donado por los alumnos es $\frac{2}{3}$. ¿Cuál es el cociente entre el dinero donado por los padres y el dinero donado por los alumnos?

**A)** $\frac{20}{9}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{5}{9}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{5}{12}$

**2** *PQRS* es un cuadrado y *P'* es el punto simétrico de *P* respecto de *Q*. Si la longitud de *SP'* es 90 mm, ¿cuál es, en mm$^2$, el área del cuadrado *PQRS*?



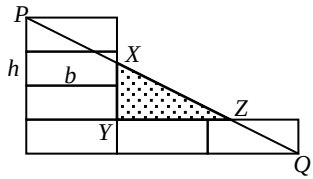

**A)** 324 **B)** 1620 **C)** 1800 **D)** 2025 **E)** 2700

**3** ¿Cuál es el producto de las soluciones de la siguiente ecuación?

$$(x-4)(x-2)+(x-2)(x-6)=0$$

**A)** 12 **B)** 20 **C)** 48 **D)** 10 **E)** 96

**4** Seis rectángulos idénticos, de base *b* y altura *h*, están colocados como muestra la figura. El segmento *PQ* intercepta a un lado vertical de uno de ellos en *X* y a un lado horizontal de otro en *Z*. Si en el triángulo rectángulo *XYZ* se verifica que $YZ = 2 \cdot XY$, entonces $\frac{h}{b}$ es igual a:




**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

**5** ¿Cuántas parejas de enteros positivos $(p, q)$ con $p + q \le 100$ verifican la ecuación $\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = 17$ ?

**A)** Ninguna **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 5

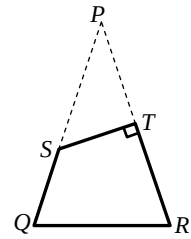
**6** Si $30^A = 6$, $30^B = 10$ y $30^C = 15$ ¿Cuál es la media de *A*, *B* y *C*?

**A)** $\frac{4}{9}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{1}{3}$

**7** Tres vértices de un paralelogramo son los puntos $O(0, 0)$, $A(1, 4)$ y $B(4, 1)$. ¿Cuál es el área del paralelogramo?

**A)** 12 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)** 19

**8** En el triángulo isósceles $PQR$ de la figura, $PQ = PR$ y $QR = 300$. Sobre el lado $PR$ se toma un punto $T$ y sobre el $PQ$ otro punto $S$ de manera que $ST$ es perpendicular a $PR$ y $ST = 120$. Si $TR = 271$, $QS = 221$, ¿cuál es el área del cuadrilátero $STRQ$?




**A)** 21 275 **B)** 40 605 **C)** 46 860 **D)** 54 000 **E)** 54 603

**9** ¿Cuántos enteros, $a$, verifican que $a^{2015} + a^{2016}$ es múltiplo de 5, con $1 \le a \le 10$?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**10** Las ordenadas en el origen de tres rectas paralelas son 2, 3 y 4. La suma de las abscisas de los puntos de corte de las rectas con el eje $OX$ es –36. ¿Cuál es la pendiente de estas rectas?

**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{2}{9}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** 4 **E)** $\frac{1}{4}$

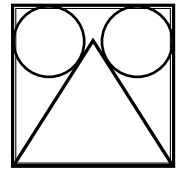
**11** Hay dos valores de $k$ para los que la ecuación $x^2 + 2kx + 7k - 10 = 0$ tiene una sola raíz real. La suma de estos valores de $k$ es:

**A)** 0 **B)** –3 **C)** 3 **D)** –7 **E)** 7

**12** Si $\cos 60^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos \alpha$ con $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$, entonces $\alpha$es igual a:

**A)** 15º **B)** 22,5º **C)** 30º **D)** 45º **E)** 60º

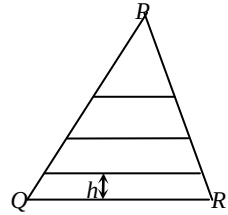
**13** La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?



**A)** 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ **D)** $3 - \sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** En el triángulo isósceles $PQR$ de la figura, en el que $QP = 150$ y $PR = QR = 125$, hay tres segmentos paralelos a $QR$ que lo dividen en cuatro regiones de igual área. La altura $h$ del trapecio inferior es:




**A)** $60\left(2\sqrt{3}-3\right)$ **B)** $60\left(2-\sqrt{3}\right)$

**C)** $60\left(\sqrt{2}-1\right)$ **D)** $60\left(3-2\sqrt{2}\right)$ **E)** 16

**15** Los tres números reales $a$, $b$ y $c$ están, en ese orden, en progresión geométrica. Si su suma es 114 y su producto 46 656, ¿cuál es el valor de $a + c$?

**A)** 78 **B)** 76 **C)** 54 **D)** 36 **E)** 24

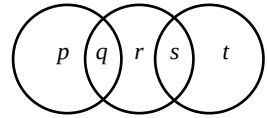
**16** Si $x^2 = 8x + y$ e $y^2 = 8y + x$ con $x \neq y$, el valor de $x^2 + y^2$ es:

**A)** 9 **B)** 49 **C)** 63 **D)** 21 **E)** 56

**17** ¿Cuántos enteros hay entre 10 y 1000 que verifican que la suma de sus cifras es 3?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**18** En el dibujo que observas, $p$, $q$, $r$, $s$ y $t$ representan cinco enteros consecutivos, no necesariamente en ese orden. Los dos enteros del círculo de la izquierda suman 63 y los del círculo de la derecha suman 57. ¿Cuál es $r$?




**A)** 20 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 30 **E)** 32

**19** Hay dos formas de elegir seis números diferentes de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de forma que el producto de estos seis números sea un cuadrado perfecto. Si estos cuadrados son $m^2$ y $n^2$ con $m$ y $n$ positivos y $m \neq n$, ¿cuál es el valor de $m + n$?

**A)** 108 **B)** 91 **C)** 61 **D)** 56 **E)** 144

**20** Los enteros 789 y 998 no tienen otras cifras que no sean 7, 8 o 9. ¿Cuántos enteros de tres cifras no tienen cifras distintas a 7, 8 o 9?

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 18 **D)** 36 **E)** 27

**21** Los vértices del triángulo *ABC* son los puntos de intersección de las rectas *r:* $x = 13$, *s*: $y = 0$, *t*: $y = \sqrt{3}(x-1)$ .Si la bisectriz interior del ángulo que forman las rectas *s* y *t* corta a la recta *r* en un punto *D*, ¿cuál es la ordenada de este punto?

**A)** $4+\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{3}$ **C)** $\frac{10}{\sqrt{3}}$ **D)** $\frac{12}{\sqrt{3}}$ **E)** $6\sqrt{3}$

**22** Alicia y Bea juegan con una moneda equilibrada lanzando la moneda una vez cada una hasta un máximo de tres lanzamientos cada una. Empieza Alicia y gana la primera que consiga una cara. Si ninguna obtiene cara hay empate. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Alicia?

**A)** $\frac{21}{32}$ **B)** $\frac{5}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{11}{16}$ **E)** $\frac{9}{16}$

**23** Si *a*, *b* y *c* son enteros diferentes que verifican las condiciones:

- $a \cdot b \cdot c = 17\,955$
- *a*, *b* y *c* están en progresión aritmética (en ese orden)
- $3a + b$, $3b + c$ y $3c + a$ están en progresión geométrica (en ese orden)

¿Cuál es el valor de $a + b + c$?

**A)** $-63$ **B)** $-42$ **C)** $-682$ **D)** $-48$ **E)** $-106$

**24** ¿Cuántos pares de enteros, $(x, y)$ con $0 \le x \le y$ verifican la ecuación $5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624$ ?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**25** Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

**A)** 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **C** | 1 | **B** | 1 | **D** | 1 | **D** |
| 2 | **C** | 2 | **C** | 2 | **C** | 2 | **A** |
| 3 | **A** | 3 | **A** | 3 | **D** | 3 | **D** |
| 4 | **C** | 4 | **C** | 4 | **E** | 4 | **B** |
| 5 | **E** | 5 | **B** | 5 | **C** | 5 | **C** |
| 6 | **A** | 6 | **E** | 6 | **A** | 6 | **D** |
| 7 | **D** | 7 | **E** | 7 | **C** | 7 | **D** |
| 8 | **E** | 8 | **D** | 8 | **A** | 8 | **A** |
| 9 | **B** | 9 | **A** | 9 | **A** | 9 | **C** |
| 10 | **B** | 10 | **A** | 10 | **C** | 10 | **E** |
| 11 | **B** | 11 | **A** | 11 | **E** | 11 | **E** |
| 12 | **A** | 12 | **B** | 12 | **E** | 12 | **D** |
| 13 | **D** | 13 | **B** | 13 | **D** | 13 | **B** |
| 14 | **C** | 14 | **E** | 14 | **C** | 14 | **D** |
| 15 | **A** | 15 | **A** | 15 | **E** | 15 | **E** |
| 16 | **E** | 16 | **B** | 16 | **D** | 16 | **C** |
| 17 | **A** | 17 | **B** | 17 | **C** | 17 | **C** |
| 18 | **D** | 18 | **A** | 18 | **D** | 18 | **B** |
| 19 | **B** | 19 | **B** | 19 | **E** | 19 | **E** |
| 20 | **A** | 20 | **C** | 20 | **D** | 20 | **A** |
| 21 | **C** | 21 | **A** | 21 | **C** | 21 | **D** |
| 22 | **D** | 22 | **A** | 22 | **B** | 22 | **B** |
| 23 | **C** | 23 | **A** | 23 | **A** | 23 | **D** |
| 24 | **E** | 24 | **B** | 24 | **B** | 24 | **C** |
| 25 | **A** | 25 | **C** | 25 | **B** | 25 | **B** |

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **E** | 1 | **A** | 1 | **C** |
| 2 | **D** | 2 | **E** | 2 | **B** | 2 | **B** |
| 3 | **E** | 3 | **A** | 3 | **D** | 3 | **D** |
| 4 | **D** | 4 | **C** | 4 | **A** | 4 | **C** |
| 5 | **C** | 5 | **E** | 5 | **D** | 5 | **E** |
| 6 | **D** | 6 | **B** | 6 | **D** | 6 | **C** |
| 7 | **C** | 7 | **D** | 7 | **E** | 7 | **B** |
| 8 | **D** | 8 | **B** | 8 | **A** | 8 | **C** |
| 9 | **E** | 9 | **A** | 9 | **E** | 9 | **C** |
| 10 | **C** | 10 | **C** | 10 | **A** | 10 | **E** |
| 11 | **A** | 11 | **D** | 11 | **A** | 11 | **E** |
| 12 | **D** | 12 | **D** | 12 | **B** | 12 | **D** |
| 13 | **C** | 13 | **A** | 13 | **A** | 13 | **D** |
| 14 | **B** | 14 | **A** | 14 | **B** | 14 | **B** |
| 15 | **A** | 15 | **B** | 15 | **D** | 15 | **A** |
| 16 | **A** | 16 | **C** | 16 | **E** | 16 | **C** |
| 17 | **E** | 17 | **B** | 17 | **A** | 17 | **D** |
| 18 | **D** | 18 | **E** | 18 | **C** | 18 | **D** |
| 19 | **E** | 19 | **B** | 19 | **E** | 19 | **A** |
| 20 | **A** | 20 | **D** | 20 | **C** | 20 | **E** |
| 21 | **C** | 21 | **E** | 21 | **C** | 21 | **D** |
| 22 | **B** | 22 | **C** | 22 | **D** | 22 | **A** |
| 23 | **D** | 23 | **C** | 23 | **C** | 23 | **A** |
| 24 | **A** | 24 | **C** | 24 | **E** | 24 | **E** |
| 25 | **B** | 25 | **E** | 25 | **D** | 25 | **A** |

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* I

**1. (C)** Realizamos las operaciones y comparamos los resultados
A) $20 \times 1{,}6 = 32$
B) $(20 - 1) \times 6 = 114$
C) $20 \times (1 + 6) = 140$
D) $20{,}1 \times 6 = 120{,}6$
E) $20 + 16 = 36$
Con la operación C se obtiene el número mayor.

**2. (C)** Mediante el análisis de la siguiente tabla se puede observar que el número de partes que se hacen a un círculo trazando diámetros, es igual al doble del número de diámetros que se tracen en él.

| Nº de diámetros | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … | 2016 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de partes | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | … | 4032 |

El círculo ha quedado dividido en 4032 gajos.

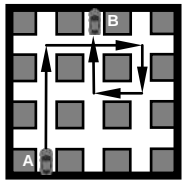
**3. (A)** El perímetro del triángulo equilátero es igual a multiplicar la longitud de un lado por tres. Como los cinco lados del pentágono obtenido tienen la misma longitud; por tanto, el lado del triángulo se calcula dividiendo el perímetro del pentágono entre cinco.
Longitud de un lado: 40 cm : 5 = 8 cm
Perímetro triángulo: 8 cm × 3 = 24 cm
El perímetro del triángulo equilátero es 24 cm

**4. (C)** La operación $60 \times 24 \times 365 \times 2$ representa los minutos (C) que hay en dos años
365 = número de días del año
24 = número de horas de un día
60 = número de minutos de una hora
$365 \times 24 + 60 = 525\,600$ es el número de minutos que hay en un año
$525\,600 \times 2 = 1\,051\,200$ minutos que hay en dos años.

**5. (E)** Las lombrices recorren el reloj en sentido contrario a la de las agujas.
- Pepa se ha detenido entre las 11 y las 12 horas, más cerca de las once.
- Pepe se ha detenido en las doce.
- Pepi se ha detenido entre las seis y las siete, más cerca de las siete.
- Pepo se ha detenido en las seis.
- Pepu se encuentra en las siete horas.

Pepu (E) es la lombriz que se ha detenido más cerca de las ocho.

**6. (A)** Como mínimo tiene que realizar cuatro giros a su derecha. En el esquema se indica el recorrido que tiene que hacer.




**7. (D)** Hay trece múltiplos de 15 menores que 200 (15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180 y 195), si eliminamos siete quedan seis, $13 - 7 = 6$.

**8. (E)** Para calcular el número de formas en las que puede despedirse aplicamos el cálculo de variaciones con repetición: $4^3 = 64$
Cornelia se puede despedir de 64 formas.

El desarrollo de este problema, para los escolares de Primaria, se puede hacer mediante un diagrama de árbol. Es decir, el primer emoticón lo puede elegir de cuatro formas. Una vez hecho esto, para cada una de esas formas puede elegir el segundo emoticón de cuatro formas distintas, con lo que tenemos $4 \times 4 = 16$ formas de poner los dos primeros emoticones. Finalmente para cada una de esas 16 formas puede elegir el tercer emoticón de cuatro formas distintas con lo que tenemos $16 \times 4 = 64$ formas distintas de despedirse.

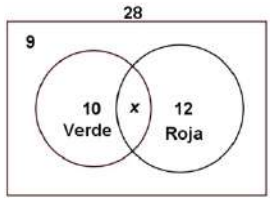
**9. (B)** *Deshaciendo* las operaciones, es decir, haciéndolas en orden inverso, tenemos:

$15 + 5 = 20$; $20 \times 4 = 80$; $80 - 2 = 78$; $78 : 3 = 26$

El número de partida es 26.

**10.(B)** Expresamos las cantidades en la misma unidad de medida:
Como 2 kg son 2000 g se han desechado $2000 - 1500 = 500$ g.
Por lo tanto la fracción desechada es: $\frac{500}{2000} = \frac{1}{4}$

**11.(B)** En el esquema adjunto "$x$" representa el número de alumnos con dos pegatinas, una verde y otra roja. Con ayuda del mismo es fácil ver que el número de alumnos con alguna pegatina es $(10 + 12 - x)$ y como el número de escolares sin pegatina es 9, tenemos:




$(10 + 12 - x) + 9 = 28$, es decir, $31 - x = 28$.

Por lo tanto $x = 3$.

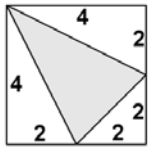
**12.(A)** Como la pajarita grande es dos veces mayor, en dimensiones lineales, que su semejante pequeña, su área será cuatro veces mayor ($2^2 = 4$) que la de la pequeña. Por tanto el área de la pajarita pequeña es igual a la cuarta parte del área de la pajarita grande:
$72 \text{ cm}^2 : 4 = 18 \text{ cm}^2$.

**13.(D)** Como 4 de los alumnos no quisieron cromos entonces sobraron $4 \times 25 + 8 = 108$.
Al repartirse estos cromos entre los restantes alumnos tocaron a 3, es decir, los restantes alumnos eran $108 : 3 = 36$.
Se puede concluir que el número de alumnos de 5º y 6º era 40, que el número de cromos que regaló la editorial: $40 \times 25 + 8 = 1008$ y que el número de alumnos que cogieron cromos 36.

**14.(C)** Hallar las soluciones a estas actividades exige numerosas hipótesis, deducciones y numerosos cálculos escritos y mentales. Para su resolución se sugiere aplicar la estrategia de ensayo y error.
Es evidente que A solo puede ser 1 ó 2 porque 3A más las que te llevas solo tiene una cifra. Como 3B más las que te llevas acaba en B, B solamente podría ser, 4 ó 9, pero si B = 9, C = 3 y no te llevas nada en la primera suma. Por lo tanto B solamente puede ser 4.
Ahora ya si se quiere se puede completar la suma.

$$\begin{array}{r} 1\ 4\ 8 \\ 1\ 4\ 8 \\ +\ 1\ 4\ 8 \\ \hline 4\ 4\ 4 \end{array}$$

**15.(A)** Este es uno de los cuatro dibujos que podría haber realizado Elisa.
El área del triángulo dibujado se calcula hallando la diferencia del área del cuadrado menos el área de los tres triángulos que le bordean.
El área del cuadrado es: $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 16 \text{ m}^2$.
La suma de las áreas de los triángulos es $4 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 + 2 \text{ m}^2 = 10 \text{ m}^2$.
El área del triángulo es igual a $16 \text{ m}^2 - 10 \text{ m}^2 = 6 \text{ m}^2$.




**16.(E)** Por cada vuelta de la rueda la bicicleta avanza 1,8 metros.
En 4,5 km que son 4500 m habrá dado $4500 : 1{,}8 = 2500$ vueltas.

**17.(A)** Cuando nació Ainhoa la edad del padre era el triple de la edad que tiene hoy Ainhoa, es decir, $9 \times 3 = 27$ años.
Al cabo de 9 años la edad del padre es $27 + 9 = 36$ años.
Es lo mismo que decir que la edad del padre hoy es igual a cuatro veces la edad de la niña.
Por lo tanto el padre de Ainhoa tiene 36 años.

**18. (D)** Para obtener la solución seguimos las afirmaciones de los patos, a la vez que cumplimentamos esta tabla de doble entrada:

El primer **SI** es el que corresponde a Pito que vive en Niss. Al decir Pato que no se iría a vivir ni a Ness ni a Nass deberá vivir en Niss o en Noss, pero como Pito vive en Niss él debe vivir en Noss. Poto no puede vivir en Nass porque se está enamorando de la que vive en Nass, luego vive en Ness y ya está todo completo.

| | Nass | Ness | Niss | Noss |
|---|---|---|---|---|
| Pito | no | no | **SI** | no |
| Poto | no | **SI** | no | no |
| Pato | no | no | no | **SI** |
| Peto | **SI** | no | no | no |

La afirmación correcta es (D): Pato vive en Noss.

**19.(B)** La suma de los tres sumandos dados en el enunciado equivale a dos veces la suma de las edades de los tres hermanos: $9 + 11 + 12 = 32$.

La suma de las edades es igual a 16 y las edades de cada uno de ellos se obtienen restando a 16 la suma de cada pareja. $16 - 9 = 7$; $16 - 11 = 5$; $16 - 12 = 4$.

Las edades de los tres hermanos son: 7, 5 y 4 años. El mediano tiene 5 años.

**20.(A)** Los cubos con solo dos caras coloreadas están situados en las aristas del cubo. En cada arista hay seis cubos, dos de ellos, los que forman los vértices, tienen tres caras a la vista; por tanto, solo cuatro cubos en cada arista tienen dos caras coloreadas.

12 aristas × 4 cubos/arista= 48 cubos.

**21. (C)** Resolvemos las operaciones:

A) $5 \times (7{,}5 + 0{,}4) = 39{,}5$ B) $12 \times (0{,}6 + 5{,}4) = 7{,}2$

C) $0{,}7 \times (3{,}2 + 6{,}8) = 7$ D) $9{,}1 \times (1{,}3 + 2{,}3) = 32{,}76$

E) $5{,}3 \times (3{,}5 + 1{,}5) = 26{,}5$

La operación C es la única cuyo resultado no tiene decimales.

**22. (D)** La probabilidad de *sacar bola roja*en cada uno de los casos, añadiendo las bolas que se indican es:

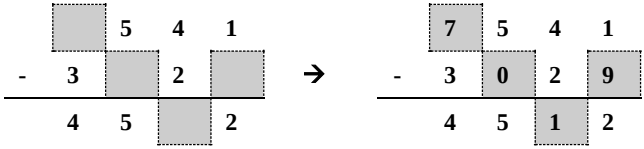
A) $\frac{7}{24}$; B) $\frac{5}{22}$; C) $\frac{9}{24}$; D) $\frac{8}{24}$; E) $\frac{7}{24}$

La opción de sacar un tercio es $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ la letra D.

**23.(C)** El período corresponde a la frase NOHABLARÉENCLASE que tiene 16 letras
Dividimos 999 entre 16
999 : 16 = 62 y resto 7
Conclusión, hay 62 veces el periodo (la frase) y luego las 7 primeras letras.
La letra que hace el número 7 es la última que escribió Jaimito.
Corresponde a la letra A.

**24.(E)** Designemos con ***P*** al peso de cada pelota, con ***p*** al de cada peonza y con ***y*** al de cada yoyó.
Cinco pelotas pesan lo mismo que una peonza más un yoyó. ($5P = p + y$); por lo tanto una pelota pesa lo mismo que cinco pelotas menos un yoyó. ($p = 5P - y$)
Una peonza pesa lo mismo que dos pelotas y un yoyó. ($p = 2P + y$)
Ahora ya podemos escribir que $2p = p + p = (5P - y) + (2P + y) = 7P$, es decir, dos peonzas pesan lo mismo que siete pelotas ($2p = 7P$).

**25.(A)** Primero, buscamos las cifras que ha comido Comenúmeros en la resta mediante tanteos; después, sumamos las cifras.




**7 + 0 + 9 + 1 = 17**
La suma de las cifras que se ha comido Comenúmeros es 17.

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

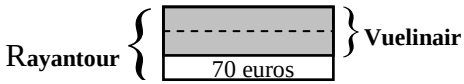
*Soluciones 1ª Fase Nivel II*

**1. (B)** Llamado $x$ al número podemos conseguir una ecuación si escribimos las operaciones que hemos realizado con él (atención a los paréntesis) e igualamos el resultado final al propio número:$(4x + 2) : 3 – 5 = x$.
Resolvemos poco a poco la ecuación:
$(4x + 2) : 3 = x + 5$; $4x + 2 = 3\cdot(x + 5)$; $4x + 2 = 3x + 15$; $x = 13$
y comprobamos que, efectivamente 13 cumple el enunciado.

**2. (C)** Como no hay muchas posibilidades, vamos a considerar los valores posibles que puede tener P y descartando los que no nos sirven:
Si P tuviera el 1, M tendría el 2 que es primo. Esto no puede ser pues R es la única que tiene un número primo. Además, entre 1 y 2 no nos cabrían R e I.
P no puede tener ni el 2 ni el 3 pues R es la única que tiene un primo.
Si P tuviera el 4, M tendría el 8, R el 5, I el 6 (pues 7 es primo) y A el 9.
P no puede tener un número mayor que 4 pues M sería mayor que 9.
Así pues, la suma de las cifras es 4 + 5 + 6 + 8 + 9 = 32.

**3. (A)** Para resolver este problema hay que ser sistemático. Una forma es ir cambiando los números de atrás hacia adelante:
{**1, 2**, 3, 9}; {**1, 2**, 4, 8}; {**1, 2**, 5, 7} Ya no hay más con 1, 2.
{**1, 3**, 4, 7}; {**1, 3**, 5, 6}; Ya no hay más con 1, 3.
Con 1, 4 no hay ninguna y, por tanto, ya no hay más que contengan un 1.
{**2, 3**, 4, 6} Ya no hay más con 2, 3 y esta es la última que se puede formar.
Hemos encontrado 6 cuartetos y, por la forma de buscarlos podemos estar seguros de que no hay más.

**4. (C)** El rectángulo representa el precio del billete más caro. Esta sencilla representación nos ayuda a resolver el problema sin hacer prácticamente ningún cálculo.
El precio del billete caro es, pues, 70 · 3 = 210 euros.



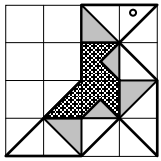

**5. (B)** El número de tres cifras más pequeño y tal que la suma de sus tres cifras es cinco es el 104. El más grande es el 500 y la diferencia entre ambos es 500 – 104 = 396.

**6. (E)** Está claro que una buena estrategia es usar $1^7$.
Si comparamos las potencias que nos quedan: $5^2 < 2^5$ y $2^3 < 3^2$.
Así pues, el número más pequeño de esa forma es $1^7 \cdot 2^3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 25 = 200$.

Podemos asegurar que es el menor de los propuestos porque 31 es primo y, por lo tanto no tiene la forma buscada y $150 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ por lo que no usa los números adecuados.

**7. (E)** Si llamamos $a$ al número de chicas y $b$ al número de chicos, Julia tiene $(a - 1)$ hermanas y $b$ hermanos lo que nos da la ecuación $a - 1 = b + 1$. Esta ecuación es equivalente a $a = b + 2$, por lo que hay dos chicas más que chicos.
Julio tiene $a$ hermanas y $(b - 1)$ hermanos con lo que $a = 2(b - 1) = 2b - 2$.
Si $a = b + 2$ y $a = 2b - 2$, entonces $b + 2 = 2b - 2$, es decir, $b = 4$.
Son 4 chicos y 6 chicas, en total 10 hermanos.

**8. (D)** En el dibujo se aprecia que cada trazo de la pajarita grande es el doble del correspondiente trazo de la pajarita pequeña. Así pues el perímetro de la pequeña es la mitad del de la grande, es decir, 72 : 2 = 36 cm.



**9. (A)** Cuando nació Ainhoa su padre tenía $3 \cdot 9 = 27$ años. Como de eso hace 9 años, el padre tiene ahora $27 + 9 = 36$ años.

**10.(A)** Si llamamos $x$ al número de zancadas que da al bajar, el número de escalones es $3x$.
Como al subir da $(x + 7)$ zancadas, el número de escalones es $2(x + 7)$.
Como el número de escalones es el mismo al subir que al bajar, obtenemos la ecuación $3x = 2(x + 7)$ y $x = 14$ y el número de escalones es $3 \cdot 14 = 42$.

**11.(A)** Como en dos horas mi reloj adelanta 10 minutos, cada dos horas la diferencia entre los dos relojes es de 15 minutos. Para que haya una diferencia de una hora deben pasar $2 \cdot 4 = 8$ horas, así que volví del colegio a las 16:00.

**12.(B)** Las únicas plazas a las que no puede llegar son la 4 y la 7 ya que por la calle que va de 1 a 5 solo puede circular de sur a norte y por la que va de 4 a 8 solo lo puedo hacer de oeste a este.
A la plaza 5 llega sin problemas. A las plazas 8, 9 y 10 llega girando a la derecha donde corresponda desde la calle que va de la 1 a la 5. A las 12 y 11 llega girando a la derecha desde la calle 2-10. Para llegar a las plazas 2 y 3 debe girar tres veces a la derecha y para llegar a la 6 cuatro veces.
La suma de los números es $4 + 7 = 11$.

**13.(B)** Por cada tramo de10 metros que recorre Esteban la distancia entre ambos se reduce 4 metros. Como 150 : 4 = 37,5 Esteban deberá hacer 37,5 tramos de 10 metros para alcanzar a María. Es decir, debe recorrer $37{,}5 \cdot 10 = 375$ metros.

**14.(E)** Observa cómo funciona con algunos números: por cada dos rombos avanzo tres posiciones:
2 rombos $\rightarrow$ Posición 3
4 rombos $\rightarrow$ Posición 6
6 rombos $\rightarrow$ Posición 9
$2n$ rombos $\rightarrow$ Posición $3n$
Así que con $96 = 2 \cdot 48$ rombos llegaré a la posición $3 \cdot 48 = 144$. Después viene un corazón en la posición 145 y el rombo 97 ocupa la posición 146.

**15.(A)** El cubo de la carita central tiene cinco caras en contacto con otros cubos: además de los cuatro visibles, está la del interior. Así que quitamos 6 cubos. El cubo que está en el vértice tiene tres caras visibles. Las otras tres caras están en contacto con tres cubos que debemos quitar, así que quitaremos 4 cubos. El cubo que está en la arista tienen dos caras visibles y las otras cuatro caras tienen contacto con cuatro cubos que aún no hemos quitado, luego quitaremos otros 5 cubos más. Con el que está en el cubo del vértice debo quitar tres más: en total $1 + 3 = 4$.
Así pues, quitaremos $6 + 4 + 5 = 15$ cubitos. Como había 27 quedarán $27 - 15 = 12$ cubitos.

**16.(B)** Todos los días riega al menos 8 flores y el día que riegue los claveles regará 4 más. Así que como mínimo riega $8 \cdot 7 = 56$ flores a la semana. Las $76 - 56 = 20$ extra son de días que regó 4 flores más, es decir $20 : 4 = 5$ días regó los claveles.
También se puede plantear un sistema llamando $x$ al número de días que regó los claveles e $y$ al número de días que regó los tulipanes.
Como la semana tiene siete días, tenemos la ecuación $x + y = 7$.
Como en total regó $12 \cdot x$ claveles y $8 \cdot y$ tulipanes, tenemos que $12x + 8y = 76$.

**17.(B)** Los cuadrados perfectos son: $1^2$, $2^2$, … ,$20^2 = 400$. Así que había 20 cuadrados perfectos. Quedaron $20 - 7 = 13$ cuadrados perfectos.

**18.(A)** Factoricemos los números poco a poco:
$99 = 9 \cdot 11 = 3^2 \cdot 11$ y $999 = 9 \cdot 111 = 3^3 \cdot 37$
El mínimo común múltiplo es $3^3 \cdot 11 \cdot 37 = 297 \cdot 37 = 10\,989$.
Para los poco amigos de las cuentas: usando los criterios de divisibilidad del 9 y del 11 podemos descartar rápidamente las opciones C), D) y E). A continuación, mirando el producto que debemos hacer para calcular el mínimo común múltiplo, observamos que la cifra de las unidades es 9 y descartamos la opción B) concluyendo que la respuesta es A) sin necesidad de calcular el producto.

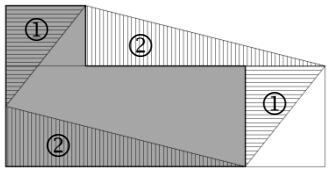
**19.(B)** Veamos qué tres lados se han sumado para obtener como resultado 70. Si fueran los dos grandes y uno pequeño, $70 - 14 = 56$ tendría que ser múltiplo de tres, pero no lo es. De modo que se han sumado los dos pequeños y uno grande y cada lado pequeño mide $(70 - 7) : 3 = 21$ cm. Los lados grandes miden 28 cm y el perímetro es $2 \cdot 21 + 2 \cdot 28 = 98$ cm.

**20.(C)** Si llamamos a los números $a$ y $b$ con $a < b$, tenemos que $a + b = 2(b - a)$.
Operando tenemos $a + b = 2b - 2a$, luego $3a = b$ y la afirmación correcta es la C).

**21.(A)** Debes observar que el área de la zona sombreada es el área de los tres cuadrados menos el área del triángulo blanco.
Área de los tres cuadrados = $5^2 + 6^2 + 9^2 = 25 + 36 + 81 = 142$ cm$^2$.
Área del triángulo blanco = $\dfrac{(5 + 6 + 9) \cdot 9}{2} = 90$ cm$^2$.
Así pues, el área de la zona sombreada es $142 - 90 = 52$ cm$^2$.

**22.(A)** Usando los criterios de divisibilidad de los tres números tenemos que:
Por el criterio del 2: $b$ puede ser 0, 2, 4, 6 o 8
Por el criterio del 9: $1 + a + 6 + 9 + b = a + b + 16$ debe ser múltiplo de 9.
Luego $a + b$ puede ser 2 o 11.
Recuerda que el criterio del 11 dice que: $(1 + 6 + b) - (a + 9) = b - a - 2$ debe ser múltiplo de 11.
Vayamos viendo los casos:
Si $b = 8$, por el criterio del 9, $a = 2$, pero $(1 + 6 + 8) - (2 + 9) = 4$ no vale.
Si $b = 6$, $a = 5$, pero $(1 + 6 + 6) - (5 + 9) = -1$ no vale.
Si $b = 4$, $a = 7$, pero $(1 + 6 + 4) - (7 + 9) = -5$ no vale.
Si $b = 2$ hay dos casos: $a = 9$ que no vale, pues $(1 + 6 + 2) - (9 + 9) = -9$.
$a = 0$ que sí vale pues $(1 + 6 + 2) - (0 + 9) = 0$.
Probemos el último caso: si $b = 0$, $a = 2$ y $(1 + 6 + 0) - (2 + 9) = -4$ no vale.
Entonces la única posibilidad es $a = 0$ y $b = 2$, el número es 10692 y el producto de las cifras $a$ y $b$ es 0.

**23.(A)** Observa que los triángulos con la misma numeración son iguales y, por tanto, el área del paralelogramo es igual a la suma de las áreas del rectángulo superior, de $4 \times 3$, y del inferior, de $12 \times 5$.
Así pues, el área del paralelogramo es:
$4 \cdot 3 + 12 \cdot 5 = 12 + 60 = 72$ cm$^2$.



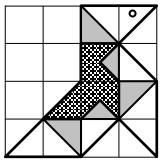
**24.(B)** Una buena estrategia es partir de 100 habitantes.
En el primer mes hay 10 enfermos y 90 sanos.
Tras el segundo mes el 10% de los 10 enfermos sanaron, es decir, había uno sano y 9 enfermos. Además, el 10% de los 90 sanos enfermó, es decir 9 enfermaron y 81 permanecieron sanos.
Así que tras en el segundo mes había $1 + 81 = 82$ sanos y $9 + 9 = 18$ enfermos, lo que supone el 18% de los 100 habitantes.

**25.(C)** La manecilla de las horas da una vuelta completa en 12 horas. Es decir, recorre un ángulo de 360º en $12 \cdot 4 = 48$ cuartos de hora. Así pues, en un solo cuarto de hora recorre $360 : 48 = 7{,}5$º.

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

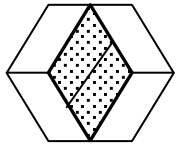
*Soluciones 1ª Fase Nivel* III

**1. (D)** Para que la suma sea impar tenemos que sacar primero una bola par y después una impar o viceversa. La probabilidad de primera par y segunda impar es, $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$, y la de primero impar y luego par también $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$, luego la probabilidad de suma impar es $\frac{3}{5}$.



**2. (C)** La pajarita pequeña y la grande está en proporción 1:2 de semejanza, luego si el perímetro de la pequeña es 18, el de la grande es 36.

**3. (D)** Si $\begin{cases} x^2+y^2=212 \\ x+y=18 \end{cases}$, entonces $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=212+2xy=18^2$, de donde $2xy = 112$. El conocido sistema suma-producto, $\begin{cases} x+y=18 \\ xy=56 \end{cases}$, tiene por soluciones, (14,4) y (4,14). Por tanto $\left|x^2-y^2\right|=180$.



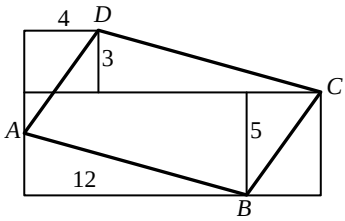
**4. (E)** Si en el rombo trazamos una paralela media a dos lados, dividimos el hexágono en seis paralelogramos iguales, cada uno de área 8, y por tanto el área del rombo es 16.

**5. (C)** Para que $2000 + b$ sea múltiplo de $b$, debe ocurrir que 2000 lo sea. Tenemos que ver cuántos divisores de 2000 son menores que 1000, y lo son todos menos el 1000 y el 2000. Como $2000=2^4\cdot5^3$, el número de divisores de 2000 es $(4+1)\cdot(3+1)$. Quitamos dos al producto y nos da 18.

**6. (A)** $999 = 9 \cdot 111 = 9 \cdot 3 \cdot 37 = 3^3 \cdot 37$: $9999 = 99 \cdot 101 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$.
El mcm de esos números es:
$3^2 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 101 = 27 \cdot 11 \cdot 37 \cdot 101 = 9999 \cdot 1111 = 1\,109\,889$.

**7. (C)** En todos esos productos interviene un 5 y al menos un 2 (del 2, del 4 o del 6) salvo en el producto, $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6$ (que no tiene el 5). Los primeros acaban en 0 y este último, 144, en 4.

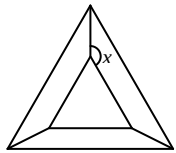
**8. (A)** Si nos fijamos bien, el área del paralelogramo equivale a la suma del área del rectángulo superior y la del rectángulo inferior de la izquierda. Su área es por tanto, $4 \cdot 3 + 12 \cdot 5 = 72$.




**9. (A)** De la progresión aritmética sacamos que, $2 \cdot 3b = 2b + 48$, de donde $b$ =12, y la diferencia es $b$ = 12. Y si 3, 12 y $c$ están en progresión geométrica, $c$ es 48 y la razón es 4. Diferencia y razón suman 16.

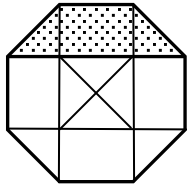
**10.(C)** Echando un vistazo a las distintas expresiones sólo $(m + 3n)^2$ produce resultado impar, ya que $m$ es par, $3n$ es impar, $m + 3n$ es impar y de ahí su cuadrado.

**11.(E)** Realmente fácil. $x$, su simétrico en el dibujo y 60º suman 360º, luego $x$ es 150º.



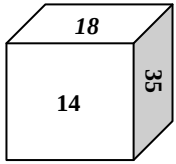

**12.(E)** $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; luego tiene $(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ divisores.
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; luego tiene $(2 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 12$ divisores.
$50 = 2 \cdot 5^2$; luego tiene $(1 + 1) \cdot (2 + 1) = 6$ divisores.
$45 = 3^2 \cdot 5$; luego tiene $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$ divisores.
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; luego tiene $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$ divisores.

**13.(D)** Si trazamos líneas auxiliares (como se ve en el dibujo), el octógono regular queda dividido en cuatro rectángulos iguales, un cuadrado central y en las esquinas, cuatro triángulos rectángulos isósceles. Estos cuatro triángulos equivalen al cuadrado central, y por ello el octógono se puede considerar formado por ocho triángulos y cuatro rectángulos. Pero dos triángulos y un rectángulo forman nuestro trapecio sombreado de área 3 cm$^2$, luego el área del octógono es 12.



**14.(C)** Partimos de que $p + \dfrac{1}{q + \dfrac{1}{r}} = \dfrac{25}{19}$ y como $p$, $q$ y $r$ son enteros positivos, por tamaño de la suma, $p$ debe ser 1. Haciendo cálculos ahora, nos queda $\dfrac{r}{rq + 1} = \dfrac{6}{19}$, y como $r$ y $rq + 1$ son primos entre sí, se tiene que necesariamente $r = 6$, y $rq + 1 = 19$. Luego $q \cdot r = 18$ y por tanto, $p \cdot q \cdot r = 18$.

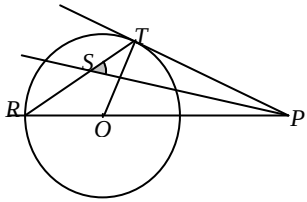
**15.(E)** Los tres números primos deben ser distintos para que las sumas de caras opuestas sean iguales. Dos de ellos pues deben ser impares, y la paridad obliga a que sean opuestos a las caras visibles con número par. El tercero debe ser par (es decir el 2) y opuesto al 35, luego la suma a conservar es 37, y el opuesto al 14 es el 23.




**16.(D)** Como $33 = 3 \cdot 11$, N·U es igual a 3 o igual a 11 (la posibilidad de 33 queda excluida porque entonces el paréntesis debería sumar 1, y las cuatro cifras que lo componen no podrían ser distintas). También debemos descartar el resultado de 11, ya que N y U son cifras. Así que N = 1, y U = 3, o N =3, y U = 1. Nos queda por investigar de cuantas maneras podemos obtener 11 como suma de cuatro cifras distintas (diferentes de 3 y de 1). Eso solo ocurre con 0, 2, 4 y 5. Así que tenemos dos posibilidades para la pareja N-U y 24 para el grupo M-E-R-O. En total 2·24 = 48.

**17.(C)** Llamando $a$ al número de ranas azules del año pasado y $v$ al número de ranas verdes, tenemos que: $\frac{a \cdot 1{,}6}{v \cdot 0{,}4} = \frac{v}{a}$, de donde $\frac{a^2}{v^2} = \frac{1}{4}$, es decir $v = 2a$. Luego hemos pasado de tener $a + v = 3a$ ranas, a tener, $1{,}6a + 0{,}4v = 2{,}4a$ ranas. Así el número de ranas se ha multiplicado por 0,8. Ha habido una disminución del 20%.

**18.(D)** La tangencia en $T$ nos sugiere el trazado del radio $OT$. Así $P\hat{T}O = 90^\circ$ y si llamamos $\alpha$ al ángulo $O\hat{P}T$, tenemos que el ángulo $T\hat{O}P = 90^\circ - \alpha$ y $R\hat{O}T = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$.



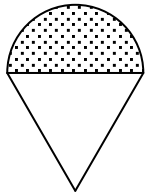

Como el triángulo $OTR$ es isósceles, se tiene a su vez que $O\hat{T}R = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$, y por tanto, $P\hat{T}S = 90^\circ + 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Entonces, $T\hat{S}P = 180^\circ - P\hat{T}S - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$.

**19.(E)** Sumando y restando 51 y 85 obtendremos siempre un múltiplo de 17. Si dividimos 2016 entre 17 obtenemos de resto 10. Lo más cerca de 2016 que podemos llegar es sumarle 7.

**20.(D)** $9^{20} + 9^{20} + 9^{20} = 3 \cdot 9^{20} = 3 \cdot (3^2)^{20} = 3^{41}$.

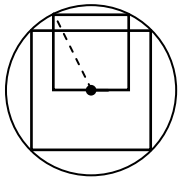
**21.(C)** En el trayecto emplean 210 minutos, y por tanto en 40 minutos recorren $\frac{40}{210}$ del trayecto. Los dos están en marcha a la vez durante $\frac{70}{210}$ del trayecto. Se encontrarán cuando hayan recorrido los $\frac{85}{210}$ del trayecto, y en ello emplearán 85 minutos, que sumados a las 12 h 40 min, nos da las 14 h 05 min.

**22.(B)** Si llamamos $l$ al lado del triángulo equilátero, el área del semicírculo es $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 : 2$, y la del triángulo es $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. El cociente de ambas es: $\frac{\pi l^2}{8} : \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.



**23.(A)** Llamamos $R$ al radio de la circunferencia. El área del cuadrado inscrito es (leído como rombo): $\frac{2R\cdot 2R}{2} = 2R^2$.

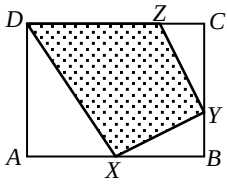
Para el cuadrado pequeño trazamos un radio hasta un vértice superior. Así tenemos (llamando $l$ al lado del cuadrado) que: $l^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2$, de donde $l^2 = \frac{4}{5}R^2$.



El cociente entre las áreas de los dos cuadrados es: $2R^2 : \frac{4}{5}R^2 = \frac{5}{2}$.

**24.(B)** Para obtener producto negativo tendremos que sacar en la primera tirada positivo y en la segunda negativo, o viceversa. La probabilidad es: $\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

**25.(B)** Sean $m$ y $n$ respectivamente la base y la altura del rectángulo. El área del rectángulo es $m\cdot n$. La del triángulo $AXD$ es: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cdot n = \frac{m\cdot n}{4}$; la del triángulo $XBY$ es: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{3}n = \frac{m\cdot n}{12}$; y la del triángulo $YCZ$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}m\cdot\frac{2}{3}n = \frac{m\cdot n}{12}$. Luego el área del cuadrilátero es $m\cdot n - \frac{5}{12}(m\cdot n) = \frac{7}{12}(m\cdot n)$.



# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* IV

**1. (D)** La probabilidad de que la suma sea impar es que resulte una bola par y otra impar, y esta es $p(\textit{suma impar}) = 2 \cdot \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{n}{2n} = \frac{n+1}{2n+1}$

**2. (A)** En 31! hay un total de 26 veces el factor 2. En 32! hay 31 veces el factor 2. El primer factorial que es múltiplo de $2^{29}$ es 32!

**3. (D)** Sea *R* es el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono regular.

El área del rombo es $A_{Rombo} = 4 \cdot \frac{R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R}{2} = R^2\sqrt{3} = 24$.

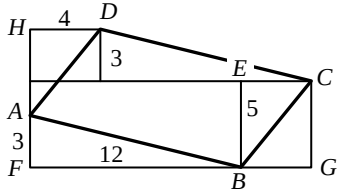
El área del hexágono es $A_{Hexágono} = 6 \cdot \frac{R^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot R^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$.

**4. (B)** Recordando que el producto de las raíces del polinomio $ax^2 + bx + a$ es $\frac{c}{a}$, las raíces de $ax^2 + bx + a$ tiene producto igual a 1, y por eso son inversas.

**5. (C)** Los dos ángulos distintos del paralelogramo son suplementarios, y por tanto tienen el mismo seno.

Como *AD* = *BC* podemos concluir que los triángulos rectángulos *ADH* y *CBG* son iguales, por lo que $AH = 5, AF = 3,\ AD = BC = \sqrt{41}$ y $AB = 3\sqrt{17}$.

Si descomponemos el ángulo $A\hat{B}C$ como suma de los ángulos $A\hat{B}E = a$ y $E\hat{B}C = b$ tenemos que $sen(a) = \frac{12}{3\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$




y $\cos(a) = \frac{3}{3\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$, mientras que

$sen(b) = \frac{4}{\sqrt{41}}$ y $\cos(b) = \frac{5}{\sqrt{41}}$.

Así, el seno del ángulo ABC es

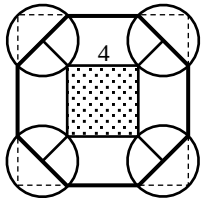
$$sen(A\hat{B}C) = sen(a+b) = sen(a)\cos(b) + \cos(a)sen(b) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{24}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{41}}$$

**6. (D)** $y = \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+3}{x-1} = 2 + \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow y-2 = \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow (y-2)\cdot(x-1) = 3$

**7. (D)** La suma pedida es $\sum_{k=1}^{9} \dfrac{9!}{k} = 9!\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}\right)$. Pero todos los sumandos de esta suma terminan en 0 excepto $\dfrac{9!}{5}$, que termina en 6.

**8. (A)** Si el lado del cuadrado es 4, el lado del octógono regular también es 4. Añadiendo cuatro triángulos rectángulos isósceles al octógono, completamos junto con él un cuadrado. Los catetos de dichos triángulos miden $2\sqrt{2}$, y el lado del cuadrado mide $4+4\sqrt{2}$.




El área del octógono es el área del cuadrado menos las áreas de los cuatro triángulos.

$$A_8 = \left(4+4\sqrt{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2} = 16+32\sqrt{2}+32-16 = 32\cdot\left(1+\sqrt{2}\right).$$

**9. (C)** $2016^2 - 2016 = 2016\cdot2015 = (2000+16)\cdot(2000+15) =$

$= 4000000 + 30000 + 32000 + 240 = 4062240.$

**10. (E)** $\left.\begin{matrix} x(y+2)=100 \\ y(x+2)=60 \end{matrix}\right\}$ Restando las dos ecuaciones: $2x-2y=40 \Rightarrow x-y=20$.

**11. (E)** $\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{4}\right)x = 6 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{20}x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 120$.

**12. (D)** El total gastado en la tienda comprando k artículos es de la forma z + k·0,99, donde z es un número entero. Este total se puede poner como z + k – k·0,01, siendo z + k entero. Como 65,76 = 66 – 24 · 0,01 = 42 + 24 – 24·0,01 = 42 + 24·0,99, k es 24.

**13. (B)** La lista de los cinco enteros será *a*, *b*, 10, 11, 11. Como la media es 9, $a + b = 13$, y como *b* debe ser menor que 10, *a* debe ser mayor que 3, por lo que el más pequeño posible es 4.

**14. (D)** Sea 1 la altura del rectángulo; su base es 2 y su diagonal $\sqrt{5}$. Como *ABE* es rectángulo, aplicamos el teorema del cateto y $1^2 = \sqrt{5} \cdot AE \quad \Rightarrow \quad AE = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Aplicando el teorema de Pitágoras, $BE^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow BE = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

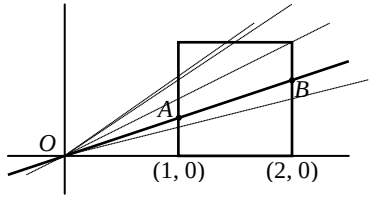
El área del triángulo *ABE* es $\frac{1}{5}$, y la del rectángulo 2, de modo que su cociente es $\frac{1}{10}$.

**15. (E)** $4^n - 1 = \left(2^n - 1\right)\left(2^n + 1\right)$ Si $n > 1$, $2^n - 1 > 1$, y no hay ningún primo.

**16. (C)** 19, 99 y 803 son enteros de la forma $8n + 3$, que en efecto tienen un divisor primo de la forma $8q + 3$: Para $n = 2$, $q = 2$ (el propio 19 es primo). Para $n = 12$, $q = 1$ ($99 = 11 \cdot 9$) y para $n = 100$, $q = 1$ ($803 = 11 \cdot 73$). 33 no es un entero de la forma $8n + 3$. Por último, 91 que sí es de la forma $8n + 3$ se descompone en factores primos como $13 \cdot 7$, y ni 13 ni 7 son de la forma $8q + 3$.

**17. (C)** Hay 30 puntos con *x* entero: desde –7 hasta 7, incluyendo el 0, son 15 abscisas enteras. Consideramos el doble porque con la misma *abscisa* hay dos puntos con *ordenadas* opuestas. Igualmente hay 30 puntos con *y* entero. Pero hay 12 puntos que tienen tanto *x* como *y* enteros, los pares (±5,±5), (±1, ±7) y (±7, ±1). Así pues, la respuesta es 30 + 30 – 12 = 48.

**18**. **(B)**. Supondremos que los vértices dados son consecutivos y que los otros dos se encuentran en el primer cuadrante, pues de lo contrario las rectas dadas, que pasan por el origen y tienen pendiente positiva, no cortarían al cuadrado.




Las coordenadas de los puntos *A* y *B* han de ser de la forma $A(1, a)$ y $B(2, 1 - a)$ para que el área de las dos regiones que determinan tengan igual área.

La recta $2y = x$ determina los puntos $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $B(2, 1)$.

La recta $3y = x$ determina los puntos $A\left(1, \frac{1}{3}\right)$ y $B\left(2, \frac{2}{3}\right)$ que es la respuesta válida.

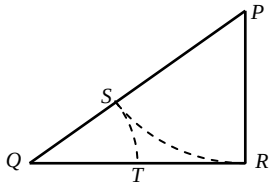
La recta $3y = 2x$ determina los puntos $A\left(1, \frac{2}{3}\right)$ y $B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

La recta $2y = \sqrt{2}\,x$ determina los puntos $A\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $B\left(\sqrt{2}, 1\right)$

La recta $4y - x = 0$ determina los puntos $A\left(1, \frac{1}{4}\right)$ y $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Solamente una de las rectas divide al cuadrado en dos partes de igual área.

**19. (E)** En la figura, $QP^2 = QR^2 + PR^2 = (2QS)^2 + PS^2$.



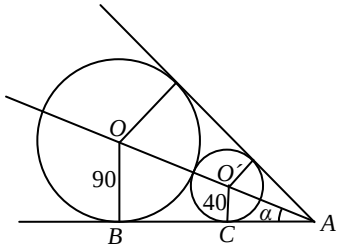

$(QS+PS)^2 = 4QS^2 + PS^2$;

$QS^2 + PS^2 + 2 \cdot QS \cdot PS = 4QS^2 + PS^2$;

$QS^2 + PS^2 + 2 \cdot QS \cdot PS = 4QS^2 + PS^2$;

$2 \cdot QS \cdot PS = 3QS^2$; $2 \cdot PS = 3 \cdot QS$; $\frac{QS}{PS} = \frac{2}{3}$.

**20. (A)** En la figura



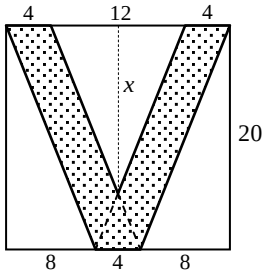

$sen\alpha = \frac{90}{OA} = \frac{40}{O'A} = \frac{90-40}{OA-O'A} = \frac{50}{OO'} = \frac{50}{130} = \frac{5}{13}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$; $\tan\alpha = \frac{5}{12}$;

$AB = \frac{90}{\tan\alpha} = 216$.

**21. (D)** $5^x - 5^{x-2} = 120\sqrt{5} \Rightarrow \frac{24}{25}5^x = 120\sqrt{5} \Rightarrow 5^x = 125\sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$.

**22. (B)** El área del paralelogramo que forma uno de los lados de la "V" es 4 × 20. El área de la "V" es el doble del área de ese paralelogramo menos el área del triángulo común a los dos lados de la "V".




Podemos calcular la altura de ese triángulo por semejanza de triángulos: $\frac{20}{8} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 15$, y la altura del triángulo común mide 5.

Como la base del triángulo mide 4, su área mide 10, y el área de la "V" es 160 – 10 = 150.

**23. (D)** $abc + ab + ac + bc + a + b + c = 104 \Rightarrow a(bc + b + c) + a + bc + b + c = 104$

$$\Rightarrow bc + b + c = \frac{104 - a}{a + 1}.$$

Como $b$ y $c$ son enteros, $a$ tiene que ser par. Los posibles valores de $a$ son:

| | |
|---|---|
| $a = 2$ | $bc + b + c = 34$ |
| $a = 4$ | $bc + b + c = 20$ |
| $a = 6$ | $bc + b + c = 14$ |

Para el resto de valores pares de $a$, se obtienen valores para $bc + b + c$ no enteros. En cada uno de los tres casos posibles, los valores posibles de $b$ y $c$ forman junto con el valor de $a$ la terna única 2, 4, 6. Por tanto $a^2 + b^2 + c^2 = 4 + 16 + 36 = 56$.

**24. (C)** $\cot x + \cot y = \dfrac{1}{tgx} + \dfrac{1}{tgy} = \dfrac{tgx + tgy}{tgx \cdot tgy} \Rightarrow tgx \cdot tgy = \dfrac{tgx + tgy}{\cot x + \cot y}$.

Por tanto: $tg(x + y) = \dfrac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy} = \dfrac{tgx + tgy}{1 - \dfrac{tgx + tgy}{\cot x + \cot y}} = \dfrac{25}{1 - \dfrac{25}{30}} = 150$.

**25. (B)** $z^2 = (9 + bi)^2 = 81 - b^2 + 18bi$. $z^3 = (9 + bi)^3 = 729 + 243bi - 27b^2 - b^3 i$.

Como las partes imaginarias de ambos son iguales:

$18b = 243b - b^3$; $b^3 - 225b = 0$.

Esta ecuación tiene tres soluciones: – 15, 0 y 15. Pero solo una es positiva, $b = 15$.

## XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* I

**1. (D)** Los que terminan en cero: 800, 710, 620, 530, 440, 350, 260 y 170.
Los que terminan en 5: 305, 215 y 125.
En total 11 números.

**2. (D)** Primero, expresamos las cantidades en la misma unidad de medida, en milímetros.
Después**,** encontramos que entre los tres grupos de niños tejieron:
$7 \times 150 + 12 \times 200 + 125 \times 6 = 4200$ mm. Dado que la bufanda mide 5000 mm, el profe tricotó una franja de 800 milímetros, es decir, de 8 dm.

**3. (E)** Inés, entre ida y vuelta al colegio tarda hora y cuarto más tres cuartos de hora, lo que completa dos horas exactas.
Como permanece en el colegio durante 6 horas y media, en total, desde que salió de casa hasta su vuelta a las 16 h 45 min, tarda 8 h 30 min. Por lo tanto se levantó de la cama a las (16 h 45 min) – (8 h 30 min) = 8 h 15 min de la mañana.

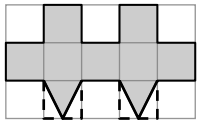
**4. (D)** Como el m.c.m. de 4 y 5 es 20 y $100 = 20 \times 5$, habrá cinco coincidencias de abdominales y baile en los próximos 100 días. Como el m.c.m. de 4 y 6 es 12 y $100 = 12 \times 8 + 4$, existirán ocho coincidencias de abdominales y tenis, por lo que de los $100 : 4 = 25$ días que debería hacer abdominales, debería dejar de hacerlos $8 + 5 = 13$ días. Sin embargo, dado que el m.c.m. de 4, 5 y 6 es 60, hay un día de triple coincidencia que lo hemos contado dos veces. Con lo que el número de días que hará abdominales es $25 – 12 = 13$..

**5. (C)** Calculamos el número de monedas: $26 \times 10 = 260$ monedas.
El mayor número de monedas que pueden formar un cuadrado más próximo por defecto a 260 es con 256 monedas ($16^2$). $260 – 256 = 4$.
Quedan 4 monedas.

**6. (D)** La primera letra la puede elegir de 5 formas distintas (cada una de las letras de LUISA), una vez hecho esto, la segunda letra puede escogerla de 4 formas y para la tercera le quedan 3 posibilidades. A continuación, para cada una de las dos cifras tiene 10 posibilidades.
Por tanto dispondrá de $5 \times 4 \times 3 \times 10 \times 10 = 6000$ contraseñas diferentes.

**7. (C)** La columna de las unidades tiene que sumar necesariamente 16, por lo que la columna de las decenas tendrá que sumar 9 o 19. Entre las soluciones ofrecidas la única que cumple esa condición es la C.

**8. (D)** Los perímetros de las figuras A, C y E miden respectivamente 12, 14 y 18 unidades. Si llamamos $d$ a la longitud de cada uno de los segmentos oblicuos de la figura D, tendremos que los perímetros de B y D son respectivamente $10 + 4d$ y $12 + 4d$. Ahora solo resta decidir entre 18 y $12 + 4d$, pero la figura adjunta permite ver que $6 > 4d$, luego 18 es el mayor de los dos.



**9. (E)** Esa edición tiene $1106 \times 1548 = 1\,712\,088$ letras. Como $1\,700\,000$ es el número mayor de los ofrecidos y es menor que el número de letras, ese es el que da mejor aproximación.

**10. (C)** Deducimos que Cervantes murió en abril del año $2016 - 400 = 1616$. Como nació en septiembre de 1547, cumpliría $1616 - 1547 = 69$ años en septiembre de 1616. Por lo tanto tenía 68 años al morir el mes de abril.

**11.(A)** Como la aguja de los minutos da una vuelta por hora, en tres días dará $3 \times 24 = 72$ vueltas.

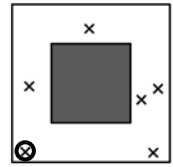
**12.(D)** Descomponiendo los números que nos dan en producto de tres números distintos elegidos entre el 1 y el 9 y cuya suma es 10, tenemos:

$14 = 1 \times 2 \times 7$ $\quad$ $18 = 1 \times 3 \times 6$ $\quad$ $20 = 1 \times 4 \times 5$

$24 = 2 \times 3 \times 4$ $\quad$ $30 = 2 \times 3 \times 5$

Observamos que en todos los casos excepto para el 24 la suma de los tres factores es 10. Y es inmediato comprobar que es imposible descomponer 24 en tres factores distintos cuya suma sea 10.

**13.(C)** Realmente hubiese bastado, para resolver el problema, que nos dijesen "Emilio solo ve a Dani", ya que el único que solo ve a otro es el situado encima del redondelito. Luego en el redondelito está Dani.



**14.(B)** Si en lugar de cinco repartiera cuatro canicas a cada uno de mis compañeros, sobrarían $26 + 2 = 28$ canicas, pero si reparto una más a cada uno, sobran 7, luego tengo $28 - 7 = 21$ compañeros.
Esto nos lleva a deducir que yo tengo $4 \times 21 + 2 = 86$ caramelos y que, por tanto, tengo $86 + 26 = 112$ canicas. La suma de sus cifras es 4.

**15.(A)** Si 1200 migas corresponden a un cuarto, el total es $1200 \times 4 = 4800$ migas.
$4800 \times 0{,}5$ m $= 2400$ m $= 2{,}4$ km.

**16.(A)** Si el elefante pesa 40 veces más que su trompa, y esta 5000 veces lo que el ratón, el elefante pesará $40 \times 5000 = 200\,000$ veces más que el ratón. Como el elefante pesa 5 600 000 gramos, el peso del ratón es de $5\,600\,000 : 200\,000 = 28$ gramos.

**17.(E)** Tenemos que averiguar lo que pesan juntos el balón y el cubo de Rubik. Si sumamos las dos primeras pesadas tendremos que dos veces el (balón más el cubo) más el (osito más la peonza) pesan $600 + 450 = 1050$ gramos. Por otra parte, de la tercera pesada, sabemos que el (osito más la peonza) pesan 400 gramos, por lo tanto, dos veces el (balón más el cubo) pesan $1050 – 400 = 650$ y de aquí, el peso del (balón más el cubo) será $650 : 2 = 325$ gramos.

**18.(D)** Como no era la más grande, no puede ser el 9 y como no era la más pequeña, descartamos la cifra 1. Solo queda la cifra 7.

**19.(E)** Tendremos:

Día 1: 1000 bacterias
Día 2: $1000 \times 2$ bacterias
Día 3: $1000 \times 2 \times 3$ bacterias
...
Día 10: $1000 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 1000 \times 3\,628\,800$ bacterias.

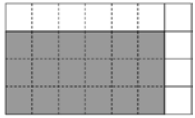
Por tanto habrá más de tres mil millones.

**20.(A)** A Marta no le gustan 3 círculos azules, 2 círculos rojos, 1 cuadrado rojo y 4 triángulos rojos, es decir, no le gustan $3 + 2 + 1 + 4 = 10$ figuras. Como en la colección hay en total $(3 + 2 + 1 + 4) + 2 + 3 + 5 = 20$ figuras, la probabilidad de que le toque algo que no le guste es: $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

**21.(C)** Orlando comió $y$ porras e $y$ churros. Por su parte, si Julián comió $z$ porras, tuvo que comer $3z$ churros y, finalmente Lucía comió $z$ porras y $x$ churros.

Dado que comieron 7 porras tenemos: $2z + y = 7$, y como $z$ e $y$ son mayores o iguales que 2 la única solución posible es $y = 3$; $z = 2$, de lo que deducimos que Orlando comió 3 porras y 3 churros, Julián 2 porras y 6 churros y Lucía 2 porras. Solo falta conocer el número $x$ de churros que comió Lucía. Pero sabemos que comieron 13 churros en total, por lo tanto, $3 + 6 + x = 13$ de donde $x = 4$.

**22.(B)** Como la anchura del rectángulo gris es el doble que su altura, podemos completar el dibujo dividiendo el rectángulo grande en $7 \times 4 = 28$ cuadraditos pequeños como se muestra en la figura.



Por otra parte, el semiperímetro del rectángulo gris mide

54 : 2 = 27 cm y está limitado por 9 cuadraditos, de donde deducimos que el lado del cuadradito mide 27 : 9 = 3 cm.
Por lo tanto el área pedida mide $28 \times 3^2 = 252$ cm$^2$.

El problema es aún más fácil de resolver con ayuda del álgebra:
Primero, calculamos las dimensiones del rectángulo gris:
Altura: $x$ cm, base: $2x$ cm, perímetro: $2(x + 2x) = 6x = 54$ cm $\Rightarrow x = 9$ cm.
Segundo, las dimensiones de la figura completa son:
Altura $9 + 3 = 12$ cm, base $18 + 3 = 21$ cm, área = 12 cm $\times$ 21 cm = 252 cm$^2$.

**23.(D)** Ante todo tengamos presente que los ratones siempre dicen la verdad y que los zorros mienten siempre. Supongamos que Ana dice verdad, entonces Blas dice la verdad y, en consecuencia, Cris es mentiroso, lo que lleva a que Dani dice la verdad y esto a que Elia es lo contrario que Ana, es decir, Elia miente. Pero si Elia miente, entonces Ana debe mentir en contra de lo supuesto inicialmente. En consecuencia, estamos seguros de que Ana no puede decir la verdad.
Dado que Ana **miente** Bea también debe mentir y si ésta **miente**, Cris dice la verdad y, por tanto Dani **miente** y de aquí deducimos que Ana y Elia son lo mismo y, por lo tanto, Elia **miente**. Solo Cris dice la verdad y los otros 4 mienten y por consiguiente son Zorros.

**24.(A)** En cada bote hay $15 \times 12 = 180$ raciones de comida para pececitos. Como luego solamente me quedan 10 peces, pero comen el doble, cada bote de comida durará $180 : (10 \times 2) = 180 : 20 = 9$ días.

**25.(B)** Añadiendo los triángulos de 2 en 2, Juanje tiene que poner cada vez 4 palillos más. Por lo que podemos construir la tabla siguiente:

| Triángulos | Palillos |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 3 | $7 = 2 \times 3 + 1$ |
| 5 | $11 = 2 \times 5 + 1$ |
| 7 | $15 = 2 \times 7 + 1$ |
| … | … |
| 101 | $2 \times 101 + 1 =$ **203** |

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* II

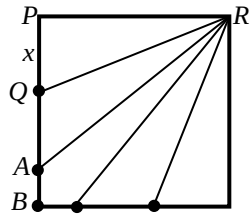
**1. (E)** Podemos ir examinando cada una de las posibles respuestas.
(Lunes) No puede ser porque el lunes le toca mentir y ha dicho una verdad: que es lunes.
(Martes) No puede ser porque debe decir la verdad y Pancho dijo mentira: que es lunes.
(Miércoles) Como le toca mentir no vale porque ha dicho una verdad: que mañana será jueves.
(Jueves) Debería decir verdades y no lo ha hecho.
(Viernes) Le toca decir mentiras y así lo hace: hoy es lunes y mañana jueves.
Por tanto estaban hablando un viernes.

**2. (E)** Si los amigos pueden sentarse en mesas de 6 y 7 comensales, es porque han de ser un múltiplo de 42. Descartamos pues 45 y 63 y probamos las otras respuestas.
(84) Como 84 = 7comensales × 12mesas, entonces 84 debería ser igual a 6comensales × 15mesas y esto no es cierto.
(168) Como 168 = 7comensales × 24mesas, entonces 168 debería ser igual a 6comensales × 27mesas y esto no es cierto.
(126) Como 126 = 7comensales × 18mesas, entonces 126 debería ser igual a 6comensales × 21mesas y esto sí es cierto.
Por tanto, hay 126 amigos.
Si se manejan ya las ecuaciones puede resolverse llamando $m$ al número de mesas de 7 comensales y planteando la ecuación $7m = 6(m + 3)$, que al resolverla nos da que $m = 18$. Por lo que el número de amigos es $7 \cdot 18 = 126$.

**3. (A)** Los múltiplo de 86 de tres cifras son:
172 – 258 – 344 – 430 – 516 – 602 – 688 –774 – 860 – 946
Tenemos dudas con los que acaban en 4 y en 6.
El que empieza por 5 está identificado: **5**16. Por tanto, el otro que acaba en 6 ha de ser 94**6**.
El que empieza por 7 también: **7**74. Por tanto, el otro que acaba en 4 tiene que ser 34**4**.
Los cuatro números son 34**4** – **5**16 – 94**6** – **7**74, por lo que las cifras que se zampó Comenúmeros suman 3 + 4 + 1 + 6 + 9 + 4 +7 + 4 = 38.

**4. (C)** La cuerda de Álvaro tendrá el triple de trocitos que la Delia más $3 \cdot 14 = 42$ cm, con los que puede hacer otros dos trocitos más de 20 cm y le sobran solo 2 cm.

**5. (E)** El área del cuadrado son 60·60 = 3600 cm$^2$, por lo que cada una de las partes tiene un área de 3600 : 5 = 720 cm$^2$. Como el área del triángulo *PQR* ha de ser 720 cm$^2$, la longitud *x* del segmento *PQ* debe cumplir que $\frac{60 \cdot x}{2} = 720$ , de donde deducimos que *x* = 24. Como los triángulos *AQR* y *PQR* tienen igual área, entonces *QA* también mide 24 cm. Por todo esto, *AB* = 60 – 24 – 24 = 12 cm.




**6. (B)** El mayor *repedós* es el número 9987 y el menor es 1002.
La diferencia entre ambos es 9987 – 1002 = 8985.

**7. (D)** El menor número de paquetitos se conseguirá con el mayor número de caracolas por paquetito, es decir, con el máximo común divisor de las caracolas que tiene cada trilliza, mcd(48, 60, 72) = 12 caracolas. Ana hará 48:12 = 4 paquetitos, Elena 60:12 = 5 paquetitos y Teresa 72:12 = 6 paquetitos. En total 15 paquetitos.

**8. (B)** Llamando a cada color con su inicial, las mezclas que podemos conseguir combinando tres son:

AAA AAB AAR ABB ABR ARR BBB BBR BRR RRR

Diez colores distintos. Fíjate que las mezclas AAB, ABA, BAA son la misma.
(Como siempre, en estos problemas es fundamental llevar un orden para saber cuándo terminamos sin dejarnos ningún caso por el camino. En este caso, hemos seguido un orden alfabético)

**9. (A)** Nuestro triángulo es rayado y sombreado pero no de borde discontinuo, por tanto debe estar en la región A.

**10.(C)** La L de LEE solo puede ser 1, 2 o 3, porque ya a partir de 3 el producto LEE × LEE tendría más de cinco cifras (400·400 = 160 000) y no encaja con las cinco cifras de PEDAL.
Si observamos la L de PEDAL, vemos que no puede ser 3 ni 2 porque un cuadrado nunca tiene esas terminaciones. La única posibilidad es que L = 1 y por tanto E = 9 para que E·E termine en 1. Así pues, LEE es 199 y PEDAL es 199·199 = 39 601.
La D es un 6.

**11.(D)** Como el doble de la base *b* es la mitad del triple de la altura *a*, podemos relacionar las dimensiones así: $2b = \frac{3a}{2}$ , es decir, $b = \frac{3a}{4}$ .
Como el perímetro es 84 cm, entonces:

$$2b + 2a = 84 \Rightarrow 2\cdot\frac{3a}{4} + 2a = 84 \Rightarrow \frac{3a}{2} + 2a = 84 \Rightarrow 3a + 4a = 168 \Rightarrow a = 24 \text{ cm}$$

La base es $b = \frac{3a}{4} = \frac{3\cdot 24}{4} = 18$ cm. El área mide $24\cdot 18 = 432$ cm$^2$.

**12.(D)** Como es una tabla de sumar, si observamos las casillas del 8 y el 12, deducimos que la segunda columna es la primera columna más cuatro.

| + | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 12 | |
| | 10 | 14 | |
| | 13 | 17 | |

El número más alto, 21, estará en la esquina inferior derecha y por tanto, fijándonos en el 17 y en el 21, deducimos de nuevo que la tercera columna será la segunda columna más cuatro. Comenúmeros se zampó un 18. Y para terminar la tabla hay que tener en cuenta que no hay números repetidos.

| + | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 12 | 16 |
| | 10 | 14 | **18** |
| | 13 | 17 | 21 |

| **+** | 7 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 12 | 16 |
| 3 | 10 | 14 | **18** |
| 6 | 13 | 17 | 21 |

**13.(A)** Como RATÓN tiene el mismo número de cifras que NOTAR, esto nos asegura que la N de NOTAR solo puede ser un 1 o un 2 para que no haya llevadas. Si nos fijamos en la N de RATÓN debemos descartar N = 1 porque los múltiplos de 4 son pares.

| **2** | **O** | **T** | **A** | **R** |
|---|---|---|---|---|
| | | | **×** | **4** |
| **R** | **A** | **T** | **O** | **2** |

Seguimos: la R de NOTAR será 8 o 3. Habrá que descartar uno de los dos valores fijándonos en la R de RATÓN. Pero ya lo dejamos para ti y no mires todavía la solución que Don Retorcido se enfadará. ¡Que no mires!
La solución final es $21978\cdot 4 = 87912$.
Un RATO suma $8 + 7 + 9 + 1 = 25$.

**14.(A)** Una pareja es la (1, 4), cuya suma es 5. Así pues todas las posibles parejas, descartando la suma 5, son:

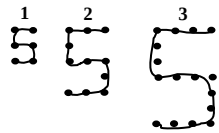
Suma 2: (0, 2)
Suma 3: (0, 3)
Suma 7: (0, 7) (2, 5)
Suma 11: (2, 9) (5, 6) (8, 3) (9, 2)
Suma 13: (5, 8) (6, 7)
Suma 17: (8, 9)

Ahora debemos ir descartando con sumo cuidado. Solo vamos a encontrar la primera pareja y luego tú deberás seguir con la búsqueda minuciosa.

El 9 no puede bailar con el 2 porque entonces eliminaríamos ya la suma 11 y entonces, por una lado 8 está obligado a bailar con 5 (suma 13) pero también 6 está obligado a ser pareja de 7 (suma 13). Así pues, imposible la pareja (9, 2).
Por tanto, una pareja es (8, 9). Y ahora te toca seguir a ti, poco a poco.
Al final las cinco parejas son:

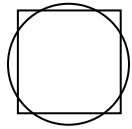
$$(0, 3) \to 3;\quad (1, 4) \to 5;\quad (2, 5) \to 7;\qquad (6, 7) \to 13;\qquad (8, 9) \to 17$$

**15.(B)** Cada CINCO está formado por tres tramos horizontales iguales y dos tramos verticales iguales. Cada tramo horizontal tiene un punto más que el lugar que ocupa el CINCO, y cada tramo vertical tiene un punto menos que el lugar que ocupa el CINCO.



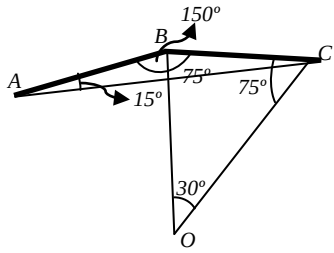

Así, el CINCO del lugar 55 tendrá $3\cdot(55 + 1) + 2\cdot(55 – 1) = 276$ puntitos.

**16.(C)** Como mucho, una circunferencia puede cortar a un segmento en dos puntos, así pues, a los cuatro lados de un cuadrado, en ocho puntos como máximo.



**17.(B)** Podemos trabajar con un cuadrado de lado 10, cuya área es 100 y nos resulta muy cómodo. Al aumentar sus lados, el área pasa a ser 100 + 96 = 196, es decir, un cuadrado de lado $\sqrt{196} = 14$. Es decir, los lados aumentaron 4 unidades y si las hubiéramos disminuido habríamos tenido un cuadrado de lado 10 – 4 = 6, cuya área es 36, es decir, el porcentaje de área disminuiría en un 100 – 36 = 64 %.

**18.(E)** Como el triángulo *ABC* es isósceles, entonces el ángulo *C* vale también 15º y el ángulo *B* mide 150º. ¿Qué polígono regular tiene ángulos de 150º? Si te acuerdas de la fórmula, bienvenida sea. Si no, podemos discurrir así: uniendo los vértices *B* y *C* con el centro *O* del polígono formamos el triángulo isósceles *OBC*, cuyos ángulos miden $B = C = 75º$ (la mitad de 150º) y el ángulo central en *O* mide, por tanto, 30º. Fijándonos en este ángulo central ya podemos responder, el polígono tiene 360º : 30º = 12 lados.

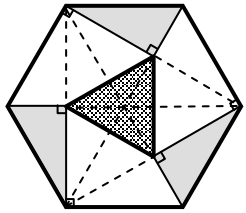



**19.(B)** Solo hay que trastear un poco con la operación para conseguir potencias de 10:

$$8^{672} \times 25^{1008} = (2^3)^{672} \times (5^2)^{1008} = 2^{2016} \times 5^{2016} = 10^{2016}$$

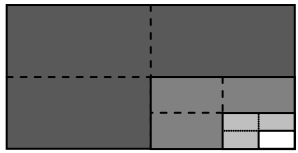
Es decir, un "uno" seguido de 2016 "ceros". El número tiene 2017 cifras.
Más fácil de lo que parecía.

**20. (D)** Si descomponemos el hexágono en figuras iguales es muy fácil resolver este problema. Trazamos algunos segmentos (trazo discontinuo) y…

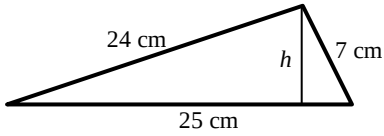


El área del triángulo equilátero grande (sus vértices son vértices alternos del hexágono) es la mitad que la del hexágono, es decir, 60cm$^2$. El triángulo central es la cuarta parte del triángulo equilátero grande, por tanto su área mide 60:4 = 15 cm$^2$.

**21.(E)** Si representamos el total de piñones mediante un rectángulo, es fácil resolver el problema, coloreando lo que coge cada ardilla. El rectangulito blanco representa los tres piñones que se llevó la cuarta ardilla. Por tanto, en el rectángulo grande hay 3·4·4·4 = 192 piñones.



**22.(C)** Con ayuda del teorema de Pitágoras encontramos la medida del otro cateto *x*: $25^2 = 24^2 + x^2 \rightarrow x = 7$ cm.



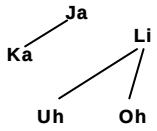

Para averiguar la altura *h* del triángulo calculamos su área *A* de dos maneras diferentes.

Por un lado, trabajando con el triángulo según se muestra, $A = \frac{25 \cdot h}{2}$ .

Y si apoyamos el triángulo sobre uno de sus catetos, $A = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84$ cm$^2$.

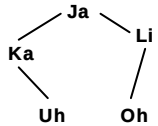
Por tanto, $\frac{25 \cdot h}{2} = 84 \Rightarrow h = \frac{2 \cdot 84}{25} = 6{,}72$ cm.

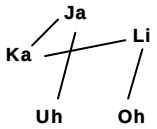
**23.(C)** El beso Oh–Li está asegurado porque lo dice el enunciado. Si hubiese un beso Li–Uh, esto implicaría que tendríamos un beso Ja–Ka y ya no podríamos seguir.




Así pues, el beso imposible es Li–Uh.

Así pues, Uh ha de besar a Ka o a Ja y tendríamos estas dos posibles situaciones:



**24.(C)** Si llamamos *p* al número de pentágonos y *h* al de hexágonos, podemos formar este sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 5p + 6h = 282 \\ p + h = 49 \end{cases}$

Es fácil resolverlo, multiplicando por 5 la segunda ecuación y luego restándosela a la primera:

$$\begin{cases} 5p + 6h = 282 \\ p + h = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5p + 6h = 282 \\ 5p + 5h = 245 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 37 \\ p = 12 \end{cases}$$

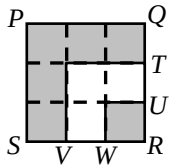
Si bailamos los valores obtenidos, 37 pentágonos y 12 hexágonos tienen un total de $37 \cdot 5 + 12 \cdot 6 = 257$ lados.

**25.(E)** Toca multiplicar y luego dividir. En un año hay $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 31\,536\,000$ segundos, que podemos aproximarlo a $30\,000\,000$ segundos. Así pues, en $100\,000\,000\,000$ segundos hay alrededor de 3000 años. (El cálculo exacto arroja un tiempo de casi 3171 años)

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* III

**1. (A)** Dividimos la figura en partes iguales como muestra el dibujo.




De esta forma es fácil observar que $\frac{A_{sombreada}}{A_{blanca}} = \frac{6}{3} = 2$

**2. (B)** Dejamos como desconocida la casilla *a*, la suma constante es $31 + a$, con lo que $31 + a = a + 13 + b$, luego $b = 18$ y podemos rellenar las casillas con este dato y el cuadrado queda:

| | | |
|---|---|---|
| *a* | 13 | *b* |
| 19 | | 11 |
| 12 | | 16 |

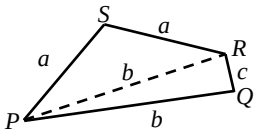
→

| | | |
|---|---|---|
| *a* | 13 | 18 |
| 19 | *a*+1 | 11 |
| 12 | *a*+3 | 16 |

Fijándonos ahora en la segunda columna, escribimos $13 + a + 1 + a + 3 = 31 + a$, resolviendo encontramos $a = 14$, $b = 18$, $c = 15$. La suma pedida será 47.

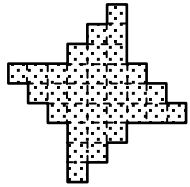
**3. (D)** Llamando *x* a la altura de los pequeños rectángulos que recortamos. El área de la pieza será igual al área del rectángulo menos los rectangulitos que cortamos. Es decir, $A_{pieza} = 80 \cdot 40 - 5x - 15x - 10x = 2990$. De donde sacamos que $x = 7$.

**4. (A)** Con los datos del enunciado, nombramos los lados de los triángulos como se indica y obtenemos las siguientes ecuaciones.




$2a + b = 22$, $2b + c = 22$, $2a + b + c = 24$. Restando a la tercera ecuación la primera obtenemos $c = 2$. Sustituyendo en la segunda se obtiene $b = 10$, y en la primera, $a = 6$.

**5. (D)** Dividiendo la figura en cuadraditos, como se muestra al margen, hay 33 cuadraditos iguales. Como el área de la figura es 528, cada cuadradito tendrá un área de 16, por tanto, el lado mide 4. Y el perímetro de la figura que tiene 36 lados será de 144.



**6. (D)** Como $\left(\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1\right) : \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1\right) = 11$, $\left(\frac{ab + ac + bc}{bc}\right) : \left(\frac{bc + ab + ac}{ac}\right) = 11$, es decir, $\frac{a}{b} = 11$, $a = 11b$. Al ser $a + 2b + c \le 40$, resulta que $13b + c \le 40$. Como *a*, *b*, *c* son enteros positivos:

· si $b=1$, $c \le 27$, por lo que tendríamos 27 ternas. (1, 11, c) con $c \le 27$
· si $b=2$, $c \le 14$, por lo que tendríamos 14 ternas. (2, 22, c) con $c \le 14$
· si $b=3$, $c \le 1$, por lo que tendríamos 1 terna. (3, 33, 1)
En total habrá 42 ternas.

**7. (E)** Si $n=0$, el número $72 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ es entero.

Si $n>0$, el número $72 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ será entero si 72 es múltiplo de la potencia de 2, es decir 2, $2^2$, $2^3$. Solo lo cumple $n=1, 2$ y $3$ ya que $72=2^3 \cdot 3^2$

Si $n<0$, el número $72 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ será entero si 72 es múltiplo de la potencia de 3, es decir 3, $3^2$. Solo lo cumple $n=-1,-2$.
En total solo hay 6 valores de *n* que lo verifique.

**8. (A)** Llamamos *O* al centro de la circunferencia. Fijándonos en el triángulo *ADO*, que es rectángulo, de hipotenusa 10 (ya que es el radio de la circunferencia) y de cateto 8, el otro cateto será, por tanto, $AD=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

**9. (E)** La pendiente de la recta es $\frac{3}{2}$, así que $\frac{r-q}{-2}=\frac{3}{2}$, por lo que $r-q=-3$.

**10.(A)** El lado del triángulo es el doble del lado del hexágono, por lo que el área del triángulo es cuatro veces el área de cada uno de los seis triángulos equiláteros en que podemos dividir un hexágono, siendo entonces, $\frac{A_{triángulo}}{A_{hexágono}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

**11.(E)** Llamando *a* al pequeño, tenemos que el mayor es *a* + 16, por lo que la media de los tres es $\frac{a+6+a+16}{3}$. Así que $\frac{2a+22}{3}=a+7$ y de aquí $a=1$ y la suma de los tres es: 1 + 6 + 17 = 24.

**12.(B)** Llamando *r* al total de reservas de petróleo de Alaska, *u* al consumo de EEUU en un año y *c* al consumo de China en un año, tenemos que $u=\frac{r}{35}$, $u+c=\frac{r}{10}$, así que $c=\frac{r}{10}-\frac{r}{35}=\frac{7r-2r}{70}=\frac{r}{14}$. Con lo que en un año, China consumirá $\frac{r}{14}$ de las reservas de petróleo, así que estas durarían 14 años si solo las consumiera China.

**13.(A)** Al ser $u < 10$, $|u-10| = 10-u = v$, es decir $u = 10-v$. Por lo tanto $u - v = (10-v) - v = 10 - 2v$.

**14.(B)** Una gráfica no corta al eje de ordenadas si no hay ningún valor de $y$ cuando $x = 0$. Esto ocurre en la gráfica B: $|y|+4 = |x|$, pues la ecuación $|y|+4 = 0$ no tiene solución.

**15.(D)** Teniendo en cuenta que $A < B$ y que $A$ y $B$ son positivos, voy comparando las fracciones propuestas.

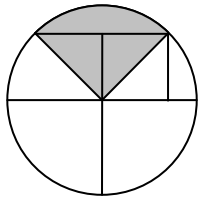
$\frac{A-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{B^2-1}$, ya que $\frac{B^2-1}{B-1} > \frac{A^2-1}{A-1} \Rightarrow B+1 > A+1$

$\frac{A-1}{B-1} > \frac{A^3-1}{B^3-1}$, ya que $\frac{B^3-1}{B-1} > \frac{A^3-1}{A-1} \Rightarrow B^2+B+1 > A^2+A+1$

$\frac{A-1}{B-1} < \frac{A+1}{B+1}$, ya que $AB + A - B - 1 < AB - A + B - 1 \Rightarrow 2A < 2B$

**16.(E)** Si $C$ y $D$ son primos, no pueden ser impares ya que la suma de los dos sería par y por tanto $C + D$ no sería primo. Así que uno de los dos es el 2, además como $C - D$ también es primo queda que $D = 2$. Por tanto los números primos de los que hablamos son $C - 2$, $C$, $C + 2$.
Como la única terna de primos (impares consecutivos) es la 3, 5, 7 resulta ser $C = 5$ y los cuatro enteros dados son 5, 2, 7 y 3 que suman 17, por tanto un número primo también.

**17.(A)** La zona sombreada está formada por un cuadrado cuya diagonal es 4 (el radio de la circunferencia) y un segmento circular. Si el cuadrado lo dividimos en dos triángulos al unirlos al segmento circular componen un sector circular de 90º. Por tanto el área de la zona sombreada será un cuarto del área del círculo $A_{sombreada} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 4\pi$. Aproximando la solución $4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56$. Es decir la solución A.



**18.(C)** María Jesús gana con seguridad si escoge el 10, y también gana si escoge el 8 y Juanje no escoge (1, 3, 4), ni (2, 3, 4). En cualquier otro caso, el número elegido por María Jesús no será superior a la suma de los números elegidos por Juanje. Así pues, $P(\text{nº de M.Jesús es mayor}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.

**19.(E)** Un triángulo rectángulo está inscrito en una circunferencia si y solo si la hipotenusa es el diámetro de la circunferencia. Por tanto, la hipotenusa medirá $2\cdot\frac{5}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$.

Si llamamos *a* y *b* a los catetos del triángulo, resulta que $a^2+b^2=50$. Como *a* y *b* son números enteros diferentes, la única posibilidad es que midan 1 y 7. Así que el producto será 7.

**20.(C)** La recta determinada por *P* y *Q* tendrá una pendiente $m=\frac{45-5}{19-3}=\frac{5}{2}$. Para que los puntos tengan coordenadas enteras, desde *P* hay que moverse 2 a la derecha y 5 arriba, hasta llegar a Q. Nos fijamos solo en las abscisas que van de 3 a 19 de dos en dos. Por tanto, hay que buscar todos los impares entre 4 y 18, es decir, 7 valores.

**21.(C)** Vamos a contar cuántos enteros pueden escribirse como suma de dos de la lista y los que no se pueden contar serán el resto.
Calculamos en número de combinaciones de nueve elementos tomados de dos en dos. $C_{9,2}=\frac{9!}{2!\cdot 7!}=36$. También hay que fijarse que ninguna de las sumas de dos elementos darán el mismo resultado, ya que cada número es la suma de los dos anteriores. La suma más alta es 55 + 34 = 89 y la más baja 1 + 2 = 3. Por tanto, del 3 al 89 (ambos incluidos) hay 87 números que buscar y nos salen 36. Así pues, faltan 87 – 36 = 51.

**22.(D)** Llamando *a*, *a+2* y *a+4* a los tres enteros impares consecutivos, resulta que $\frac{a+a+2+a+4}{3}=7\Rightarrow a=5$. Añadiendo *m* a la lista tenemos que $\frac{5+7+9+m}{4}$ será entero si 21 + *m* es un múltiplo de 4 siendo *m* entero y distinto de 5, 7 y 9. Los menores serán *m* = 3, *m* = 11, *m* = 15. Éstos sumarán 29.

**23.(C)** *PQR* forman un triángulo rectángulo donde *PQ* es la hipotenusa. Aplicamos el teorema de la altura $OR^2=OP\cdot OQ$ donde $OR=t$, $OP=4$, $OQ=16$, así pues $t^2=4\cdot 16\Rightarrow t=8$.

**24.(E)** Contemos en primer lugar los números de diez cifras que hay: $VR_{10}^{10}-VR_{10}^{9}=10^{10}-10^{9}$ (pues los que empiezan por cero tienen solo nueve cifras).

Los números de 10 cifras que contienen los diez dígitos son: $V_{10}^{10}-V_{9}^{9}=10!-9!$. Así pues la probabilidad pedida es $P=\frac{10!-9!}{10^{10}-10^{9}}=\frac{9!(10-1)}{10^{9}(10-1)}=\frac{9!}{10^{9}}$.

**25.(D)** Llamando $(10a + b)$ y $(10c + d)$ a las edades respectivas de padre e hijo, tenemos que $a > c$, $10a + b$ es primo, $(10a + b) + (10c + d)$ es primo, $(10a + b) – (10c + d)$ que es igual $10(a – c) + (b – d)$ es múltiplo de 33 y $a + b + c + d = 8$.

$10(a – c) + (b – d)$ será 33 o 66 (pues 99 implicaría $10a + b = 99$ y no es primo).

Como la suma de todas las cifras es 8, $a \leq 8$ .

Si $a = 8$, el resto de cifras serían 0, pero entonces $10a + b$ no es primo.

Si $a = 7$, para que $10a + b$ sea primo, $b$ tiene que ser 1 y $c$ y $d$ serían 0, entonces $(10a + b) – (10c + d)$ no sería múltiplo de 33.

Si $a = 6$, $c \leq 2$ para que se cumpla que $a + b + c + d = 8$.

Si $c = 0$, para que $10(a – c) + (b – d)$ sea múltiplo de 33, entonces $b – d = 6$, por tanto $b \geq 6$ y entonces la suma de todas las cifras daría más de 8.

Si $c = 1$, $10(a – c) + (b – d)$ no sería múltiplo de 33.

Si $c = 2$, el resto de cifras serían 0 para que todas sumaran 8 y la edad de don Retorcido sería 60 que no es primo.

Si $a = 5$, entonces $c \leq 3$ .

Si $c = 0$ sería imposible que se cumpliera lo de múltiplo de 33.

Si $c = 1$ , como $a + b + c + d = 8$ , $b \leq 2$ .

Si $c = 2$, $b \leq 1$ .

Si $c = 3$, $b = 0$.

En todos estos casos la edad de don Retorcido sería 50, 51 o 52 y ninguno es primo.

Si $a = 4$, como los únicos primos con 4 en las decenas son 41, 43 y 47, $b$ debería ser 1, 3 o 7, pero $b$ no puede ser 7 ya que $a + b + c + d = 8$ .

Si $b$ fuera 1, $c + d$ sería 3 y la diferencia de las edades no sería nunca múltiplo de 33.

Así pues, $b$ tiene que ser 3, entonces la edad de don Retorcido sería 43 y la del hijo 10. Estas edades cumplen todas las condiciones. Por tanto, la suma pedida es 7.

# XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

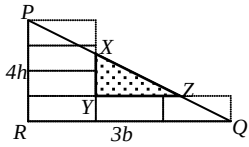
*Soluciones 2ª Fase Nivel IV*

**1. (C)** El 75% del dinero lo donan profesores y alumnos, en proporción 2:3, así que los profesores donan $\frac{2}{5}\cdot 75\% = 30\%$, por tanto, los alumnos el 45%. Con lo que el cociente entre lo donado por los padres y los alumnos es $\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$.

**2. (B)** Llamando *x* al lado del cuadrado, tenemos que $90^2 = x^2 + (2x)^2$, $x^2 = \frac{90^2}{5} = 1620$.

**3. (D)** Sacando factor común a la ecuación dada, nos queda $(x-2)(x-4+x-6)=0$ $(x-2)(2x-10)=0$ , las soluciones son 2 y 5. Por tanto, el producto es 10.

**4. (C)** El triángulo *XYZ* y el triángulo *PQR* son semejantes, así que $\frac{XY}{YZ}=\frac{4h}{3b}$ . Como nos dicen que $\frac{XY}{YZ}=\frac{1}{2}$ , por tanto, $\frac{4h}{3b}=\frac{1}{2}$, es decir, $\frac{h}{b}=\frac{3}{8}$.




**5. (E)** $\frac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q}=\frac{p+\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}+q}=\frac{(pq+1)p}{(1+pq)q}=\frac{p}{q}=17$ , $p=17q$ . Al ser $p + q \le 100$, tenemos que $18q \le 100$, así pues $q$ =1, 2, 3, 4 ó 5. Habiendo, por tanto, 5 parejas de enteros positivos.

**6. (C)** Tenemos, A = $\log_{30}$ 6, B = $\log_{30}$ 10, C = $\log_{30}$ 15, así que la media, $\frac{A+B+C}{3}$, será $\frac{\log_{30}(6\cdot 10\cdot 15)}{3}=\frac{\log_{30}900}{3}=\frac{2}{3}$.

**7. (B)** Hay dos paralelogramos con estos datos *O*(0, 0), *A*(1, 4), *B*(4, 1). El cuarto vértice puede ser *C(3,-3)* ó *C(5, 5)*. Obtengamos el área de cada uno de ellos, restando al área del rectángulo "circunscrito" de lados paralelos a los ejes los correspondientes triángulos y rectángulos no ocupados por el paralelogramo.

El primero (de vértice *C(5, 5)*) tiene de área $5\cdot 5-(2+1+2+2+1+2)=15$ .

El segundo (de vértice *C(3, -3)*) tiene de área $4\cdot 7-\left(2+2+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)=15$ .

En ambos casos el área es 15.

**8. (A)** Al ser *PQ* = *PR*, si *PT* = *x*, entonces *PS* = *x* + 50 y las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo *PTS* son *x* y 120 y la hipotenusa *x* + 50, por tanto, $(x+50)^2 = x^2 + 120^2$, de donde *x=119* , así el área del triángulo *PTS* es $\frac{120 \cdot 119}{2} = 7140$.

Por otro lado, calculamos el área del triángulo isósceles *PQR*, para ello calculamos el valor de la altura sobre el lado *QR* $= \sqrt{390^2 - 150^2} = 360$. Por tanto, el área será $\frac{300 \cdot 360}{2} = 54000$, con lo que el área pedida es $54000 - 7140 = 46860$.

**9. (C)** Escribimos $a^{2015} + a^{2016}$ como $a^{2015}(1+a)$. Tenemos que si *a=5* ó *10*, $a^{2015}$ es múltiplo de 5, y si *a=4* ó *9* (1+*a*) lo es. En ningún otro caso será múltiplo de 5, por tanto, los valores posibles de *a* son 4, 5, 9 y 10, en total, cuatro.

**10.(E)** La recta de ordenada en el origen 2 y pendiente *m* corta al eje *OX* en el punto de abscisa $-\frac{2}{m}$, análogamente, las otras rectas cortarán en las abscisas $-\frac{3}{m}$ y $-\frac{4}{m}$. Por tanto, $-\frac{2}{m} - \frac{3}{m} - \frac{4}{m} = -36 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$.

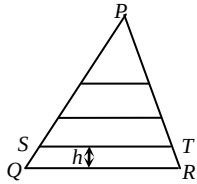
**11.(E)** La ecuación $x^2 + 2kx + 7k - 10 = 0$ tendrá una única solución real si el discriminante de la ecuación de segundo grado es cero. Es decir, $4k^2 - 4(7k-10) = 0 \Rightarrow k^2 - 7k + 10 = 0$ Las soluciones son 5 y 2 que suman 7.

**12.(B)** Despejando cos α obtenemos $\cos\alpha = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

**13.(A)** Prolongando uno de los lados del triángulo equilátero, que no sea el horizontal, hasta que dicha prolongación corte a un lado horizontal del cuadrado, resulta que la hipotenusa del triángulo rectángulo formado, *a*, viene dada por la igualdad $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$, así que una de las lentillas está inscrita en el triángulo rectángulo de cateto 6, hipotenusa $4\sqrt{3}$ y el otro cateto $2\sqrt{3}$. El área de dicho triángulo es $\frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Como en cualquier triángulo, el área es $A=\dfrac{P\cdot r}{2}$, siendo $P$ el perímetro y $r$ el radio del círculo inscrito. Por tanto, tenemos que $6\sqrt{3}=\dfrac{6+6\sqrt{3}}{2}\cdot r$ $\Rightarrow r=\dfrac{6\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=3-\sqrt{3}\,.$

**14.(B)** Empezamos calculando el área del triángulo $PQR$, como el triángulo es isósceles y el lado desigual es el $PQ$, calculamos la altura sobre dicho lado $\sqrt{125^2-75^2}=100$ así que el área del triángulo es $\dfrac{1}{2}\cdot 150\cdot 100=7500$. El área del triángulo $PST$ es $\dfrac{3}{4}\cdot 7500=5625$ y como dicho triángulo es semejante al $PQR$, tenemos que $\dfrac{ST^2}{125^2}=\dfrac{5625}{7500}$, de donde $ST=\dfrac{125\sqrt{3}}{2}$. Finalmente, el área del trapecio $STRQ$, es $\dfrac{1}{4}\cdot 7500$ y también es $\dfrac{1}{2}\left(125+\dfrac{125\sqrt{3}}{2}\right)\cdot h=\dfrac{125}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot h=1875$, despejando $h$ de esta expresión, $h=\dfrac{7500}{125\left(2+\sqrt{3}\right)}=\dfrac{60}{2+\sqrt{3}}=60\left(2-\sqrt{3}\right).$




**15.(A)** Como $a$, $b$ y $c$ están en progresión geométrica cumplen que $a=\dfrac{b}{r}$, $c=b\cdot r$. Así que $abc=b^3 \Rightarrow b^3=46656=2^6\cdot 3^6 \Rightarrow b=36$. Por otro lado, $a+b+c=114$, por tanto, $a+c=114-b=114-36=78$.

**16.(C)** Sumando ambas igualdades, tenemos $x^2+y^2=9\cdot(x+y)$ y restándolas, $x^2-y^2=7(x-y)$ que es lo mismo que escribir $(x+y)(x-y)=7(x-y)$ y como $x\neq y \Rightarrow x+y=7$, por lo que $x^2+y^2=9\cdot 7=63$.

**17.(D)** Para contar los números cuyas cifras suman 3, solo hay que ser un poco ordenados, podremos utilizar las cifras 0, 1, 2 y 3.
De dos cifras tenemos 12, 21 y 30.
De tres cifras tenemos 102, 111, 120, 201, 210, 300.
En total 9 números.

**18.(D)** Tenemos que $p+q=63$ y $s+t=57$. Como los números son consecutivos y las sumas son tan diferentes, está claro que los pequeños serán *s* y *t* y los mayores *p* y *q*. La media de *p* y *q* es 31,5, así que , *p* y *q* serán 31 y 32. Hacemos lo mismo con *s* y *t*, como la media es 28,5, resulta que *s* y *t* serán 28 y 29. Como todos son consecutivos tenemos que *r* es 30.

**19.(A)** Para que el producto sea un cuadrado perfecto no podemos elegir ni 5 ni 7, pues no aparecen un número par de veces. Así que hay que elegir seis números de una lista de siete (1, 2, 3, 4, 6, 8, 9), por tanto, solo sobra uno. Factorizamos los números para que nos ayude en buscar el cuadrado perfecto. 1, 2, 3, $2^2$, $2\cdot3$, $2^3$, $3^2$. Para que el producto sea un cuadrado perfecto sobra el 2 ó 8. Por tanto, los dos números son $m^2=2^6\cdot3^4$ y $n^2=2^4\cdot3^4$. Por lo que *m* = 72, *n* = 36. El valor de *m* + *n* es 108.

**20.(E)** Son las variaciones con repetición de 3 elementos (7, 8 y 9) tomadas de 3 en 3, o sea, $3^3$=27 .

**21.(D)** La recta *t* forma con la recta *s* ($y$ = 0) un ángulo de 60º, ya que la pendiente es $\sqrt{3}$, por lo que la bisectriz interior de *t* y *s* formará un ángulo de 30º con ambas, por tanto, la pendiente de dicha bisectriz será $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y su ecuación $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ siendo la ordenada de *D*, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(13-1)=\frac{12}{\sqrt{3}}$.

**22.(A)** Alicia gana en los siguientes casos: $C_A$ , $+_A\ +_B\ C_A$ , $+_A\ +_B\ +_A\ +_B\ C_A$ . Por tanto la probabilidad de que gane será. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{21}{32}$.

**23.(A)** Como *a*, *b* y *c* están en progresión aritmética, podemos escribir $a=b-d$, $c=b+d$ , de este modo, $3a+b=4b-3d$, $3b+c=4b+d$, $3c+a=4b+2d$ y como éstos están en progresión geométrica, tenemos $(4b+d)^2=(4b-3d)(4b+2d)\Rightarrow16b^2+8bd+d^2=16b^2-4bd-6d^2$

$\Rightarrow12bd=-7d^2$, como $d\neq0$ pues en otro caso *a*=*b*=*c* y 17955 no es un cubo perfecto, resulta que $d=-\frac{12}{7}b$, por tanto, $a=\frac{19}{7}b$, $c=-\frac{5}{7}b$. Y como $a\cdot b\cdot c$=17955, tenemos entonces $\frac{19}{7}b\cdot b\cdot\left(-\frac{5}{7}b\right)=17955\Rightarrow b^3=-9261\Rightarrow b=-21$ en cuyo caso, *a*=-57, *c*=15 y entonces, $a+b+c$= -63.

**24.(E)** Poniendo $5x^2 - 4xy + 2x + y^2$ como $4x^2 - 4xy + 2x + y^2 + x^2$ y sumando 1 a cada término de la ecuación, nos queda $4x^2 - 4xy + 2x + y^2 + x^2 + 1 = 625$, $(2x - y)^2 + (x + 1)^2 = 25^2$. Las únicas parejas cuya suma de cuadrados da 625 son (0, 25), (15, 20), (7, 24). Si llamamos *m* al primer término ($2x - y$) y *n* al segundo ($x + 1$), tenemos que $x = n - 1$, $y = 2n - m - 2$.

Para que se cumpla la condición del enunciado ($0 \le x \le y$), *n* tiene que ser mayor o igual a 1 y los *m* negativos siempre serán válidos. Por tanto las parejas (*m*, *n*) válidas por el momento son (–15, 20), (–20, 15), (–24, 7), (–7, 24). Probando con el resto de parejas (*m*, *n*) posibles y comprobando si $y \ge x$ , vemos que también sirven (0, 25), (15, 20), (7, 24). En total 7.

**25.(A)** Sin haber restricciones habría 8! formas de distribuir las tarjetas, habrá que quitarles aquellas donde esté bien la tarjeta 1 (7!), la tarjeta 2 (7!), la tarjeta 3 (7!), pero hemos quitado de más, aquellas donde está bien la 1 y la 2 que las hemos contado dos veces (6!), y la 1 y la 3 (6!) y la 2 y la 3 (6!), ahora hemos puesto de más, hay que quitar los casos donde estén bien la 1, la 2 y la 3 (5!). Así que el número pedido es:

$$8! - 3 \cdot 7! + 3 \cdot 6! - 5! = 5! \left(8 \cdot 7 \cdot 6 - 3 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 6 - 1\right) = 5! \cdot 217 = 27\,240$$

# Participantes y relación de ganadores del XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

En la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes de más de 500 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3477 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3104. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | NIVEL 2 | | NIVEL 3 | | NIVEL 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | | 1º ESO, 2º ESO | | 3º ESO, 4º ESO | | 1º B, 2º B | |
| nº de participantes | 231 | 504 | 395 | 617 | 389 | 509 | 258 | 201 |
| Totales por nivel | 735 | | 1012 | | 898 | | 459 | |

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

1. Pablo Ruiz Torralba (Majadahonda) (6º Primaria) Colégio San Luis Gonzaga
2. Enrique Matorras Muñoz (Collado Villalba) (6º Primaria) Colégio Laude Fontenebro II
3. Álvaro Gamboa Rodríguez (5º Primaria) CP Escuelas Bosque

**NIVEL II**

1. Nicolás Rey Rodríguez (2º ESO) Colegio Fray Luis de León
2. Alejandro García Martinez de G. (1º ESO) Colegio Mirabal (Villanueva de la Cañ.)
3. Miguel Balo Mejías (2º ESO) Colégio de Jesús (Barajas)

**NIVEL III**

1. Martín Gómez Abejón (4º ESO) IES Ramiro de Maeztu
2. Alonso M. Mayorga Nieto (3º ESO) Colegio San Pablo CEU (Montepríncipe)
3. Alejandro Epelde Blanco (4º ESO) Montessori School (Alpedrete)
4. Alberto Almagro Sánchez (4º ESO) IES Ramiro de Maeztu

**NIVEL IV**

1. Ismael Morales López (2º Bchto) IES Al Satt (Algete)
2. Jia Jie Tao (1º Bchto) IES San Mateo
3. Diego José Sánchez Martín (2º Bchto) Colegio Virgen de Mirasierra

## RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XX CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2016

| NIVEL I | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| COLEGIO NTRA SRA BUEN CONSEJO | Madrid | 319 |
| COLEGIO SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 277 |
| COLEGIO AMANECER | Alcorcón | 275 |
| COLEGIO AGUSTINIANO | Madrid | 267 |
| COLEGIO SAINT ANNE'S SCHOOL | Madrid | 264 |
| COLEGIO LOPE DE VEGA | Alcalá de Henares | 262 |
| CP ASUNCIÓN RINCÓN | Madrid | 261 |
| COLEGIO SAN AGUSTÍN | Madrid | 260 |
| COLEGIO CHAMBERÍ | Madrid | 258 |
| CP NTRA SRA DEL VAL | Alcalá de Henares | 254 |
| COLEGIO AMORÓS | Madrid | 254 |

| NIVEL II | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| COLEGIO CORAZÓN DE MARÍA | Madrid | 294 |
| COLEGIO SAN AGUSTÍN | Madrid | 289 |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 274 |
| COLEGIO RETAMAR | Pozuelo de Alarcón | 258 |
| COLEGIO JOYFE | Madrid | 249 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 247 |
| IES LEONARDO DA VINCI | Majadahonda | 246 |
| IES CERVANTES | Madrid | 244 |
| COLEGIO FRAY LUIS DE LEÓN | Madrid | 244 |
| COLEGIO CARDENAL SPÍNOLA | Madrid | 243 |

| NIVEL III | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES EL BURGO DE LAS ROZAS | Las Rozas | 281 |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 273 |
| COLEGIO RETAMAR | Pozuelo de Alarcón | 258 |
| IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO | Tres Cantos | 252 |
| IES CERVANTES | Madrid | 251 |
| MONTESSORI SCHOOL LOS FRESNOS | Alpedrete | 250 |
| COLEGIO CORAZÓN DE MARÍA | Madrid | 248 |
| IES FORTUNY | Madrid | 246 |
| COLEGIO INTERNACIONAL NUEVO CENTRO | Madrid | 245 |
| COLEGIO ARCÁNGEL RAFAEL | Madrid | 242 |

| NIVEL IV | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES SAN MATEO | Madrid | 284 |
| COLEGIO VILLA DE GRIÑÓN | Madrid | 271 |
| IES FORTUNY | Madrid | 242 |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 234 |
| COLEGIO BASE | Alcobendas | 231 |
| COLEGIO INTL. SEK-EL CASTILLO | Villanueva de la Cañ. | 200 |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 199 |
| RUNNYMEDE COLLEGE | Alcobendas | 197 |
| IES EL ESPINILLO | Madrid | 192 |
| IES JUAN DE LA CIERVA | Madrid | 190 |

# XXXIV CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

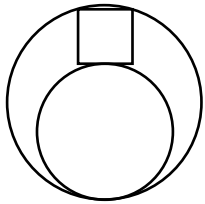
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 11 de junio de 2016

**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

Juan efectúa las mil divisiones enteras siguientes: 2016 entre 1, 2016 entre 2, 2016 entre 3, y así hasta llegar a 2016 entre 1000. ¿Cuál es el mayor resto que ha obtenido?

**Problema 2.** (7 puntos)



En la figura se observan dos circunferencias tangentes interiores y un cuadrado, uno de cuyos lados es tangente a la circunferencia pequeña, estando los vértices opuestos a ese lado en la circunferencia mayor. Si los radios de las circunferencias son 50 cm y 35 cm, calcula la longitud del lado del cuadrado.

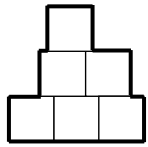
Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
En mi clase de Alemán somos 10 estudiantes y la nota media de toda la clase es 6,4. Las notas de las chicas han sido mejores que las de los chicos, pues han sacado un 7 de media mientras que la media de los chicos ha sido un 5. ¿Cuántas chicas hay en mi clase?

**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior. En la figura se observan cuatro semicircunferencias cuyos centros están alineados. Si el perímetro de la figura es $P$ y el radio de la mayor es $\frac{T}{14}$ , calcula $\frac{P}{\pi}$

.**Problema 3A.** (2 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Con seis cuadrados de lado $T$ formamos la figura que ves. ¿Cuál es su perímetro?



**Problema 1B.** (1 punto)

Calcula el número $n$ para que $20^{2016} = 10^{2000} \cdot 40^{16} \cdot 2^n$

**Problema 2B.** (1,5 puntos)

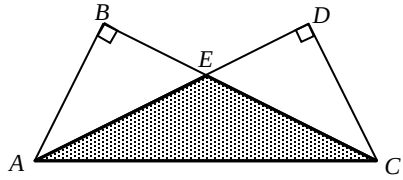
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k$ la suma de sus cifras.

Una planta de $k$ cm de altura crece a un ritmo de 3 cm cada 2 años. Una segunda planta de 58 cm de altura crece a un ritmo de 5 cm cada 6 años. Si ambas duraran mucho tiempo, ¿dentro de cuántos años tendrían la misma altura?

**Problema 3B.** (2 puntos)

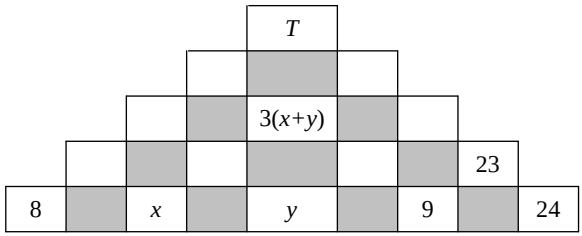
Sea $T$ la respuesta del problema anterior.

En la figura que observas, $AB = DC = T$, $BC = AD = 72$ y los ángulos en $B$ y $D$ son rectos. Calcula el área del triángulo $AEC$.




**Problema 4.** (5 puntos)

Sea $a$ la respuesta del problema 3A, $b$ la respuesta del problema 3B y $T$ la suma de las cifras de $a \cdot b$. En el diagrama que observas, el número que aparece en cada casilla en blanco es la suma de los de las casillas en blanco que tiene inmediatamente debajo. Calcula $\frac{x}{y}$.



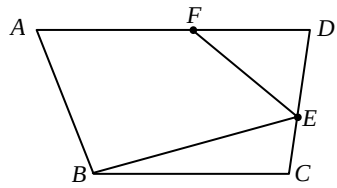
**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

Escribe todas las parejas de enteros positivos $(x, y)$ que verifican la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{540}{xy}=2$

**Problema 2.** (7 puntos)

En el trapecio *ABCD* de la figura se verifica que el cociente entre las longitudes de las bases es $\frac{BC}{AD}=\frac{5}{7}$. Los puntos *E* y *F* están en los lados *CD* y *DA* respectivamente y verifican que $\frac{CE}{ED}=\frac{2}{3}$, $\frac{AF}{FD}=\frac{4}{3}$.




Si el área del cuadrilátero *ABEF* es 123, calcula el área del trapecio.

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)

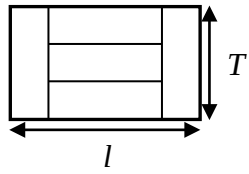
El área de un hexágono regular de lado *h* es el triple del área de un cuadrado de lado *l*.

Calcula $\frac{l^4}{h^4}$ y expresa dicho cociente como fracción irreducible.

**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea $\frac{a}{b}$ (irreducible) la respuesta del problema anterior y $T = ab$. Con cinco rectángulos idénticos formamos otro grande como muestra la figura.

Si la anchura de este rectángulo grande es *T* cm, ¿cuál es su longitud, *l* ?




**Problema 3A.** (2 puntos)

Sea *T* la respuesta del problema anterior. En una bolsa hay nueve bolas numeradas con números enteros positivos. Cuatro de ellas tienen números impares cuya suma es $T + 4$ y las restantes, números pares, en concreto: 4, 8, 12, 18 y 32. Luis coge cuatro bolas y al coger Ana otras cuatro se da cuenta de que las que eligió ella suman el triple de las que eligió Luis. ¿Qué bola no cogió ninguno de los dos?

**Problema 1B.** (1 punto)

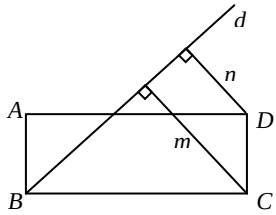
Sea *p* un número primo. Hace *p* años, las edades de tres niños estaban en progresión geométrica de suma *p* y razón 2. ¿Cuál es la suma de las edades actuales de los tres?

**Problema 2B.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Se pretende dividir un cono de altura $\frac{T}{7}$ en dos partes de igual volumen mediante un plano paralelo a la base. ¿A qué distancia del vértice debe estar el plano?

**Problema 3B.** (2 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = T^3 - 2$.
Cuando Ali tenía la edad de Billy, Celi tenía el doble de la edad de Billy.
Cuando Celi tenía la edad de Ali, Billy tenía $k$ años.
Cuando Billy tenga la edad de Celi, Ali tendrá 88 años.
Cuando Billy tenga la edad de Ali, ¿cuál será la suma de las edades de los tres?




**Problema 4.** (5 puntos)

Sea $a$ la respuesta del problema 3A, $b$ la respuesta del problema 3B y $m$ y $n$ las sumas de las cifras de $a$ y $b$ respectivamente. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, triple de largo que de ancho, la recta $d$ pasa por el vértice $B$ y dista $m$ y $n$ de los vértices $C$ y $D$ respectivamente. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

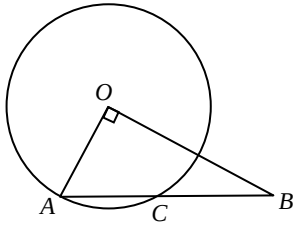
**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

Sea $f$ una función tal que, para todo $x$ se verifica que $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$. Si $f(20) = 16$ y $f(16) = 20$, calcula $f(2016)$.

**Problema 2.** (7 puntos)

En la figura se observa una circunferencia de centro $O$ y un triángulo $OAB$, rectángulo en $O$ siendo $A$ un punto de la circunferencia. La hipotenusa $AB$ vuelve a cortar a la circunferencia en el punto $C$ siendo $AC = 8$ y $CB = 10$. Calcula $\cos\hat{B}$.




Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)

Cuando un triángulo rectángulo gira sobre un cateto, el volumen del cono obtenido es $800\pi$ cm$^3$ y cuando gira sobre el otro, $1920\pi$ cm$^3$. ¿Cuál es, en cm, la longitud de la hipotenusa del triángulo?

**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = T - 2$.

¿Cuántos cuadrados perfectos, menores que $10^6$ son múltiplos de $k$?

**Problema 3A.** (2 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k$ el producto de sus cifras.

Si $N$ es un número formado por las seis cifras 1, 2, 3, 3, 4 y 5 (en algún orden), calcula el menor valor de $N$ divisible por $11k$.

**Problema 1B.** (1 punto)

Calcula $\frac{2}{\log_4\left(2000^6\right)}+\frac{3}{\log_5\left(2000^6\right)}$ dando el resultado como fracción irreducible.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)

Sea $T = m+n$, siendo $\frac{m}{n}$ la respuesta del problema anterior.

En el cuadrado *ABCD*, los puntos *E* y *F* están en los lados *AD* y *BC* respectivamente, de forma que $BE = EF = FD = T+3$. Calcula el área de dicho cuadrado.

**Problema 3B.** (2 puntos)

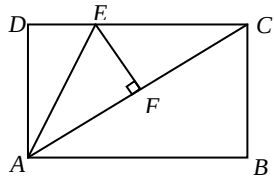
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k=\frac{T}{15}$.

Si *P(x, y)* es un punto de la circunferencia $x^2+y^2-14x-6y=k$, ¿cuál es el mayor valor posible para $3x+4y$?

**Problema 4.** (5 puntos)

Sea *a* la respuesta del problema 3A, *b* la respuesta del problema 3B y *m* y *n* las sumas de las cifras de *a* y *b* respectivamente.

En el rectángulo *ABCD*, el punto *E* está en *CD* de forma que $B\hat{A}C = E\hat{A}D$ y el punto *F* está en la diagonal *AC* siendo $EF \perp AC$. Si el área del triángulo *ABC* es *m* y el área del triángulo *CEF* es *n*, calcula el seno de $C\hat{A}E$.



**XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

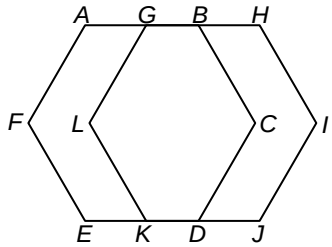
19 de noviembre de 2016

**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** El cuadrado de la figura es mágico respecto del producto, es decir, el producto de los tres números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es el mismo. Si en ninguna casilla hay un cero, complétalo.

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 32 | |
| 16 | 8 | |

**2.** Los hexágonos regulares *ABCDEF* y *GHIJKL* de la figura son iguales siendo la longitud de cada lado 24 cm. Estos hexágonos se solapan pues *G* está en el lado *AB*, *B* está en *GH*, *K* en *DE* y *D* en *JK*. Si el área del hexágono *GBCDKL* es la mitad de la del *ABCDEF*, calcula la longitud *FL*.




**3.** Escribe todas las parejas de números de dos cifras, de la forma [*ab*] y [*ac*] tales que la suma de sus cuadrados sea 1313.

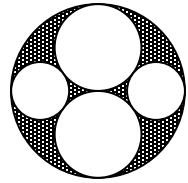
**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** Completa el siguiente "crucinúmeros". Cada uno de los tres números en horizontal es un número de cuatro cifras (Ninguno empieza por cero).

1H: Cubo de la suma de las cifras de 1V
2H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente
3H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente
1V: Cuarta potencia de un número entero
2V: Cuadrado perfecto
3V: Sus cifras están en progresión geométrica
4V: Uno de sus factores primos es un número de dos cifras.

| | 1V | 2V | 3V | 4V |
|---|---|---|---|---|
| 1H | | | | |
| 2H | | | | |
| 3H | | | | |

**2.** En la figura se observan cinco circunferencias tangentes entre sí: dos pequeñas iguales, dos medianas también iguales y una grande. Si el radio de la circunferencia grande es $\frac{30}{\sqrt{\pi}}$, calcula el área sombreada.



**3.** Encuentra el mayor número de cuatro cifras que es igual a la suma de los factoriales de sus centenas, decenas y unidades.

**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato. (45 minutos)

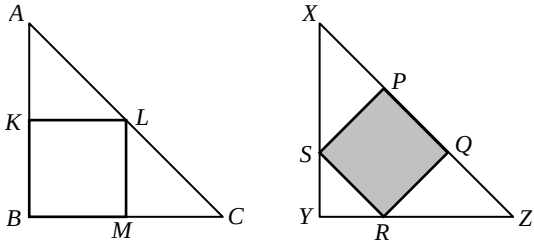
**1.** Encuentra todos los números primos $p$ para los que $p^2 + 21p - 1$ es también un número primo.

**2.** La función $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 4x - 4}$ es negativa en dos intervalos de R. Calcula la suma de las longitudes de estos intervalos.

**3.** Calcula el menor entero positivo $t$ que verifica la ecuación $2^{13} + 2^{10} + 2^x = t^2$ en la que $x$ es un entero positivo.

**PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** En la figura se observan dos triángulos rectángulos isósceles iguales, *ABC* y *XYZ* y dos cuadrados *KLMB* y *PQRS*. Si el área del cuadrado *KLMB* es 189, ¿cuál es el área del cuadrado *PQRS*?



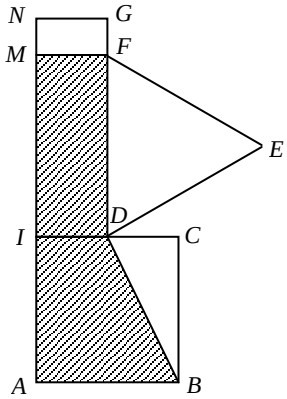

***2.*** En un edificio de apartamentos la mitad de las ventanas tienen cortinas, la cuarta parte de las ventanas tienen macetas con flores y la sexta parte tienen cortinas y macetas con flores. Hay 375 ventanas que no tienen ni cortinas ni macetas con flores. Por otra parte sabemos que un quinto de los apartamentos tienen 5 ventanas, dos quintos de los apartamentos tienen 3 ventanas y el resto tienen 2 ventanas. ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio?

**3.** ¿Cuántos números, de los cien primeros enteros positivos, verifican que sus inversos tienen un desarrollo decimal periódico?

**4.** El rectángulo *DGNI*, el cuadrado *ABCI* y el triángulo equilátero *DEF* tienen 24 cm de perímetro cada uno de ellos. *D* es el punto medio de *IC* y *MF* es paralelo a *NG*.

i. ¿Cuál es el área de la figura sombreada de vértices *ABDFM*?

ii. ¿Cuál es el perímetro de la figura de vértices *ABCDEFGN*?



## PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

**1.** ¿Cuántos enteros positivos, menores que 2016, pueden escribirse como diferencia de dos cuadrados perfectos?

**2.** En un hexágono regular de lado 1 consideramos los veinte triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Calcula la media de las áreas de estos veinte triángulos.

**3.** Un fabricante de tres productos, de precios unitarios 50, 65 y 70 €, recibe un pedido de 100 unidades por un total de 6850 € con la condición de que envíe el máximo número posible del producto más caro. ¿Cuántas unidades de cada producto debe enviar?

**4.** Los cinco hermanos Pérez se llevan muy bien y han pasado un verano bastante entretenido. Cada uno de los seis días de la semana, de lunes a sábado, cuatro de ellos hacían una determinada actividad siendo 38, 35, 36, 36, 38 y 39 la suma de las edades de los cuatro. Si ninguno estuvo los seis días, averigua las edades de cada uno de los cinco.

## PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

**1.** Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo la suma de los inversos de las longitudes de los catetos es igual al inverso de la distancia del pie de la bisectriz del ángulo recto a cualquiera de los catetos.

**2.** Las ecuaciones $x^3 + Ax + 10 = 0$ y $x^3 + Bx^2 + 50 = 0$ tienen dos raíces comunes. Calcula el producto de estas dos raíces comunes.

**3.** En una reunión de afectados por un accidente nuclear, cada uno de los asistentes tiene 3, 4, 5, 6 ó 7 dedos en cada mano, siendo $p(k) = \dfrac{2^{2-|5-k|}}{10}$ la probabilidad de tener $k$ dedos en una mano. Si el número de dedos en la mano izquierda es independiente del número de dedos en la mano derecha, calcula la probabilidad de que un asistente elegido al azar tenga al menos 10 dedos entre ambas manos.

**4.** ¿Cuántos enteros no negativos $x$ verifican la ecuación $\left[\dfrac{x}{44}\right] = \left[\dfrac{x}{45}\right]$?

(Recuerda: $[a]$ es la parte entera de $a$, es decir, el mayor entero menor o igual que $a$)

## PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

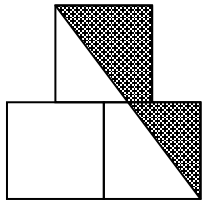
**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** Los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* están alineados en ese orden. Si *PR* = 15 cm, *QS* = 12 cm y *PS* = 20 cm, calcula, en cm, la distancia entre *Q* y *R*.

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "T" la respuesta del problema 2B

En la figura adjunta se observan tres cuadrados iguales de lado $\frac{T}{7}$ cm y tal que el punto medio del lado inferior del cuadrado de arriba es un vértice de los de abajo. ¿Cuántos $cm^2$ tiene el área sombreada?



**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Isa y Alicia parten al mismo tiempo de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular y corren a distintas velocidades y en sentido contrario. Cuando se encuentran la primera vez Alicia ha recorrido *T* metros y, desde ese momento y hasta que se encuentran por segunda vez, Isa ha recorrido $\frac{3T}{2}$ metros. Si sus velocidades son constantes, ¿cuál es la longitud, en metros, de la pista?

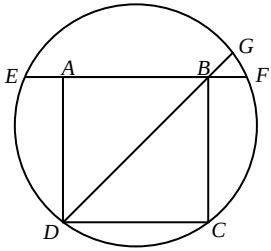
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3º y 4º de ESO.-**

.

**2A.-** Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la figura adjunta observas un cuadrado *ABCD*, de lado *T*, dos de cuyos vértices, *C* y *D*, están en una circunferencia. Si la cuerda *EF* tiene longitud 98 y la cuerda *DG* pasa por *B*, calcula *BG*.




**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**2B.-** Hoy es el cumpleaños de tres chicos cuya suma de edades es 44 años. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que dicha suma vuelva a ser un número con dos cifras iguales?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas y las rectas $x + y = T$, $x + y = T - 10$.

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "T" la respuesta del problema 1A.
Considera los diez enteros positivos más pequeños que puedas, de forma que haya exactamente $T$ divisibles entre $T$, y exactamente $T - 2$ divisibles entre $T - 2$. ¿Cuál es el mayor de los diez números?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**3B.-** Sea "T" la respuesta del problema 1B y $k$ la suma de las cifras de $T$.
En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es $k$ veces la longitud de la altura sobre ella. Calcula el cociente entre las longitudes del mayor y el menor de los segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** Si $a$, $b$ y $c$ son enteros positivos con $a + b + c = 7$, calcula el menor valor posible para $a^2 + b^2 + c^2$.

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

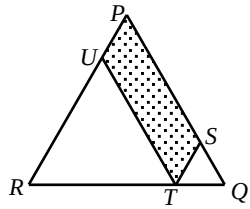
**LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: viernes 25 de noviembre de 2016**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

**1.** Si el perímetro del triángulo equilátero *PQR* es 48 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro del paralelogramo *PSTU* ?



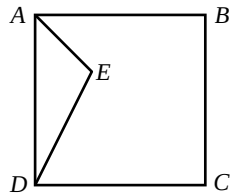

A) 26 B) 28 C) 30 D) 32

E) 34

**2.** La media, mediana y moda del conjunto de siete números 60, 100, $x$, 40, 50, 200 y 90 son todas iguales a $x$. ¿Cuál es el valor de $x$?

A) 50 B) 60 C) 75 D) 90 E) 100

**3.** En el dibujo que observas, el perímetro del cuadrado *ABCD* es 120 y el perímetro del triángulo *AED* es 2$x$. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al perímetro del pentágono *ABCDE*?




A) 120 + 2$x$ B) 40 + 2$x$ C) 60 + 2$x$ D) 90 + 2$x$

E) 30 + 2$x$

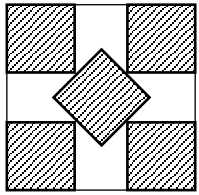
**4.** Las dimensiones de una caja de base rectangular vienen expresadas por números enteros y están en la proporción 1 : 3 : 4. ¿Cuál de los siguientes números puede corresponder al volumen de la caja?

A) 18 B) 56 C) 72 D) 96 E) 144

**5.** En cierto campamento de verano cada uno de los 100 estudiantes que hay sabe cantar, bailar o hacer teatro pero ninguno sabe hacer las tres cosas. Hay 42 que no saben cantar, 65 que no saben bailar y 29 que no saben hacer teatro. ¿Cuántos estudiantes saben hacer dos de estas tres cosas?

A) 16 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

**6.** En el interior de un cuadrado de lado 1 hemos dibujado cinco cuadrados iguales como muestra la figura. El punto medio de cada uno de los lados del cuadrado central coincide con uno de los vértices de cada uno de los otros cuatro cuadrados. Si la longitud del lado de cada uno de estos cinco cuadrados es $\frac{a-\sqrt{2}}{b}$ con $a$ y $b$ enteros positivos, $a + b$ es igual a:



A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

**7.** ¿Qué porcentaje de números de cuatro cifras diferentes, todas impares, son divisibles entre 3?

A) 80% B) 25% C) 33% D) 40% E) 75%

**8.** El número $33^{33}$ podemos escribirlo como la suma de 33 impares consecutivos. El mayor de todos ellos es:

A) $33^{32} + 32$ B) $33^{31} + 32$ C) $33^{32} - 32$ D) $33^{33} - 32$ E) $33^{32}$

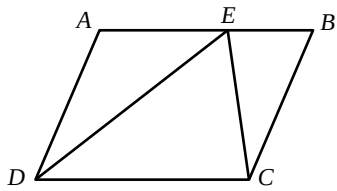
**9.** ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$123\,456\,785 \cdot 123\,456\,782 - 123\,456\,783 \cdot 123\,456\,784$$

(Como ves, se trata de una resta y productos de números de nueve cifras)

A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 2 E) Nada de lo anterior

**10.** En el paralelogramo *ABCD* de la figura, se verifica que $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$. ¿Cuál es el cociente entre el área del cuadrilátero *AECD* y el área del paralelogramo *ABCD*?

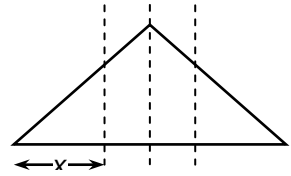



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

**11.** La diferencia entre una fracción positiva y su inversa es $\frac{9}{20}$. ¿Cuál es la suma de dicha fracción y su inversa?

A) $\frac{41}{40}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{25}{16}$ D) $\frac{41}{20}$ E) 5

**12.** La base (lado desigual) del triángulo isósceles de la figura tiene 12 cm de longitud. Trazando tres rectas perpendiculares a la base, dividimos dicho triángulo en cuatro partes de igual área. ¿Cuál es la longitud del segmento $x$?




A) $3\sqrt{2}$ B) 4 C) 4,5 D) 5 E) $3\sqrt{3}$

**13.** Una recta que pasa por el origen de coordenadas corta a las rectas $x = 1$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ formando un triángulo equilátero. ¿Cuál es el perímetro de este triángulo?

A) $2\sqrt{6}$ B) $2 + 2\sqrt{3}$ C) 6 D) $3 + 2\sqrt{3}$ E) $6 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

**14.** Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - 2ax + 2a$ con el eje de abscisas tienen coordenadas enteras. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de $a$?

A) 7 B) 8 C) 16 D) 17 E) 18

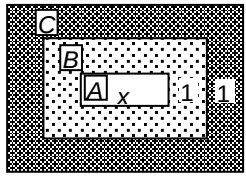
**15.** Ali, Bea y Celia escogen al azar un número entre los diez primeros enteros positivos, siendo diferentes todos los escogidos.¿Cuál es la probabilidad de que el número de Ali sea múltiplo del de Bea y el de Bea sea múltiplo del de Celia?

A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{1}{72}$ C) $\frac{1}{80}$ D) $\frac{1}{90}$ E) $\frac{3}{200}$

**16.** De cuántas formas podemos escribir 345 como suma de una lista creciente de dos o más enteros positivos consecutivos?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

**17.** En el interior del rectángulo grande dibujamos otros dos cuyos lados son paralelos a los del primero, como muestra la figura. Si las áreas de las tres regiones, *A*, *B* y *C*, están en progresión aritmética, la altura del rectángulo pequeño es 1 cm y la anchura de las regiones *B* y *C* también es de 1 cm, ¿cuánto mide la base, *x*, del rectángulo pequeño?




A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

**18.** Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $P(a, b)$, $Q(b, a)$, $R(-a, -b)$ y $S(-b, -a)$, siendo $a$ y $b$ enteros y $a > b > 0$. Si el área de dicho cuadrilátero es 16, ¿cuál es el valor de $a + b$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 12 E) 13

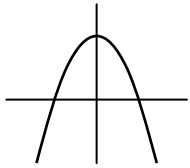
**19.** ¿Cuál es la suma de las soluciones positivas de la ecuación $\left(x^2-x\right)^2=18\left(x^2-x\right)-72$ ?

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 18

**20.** Si $x$ es cualquier número real, el menor valor que toma la expresión $x^2-4x+3$ es:

A) –1 B) 0 C) 1 D) 3 E) –3

**21.** La gráfica de la parábola $y=ax^2+bx+c$ es la que observas, cuyo vértice está en el eje de ordenadas. ¿Qué afirmación de las siguientes tiene que ser verdadera?



A) $a+b+c=0$ B) $a+b-c<0$ C) $a-b+c<0$
D) $a+b+c<0$ E) No hay información suficiente.

**22.** Si $p(x)=(x-2)^{2016}(x+2016)+(x-2)^{2015}(x+2015)+\ldots+(x-2)(x+1)$ la suma de los coeficientes del polinomio $p(x)$ es:

A) 1008 B) 2016 C) 2027090 D) 0 E) 1

**23.** En un cuadrante de una circunferencia inscribimos otra circunferencia, como muestra la figura 1. ¿Cuál es el cociente entre el área del círculo pequeño y el área del cuadrante?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $3\left(2-\sqrt{3}\right)$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$

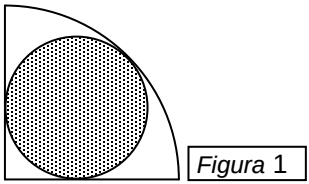


*Figura* 1

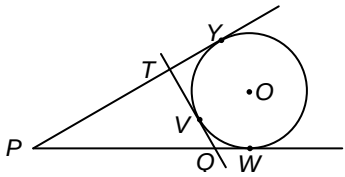



*Figura* 2

**24.** En el triángulo $PQT$ de la figura 2, $PQ$ = 10 cm, $QT$ = 5 cm y el ángulo $\angle PQT = 60^{\circ}$. Los puntos $Y$, $W$ y $V$ son los puntos de tangencia de la circunferencia de centro $O$ con las rectas que determinan los lados del triángulo. ¿Cuál es, en cm, el radio de dicha circunferencia?

A) $5\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$ B) $\frac{5\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$ C) $\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{25\sqrt{3}}{6}$

**25.** Seleccionamos al azar tres enteros diferentes entre 1 y 2016, ambos inclusive. Si llamamos $p$ a la probabilidad de que el producto de los tres sea impar, entonces:

A) $p<\frac{1}{8}$ B) $p=\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{8}<p<\frac{1}{3}$ D) $p=\frac{1}{3}$ E) $p>\frac{1}{3}$

**26.** ¿Cuál es el área encerrada por la gráfica de la curva $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

A) $\pi + \sqrt{2}$ B) $\pi + 2$ C) $\pi + 2\sqrt{2}$ D) $2\pi + \sqrt{2}$ E) $2\left(\pi + \sqrt{2}\right)$

**27.** La gráfica de $x^2(x + y + 1) = y^2(x + y + 1)$ está formada por:

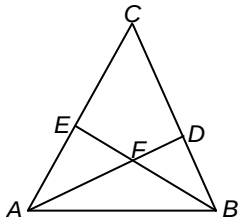
A) Dos rectas paralelas B) Dos rectas que se cortan C) Una recta y una parábola

D) Tres rectas concurrentes en un punto E) Tres rectas no concurrentes en un punto

**28.** Los tres vértices del triángulo *ABC* están en la gráfica de la parábola $y = x^2$. El vértice *A* es el origen de coordenadas y el lado *BC* es paralelo al eje de abscisas. Si el área del triángulo es 64, ¿cuál es la longitud del lado *BC*?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 16

**29.** En el triángulo *ABC* de la figura de lados *AB* = 6, *BC* = 7 y *CA* = 8, las bisectrices *AD* y *BE* de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ respectivamente, se cortan en el punto *F*. ¿Cuál es el cociente $\frac{AF}{FD}$?




A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

**30.** En el triángulo *PQR*, el ángulo $\hat{R}$ es el doble del ángulo $\hat{P}$, *PR* = 5 y *QR* = 4. ¿Cuál es la longitud del lado *PQ*?

A) $2\sqrt{10}$ B) 6 C) 7 D) $2\sqrt{7}$ E) $5\sqrt{2}$

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

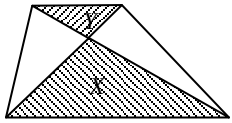
**Comunidad de Madrid**

**FASE LOCAL:** segunda prueba. Viernes 21 de diciembre de 2016
Tiempo: 3h 30 min

**1.** El producto de dos números del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ es igual a la suma de los restantes. Encuentra dichos números.

**2.** Un "capicúa" es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. (Por ejemplo, 323 ó 19591). ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor capicúa, si ambos son de cinco cifras y múltiplos de 45?

**3.** Dividimos el trapecio de la figura en cuatro triángulos trazando las diagonales. Si *X* e *Y* son las áreas de los triángulos sombreados, obtén en función de *X* e *Y* el área del trapecio.

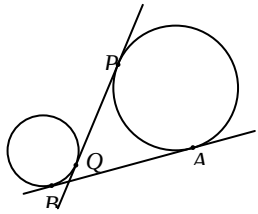



**4.** Considera las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ en las que *a*, *b* y *c* son números primos de una sola cifra. ¿En cuántas de estas ecuaciones hay al menos una solución entera?

**5.** En una bolsa hay bolas rojas y bolas azules, en total menos de 2016. Sabemos que la probabilidad de que al coger dos bolas (sin reemplazamiento) sean ambas del mismo color, es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es el máximo número de bolas rojas que puede haber en la bolsa?

**6.** Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - ax + 2a$ con el eje de abscisas, tienen coordenadas enteras. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de *a*?

**7.** El dibujo muestra dos circunferencias y dos rectas tangentes a ambas siendo *A, B, P* y *Q* los puntos de tangencia. Si la longitud del segmento *PQ* es 14 y la del *AB* es 16, calcula el producto de los radios de las circunferencias.



**8.** En una circunferencia de centro *O* y diámetro *AB* marcamos un punto *C* (distinto de *A* y *B*) desde el que trazamos la perpendicular al diámetro *AB*, al que corta en el punto *D*. Si *M* es un punto de la cuerda *BC* tal que $B\widehat{M}O = 90^{\circ}$ y $DB = 3 \cdot OM$, calcula el ángulo $A\hat{B}C$.

**9.** Hay un único triángulo *ABC* para el que $AC = 14$, $\cos A = \frac{4}{5}$ y el radio del círculo inscrito es 4. Calcula el área de dicho triángulo.

**10.** Sean *x*, *y*, *z* números reales tales que: $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{x+y+z}{2}$. Determinar el valor de $x + 2y + 3z$.

# LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## Prueba de selección
## Comunidad de Madrid

**Primera sesión, viernes 13 de enero de 2017**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Describir todas las soluciones enteras positivas $(m, n)$ de la ecuación $8m - 7 = n^2$, y dar, si existe, el primer valor de $m$ mayor que 1959.

2. (a) Se colorean los números del conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., 2017\}$ en dos colores, rojo y azul. Demostrar que es posible hacerlo de manera que si $x, y, z$ son números de $A$, no necesariamente distintos, verificando $8(x + y) = z$, los números $x, y, z$ tengan los dos colores.
   (b) Determinar el mayor valor de $n$ para el que es posible colorear en rojo y azul los números del conjunto $X = \{1, 2, 3, ..., n\}$, de modo que cualquier terna $(x, y, z)$ de números de $X$, no necesariamente distintos, verificando $8(x + y) = z$, tenga los dos colores.

3. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio $\boldsymbol{P}$ que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de $\boldsymbol{P}$ sigue siendo una raíz de $\boldsymbol{P}$.

**Segunda sesión, Sábado 16 de enero de 2016**
Tiempo: 3 horas y media

4. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de:
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b+c-2} = 1$$

5. Demostrar que hay infinitos números primos que dan de resto 2 al ser divididos entre 3. .

6. El triángulo $ABC$ es acutángulo. Los pies de las alturas trazadas desde $A$, $B$ y $C$ son los puntos $D$, $E$ y $F$ respectivamente.
   Demostrar que $DE + DF \leq BC$ y caracterizar los triángulos para los que se obtiene la igualdad.

**XXII$^a$ OLIMPIADA de MAYO**
**Primer Nivel**
**Mayo de 2016**

Olimpíada de Mayo
*Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática*

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

## PROBLEMA 1

En una hoja están escritos siete números enteros positivos diferentes. El resultado de la multiplicación de los siete números es el cubo de un número entero. Si el mayor de los números escritos en la hoja es $N$, determinar el menor valor posible de $N$. Mostrar un ejemplo para ese valor de $N$ y explicar por qué no es posible que $N$ sea más pequeño.

## PROBLEMA 2

En una competición deportiva en la que se realizan varias pruebas, solo participan los tres atletas $A$, $B$, $C$. En cada prueba, el ganador recibe $x$ puntos, el segundo recibe $y$ puntos y el tercero recibe $z$ puntos. No hay empates y los números $x$, $y$, $z$ son enteros positivos distintos con $x$ mayor que $y$ e $y$ mayor que $z$.
Al terminar la competición resulta que $A$ ha acumulado 20 puntos, $B$ ha acumulado 10 puntos y $C$ ha acumulado 9 puntos. Sabemos que el atleta $A$ fue segundo en la prueba de 100 metros. Determinar cuál de los tres atletas resultó segundo en la prueba de salto.

## PROBLEMA 3

En el triángulo $ABC$ se marcaron el punto $D$ en el lado $BC$ y el punto $E$ en el lado $AC$ de manera que $CD = DE = EB = BA$. El ángulo $A\hat{C}B$ mide 20º. Calcular la medida del ángulo $A\hat{D}E$.

## PROBLEMA 4

Dado un tablero de 3×3 se quiere escribir en sus casillas los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y un número entero positivo $M$, no necesariamente distinto de los anteriores. El objetivo es que la suma de los tres números de cada fila sea la misma.

a) Hallar todos los valores posibles de $M$ para los que esto es posible.

b) ¿Para cuáles de los valores de $M$ hallados en a) es posible acomodar los números de modo que no solo las tres filas sumen lo mismo, sino que también las tres columnas sumen lo mismo?

**PROBLEMA 5**

En el pizarrón están escritos los 400 números enteros 1, 2, 3, …, 399, 400. Luis borra 100 de estos números, luego Martín borra otros 100. Martín gana si la suma de los 200 números borrados es igual a la suma de los no borrados, en otro caso, gana Luis. ¿Cuál de los dos tiene estrategia ganadora?

¿Y si Luis borra 101 números y Martín 99?

En cada caso, explicar cómo puede asegurarse la victoria el jugador que tiene estrategia ganadora.

**XXII$^a$ OLIMPIADA de MAYO**
**Segundo Nivel**
**Mayo de 2016**

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

## PROBLEMA 1

Decimos que un número de cuatro cifras $\overline{abcd}$, que comienza por $a$ y termina por $d$, es *"intercambiable"* si existe un entero $n > 1$ tal que $n \times \overline{abcd}$ es un número de cuatro cifras que comienza por $d$ y termina por $a$.
Por ejemplo, 1009 es intercambiable ya que $1009 \times 9 = 9081$.
Hallar el mayor número intercambiable.

## PROBLEMA 2

¿Cuántas casillas se deben pintar como mínimo en un tablero de $5 \times 5$ de tal modo que en cada fila, en cada columna y en cada cuadrado de $2 \times 2$ haya al menos una casilla pintada?

## PROBLEMA 3

Decimos que un número entero positivo es *cua-divi* se es divisible por la suma de los cuadrados de sus dígitos, y además ninguno de sus dígitos es igual a cero.

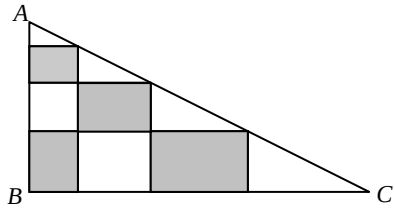
a) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 24.
b) Encontrar un número cua-divi tal que la suma de sus dígitos sea 1001.

## PROBLEMA 4

En un triángulo $ABC$, sean $D$ y $E$ puntos de los lados $BC$ y $AC$, respectivamente. Los segmentos $AD$ y $BE$ se cortan en $O$. Supongamos que la base media del triángulo, paralela a $AB$, divide al segmento $DE$ por la mitad. Demostrar que el triángulo $ABO$ y el cuadrilátero $ODCE$ tienen áreas iguales.

## PROBLEMA 5

Rosa y Sara juegan con un triángulo *ABC*, recto en *B*. Rosa comienza marcando dos puntos interiores de la hipotenusa *AC*, luego Sara marca un punto interior de la hipotenusa *AC* distinto de los de Rosa. Luego, desde estos tres puntos se trazan las perpendiculares a los lados *AB* y *BC*, formándose la siguiente figura.




Sara gana si el área de la superficie sombreada es igual al área de la superficie no sombreada, en otro caso gana Rosa. Determinar quién de las dos tiene estrategia ganadora.

# XXII OLIMPIADA DE MAYO – 2016. RESULTADOS DE ESPAÑA

**PRIMER NIVEL**

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Jimena Lozano Simón | ORO |
| 2 | Miguel Navarro Muñoz | PLATA |
| 3 | Felipe Lorenzo Martínez | PLATA |
| 4 | Daniel Ribalta Andrés | BRONCE |
| 5 | Alejandro Martínez Sánchez | BRONCE |
| 6 | Miguel Soto Martín | BRONCE |
| 7 | Gabriela García Pérez | MENCIÓN |
| 8 | Pablo Raichs Fernández | MENCIÓN |
| 9 | María Dorado Ordás | |
| 10 | Mario Casero Sánchez | |

**SEGUNDO NIVEL**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Alberto Pérez Mugía | ORO |
| 2 | Soto Martín, Pablo | PLATA |
| 3 | Víctor David Sánchez González | BRONCE |
| 4 | Noryne Ridouane | BRONCE |
| 5 | Ignacio Bolivar Centeno | BRONCE |
| 6 | Laura Sánchez Pérez | BRONCE |
| 7 | Javier Martínez Ciria | BRONCE |
| 8 | Shenghao Zhang | MENCIÓN |
| 9 | Jorge Lorente Jerez | MENCIÓN |
| 10 | Hernán Domínguez Monreal | MENCIÓN |

Comunidad
de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

# XXII Concurso de Primavera

**Comunidad de Madrid**

**Edita:** Asociación Matemática Concurso de Primavera

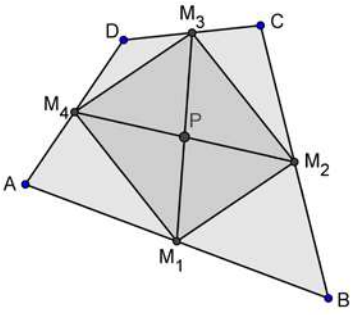
**ISBN**: 978-84-608-5881-2

**Depósito Legal**: M-8301-2017

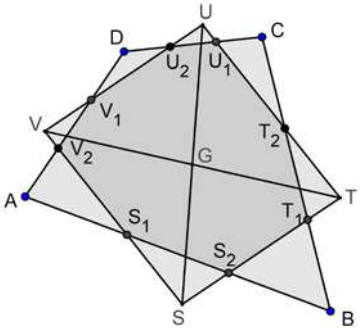
***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alfredo Martínez Sanz*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Hugo Fernández Hervás*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*Jorge González Ortega*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*Marco Castrillón López*
*María Gaspar Alonso-Vega,*
*María Moreno Warleta*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pablo Martínez Dalmau*
*Roberto Tomé Grasa*
*Víctor Manuel Sánchez González*

**Paralelogramo de Varignon**




**Paralelogramo de Wittenbauer**




**Paralelogramo de Varignon:** Si unimos mediante segmentos (en orden circular) los puntos medios de los lados de un cuadrilátero convexo ABCD, obtenemos un paralelogramo, cuyo centro P es centro de pesos de los vértices.

**Paralelogramo de Wittenbauer:**
Si en un cuadrilátero convexo, ABCD, dibujamos los puntos tercios de los lados, y unimos mediante rectas los puntos tercios más próximos a un vértice de los lados que en él concurren, aquellas definen un paralelogramo, cuyo centro G es centro de gravedad del cuadrilátero de partida.

## *Presentación*

- ¡Si nos encuentran estamos perdidos!
- ¿Cómo vamos a estar perdidos si nos encuentran?

(Diálogo de los hermanos Marx en Sopa de ganso)

Si no nos encontramos, estamos perdidos.

El Comité Organizador

**AGRADECIMIENTOS**

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Consejo Social y al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte de la Comunidad de Madrid.

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

# ÍNDICE

**ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE**

Nivel I (5º y 6º de Primaria)……..……9
Nivel II (1º y 2º de ESO)……..……14
Nivel III (3º y 4º de ESO)……..……20
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato)……..……25

**ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE**

Nivel I (5º y 6º de Primaria)……..…30
Nivel II (1º y 2º de ESO)……..……35
Nivel III (3º y 4º de ESO)……..……40
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato)……..…45
Tabla de soluciones 1ª Fase……..…..50
Tabla de soluciones 2ª Fase……..…..51

**SOLUCIONES**

Soluciones 1ª Fase Nivel I……...52
Soluciones 1ª Fase Nivel II……..57
Soluciones 1ª Fase Nivel III……61
Soluciones 1ª Fase Nivel IV……..66
Soluciones 2ª Fase Nivel I……73
Soluciones 2ª Fase Nivel II……..78
Soluciones 2ª Fase Nivel III……83
Soluciones 2ª Fase Nivel IV…… 90
Participantes y relación de ganadores del XXI Concurso de Primavera…...96

XXXV Concurso “Puig Adam” de Resolución de Problemas……..99
XVII Concurso Intercentros……105
LIV Olimpiada Matemática Española. Fase Cero……..112
LIV Olimpiada Matemática Comunidad de Madrid..……..117
LIV Olimpiada Matemática Española……..……..119
XXIII Olimpiada de Mayo Primer Nivel……..120
XXIII Olimpiada de Mayo Segundo Nivel……..……..121
Relación de ganadores en la XXIII Olimpiada de Mayo 2017……....122

**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 22 de febrero de 2017**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática

*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** ¿Con cuál de estas operaciones se obtiene el número mayor?

**A)** $1{,}3 \times 1{,}3$ **B)** $2 - 0{,}32$ **C)** $3{,}3 \div 2$ **D)** $0{,}69 + 1{,}01$ **E)** $2{,}8 \times 0{,}6$

**2** Un rectángulo está formado por cinco cuadrados como se muestra en la figura.

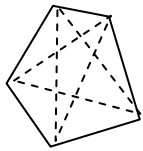
Si el perímetro de un cuadrado mide 12 cm, ¿cuál es el área del rectángulo?

**A)** 36 $cm^2$ **B)** 45 $cm^2$ **C)** 90 $cm^2$ **D)** 18 $cm^2$ **E)** 54 $cm^2$

**3** Manuela ha estado tres cuartos de hora delante de la tele para ver un capítulo completo de Bob Esponja. Si el capítulo duraba 38 minutos, ¿cuántos minutos de anuncios han puesto?

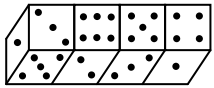
**A)** 4 **B)** 12 **C)** 9 **D)** 7 **E)** 22

**4** En un pentágono puedes trazar cinco diagonales, como ves en la figura. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un decágono regular? Por si no lo sabes, un decágono es un polígono de diez lados.



**A)** 10 **B)** 25 **C)** 30 **D)** 35 **E)** 40

**5** ¿Cuánto suman los puntos de las caras que no ves en el dibujo?

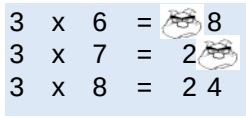


**A)** 54 **B)** 45 **C)** 21 **D)** 14 **E)** 35

**6** Irene y Rafa tienen un ovillo de lana de 120 metros de largo. Van a hacer conjuntos de adornos que cada uno consta de un collar, una pulsera y un anillo. Para cada collar necesita 12 dm de lana, para cada pulsera 24,5 cm y para cada anillo 55 mm. ¿Cuántos conjuntos completos pueden hacer?

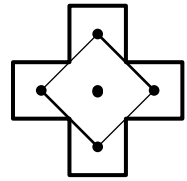
**A)** 4 **B)** 12 **C)** 80 **D)** 120 **E)** 22

**7** Marta ha hecho un bonito póster con las tablas de multiplicar del 2 al 9: desde $2 \times 1 = 2$ hasta $9 \times 10 = 90$. En cuanto se ha despistado ha llegado Comenúmeros y ¡zas! se ha zampado absolutamente todos los unos que había en el póster. ¿Cuántos unos se ha comido el bribón?




**A)** 16 **B)** 20 **C)** 28 **D)** 36 **E)** 44

**8** El cuadrado central tiene sus vértices en los centros de los brazos de la cruz griega. Si el área del cuadrado es 8 $cm^2$, el área de la cruz griega es:



**A)** 24 $cm^2$ **B)** 22 $cm^2$ **C)** 20 $cm^2$ **D)** 18 $cm^2$ **E)** 16 $cm^2$

**9** Julián compró tres paquetes de folios a 2,35 euros cada uno y cinco carpetas. Pagó con un billete de 20 euros y le devolvieron 4,20 euros. ¿Cuántos euros costaba cada carpeta?

**A)** 0,75 **B)** 1,25 **C)** 1,5 **D)** 1,75 **E)** 2,25

**10** Jaime, María y Vania han escrito sus nombres en el ordenador, no sabemos en qué orden. Después han cambiado el tipo de letra de Arial a Wingdings y les ha quedado esto:

¿Cómo quedaría el nombre de Javier si lo escribiéramos en Wingdings?

**A)** **B)** **C)**

**D)** **E)**

**11** Este es O*sodrilo*. La parte *oso* duerme de 18:00 a 6:00 y la parte *drilo* duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si *drilo* duerme, *oso* camina hacia el norte a 10 km/h, y si *oso* duerme, *drilo* camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque. ¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

**A)** 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

**12** Don Retorcido te pone a prueba. ¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas?

**P**: No existe un triángulo cuyos lados midan 15 cm, 7 cm y 5 cm.
**Q**: En un triángulo isósceles el lado desigual es siempre el más corto.
**R**: Si todos los lados de un cuadrilátero miden lo mismo entonces es un cuadrado.

**A)** Todas **B)** Solo P **C)** P y R **D)** Solo Q **E)** Ninguna

**13** Asier tiene diez mil cubitos de un centímetro de arista y quiere armar un cubo gigante con ellos. ¿Cuánto mide la arista del cubo más grande que puede formar?

**A)** 10 cm **B)** 20 cm **C)** 100 cm **D)** 12 cm

**E)** 21 cm

**14** Para escribir los números del 1 al 14: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 se utilizan 19 cifras. Si empleamos exactamente 207 cifras, ¿cuál es el último número que escribiremos?

**A)** 105 **B)** 103 **C)** 94 **D)** 90 **E)** 88

**15** Comenúmeros se ha comido uno de los números de esta serie. ¿Qué número es?

$$2 \to 5 \to 11 \to 23 \to 47 \to \text{[image]} \to 191$$

**A)** 101 **B)**94 **C)**70 **D)**111 **E)** 95

**16** Jesús tarda dos horas en pintar una pared de 4 m × 4 m. Para pintar una pared de 2 m × 2 m tardará…

**A)** 30 min **B)** 45 min **C)** 60 min **D)** 90 min **E)** 15 min

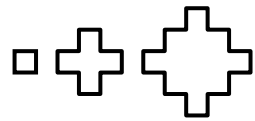
**17** Ánder tiene diez años menos que Carlos. La suma de sus edades es 22 años. ¿Qué edad tiene Carlos?

**A)** 12 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 16

**18** En una tienda de animales hay nueve hámsteres: dos hembras y siete machos. Ana cogió uno al azar y resultó ser un macho. ¿Qué probabilidad tiene ahora de sacar una hembra y llevarse una parejita?

**A)** $\frac{2}{9}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{1}{8}$ **E)** $\frac{3}{8}$

**19** Vemos los tres primeros polígonos crucigramas de una serie. Si el lado de esos polígonos mide 1 cm, ¿cuántos centímetros mide el perímetro del quinto polígono de la serie?

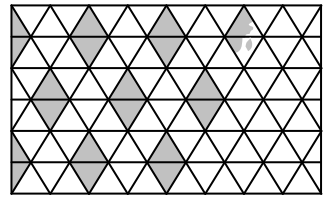


**A)** 20 **B)** 24 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 36

**20** Don Retorcido se ha inventado este juego: Él te da un número. Si es par lo multiplicas por 2 y le sumas 1. Si es impar lo multiplicas por 3 y le sumas 1. Si después de aplicar la regla al número que te ha dado Don Retorcido y dos veces seguidas a cada uno de los números que vas obteniendo, llegas al 208, ¿qué número te dio Don Retorcido?

**A)** 20 **B)** 15 **C)** 12 **D)** 11 **E)** 9

**21** Lucía está coloreando un bonito diseño con triángulos equiláteros en una cartulina. Observa el patrón. ¿Qué fracción de la cartulina estará coloreada de gris cuando termine?

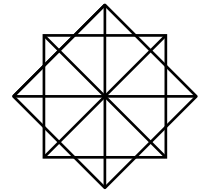


**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{39}{100}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{7}{10}$

**22** Lino, que no tenía caramelos, no para de pedírselos a Luca. ¡Ya no te doy más caramelos! dice Luca enfadado. Si te diera otro caramelo entonces tú comerías el doble de caramelos que yo. Si Luca ya le había dado trece caramelos a Lino ¿cuántos caramelos tenía al principio Luca?

**A)** 30 **B)** 27 **C)** 26 **D)** 23 **E)** 21

**23** ¿Cuántos cuadrados se pueden encontrar en esta figura?



**A)** 12 **B)** 10 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 9

**24** Ramón sabe dar patadines, patadones y chutazos. Un patadón es el triple de fuerte que un patadín y la mitad de fuerte que un chutazo. Si con un chutazo la pelota recorre 120 metros, ¿cuántos metros recorrerá con un patadín?

**A)** 12 **B)** 20 **C)** 30 **D)** 40 **E)** 60

**25** El concurso llega a su fin. Para terminar…, ¿cuánto suman las cifras del número que al multiplicarlo por seis y después restarle 23 da como resultado 2017?

**A)** 7 **B)** 10 **C)** 5 **D)** 11 **E)** 13

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 22 de febrero de 2017**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

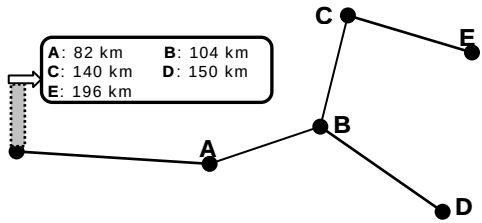
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** El número 4385 está formado por cuatro cifras distintas que suman veinte. Si sumas el mayor y el menor número de cuatro cifras distintas que suman veinte, obtienes…

**A)** 11 119 **B)** 11 116 **C)** 11 115 **D)** 11 114 **E)** 11 110

**2** Aquí podéis ver el plano de carreteras de mi comarca con un cartel donde se indican las distancias kilométricas desde mi pueblo a los cinco más cercanos. ¿Cuántos kilómetros hay del pueblo **D** al **E** por carretera?




**A)** 182 **B)** 346 **C)** 114 **D)** 92 **E)** 138

**3** A Miriam le ha dado por investigar los números que puede formar usando exclusivamente las cifras 1 y 2: 1 – 2 – 11 – 12 – 21 – 22 – 111 – 112... (como ves, su lista ordenada ya tiene ocho números). Si los va ordenando de menor a mayor, ¿qué lugar ocupará el número 1121 en esa lista?

**A)** 17 **B)** 14 **C)** 18 **D)** 15 **E)** 16

**4** Julián ha comprado tres paquetes de folios a 2,35 euros cada uno y cinco carpetas. Ana compró un paquete de folios y tres carpetas. Ambos pagaron con un billete de 20 euros. Si a Julián le devolvieron 4,20 euros, ¿cuántos euros tienen que devolver a Ana?

**A)** 15,20 **B)** 12,40 **C)** 14 **D)** 8,40 **E)** 16,20

**5** – Don Retorcido, ¿tiene usted familia?
– Sí, somos varios hermanos y cada uno de nosotros tiene tantos hijos como hermanos. Ah, y en total somos más de 66 y menos de 99.
¿Cuántas personas forman la familia de don Retorcido?

**A)** 76 **B)** 81 **C)** 75 **D)** 69 **E)** 94

**6** ¿Cuántos capicúas de tres cifras son múltiplos de 3?

**A)** 24 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 30

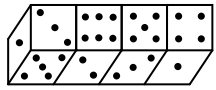
**7** Emma es una lectora muy disciplinada. Acaban de regalarle una novela de 210 páginas y hace la siguiente programación: "Todos los días leeré el mismo número de páginas salvo los viernes que leeré 5 páginas menos, los sábados no leeré y los domingos únicamente leeré 10 páginas". De esta manera, Emma calcula que terminará su libro leyendo tres semanas completas. ¿Cuántas páginas leerá cada viernes?

**A)** 7 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 13

**8** Utilizando todas estas tarjetas, una sola vez cada una, tienes que formar cuatro números entre 13 y 53 de tal manera que no haya dos de ellos consecutivos. Si sumas el mayor y el menor de estos cuatro números, ¿qué cantidad obtienes?

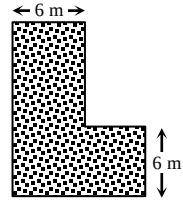
**A)** 107 **B)** 73 **C)** 78 **D)** 76 **E)** 80

**9** ¿Cuánto suman los puntos de las caras que no ves en el dibujo?



**A)** 54 **B)** 45 **C)** 21 **D)** 14 **E)** 35

**10** Como ves, Laura ha diseñado su jardín en forma de L y tiene una superficie de 120 $m^2$. ¿Cuánto mide su perímetro?



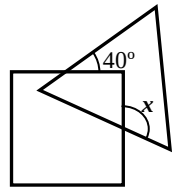

**A)** 52 m **B)** 60 m **C)** 48 m **D)** 80 m

**E)** 56 m

**11** Solo una de estas operaciones da como resultado un número entero. ¿Cuál?

**A)** $5 - 1:2$ **B)** $2{,}46 + 3{,}64$ **C)** $5\cdot(1{,}2 - 2{,}4)$ **D)** $0{,}25\cdot 42$ **E)** $\sqrt{9+81}$

**12** En la figura vemos un triángulo equilátero y un cuadrado. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?




**A)** 120º **B)** 110º **C)** 100º **D)** 80º

**E)** 75º

**13** ¡Qué extraño! Comenúmeros estaba hambriento y se ha encontrado con una serie muy interesante: cada número es la suma de los tres anteriores.

| ¿? | ¿? | ¿? | ¿? | ¿? | 15 | – 6 | – 2 | 7 | – 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

No se ha podido resistir y se ha comido los primeros números. Y ahí podemos verle en la casilla del último número que se zampó. ¿Cuál es ese número?

**A)** 64 **B)** –32 **C)** 82 **D)** 75 **E)** 71

**14** Delia se ha inventado la operación **Delita** y ha elaborado la tabla de **Delitar** de los cinco primeros números.

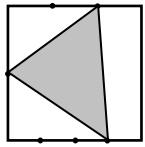
Como se aprecia, $1 \,\Delta\, 1 = 2$, $2 \,\Delta\, 5 = 4$ y $4 \,\Delta\, 2 = 5$.

Si tú también sabes **Delitar**, ¿cuál es el resultado de la operación $\{1 \,\Delta\, [(2 \,\Delta\, 3) \,\Delta\, 4]\} \,\Delta\, 5$?

| Δ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 4 | 5 | 3 |
| 2 | 1 | 3 | 2 | 5 | 4 |
| 3 | 4 | 2 | 1 | 3 | 5 |
| 4 | 5 | 5 | 3 | 5 | 2 |
| 5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 4 |

**A)** 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

**15** Hemos dividido en dos partes iguales un lado de un cuadrado, otro lado en tres y un tercer lado en cuatro. Aprovechando algunas de estas divisiones formamos un triángulo como se aprecia en el dibujo. Si el área del cuadrado es de 144 $cm^2$, ¿qué área, en $cm^2$, tiene nuestro triángulo?



**A)** 96 **B)** 60 **C)** 48 **D)** 72 **E)** 51

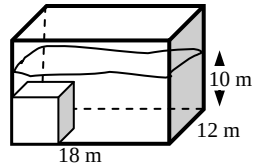
**16** Cuando Comenúmeros no tiene hambre juega con los números: escribe un número; si ese número es impar, le suma uno; y si el número es par, lo duplica y luego le resta uno. Esta mañana empezó por el 1 y va formando una bonita serie:

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 7 \to 8 \to 15 \to 16 \to 31 \to \ldots$$

Solo uno de los siguientes números aparecerá en la serie de Comenúmeros. ¿Cuál?

**A)** 1019 **B)** 1020 **C)** 1021 **D)** 1022 **E)** 1023

**17** Si introducimos un cubo de 6 m de arista en una piscina cuya base es un rectángulo de 18 m × 12 m, el nivel del agua sube hasta los 10 m. ¿A qué altura llegará el agua si sacamos ese cubo de la piscina?




**A)** 8 m **B)** 9 m **C)** 7 m **D)** 9,5 m **E)** 8,5 m

**18** El producto de tres números naturales distintos es 30. ¿Cuál de los siguientes resultados no puede ser su suma?

**A)** 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

**19** En una caja hemos metido las quince bolas numeradas (desde el 1 hasta el 15) de un billar americano. Si sacamos una bola al azar, ordena estos tres sucesos de menor a mayor probabilidad:

P = "que salga par o múltiplo de 5"
Q = "que salga impar"
R = "que salga múltiplo de 3 o que acabe en 0"

**A)** RQP **B)** PRQ **C)** QRP **D)** QPR **E)** PQR

**20** Sonia compone una serie de corcheas usando rayitas y aquí puedes ver las tres primeras. Anoche, cuando dibujó las 30 primeras, se fue a dormir agotada. ¿Cuántas rayitas necesitó Sonia para diseñar su última corchea?

**A)** 184 **B)** 183 **C)** 182 **D)** 181 **E)** 180

**21** ¡Qué desastre!, estas cinco operaciones están mal resueltas. Pero, fíjate, todas ellas menos una pueden "arreglarse" sin más que añadir algún paréntesis. ¿Cuál es la operación que no se arregla ni con paréntesis?

**A)** $2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 40$ **B)** $7 - 2 - 1 = 6$ **C)** $4 + 3 \cdot 2 = 14$
**D)** $-2 \cdot 3 - 5 = -4$ **E)** $4 \cdot 1 + 2 + 3 = 24$

**22** ¡Ya está Caracolito situado en el vértice de salida! Tiene un gran reto por delante: recorrer el perímetro de un polígono regular de 37 lados. ¿Preparado? ¿Listo? ¡Ya! Justo ahora, cuando se cumplen18 días desde que empezó la prueba, Caracolito acaba de superar el 42% del total de su hazaña. ¿Cuántos lados completos ha recorrido Caracolito?

**A)** 14 **B)** 15 **C)** 16 **D)** 17 **E)**18

**23** He dibujado un cuadrado en mi ordenador. Ha venido Sara y ha alargado los lados horizontales en un 20% y ha acortado los verticales en un 20%. Cuando lo ha visto Julia, ha acortado los lados horizontales en un 20% y ha alargado los verticales en un 20%. ¿Qué figura ha quedado al final?

**A)** Un rectángulo con los lados horizontales mayores que los verticales
**B)** Un cuadrado algo menor que el mío
**C)** Un cuadrado igual al mío
**D)** Un cuadrado algo mayor que el mío
**E)** Un rectángulo con los lados horizontales menores que los verticales

**24** Cuando Comenúmeros se come la cifra 3 del número 2358 se convierte en el 258. Esta mañana Comenúmeros se encontró con esta resta y se planteó así su desayuno: me comeré tres cifras de cada número para que el resultado de la resta sea el número positivo más pequeño posible.

$$\begin{array}{rcccccc} & \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ - & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \\ \hline \end{array}$$

¿Cuánto suman las seis cifras que desayunó Comenúmeros?

**A)** 30 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 33 **E)** 34

**25** Nuestro año, el 2017, cumple que 20 – 17 = 3. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen esta propiedad: el número formado por sus dos primeras cifras menos el formado por sus dos últimas, es tres?

**A)** 89 **B)** 97 **C)** 99 **D)** 80 **E)** 90

**XX CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 22 de febrero de 2017**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

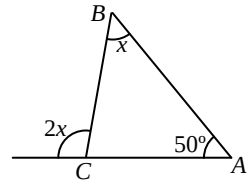
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En la figura adjunta, $x$ representa la medida del ángulo $C\hat{B}A$. ¿Cuál es el valor de $x$?

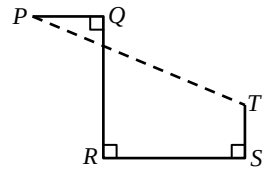



**A)** 60º **B)** 50º **C)** 45º **D)** 40º **E)** 30º

**2** Si una recta de pendiente 2 pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(a, 3a)$, ¿cuál es el valor de $a$?

**A)** $\frac{5}{2}$ **B)** 10 **C)** 3 **D)** $\frac{11}{5}$ **E)** $\frac{12}{5}$

**3** En la figura que ves, los ángulos en $Q$, $R$ y $S$ son rectos. Si $PQ = 4$, $QR = RS = 8$ y $ST = 3$, la distancia de $P$ a $T$ es:




**A)** 16 **B)** $4\sqrt{10}$ **C)** $\sqrt{153}$ **D)** 14 **E)** 13

**4** De las siguientes fracciones solamente hay una comprendida entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es?

**A)** $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{5}{36}$ **C)** $\frac{5}{24}$ **D)** $\frac{5}{60}$ **E)** $\frac{5}{48}$

**5** ¿Cuántos ceros tiene el número $N = 10^{100} \cdot 100^{10}$ si lo escribimos como un 1 seguido de ceros?

**A)** 120 **B)** 112 **C)** 200 **D)** 1000 **E)** 2000

**6** ¿Cuál es la cifra de las decenas del menor entero positivo divisible entre 20, 16 y 2016?

**A)** 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**7** Tenemos tres enteros positivos que, si los sumamos por parejas, obtenemos los números 998, 1050 y 1234. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de esos tres enteros?

**A)** 262 **B)** 248 **C)** 224 **D)** 250 **E)** 236

**8** El rey y sus mensajeros viajan desde el castillo hacia el palacio de verano con una velocidad de 5 km/h. Cada hora, el rey envía un mensajero de vuelta al castillo. Si los mensajeros viajan con una velocidad de 10 km/h, ¿cuál es el intervalo de tiempo entre la llegada de dos mensajeros consecutivos al castillo?

**A)** 30 min **B)** 60 min **C)** 75 min **D)** 90 min **E)** 120 min

**9** Había tres dígitos distintos en la pizarra, Pedro los sumó y obtuvo 15 como resultado. Luego borró uno de ellos y lo cambió por un 3. A continuación Laura multiplicó los tres dígitos distintos que había ahora y obtuvo como resultado 36. ¿Qué número borró Pedro?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

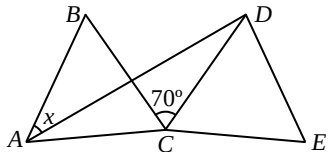
**10** Si $a$ y $b$ son enteros tales que $4 < a < b < 22$ y la media de estos cuatro números, 4, $a$, $b$, 22 es 13, el número de posibles parejas $(a, b)$ es:

**A)** 10 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 6

**11** Si $x$ e $y$ satisfacen las igualdades $\frac{x-y}{x+y}=9$, $\frac{x\cdot y}{x+y}=-60$, entonces $(x+y)+(x-y)+xy$ es:

**A)** 210 **B)** –150 **C)** 14 160 **D)** –14 310 **E)** –50

**12** Los triángulos $ABC$ y $CDE$ de la figura son equiláteros e iguales y $B\hat{C}D = 70^\circ$. ¿Cuál es la medida, $x$, del ángulo $D\hat{A}B$ ?

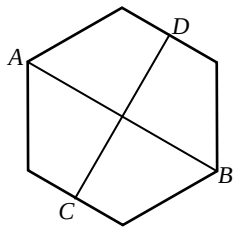



**A)** 20º **B)** 25º **C)** 30º **D)** 35º **E)** 40º

**13** ¿Cuál de los siguientes números es el mayor?

**A)** $\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}$ **B)** $\sqrt{20}\cdot 17$ **C)** $20\sqrt{17}$ **D)** $\sqrt{201}\cdot 7$ **E)** $\sqrt{2017}$

**14** En la figura se observa un hexágono regular en el que $C$ y $D$ son los puntos medios de dos lados opuestos.
Si el área del hexágono es 60, el producto de las longitudes $AB \cdot CD$ es:




**A)** 100 **B)** 80 **C)** 60 **D)** $40\sqrt{3}$ **E)** $30\sqrt{3}$

**15** En un examen de Matemáticas, si cada chico hubiera obtenido 3 puntos más de lo que obtuvo, la media de toda la clase, chicos y chicas, habría sido 1,2 puntos más de la que fue. ¿Qué porcentaje de chicas hay en la clase?

**A)** 20% **B)** 30% **C)** 40% **D)** 60% **E)** Es imposible saberlo

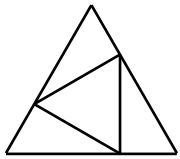
**16** ¿Cuál es el menor número $n$ tal que la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ es mayor que 1000?

**A)** 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 47

**17** El mayor número de divisores de un número menor que 100 es:

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

**18** En la figura vemos dos triángulos equiláteros, uno inscrito en el otro y con sus lados respectivamente perpendiculares. Si el pequeño tiene de lado 12 cm, el lado del grande, en cm, es:



**A)** 18 **B)** $9\sqrt{6}$ **C)** $12\sqrt{3}$ **D)** $12\sqrt{2}$ **E)** 21

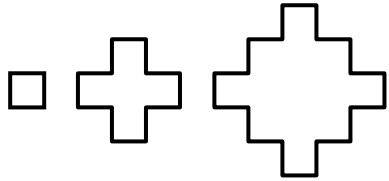
**19** El valor de $a$ en el sistema: $\begin{cases} a+\sqrt{2}\,b=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\,a+b=\sqrt{2} \end{cases}$, es:

**A)** $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{2}-1$ **C)** $2-\sqrt{2}$ **D)** $1-\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{2}$

**20** El número 2017 se puede escribir de forma única como suma de dos cuadrados perfectos. Las bases de esos cuadrados suman:

**A)** 47 **B)** 41 **C)** 53 **D)** 55 **E)** 57

**21** Vemos los tres primeros polígonos crucigramas de una serie. Si el lado de esos polígonos mide 1 cm, la fórmula del perímetro del crucigrama que ocupa el puesto $n$ es, en cm, del tipo $a \cdot n + b$. El valor de $a - b$ es:

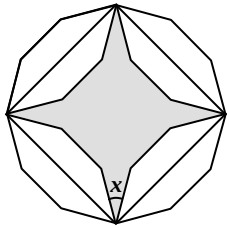


**A)** 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

**22** Si un número de más de dos cifras termina en 25 su cuadrado también termina en 25. ¿Cuántas terminaciones de dos cifras se conservan al elevar al cuadrado?

**A)** dos **B)** tres **C)** cuatro **D)** cinco **E)** seis

**23** En un dodecágono regular hemos inscrito un cuadrado y usando sus lados como ejes de simetría hemos dibujado una estrella sombreada de cuatro puntas. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?

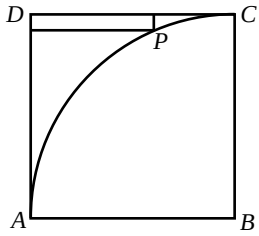



**A)** 20º **B)** 24º **C)** 25º **D)** 30º **E)** 36º

**24** ¿Cuál es el resto de la división de $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ entre 8?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

**25** Con centro en el vértice $B$ del cuadrado $ABCD$ trazamos un arco de circunferencia de radio igual a la longitud del lado del cuadrado. Un punto $P$ de dicho arco dista 8 del lado $AD$ y 1 del lado $DC$. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?




**A)** 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 22 de febrero de 2017**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** La ecuación $\log_2 \sqrt{x+1} + \log_2 x = \log_2 \sqrt{x-1} + \log_2(-x)$

**A)** Tiene una solución real **B)** Tiene dos soluciones reales
**C)** Tiene infinitas soluciones reales **D)** No tiene soluciones reales
**E)** Tiene un número finito, mayor que dos, de soluciones reales

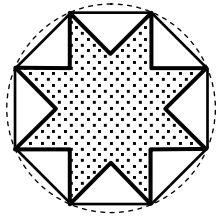
**2** Si $\log_2 \sqrt[n]{0{,}125} = x$ , el valor de $x \cdot n$ es:

**A)** – 1 **B)** 2 **C)** – 3 **D)** 4 **E)** – 5

**3** ¿Cuántos números menores que 100 son el producto de tres primos?

**A)** 18 **B)** 19 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 22

**4** El lado del octógono regular mide 4 cm. El área de la estrella octogonal de la figura, en $cm^2$, es:



**A)** $32\sqrt{2}$ **B)** 32 **C)** $24\sqrt{2}$

**D)** $16\sqrt{2}$ **E)** 24

**5** Dado el complejo $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ , la suma $1 + z + z^2 + ... + z^8$ es:

**A)** 1 **B)** $i$ **C)** 0 **D)** $-i$ **E)** – 1

**6** Teniendo en cuenta que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = 385$ , ¿cuánto suman todos los productos de dos números distintos tomados del 1 al 10?

**A)** 1650 **B)** 1540 **C)** 1430 **D)** 1320 **E)** 1210

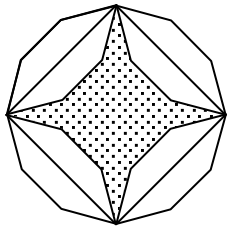
**7** Una de las asíntotas de la hipérbola, $y = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x - 2}$ es:

**A)** $y = x + 1$ **B)** $y = 3x - 1$ **C)** $y = x + 3$ **D)** $y = 3x + 1$ **E)** $y = x - 2$

**8** El número de soluciones del sistema $\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ x = y^2 - y + 1 \end{cases}$ , es:

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**9** En un dodecágono regular hemos inscrito un cuadrado y usando sus lados como ejes de simetría hemos dibujado la estrella sombreada de cuatro puntas de la figura. Si el lado del dodecágono mide 1 cm, el área de la estrella, en $cm^2$, es:



**A)** $2+\sqrt{3}$ **B)** $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$ **C)** $2\sqrt{3}$

**D)** $5-\sqrt{2}$ **E)** 4

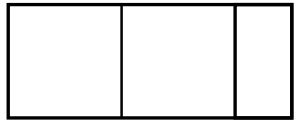
**10** En una feria cada diez minutos se sortea un premio entre diez papeletas. Con una papeleta en cada sorteo, ¿cuántas veces debo participar al menos para que la probabilidad de llevarme premio sea mayor que $\frac{1}{2}$?

**A)** 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

**11** Si $2 + 3i$ es una raíz cuarta de z, también lo es:

**A)** $2 - 3i$ **B)** $3 - 2i$ **C)** $3 + 2i$ **D)** $-2 + 3i$ **E)** $-3 - 2i$

**12** El rectángulo de la figura está dividido en dos cuadrados y un rectángulo pequeño. Si el rectángulo pequeño es semejante al rectángulo original y el lado de cada cuadrado es 1, ¿cuál es la longitud del lado largo del rectángulo original?



**A)** $2\sqrt{3}-14$ **B)** $1+\sqrt{2}$ **C)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **E)** $8\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

**13** ¿Cuántos puntos comunes tienen las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = \frac{1}{1+x^2}$?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**14** Si la base mayor de un trapecio isósceles mide igual que la diagonal y la base menor mide igual que la altura del trapecio, ¿cuál es el cociente entre la longitud de la base menor y la de la base mayor?

**A)** $\frac{2}{5}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{4}{5}$

**15** El máximo valor que alcanza la función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ es:

**A)** $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** 1

**16** Lanzamos un dado normal seis veces. Si $p$ es la probabilidad de que en los seis lanzamientos se obtengan números distintos, entonces el número $p$ verifica:

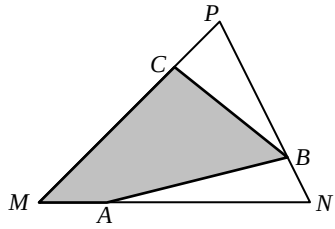
**A)** $p \le 0{,}02$ **B)** $0{,}02 < p \le 0{,}04$ **C)** $0{,}04 < p \le 0{,}0$

**D)** $0{,}06 < p \le 0{,}08$ **E)** $p > 0{,}1$

**17** Si $x^2+xy+y^2=84$ y $x-\sqrt{xy}+y=6$, ¿cuál es el valor de $xy$?

**A)** 16 **B)** 25 **C)** 36 **D)** 49 **E)** 64

**18** Los puntos *A*, *B* y *C* de la figura dividen a cada lado del triángulo *MNP* en dos trozos que están en la relación 1:3. ¿Qué fracción del área del triángulo está sombreada?



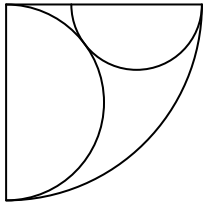

**A)** $\frac{7}{16}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{9}{16}$

**D)** $\frac{5}{8}$ **E)** $\frac{11}{16}$

**19** Una bolsa contiene $m$ bolas blancas y $n$ bolas negras. Extraemos una bola al azar y la devolvemos a la bolsa añadiendo otras $k$ bolas del mismo color que la extraída. Posteriormente sacamos otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que esta segunda bola sea blanca?

**A)** $\frac{m}{m+n}$ **B)** $\frac{n}{m+n}$ **C)** $\frac{m}{m+n+k}$ **D)** $\frac{m+k}{m+n+k}$ **E)** $\frac{m+n}{m+n+k}$

**20** El dibujo muestra un cuarto de circunferencia de radio 2 y dos semicircunferencias tangentes.
¿Cuál es el radio de la semicircunferencia pequeña?



**A)** $\frac{\pi}{6}$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**E)** $\frac{2}{3}$

**21** ¿Cuáles de las siguientes desigualdades no tienen soluciones reales?

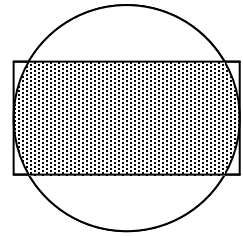
1. $2x < 2^x < x^2$
2. $x^2 < 2x < 2^x$
3. $2^x < x^2 < 2x$
4. $x^2 < 2^x < 2x$
5. $2^x < 2x < x^2$
6. $2x < x^2 < 2^x$

**A)** 1 y 3 **B)** 1 y 6 **C)** 2 y 4 **D)** 2 y 5 **E)** 3 y 5

**22** ¿Cuál es el menor de los siguientes números?

**A)** $10-3\sqrt{11}$ **B)** $8-3\sqrt{7}$ **C)** $5-2\sqrt{6}$ **D)** $9-4\sqrt{5}$ **E)** $7-4\sqrt{3}$

**23** El círculo y el rectángulo de la figura tienen el mismo centro. Si las dimensiones del rectángulo son 6×12 y los dos lados pequeños del rectángulo son tangentes al círculo, ¿cuál es el área de la región común al rectángulo y al círculo?



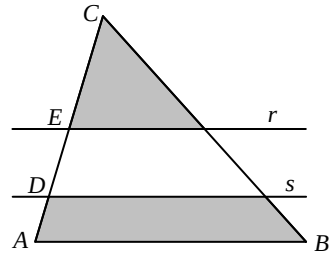
**A)** $12\pi+18\sqrt{3}$ **B)** $24\pi-3\sqrt{3}$ **C)** $18\pi-8\sqrt{3}$

**D)** $18\pi+12\sqrt{3}$ **E)** $24\pi+18\sqrt{3}$

**24** En un triángulo rectángulo la bisectriz de un ángulo agudo corta al cateto opuesto en dos trozos de longitudes 1 y 2. ¿Cuál es la longitud del segmento de bisectriz interior al triángulo?

**A)** $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 2 **D)** $\sqrt{5}$ **E)** $\sqrt{6}$

**25** Las rectas paralelas *r* y *s* son también paralelas al lado *AB* del triángulo *ABC* de la figura. Si las zonas sombreadas tienen igual área y $\frac{CD}{DA}=4$, ¿cuál es el valor de $\frac{CE}{EA}$?




**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3

**D)** $\frac{3}{2}$ **E)** $\frac{4}{3}$

**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 22 de abril de 2017**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | **5 *puntos*** |
| *Cada pregunta **en blanco o errónea*** | **0 *puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** ¿Qué dos números son los siguientes en esta serie?

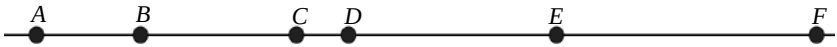
**4, 7, 8, 13, 12, 19, 16,...**

**A)** 25 y 24 **B)** 20 y 24 **C)** 24 y 20 **D)** 25 y 20 **E)** 20 y 28

**2** Dispones de una cinta de un metro de longitud. Si cada día cortas dos centímetros, ¿en cuántos días queda cortada toda la cinta?

**A)** 39 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 49 **E)** 99

**3** Ya sabes que dos puntos sobre una recta determinan un único segmento. ¿Cuántos segmentos diferentes determinan en la recta los seis puntos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*?




**A)** 12 **B)** 15 **C)** 10 **D)** 18 **E)** 36

**4** Un tarro lleno de miel pesa 500 gramos y ese mismo tarro lleno de leche pesó 350 gramos. Si sabemos que la leche pesa la mitad que la miel, ¿cuántos gramos pesa ese tarro vacío?

**A)** 100 **B)** 150 **C)** 175 **D)** 200 **E)** 225

**5** Comenúmeros está descontrolado. Ayer cogió mi libro de Lengua y se comió una a una todas las cifras que numeraban las páginas, salvo los sietes que le sientan mal. Mi libro tiene 86 páginas y todas estaban numeradas. ¿Cuántas cifras se comió el glotón?

**A)** 145 **B)** 141 **C)** 162 **D)** 132 **E)** 150

**6** Ainhoa tiene muchos palitos de longitudes 3, 5 y 10 cm. ¿Cuántos triángulos distintos puede construir con sus palitos?

**A)** 3 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 12

**7** Para celebrar el vigésimo primer aniversario del Concurso de Primavera, Joaquín asó un cordero lechal de 3 kg y 600 g. Durante el asado, el cordero perdió un tercio de su peso. Entre Joaquín, Juan Jesús, Javier, María, Merche, Esteban, Alfredo e Isabel comieron el cordero asado a partes iguales. ¿Cuántos gramos de cordero comió María?

**A)** 200 **B)** 220 **C)** 280 **D)** 300 **E)** 320

**8** Si tiras cuatro dados iguales, ¿de cuántas formas puede ocurrir que la suma de los puntos obtenidos sea 15?

**A)** 10 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 11 **E)** 9

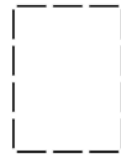
**9** *Osodrilo* come peces a la orilla de un río. *Oso* dice: "*Drilo*, te has puesto morado; por cada pez que me he comido yo, tú te has comido ocho". "Claro, yo los engullo de cinco en cinco", contestó *Drilo*. Si en el río había más de 100 peces y menos de 150, ¿cuántos peces más comió *Drilo* que *Oso*?

**A)** 45 **B)** 70 **C)** 80 **D)** 91 **E)** 105

**10** Dentro de cinco años la suma de las edades de los cuatro hijos del señor Carpanta será 50. ¿Cuál será esta suma dentro de dos años?

**A)** 34 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 40 **E)** 42

**11** Miguel ha formado este rectángulo ayudándose de 14 palitos iguales. Si Miguel usara exactamente 24 palitos para hacer cada rectángulo, ¿cuántos rectángulos diferentes podría formar?

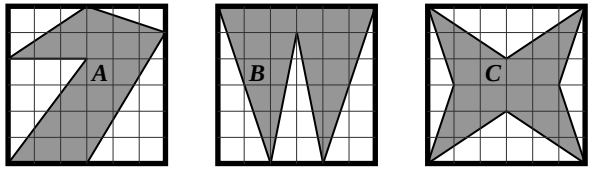


**A)** 6 **B)** 3 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 8

**12** En el pueblo de don Retorcido hay dos relojes. El reloj del ayuntamiento adelanta cinco segundos cada hora y el reloj de la iglesia se retrasa quince segundos cada hora. El alcalde y el cura han puesto a la vez los dos relojes en hora. ¿Cuántas horas tienen que pasar como mínimo para que un reloj marque una hora más que el otro?

**A)** 360 **B)** 282 **C)** 180 **D)** 228 **E)** 280

**13** Hemos dibujado tres figuras en una cuadrícula. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?




**A)** Todas tienen igual área **B)** El área de *A* es mayor que el área de *B*
**C)** El área de *B* es mayor que la de *C* **D)** El área de *C* es mayor que el área de *A*
**E)** Todas las áreas son distintas

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** ¿Cuántos triángulos podremos formar que tengan sus vértices en los vértices de un pentágono regular?

**A)** 6 **B)** 60 **C)** 20 **D)** 12 **E)** 10

**15** Tengo cinco matrioskas. La altura de cada una mide 3/4 de lo que mide la anterior. Si la más grande mide 16 cm, ¿qué número aproxima mejor los milímetros que mide la más pequeña?

**A)** 20 **B)** 35 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 65

**16** En una cesta hay en total veinte frutas entre peras, manzanas y naranjas. Hemos contado doce manzanas, más peras que naranjas y nueve frutas podridas. Si sabemos además que hay siete manzanas sanas y tres naranjas podridas, ¿cuántas peras hay en la cesta?

**A)** 3 **B)** 4 **C)**5 **D)** 6 **E)**7

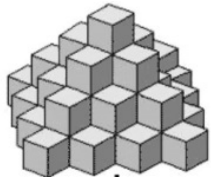
**17** En el cajón de los calcetines tengo 10 calcetines azules, 12 rojos, 8 verdes y 4 marrones. A oscuras saco uno, que resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que al coger otro también sea azul?

**A)** $\frac{10}{33}$ **B)** $\frac{3}{11}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{9}{34}$ **E)** $\frac{5}{17}$

**18** En un juego entre tres personas, cuando uno pierde, debe pagar a los otros dos y darle tantos euros como cada uno tenga; es decir, debe duplicar el dinero de cada uno de los adversarios. Tras una partida todos terminan con 24 euros, ¿cuántos euros tenía el que perdió la partida?

**A)** 72 **B)** 122 **C)** 64 **D)** 86 **E)** 48

**19** ¿Cuántos cubos se han usado para la construcción de esta torre?



**A)** 25 **B)** 30 **C)** 44 **D)** 48 **E)** 31

**20** He dibujado un rectángulo en el que la longitud de la base es el doble de la longitud de la altura. Si el área de mi rectángulo es 50 $cm^2$, ¿cuál es, en centímetros, su perímetro?

**A)** 25 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 50 **E)** 30

**21** El nanómetro es una medida de longitud que se usa para cosas muy pequeñas. Un metro son mil millones de nanómetros. Para calcular el grosor de una hoja de papel Lucía ha visto que un taco de diez hojas mide un milímetro. ¿Cuántos nanómetros mide una sola hoja?

**A)** 100 000 **B)** 1000 **C)** 10 000 **D)** 1 000 000 **E)** 100

**22** El lunes, Don Retorcido regaló a Pilar la mitad de las fracciones que llevaba; el martes dio la mitad de las que le quedaban a Jesús; el miércoles, la mitad del resto a Pablo. Y siguió así con Luis, después con Hugo, y por último con Marco. Al final le quedaron tres fracciones. ¿Cuántas fracciones recibió Hugo?

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

**23** En un cine hay 200 personas. De ellas, 130 son mujeres y sabemos además que 90 personas llevan gafas. He observado que, curiosamente, la mitad de los hombres llevan gafas. ¿Cuántas mujeres no llevan gafas?

**A)** 80 **B)** 85 **C)** 75 **D)** 55 **E)** 70

**24** Luis cumple hoy 36 años. Su edad es nueve veces la de su gato Bisbís. La edad de su perro Guaguá es tres medios la de Bisbís. La suma de las edades de Guaguá y Bisbís es…

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 13

**25** Dispones de seis fichas; dos con el número 1, otras dos con el número 2 y otras dos con el número 3. ¿Cuántos números distintos de tres cifras puedes formar con esas fichas?

**A)** 24 **B)** 18 **C)** 27 **D)** 15 **E)** 30

**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 22 de abril de 2017**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | **5 *puntos*** |
| *Cada pregunta **en blanco o errónea*** | **0 *puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** **X** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** ¿Cuál de estos resultados está más cerca de 100?

**A)** $(20 - 17)\cdot(20 + 17)$ **B)** $201 + 7\cdot20 + 17$ **C)** $20\cdot17 - (201 + 7)$
**D)** $20\cdot(1 + 7) - 20 - 17$ **E)** $20 + 17 + 20 + 17$

**2** Alba colecciona pirámides y prismas, todos ellos de base cuadrada. Si en total tiene 42 figuras y ha contado 288 vértices, ¿cuántas pirámides hay en su colección?

**A)** 24 **B)** 14 **C)** 22 **D)** 26 **E)** 16

**3** La báscula de doña Esmeralda está estropeada y siempre marca un peso 120 gramos inferior al real. Por otro lado doña Esmeralda cree que su báscula marca siempre 180 gramos más que el peso verdadero. Con todo este lío, doña Esmeralda pesó un melón y dedujo que pesaba 2 kilos. ¿Cuántos gramos pesa realmente el melón?

**A)** 2180 **B)** 1940 **C)** 2060 **D)** 1700 **E)** 2300

**4** El área de un triángulo rectángulo es de 84 $m^2$. Si un cateto mide 24 m, ¿cuántos metros mide su hipotenusa?

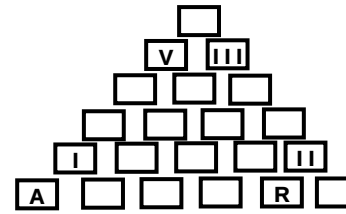
**A)** 25 **B)** 26 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 30

**5** Definimos la operación $a\heartsuit b = a\cdot(a + b)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

I. $8\heartsuit2 - 2\heartsuit8 = 6\heartsuit4$ II. Si $4\heartsuit b = 28$, entonces $b = 3$

**A)** Solo I **B)** Solo II **C)** I y II **D)** Ninguna **E)** Imposible saberlo

**6** He construido una pared triangular con ladrillos rojos (R), verdes (V) y amarillos (A), de forma que un ladrillo no está en contacto con otro ladrillo de su mismo color. ¿Cuál es la secuencia de colores de los ladrillos I–II–III?




**A)** R–A–A **B)** R–A–R
**C)** V–A–R **D)** V–A–A
**E)** V–V–A

**7** Don Retorcido colecciona figuras geométricas. La mitad de las que tiene son triángulos, la tercera parte del resto son círculos y un cuarto de las que quedan son trapecios. Yo sé que don Retorcido tiene exactamente 20 trapecios. ¿Sabes tú cuántos triángulos tiene en su colección?

**A)** 80 **B)** 120 **C)** 140 **D)** 160 **E)** 200

**8** Todos los días, ininterrumpidamente y sin variar la velocidad, sale a cada hora en punto un barco que va de la isla Pi a la isla Pa y exactamente igual otro barco que va de Pa a Pi. Si el trayecto dura cuatro horas, te preguntamos: ¿Cuántos cruces de barcos se producen en el mar (no vale en el puerto) en el período que va desde las 10:59 h a las 15:01 h?

**A)** 15 **B)** 31 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 36

**9** Tres preguntas: ¿Qué número hay que sumar a $-7$ para obtener $-1$? ¿Qué número hay que restar a $-5$ para obtener 4? ¿Qué número hay que restar a 9 para obtener $-4$? Y una pregunta final: ¿Cuál es la suma de esos tres números?

**A)** $-4$ **B)** 12 **C)** 8 **D)** $-2$ **E)** 10

**10** Don Retorcido está aburrido. Coge una hoja de papel que mide 40 cm x 20 cm; hace dos dobleces, a lo largo y a lo ancho, por la mitad; corta por esos dobleces y consigue cuatro hojas más pequeñas, todas iguales. Como sigue aburrido, vuelve a repetir sus cortes con cada una de las hojas. Don Retorcido ya no está aburrido porque tiene un nuevo problema: ¿Cuál es la suma de los perímetros de todas esas hojitas que hay ahora?

**A)** 480 cm **B)** 6 m **C)** 120 cm **D)** 4 m **E)** 240 cm

**11** Tres amigas están a sus cosas y comentan.

Ana: "Ya me sé los tres quintos de los versos que tengo que aprenderme".

Berta: "Es curioso porque yo me sé el mismo número de versos que tú pero aún me quedan dos tercios para terminar".

Carolina: "Es fascinante, yo aún no he empezado y tengo que aprenderme 48 versos, o sea, justo el doble de lo que os queda a vosotras juntas".

¿Cuántos versos en total tenían que aprenderse las tres amigas?

**A)** 88 **B)** 96 **C)** 90 **D)** 80 **E)** 144

**12** Hugo está contento. Dibuja un cuadrado de 10 cm de lado, encima uno de 9 cm de lado y luego otro de 8 cm, y así piensa continuar hasta que coloque el cuadrado de 1 cm de lado. ¿Cuántos centímetros medirá el perímetro de su figura cuando termine de colocar los diez cuadrados?

**A)** 110 **B)** 120 **C)** 130 **D)** 125 **E)** 129

**13** Tienes que colocar todos los números enteros desde el 1 hasta el 9 en esa cuadrícula, teniendo en cuenta que los números exteriores indican el producto de las tres casillas de su fila o columna correspondiente. ¿En qué casilla está el 2?

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | D | G | 21 |
| B | E | H | 60 |
| C | F | I | 288 |
| 112 | 72 | 45 | |

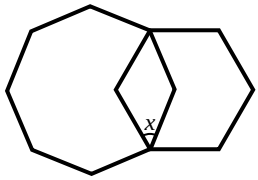
**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** Mi número tiene seis cifras y empieza por 1: 1*ABCDE*. Si lo multiplico por tres, el 1 pega un brinco y pasa al final, obteniendo así este número: *ABCDE*1. ¿Cuál es el valor de *A*+*B*+*C*+*D*+*E*?

**A)** 26 **B)** 19 **C)** 28 **D)** 22 **E)** 25

**15** María ha construido un octógono regular y Esteban un hexágono también regular, aunque ha tenido que utilizar lados ligeramente más grandes que los del octógono para que al superponerlos coincidan los dos vértices que muestra la figura. ¿Cuál es la amplitud del ángulo *x*?

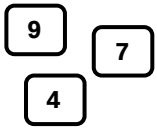



**A)** 54,5º **B)** 60º **C)** 52,5º **D)** 62,5º **E)** 66º

**16** Comenúmeros se entretiene con tres números *a*, *b*, *c*, distintos y mayores que 1. Si te dice que mcm (*a*, *b*) = 12 y que mcm (*a*, *c*) = 15, ¿cuál de estas cinco opciones no puede ser el resultado de *b* + *c*?

**A)** 27 **B)** 19 **C)** 9 **D)** 17 **E)** 7

**17** Miriam tiene tres tarjetas en las que ha escrito seis números diferentes, uno en cada cara. Aquí te enseña una cara de cada tarjeta. Luego juega a voltearlas y anota las ocho posibles sumas que pueden obtenerse: 10, 12, 12, 14, 16, 18, 18, 20. ¿Cuánto suman las tres caras que no se ven?




**A)** 10 **B)** 12 **C)** 14 **D)** 16 **E)** 18

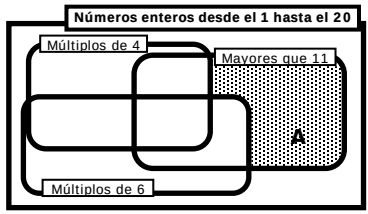
**18** Álvaro dibuja dos circunferencias. El área que encierra una mide $100\pi$ m$^2$ y el perímetro de la otra mide $100\pi$ m. ¿Cuál es, en metros, la diferencia de los radios de estas circunferencias?

**A)** 10 **B)** 50 **C)** 90 **D)** 40 **E)** 0

**19** Si los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{5}$ de $A$ es igual que los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{3}{5}$ de $B$, ¿qué podemos asegurar de los números $A$ y $B$?

**A)** $A = 2B$ **B)** $3A = 4B$ **C)** $2A = 5B$ **D)** $A = 3B$ **E)** $2A = 3B$

**20** ¿Cuántos números hay que colocar en el recinto punteado, A?




**A)** 7 **B)** 2 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 6

**21** Si ordenamos estos tres números, $P = 11^{51}$, $Q = 1317^{17}$, $R = 37^{34}$, de menor a mayor, obtenemos…

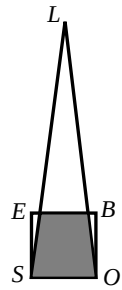
**A)** $P < Q < R$ **B)** $R < Q < P$ **C)** $R < P < Q$ **D)** $Q < P < R$ **E)** $Q < R < P$

**22** Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12 \cdot 12 = 1156$, $3 \cdot 3 = 81$, $45 \cdot 45 = 144$, $67 \cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**23** Si el área del cuadrado *BESO* es 16 $cm^2$ y el área del triángulo *SOL* es el doble, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del trapecio coloreado?

**A)** 14 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12




**24** Dentro de cinco años podré afirmar: "dentro de dieciséis años mi edad será el doble que la que tenía hace dos años". Si $x$ representa la edad que tengo hoy, ¿cuál de estas ecuaciones se corresponde con dicha situación?

**A)** $x + 21 = 2(x + 14)$ **B)** $x + 21 = 2(x - 19)$

**C)** $x + 21 = 2(x + 3)$ **D)** $x + 21 = 2(x - 2)$

**E)** $x + 16 = 2(x + 3)$

**25** Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

**A)** 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 22 de abril de 2017**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

## ¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | **5** ***puntos*** |
| *Cada pregunta* ***en blanco o errónea*** | **0** ***puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes* ***en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta* ***errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En cada casilla de la figura debe haber un entero positivo menor que 10. La suma de los números de cada fila ha de ser la misma, al igual que la suma de los de cada columna, aunque esta suma no tiene por qué ser igual a la suma de cada fila. ¿Qué número debe estar en la casilla sombreada?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2** | **4** | | **2** |
| | **3** | **3** | |
| **6** | | **1** | |

**A)** 1 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

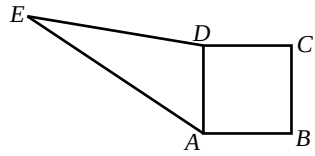
**2** Bea dice que el 25 % de sus libros son novelas y que $\frac{1}{9}$ del total son libros de poesía. Si el número de libros que tiene está entre 50 y 100, ¿cuántos de ellos no son ni novelas ni de poesía?

**A)** 46 **B)** 47 **C)** 48 **D)** 49 **E)** 50

**3** Dos lados de un cuadrilátero miden 4 y 1. Una de las diagonales, de longitud 2, divide al cuadrilátero en dos triángulos isósceles. ¿Cuál es el perímetro del cuadrilátero?

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

**4** El lado del cuadrado *ABCD* mide 4 cm. Si el triángulo *EAD* tiene igual área que el cuadrado, ¿cuál es la distancia del vértice *E* a la recta determinada por *B* y *C*?




**A)** 8 **B)** $4+2\sqrt{3}$ **C)** 12

**D)** $10\sqrt{2}$ **E)** Depende de la posición de *E*

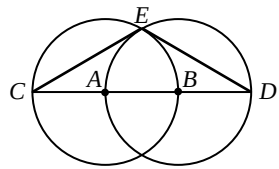
**5** Uno de los problemas del Concurso de Primavera se le atascaba a Jorge, pero fue capaz de llegar a las siguientes conclusiones, todas ellas correctas:

- Si la respuesta **A** fuera correcta, también lo sería la respuesta **B**.
- Si la respuesta **C** no es la correcta, tampoco lo sería la **B**.
- Si la respuesta **B** no es la correcta, entonces ni la **D** ni la **E** son la correcta.

¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?

**A) A** **B) B** **C) C** **D) D** **E) E**

**6** Las circunferencias de la figura son iguales y de centros *A* y *B*. Cada una de ellas pasa por el centro de la otra y la recta que pasa por los centros corta también a las circunferencias en los puntos *C* y *D*. Si *E* es un punto común a ambas circunferencias, ¿cuál es el ángulo $C\hat{E}D$ ?

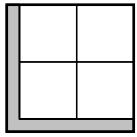



**A)** 105º **B)** 110º **C)** 120º **D)** 130º **E)** 135º

**7** Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras *PQRST*. Si el número de tres cifras *PQR* es divisible por 4, el *QRS* es divisible por 5 y el *RST* es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra *P*?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**8** Dividimos un cuadrado de 125 $cm^2$ de área en cinco regiones, cuatro cuadrados y un polígono en forma de L sombreado en la figura, todas de igual área. ¿Cuál es la longitud, en cm, del lado más corto del polígono en forma de L?

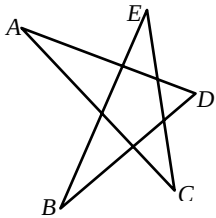


**A)** 1 **B)** 1,5 **C)** $2\left(\sqrt{5}-2\right)$ **D)** $\sqrt{5}-1$ **E)** $5\left(\sqrt{5}-2\right)$

**9** Los números *a, b, c, d, e* verifican: $a\cdot b = 2$, $b\cdot c = 3$, $c\cdot d = 4$ y $d\cdot e = 5$. ¿Cuál es el valor de $\frac{e}{a}$ ?

**A)** $\frac{15}{8}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{3}{2}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** 2

**10** ¿Cuál es la suma de la medida de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ y $\hat{E}$ de la estrella de la figura?




**A)** 270º **B)** 180º **C)** 210º **D)** 240º **E)** 360º

**11** Tengo dos dados cúbicos, uno rojo y otro azul. Si lanzo los dos dados a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que el número que muestra el dado rojo sea mayor que el que muestra el dado azul?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{19}{36}$ **C)** $\frac{2}{3}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{4}{9}$

**12** Todos los estudiantes de una clase hicieron una prueba. Cinco de ellos obtuvieron la puntuación máxima, 100 puntos, ninguno obtuvo menos de 60 puntos y la media de la clase fue de 76 puntos. ¿Cuántos estudiantes, como poco, había en la clase?

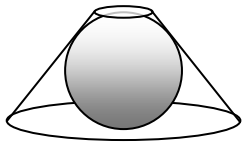
**A)** 10 **B)** 11 **C)** 13 **D)** 15 **E)** 20

**13** Los puntos *A, B, C* y *D*, en este orden, determinan un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Los lados *AB* y *CD* son paralelos, el ángulo $A\hat{D}C = 50º$ y los ángulos $B\hat{A}C$ y $B\hat{C}A$ son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $D\hat{A}C$ ?

**A)** 110º **B)** 105º **C)** 90º **D)** 85º **E)** 50º

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** Los radios de las bases de un tronco de cono son 18 y 2. ¿Cuál es el radio de la esfera inscrita en ese tronco de cono?



**A)** 6 **B)** $4\sqrt{5}$ **C)** 9 **D)** 10 **E)** $6\sqrt{3}$

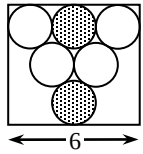
**15** Ayer nacieron cuatro bebés en un hospital. Se consideran los siguientes sucesos:

A: "Los cuatro fueron del mismo sexo"
B: "Exactamente tres son del mismo sexo"
C: "Dos son niños y dos niñas"
D: "Más de dos son niños".

Suponiendo que es igual de probable que nazca un niño que una niña, ordena de menor a mayor probabilidad los cuatro sucesos:

**A)** ABCD **B)** DABC **C)** ADCB **D)** ADBC **E)** BADC

**16** En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?

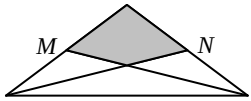



**A)** $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2\left(\sqrt{3}-1\right)$ **D)** $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

**17** Si Raquel se sube en una mesa y Pablo se queda en el suelo, Raquel es 80 cm más alta que Pablo, pero si es Pablo el que se sube a la mesa y Raquel se queda en el suelo, entonces Pablo es un metro más alto que Raquel. ¿Cuál es, en cm, la altura de la mesa?

**A)** 50 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 80 **E)** 90

**18** En la figura se observa un triángulo isósceles dividido en cuatro regiones de las que conocemos las áreas de los tres triángulos: 3, 3 y 6. Si $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados iguales, ¿cuál es el área del cuadrilátero sombreado?




**A)** 4 **B)** 4,5 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

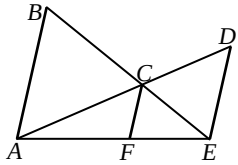
**19** ¿Qué edad tienes?, le preguntan a Pablo y así contesta: "Si yo viviera 100 años, mi edad actual sería los cuatro tercios de la mitad de lo que me quedaría por vivir". ¿Cuál es la edad de Pablo?

**A)** 20 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 80

**20** El volumen de un cono construido con un sector circular de radio 3 y ángulo de 40º es:

**A)** $\frac{4\pi\sqrt{5}}{81}$ **B)** $\frac{10\pi}{9}$ **C)** $\frac{4\pi\sqrt{5}}{243}$ **D)** $9\pi$ **E)** $\frac{8\pi}{27}$

**21** En la figura adjunta los segmentos *AB*, *FC* y *ED* son paralelos. Si la longitud del segmento *AB* es 10 y la del *ED* es 7, la longitud del segmento *FC* es:



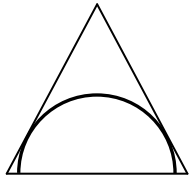

**A)** $\frac{70}{17}$ **B)** $\frac{14}{3}$ **C)** $\frac{47}{14}$ **D)** $\frac{32}{5}$

**E)** $\frac{30}{7}$

**22** Una bolsa contiene 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. Sacamos, una a una y sin devolución, bolas de la bolsa hasta que hayamos sacado todas las bolas de uno de los colores. ¿Cuál es la probabilidad de que hayamos sacado las tres bolas rojas?

**A)** $\frac{3}{10}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{7}{10}$

**23** Inscribimos una semicircunferencia en un triángulo isósceles de base 16 y altura 15, como muestra la figura. ¿Cuál es su radio?



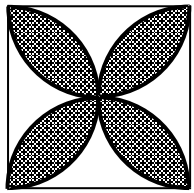
**A)** $4\sqrt{3}$ **B)** $\frac{120}{17}$ **C)** 5 **D)** $\frac{17\sqrt{2}}{2}$

**E)** $\frac{17\sqrt{3}}{2}$

**24** ¿Cuál es el resto de la división de $x^{100} - 2x^{99} + 4$ entre $x^2 - 3x + 2$?

**A)** $x + 2$ **B)** $x + 1$ **C)** $2x + 1$ **D)** $x - 1$ **E)** $3x - 2$

**25** Sobre los lados de un cuadrado se trazan unas semicircunferencias de radio *a*, como muestra la figura. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?



**A)** $(2\pi - 4)a^2$ **B)** $\frac{\pi}{8}a^2$ **C)** $\frac{8-\pi}{4}a^2$

**D)** $(4\pi - 2)a^2$ **E)** $2a^2$

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 22 de abril de 2017**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

**¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | **5 *puntos*** |
| *Cada pregunta **en blanco o errónea*** | **0 *puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA ASPA** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.
**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
El Corte Inglés
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** Si $f$ es una función lineal que verifica $f(2017) - f(2005) = 100$, ¿cuál es el valor de $f(2035) - f(2017)$?

**A)** 75 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 150 **E)** 180

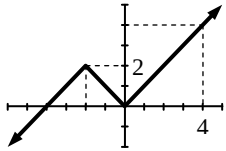
**2** Considera todos los números de nueve cifras. Escribimos cada uno de ellos en una tarjeta y los metemos en una enorme caja. ¿Cuál es el mínimo número de tarjetas que debemos sacar para estar seguros de que al menos dos de ellos coinciden en el primer dígito?

**A)** 9! **B)** 8! **C)** 72 **D)** 10 **E)** 9

**3** El número $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ es igual a:

**A)** $\sqrt{5}-1$ **B)** 1 **C)** $\sqrt[3]{2}$ **D)** $\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}$ **E)** $\sqrt[3]{4}$

**4** La gráfica de la función $f$ está compuesta por tres trozos rectilíneos, como muestra la figura. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f\big(f\big(f(x)\big)\big) = 0$ ?




**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 1 **E)** 0

**5** Si $f$ es una función periódica de periodo T = 5 y en el intervalo [3, 8) verifica que $f(x) = x^2 - 10x + 25$, ¿cuál es el valor de $f(2017)$ ?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 9

**6** Un círculo de radio $r$ está dentro de otro de radio $R$. Si el cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del pequeño pero dentro del grande es $\frac{x}{y}$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el cociente $\frac{R}{r}$ ?

**A)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ **B)** $\frac{x}{\sqrt{x-y}}$ **C)** $\frac{y}{\sqrt{x-y}}$ **D)** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}$ **E)** $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}$

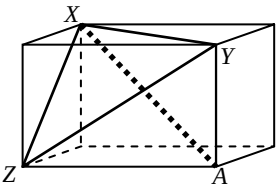
**7** ¿Cuántas parejas de enteros $(x, y)$, con $x \le y$, verifican que su producto es igual a cinco veces su suma?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**8** Si $f$ es la función $f\left(\frac{x}{1-x}\right)=\sqrt{x}$ definida en el intervalo (0, 1) y $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, entonces $f\left(tg^2\theta\right)$ es igual a:

**A)** $sen\,\theta$ **B)** $cos\,\theta$ **C)** $cotg\,\theta$ **D)** $sec\,\theta$ **E)** $cosec\,\theta$

**9** Las longitudes de los lados del triángulo *XYZ* son 8, 9 y $\sqrt{55}$. ¿Cuál es la longitud de la diagonal *XA* del ortoedro de la figura?




**A)** $\sqrt{90}$ **B)** 10 **C)** $\sqrt{120}$

**D)** 11 **E)** $\sqrt{200}$

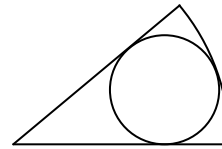
**10** El conjunto de puntos del plano (*x*, *y*) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^2-xy+x-y=0$ es:

**A)** Una elipse **B)** Una parábola **C)** Un punto **D)** Una recta **E)** Dos rectas secantes

**11** En un cajón hay calcetines de ocho colores y ocho de cada color. Si sacamos dos calcetines al azar del cajón, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

**A)** $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{9}$ **D)** $\frac{7}{64}$ **E)** $\frac{9}{64}$

**12** Si el cociente entre el radio del sector circular y el radio del círculo inscrito es 3, ¿cuál es el cociente entre sus áreas?



**A)** $\frac{3}{2}$ **B)** $\frac{4}{3}$ **C)** $\frac{5}{3}$ **D)** $\frac{6}{5}$

**E)** $\frac{5}{4}$

**13** ¿Cuál es el resto de la división $\left(x^{200}-2x^{199}+x^{50}-2x^{49}+x^2+x+1\right):\left(x^2-3x+2\right)$?

**A)** $2x-1$ **B)** 7 **C)** $2x+3$ **D)** 1 **E)** $6x-5$

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** Si las soluciones de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$ son $x_1 = sen\frac{\pi}{7}$, $x_2 = \cos\frac{\pi}{7}$, entonces $b^2$ es igual a:

**A)** $c$ **B)** $1 + 2c$ **C)** $1 + c$ **D)** $1 - c$ **E)** $1 + c^2$

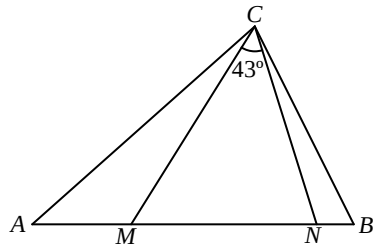
**15** Alicia tenía escritos diez enteros positivos consecutivos y Comenúmeros se comió uno de ellos. Si la suma de los restantes es 2017, ¿qué número se comió?

**A)** 218 **B)** 219 **C)** 228 **D)** 235 **E)** 237

**16** Cuando un cierto sólido se funde y pasa al estado líquido su volumen crece $\frac{1}{12}$. Si a continuación se solidifica, ¿cuánto decrece ahora su volumen?

**A)** $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{11}$ **C)** $\frac{1}{12}$ **D)** $\frac{1}{13}$ **E)** $\frac{1}{14}$

**17** En el triángulo $ABC$ de la figura, los puntos $M$ y $N$ están en el lado $AB$ y verifican $AN = AC$ y $BM = BC$. Si el ángulo $M\hat{C}N$ es de 43º, cuál es la medida del ángulo $A\hat{C}B$ ?




**A)** 86º **B)** 89º **C)** 90º
**D)** 92º **E)** 94º

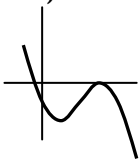
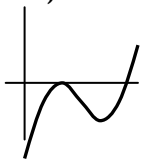
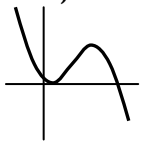
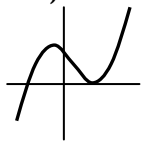
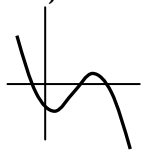
**18** Los puntos $A$ y $B$ están en la gráfica de la parábola $y = x^2 + 7x - 1$ siendo el origen de coordenadas el punto medio del segmento $AB$. ¿Cuál es la longitud de dicho segmento?

**A)** $10\sqrt{2}$ **B)** $5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ **C)** $5 + \sqrt{2}$ **D)** 7 **E)** $5\sqrt{2}$

**19** Si $x$ e $y$ son números reales, ¿cuántas soluciones $(x, y)$ tiene la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ ?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 9 **E)** Infinitas

**20** Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ ?

**A)**  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

**21** Un cuadrado tiene un vértice en el punto $P(1, 2)$ y otro en la recta $y - 3x = 4$. ¿Cuál es el menor valor posible para su área?

**A)** 5 **B)** 4 **C)** 2,5 **D)** 1,25 **E)** 1

**22** ¿Cuántos ángulos $\alpha$, entre 0 y $2\pi$ verifican que $sen\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ ?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**23** Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos tales que $b = a^{30}$ y $c = a^{42}$, el $\log_b c$ es igual a:

**A)** $\dfrac{5}{7}$ **B)** 12 **C)** $9^{12}$ **D)** $-12$ **E)** $\dfrac{7}{5}$

**24** Definimos la "distancia taxi" entre los puntos del plano $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ mediante la expresión $d_{taxi}(P, Q) = |a - c| + |b - d|$ . ¿Qué figura determina el conjunto de puntos del plano cuya distancia taxi al origen es 2?

**A)** Un cuadrado **B)** Una recta **C)** Una circunferencia

**D)** Dos rectas **E)** El conjunto vacío

**25** ¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101} - 10$ ?

**A)** $\dfrac{1}{16}$ **B)** $\dfrac{1}{18}$ **C)** $\dfrac{1}{20}$ **D)** $\dfrac{1}{22}$ **E)** $\dfrac{1}{24}$

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **A** | 1 | **B** | 1 | **D** |
| 2 | **B** | 2 | **E** | 2 | **C** | 2 | **C** |
| 3 | **D** | 3 | **A** | 3 | **E** | 3 | **E** |
| 4 | **D** | 4 | **B** | 4 | **C** | 4 | **A** |
| 5 | **A** | 5 | **B** | 5 | **A** | 5 | **A** |
| 6 | **C** | 6 | **E** | 6 | **E** | 6 | **D** |
| 7 | **D** | 7 | **B** | 7 | **E** | 7 | **D** |
| 8 | **C** | 8 | **D** | 8 | **D** | 8 | **B** |
| 9 | **D** | 9 | **A** | 9 | **D** | 9 | **A** |
| 10 | **C** | 10 | **A** | 10 | **B** | 10 | **B** |
| 11 | **C** | 11 | **C** | 11 | **B** | 11 | **B** |
| 12 | **B** | 12 | **B** | 12 | **D** | 12 | **B** |
| 13 | **E** | 13 | **C** | 13 | **D** | 13 | **C** |
| 14 | **A** | 14 | **A** | 14 | **B** | 14 | **B** |
| 15 | **E** | 15 | **E** | 15 | **D** | 15 | **A** |
| 16 | **A** | 16 | **E** | 16 | **C** | 16 | **A** |
| 17 | **E** | 17 | **B** | 17 | **D** | 17 | **A** |
| 18 | **C** | 18 | **D** | 18 | **C** | 18 | **D** |
| 19 | **E** | 19 | **A** | 19 | **C** | 19 | **A** |
| 20 | **D** | 20 | **D** | 20 | **C** | 20 | **E** |
| 21 | **A** | 21 | **D** | 21 | **E** | 21 | **E** |
| 22 | **E** | 22 | **B** | 22 | **C** | 22 | **A** |
| 23 | **B** | 23 | **B** | 23 | **D** | 23 | **A** |
| 24 | **B** | 24 | **C** | 24 | **C** | 24 | **C** |
| 25 | **A** | 25 | **E** | 25 | **E** | 25 | **D** |

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **A** | 1 | **B** | 1 | **D** |
| 2 | **D** | 2 | **E** | 2 | **A** | 2 | **D** |
| 3 | **B** | 3 | **E** | 3 | **D** | 3 | **B** |
| 4 | **D** | 4 | **A** | 4 | **C** | 4 | **A** |
| 5 | **A** | 5 | **C** | 5 | **C** | 5 | **D** |
| 6 | **C** | 6 | **D** | 6 | **C** | 6 | **D** |
| 7 | **D** | 7 | **B** | 7 | **A** | 7 | **A** |
| 8 | **D** | 8 | **B** | 8 | **E** | 8 | **A** |
| 9 | **E** | 9 | **E** | 9 | **A** | 9 | **B** |
| 10 | **C** | 10 | **A** | 10 | **B** | 10 | **E** |
| 11 | **A** | 11 | **C** | 11 | **D** | 11 | **C** |
| 12 | **C** | 12 | **C** | 12 | **C** | 12 | **A** |
| 13 | **C** | 13 | **B** | 13 | **B** | 13 | **E** |
| 14 | **E** | 14 | **A** | 14 | **A** | 14 | **B** |
| 15 | **D** | 15 | **C** | 15 | **C** | 15 | **C** |
| 16 | **C** | 16 | **E** | 16 | **C** | 16 | **D** |
| 17 | **B** | 17 | **A** | 17 | **E** | 17 | **E** |
| 18 | **E** | 18 | **D** | 18 | **D** | 18 | **A** |
| 19 | **C** | 19 | **B** | 19 | **B** | 19 | **E** |
| 20 | **E** | 20 | **C** | 20 | **A** | 20 | **A** |
| 21 | **A** | 21 | **D** | 21 | **A** | 21 | **D** |
| 22 | **A** | 22 | **E** | 22 | **B** | 22 | **C** |
| 23 | **C** | 23 | **A** | 23 | **B** | 23 | **E** |
| 24 | **C** | 24 | **C** | 24 | **A** | 24 | **A** |
| 25 | **A** | 25 | **B** | 25 | **A** | 25 | **C** |

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* I

**1. (D)** Realizamos las operaciones y comprobamos.
$1{,}3 \times 1{,}3 = 1{,}69$; $2 - 0{,}32 = 1{,}68$; $3{,}3 \div 2 = 1{,}65$; $0{,}69 + 1{,}01 = 1{,}70$;
$2{,}8 \times 0{,}6 = 1{,}68$. El resultado mayor es 1,70

**2. (B)** Si el perímetro del cuadrado mide 12 cm su lado medirá 3 cm de donde obtenemos que los lados del rectángulo medirán, respectivamente, 3 cm y $5 \times 3 = 15$ cm. cm. Por tanto, el área será $15 \times 3 = 45$ cm$^2$.

**3. (D)** Los minutos de anuncio son igual al número de minutos ante la tele, menos el número de minutos que dura el capítulo, es decir:
Tres cuartos de hora = 45 minutos. $45 - 38 = 7$ minutos.

**4. (D)** Resolución a)
El número de diagonales es igual al número de segmentos que unen, dos a dos, los 10 vértices menos el número de lados (10 en nuestro caso). Dicho de otra forma: el número de diagonales es igual al número de parejas de vértices menos el número de lados.
El primer vértice se puede emparejar con los otros 9; el segundo solo con 8 (con el primero ya estaba emparejado); el tercero solamente con 7 (ya estaba emparejado con los dos primeros) y así sucesivamente hasta el noveno que solo se podrá emparejar con el décimo. Por lo tanto el número de diagonales es:
$(9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) - 10 = 45 - 10 = 35$.

Resolución b)
Cada uno de los vértices puede emparejarse con los otros nueve, pero cada una de las parejas estaría repetida (el segmento *AB* es el mismo que el *BA*). Por lo tanto el número de segmentos que pueden obtenerse es $(10 \times 9) : 2 = 45$.
El número de diagonales será entonces, $45 - 10 = 35$.

Resolución c)
Un método sencillo para la resolución de este problema consiste en el cálculo de diferencias de los términos de una serie. Para ello construimos esta tabla.

| Nº de lados del polígono | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de diagonales | 0 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 | 35 | 44 |
| | | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 | +7 | +8 | +9 |

Un decágono regular tiene 35 diagonales

**5. (A)** Como la suma de puntos de un solo dado es 21 y hay cuatro dados, la suma total de puntos será $4 \times 21 = 84$. Por otra parte, dado que tenemos 30 puntos a la vista, la suma de los puntos ocultos será $84 - 30 = 54$.

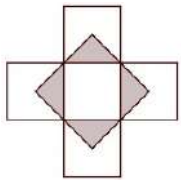
**6. (C)** Midiendo todo en mm tenemos:
Un ovillo de 120 000 mm para hacer conjuntos completos constituidos por:
Un collar de 1200 mm, más una pulsera de 245 mm, más un anillo de 55 mm.
Como para cada conjunto necesita $1200 + 245 + 55 = 1500$ mm de lana, podrá hacer $120\,000 : 1500 = 80$ conjuntos completos.

**7. (D)** Tenemos que analizar 8 tablas. En cada una de ellas tenemos, al comienzo y al final un uno (por ejemplo $3 \times 1$ y $3 \times 10$), con lo que contamos ya con 16 unos. Por otra parte debemos considerar los números de dos cifras que comiencen o terminen en uno. De los que comienzan por uno, solo consideramos los números: 10, 12, 14, 15, 16 y 18, ya que los otros son primos. Veremos ahora cuántas veces aparece cada uno de ellos:

$10 = 2 \times 5 = 5 \times 2$ $\qquad$ $12 = 2 \times 6 = 6 \times 2 = 3 \times 4 = 4 \times 3$
$14 = 2 \times 7 = 7 \times 2$ $\qquad$ $15 = 3 \times 5 = 5 \times 3$
$16 = 2 \times 8 = 8 \times 2 = 4 \times 4$ $\qquad$ $18 = 2 \times 9 = 9 \times 2 = 3 \times 6 = 6 \times 3$

Lo que nos hace contar $2 + 4 + 2 + 2 + 3 + 4 = 17$ unos más.
De los que terminan en uno es inmediato ver que solo aparecen el 21 y el 81:
$21 = 3 \times 7 = 7 \times 3$ y $81 = 9 \times 9$, lo que añade 3 unos más.
Concluimos pues que Comenúmeros se ha zampado $16 + 17 + 3 = 36$ unos.

**8. (C)** A la vista de la figura tenemos que cada triangulito sombreado tiene un área que es la cuarta parte de cada uno de los cinco cuadraditos que forman la cruz griega. Luego entre los cuatro tendrán una superficie igual a la de uno de esos cuadraditos. Se deduce que nuestro cuadrado de 8 $cm^2$ tiene dos veces el área de un cuadradito, que será $8 : 2 = 4$ $cm^2$. Por lo tanto el área de la cruz griega es $4 \times 5 = 20$ $cm^2$.



**9. (D)** Julián pago realmente $20 - 4{,}20 = 15{,}80$ €.
Si a esa cantidad le restamos los $3 \times 2{,}35 = 7{,}05$ € que pagó por los folios, tenemos que con $15{,}80 - 7{,}05 = 8{,}75$ € compró las 5 carpetas. En consecuencia cada carpeta costó: $8{,}75 : 5 = 1{,}75$ €

**10.(C)** Como María y Vania tienen la misma terminación "ia" podemos afirmar que les corresponden los dos primeros nombres en Wingdings, identificando además:
i ≡ ✋ ; a ≡ ✌
Como Jaime tiene que ser necesariamente el tercer nombre, tendremos:
j ≡ ☺ ; m ≡ 💣 ; e ≡ ☜
Ahora estamos en condiciones de afirmar que el primer nombre en Wingdings es María y el segundo Vania, lo que conduce a las identificaciones:
r ≡ ☼ ; v ≡ ✞ ; n ≡ ☠
Por fin, traduciendo letra a letra: Javier ≡ ☺ ✌ ✞ ✋ ☜ ☼

**11.(C)** Oso camina hacia el norte desde las 9 hasta las 18, es decir, durante 9 horas. Drilo, a su vez, camina hacia el sur desde las 23 hasta las 6, esto es, durante 7 horas. Tenemos que calcular el movimiento de Osodrilo desde las 8 hasta la 8 del día siguiente. Dado que de 8 a 9 ambos están despiertos, Oso comienza a caminar a las 9 y lo hará hasta las 18, recorriendo $10 \times 9 = 90$ km hacia el norte. De 18 a 23 ambos están dormidos y no caminan.
De 23 a 6 Drilo caminará hacia el sur $2 \times 7 = 14$ km y de 6 a 8 Osodrilo está parado porque ambos están despiertos. Por tanto estarán a $90 - 14 = 76$ km del claro.

duerme *drilo*
duerme *oso*

**12.(B)** La afirmación P es cierta ya que 15 es mayor que 7 + 5. La Q es falsa porque el lado desigual de un triángulo isósceles puede ser mayor o menor que cada uno de los otros dos lados. La R también es falsa porque no solo el cuadrado tiene los cuatro lados iguales, también los tiene iguales el rombo.

**13.(E)** Tanteemos un poco: $10^3 = 1000$; $20^3 = 8000$; $21^3 = 9261$; $22^3 = 10\,648$. Por lo tanto, el mayor cubo que podemos formar con los diez mil cubitos, tiene 21 cm de arista.

**14.(A)** Para escribir los nueve primeros números necesitamos nueve cifras. Para los 90 números de dos cifras (del 10 al 99), emplearemos $90 \times 2 = 180$ cifras más. Quedan todavía $207 - (9 + 180) = 18$ cifras por emplear en números de tres cifras. Podemos pues escribir: $18 : 3 = 6$ números más y, en consecuencia, el último número será el $99 + 6 = 105$.

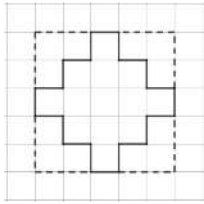
**15.(E)** Si realizamos las diferencias de cada tèrmino con el anterior, hasta el valor 47, encontramos la serie: $3 \to 6 \to 12 \to 24 \to \ldots$. (cada una el doble que la anterior). La diferencia siguiente sería 48, con lo que el número comido sería: $47 + 48 = 95$.
Calculemos, a modo de comprobación, el término siguiente a 95.
La siguiente diferencia sería 96 y por tanto $95 + 96 = 191$.

**16.(A)** Como 4 $m^2$ es la cuarta parte de 16 $m^2$, pintará los 4 $m^2$ en la cuarta parte de tiempo que los 16 $m^2$, es decir, los pintara en $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ hora = 30 minutos.

**17.(E)** Si $A$ es la edad de Ánder entonces la edad de Carlos será $A + 10$ y la suma de sus edades $2A + 10 = 22$ de donde $2A = 12$ y $A = 6$**.**
Por tanto la edad de Carlos será 6 + 10 = 16 años.

**18.(C)** En la tienda, tras la acción de Ana, hay ocho hámsters de los que dos son hembras, luego la probabilidad de escoger al azar una hembra es: $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

**19.(E)** De la figura se deduce que el perímetro de cada polígono crucigrama es igual al del cuadrado que lo "circunscribe", como se muestra en la figura. De esta forma podemos sustituir los polígonos de la serie por cuadrados de lados: 1, 3, 5, 7, 9,…
En consecuencia, el quinto polígono de la serie tendrá un perímetro de $4 \times 9 = 36$ cm.



**20.(D)** Resolución a):
Sea N el número dado por Don Retorcido. Si N fuese par, aplicando la regla tendremos: "2 por par + 1= impar".
Aplicando de nuevo la regla: "3 por impar + 1 = par" y aplicándola por tercera vez: "2 por par + 1= impar". Dado que se llega al 208, N es necesariamente impar.
Aplicando la regla tres veces tendremos:
$3N + 1 = N_1$ (par); $2N_1 + 1 = N_2$ (impar); $3N_2 + 1 = 208$.
Deshaciendo el camino:

$$\frac{208-1}{3}=69=N_2\,;\ \frac{69-1}{2}=34=N_1\,;\ \frac{34-1}{3}=11=N$$

Resolución b):
Utilizamos la estrategia de "empezar por el final", siguiendo los pasos que pide el problema a la inversa; así:
Primero, al resultado final (208) le restamos 1 y lo dividimos entre 3 por obtener número impar: 208 – 1 = 207; 207 : 3 = 69.
Segundo, al resultado obtenido (69) le restamos 1 y le dividimos entre 2 por obtener número par y no múltiplo de 3: 69 – 1 = 68; 68 : 2 = 34.
Tercero, al resultado obtenido (34) le restamos 1 y dividimos entre tres por obtener número impar: 34 – 1 = 33; 33 : 3 = 11
El número que nos dio Don Retorcido es 11.

**21.(A)** Cada banda horizontal está formada por quince triángulos más dos medios triángulos en los extremos; en total la superficie de diez y seis triángulos.
Por otra parte, vemos que en cada banda está coloreada la superficie equivalente a cuatro triángulos (en unas cuatro triángulos completos y en otras tres más dos mitades). Por lo tanto la fracción coloreada será: $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

**22.(E)** Luca le había dado 13 caramelos a Lino. Si le da uno más, Lino tiene 14 y Luca la mitad, es decir 7. Luego hay 14 + 7 = 21 caramelos, que Luca tenía al principio.

**23.(B)** Las diagonales de cada uno de los dos cuadrados grandes forman en el otro cuatro cuadrados, con lo que ya tenemos ocho cuadrados, que junto con los dos grades suman en total diez cuadrados.

**24.(B)** Si con tres patadines el balón recorre la mitad que con un chutazo (120 : 2 = 60 m), con un patadín recorrerá la tercera parte, es decir, 60 : 3 = 20 m.

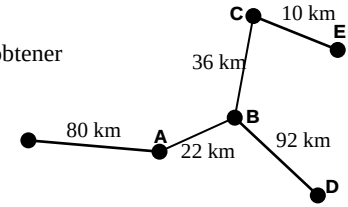
**25.(A)** Hacemos las operaciones en sentido inverso: 2017 + 23 = 2040; 2040 : 6 = 34.
El número de partida era el 34 y la suma de sus cifras es 7.

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* II

**1. (A)** El menor número de cuatro cifras distintas cuyas cifras suman 20 es 1199 y el mayor es 9920, así pues la suma vale 11 119.

**2. (E)** Restando las distancias que nos dan es fácil obtener la longitud de cada tramo de carretera:
Para ir de D a E debemos hacer el recorrido D→B→C→ E que hacen un total de
92 + 36 + 10 = 138 km.




**3. (A)** Como en cada cifra podemos elegir entre dos números distintos, de una cifra hay 2 números, de dos cifras 2·2 = 4 y de tres cifras hay 2·2·2 = 8. Escribimos ahora los primeros números de cuatro cifras hasta llegar al 1121: 1111, 1112, 1121.
El 1121 ocupa la posición 2 + 4 + 8 + 3 = 17.

**4. (B)** Si a Julián le devolvieron 4,20 € en total pagó 20 – 4,20 = 15,80 €.
Los tres paquetes de folios costaron 2,35·3 = 7,05 €, así que cada carpeta cuesta (15,80 – 7,05)/ 5 = 1,75 €.
A Ana le devolvieron 20 – (2,35 + 3·1,75) = 20 – 7,60 = 12,40 €.

**5. (B)** Si en total son $n$ hermanos y cada hermano tiene $n – 1$ hijos, el número total de hijos es $n(n – 1)$. Si a este número le sumamos los hermanos tenemos que la familia tienen $n + n(n – 1) = n^2$ miembros. El único cuadrado perfecto que hay entre 66 y 99 es 81, que es el número de miembros de la familia de Don Retorcido.

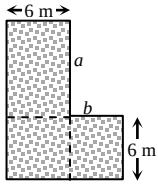
**6. (E)** Un capicúa de tres cifras tiene la forma *aba* y para que sea múltiplo de 3 la suma de sus cifras debe serlo también. Busquemos pues qué valores pueden tomar $a$ y $b$ para que $2a + b$ sea múltiplo de tres, teniendo en cuenta que deben ser enteros de 0 a 9 y que $a$ no puede ser 0.
Si $a = 1$, $b = 1$, 4 o 7; si $a= 2$, $b = 2$, 5 o 8 y si $a = 3$, $b = 0$, 3, 6 o 9.
Observa que si $a$ es múltiplo de 3 hay cuatro valores posibles para $b$ y que si $a$ no es múltiplo de 3 hay tres posibilidades para $b$. Así que en total hay $3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 30$ capicúas de tres cifras que son múltiplos de 3.

**7. (B)** Para acabar en tres semanas Emma debe leer cada semana 70 páginas. Si de lunes a jueves lee $x$ páginas diarias, el viernes leerá $x – 5$ y con las 10 del domingo obtenemos la ecuación: $4x + (x – 5) + 10 = 70$ cuya solución es $x = 13$. ¡Ojo! 13 son las páginas que lee de lunes a jueves, pero nos preguntan cuántas lee el viernes que son 13 – 5 = 8.

**8. (D)** Observamos que el 0, 6, 7 y 8 deben ocupar las posiciones de las unidades. El 5 solo puede ocupar la posición de las decenas con el 0 en las unidades y, para que no haya números consecutivos el 2 tendrá que ir con el 6 y el 8. Así pues, los números son: 26, 28, 47 y 50 y la suma del mayor y el menor es 50 + 26 = 76.

**9. (A)** La suma de los puntos de las seis caras de un dado es 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. Como hay 4 dados, todos los puntos sumarán 4 · 21 = 84 y como hay 30 puntos visibles, en total hay 84 – 30 = 54 no visibles.

**10.(A)** Llamando $a$ y $b$ a los lados que ves en la figura y usando el dato del área obtenemos que $6a + 36 + 6b = 120$ por lo que $a + b = 14$. Como no tenemos más datos, no vamos a poder calcular cuánto valen $a$ y $b$, pero con saber el valor de la suma tenemos suficiente.




El perímetro de la L es: $6 + a + b + 6 + (b + 6) + (6 + a) =$
$= 2a + 2b + 24 = 2(a + b) + 24 = 2 \cdot 14 + 24 = 52$ m.

**11.(C)** Calculemos cada una de ellas atendiendo al orden de las operaciones:

**A)** $5 - 1:2 = 5 - 0{,}5 = 4{,}5$ **B)** $2{,}46 + 3{,}64 = 6{,}1$

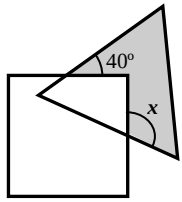
**C)** $5 \cdot (1{,}2 - 2{,}4) = 5 \cdot (-1{,}2) = -6$ **D)** $0{,}25 \cdot 42 = 10{,}5$

**E)** $\sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} \approx 9{,}5$

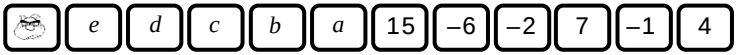
Así pues, la única operación que da como resultado un número entero es **C).**

**12.(B)** Fíjate en el pentágono gris. La suma de sus ángulos debe ser $180º \cdot (5 - 2) = 540º$.

Así pues, $40º + 60º + 60º + x + 270º = 540º$ y, por lo tanto, $x = 540º - 430º = 110º$.



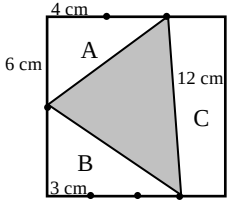

**13.(C)** Reconstruyamos la serie poco a poco:




Como $-2 = a + 15 + (-6)$ entonces $a = -11$.
Como $-6 = b + (-11) + 15$ entonces $b = -10$.
Como $15 = c + (-10) + (-11)$ entonces $c = 36$.
Como $-11 = d + 36 + (-10)$ entonces $d = 15$.
Como $-10 = e + 15 + 36$ entonces $e = -61$.
Y por fin, como $36 = f + (-61) + 15$, entonces el número que se comió Comenúmeros en último lugar fue el 82.

**14.(A)** Si vamos poco a poco fijándonos en la tabla, todos podemos **Delitar**:
$\{1\ \mathbf{\Delta}\ [\mathbf{(2\ \Delta\ 3)}\ \mathbf{\Delta}\ 4]\}\mathbf{\Delta}\ 5 = \{1\ \mathbf{\Delta}\ \mathbf{[2\ \Delta\ 4]}\}\mathbf{\Delta}\ 5 = \mathbf{\{1\ \Delta\ 5\}}\ \mathbf{\Delta}\ 5 = \mathbf{3\ \Delta\ 5} = 5.$

**15.(E)** Como el área es 144 $cm^2$, los lados del cuadrado miden 12 cm.
En lugar de calcular el área del triángulo vamos a calcular el área de cada zona blanca y después restaremos.
A es un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 y, por lo tanto, su área es 24 $cm^2$.
B es un triángulo rectángulo de catetos 6 y 9 y, por lo tanto, su área es 27 $cm^2$.
C es un trapecio rectángulo de bases 3 cm y 4 cm y altura 12 cm y, por lo tanto, su área es $\frac{3+4}{2}\cdot 12 = 42$ $cm^2$.




Así pues, el área del triángulo gris es $144 - (24 + 27 + 42) = 51$ $cm^2$.

**16.(E)** Observa que los números que ocupan posiciones pares en la secuencia son potencias de 2: 2, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, … y el número que está delante es una potencia de 2 menos 1. Las primeras potencias de 2 son: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024,… así que el único número que aparecerá es 1024 – 1 = 1023.

**17.(B)** En total hay $18\cdot 12\cdot 10 - 6^3 = 6^3\cdot 10 - 6^3 = 6^3\cdot 9$ $m^3$ de agua. Como el área de la base de la piscina es $18\cdot 12 = 6^3$ $m^2$, el agua llegará a una altura de 9 m.

**18.(D)** Como $30 = 2\cdot 3\cdot 5$, solo hay cuatro posibilidades:
$30 = 2\cdot 3\cdot 5$ y la suma de los factores es 10.
$30 = 1\cdot 2\cdot 15$ y la suma de los factores es 18.
$30 = 1\cdot 3\cdot 10$ y la suma de los factores es 14
$30 = 1\cdot 5\cdot 6$ y la suma de los factores es 12.
El número que sobra es el 16.

**19.(A)** Para calcular las probabilidades escribamos todos los casos favorables.
P = "que salga par o múltiplo de 5" = {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15}.
La probabilidad de P es $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

Q = "que salga impar" = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}. La probabilidad de Q es $\frac{8}{15}$.

R = "que salga múltiplo de 3 o que acabe en 0" = {3, 6, 9, 10, 12, 15}. $p(R) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Como $\frac{6}{15} < \frac{8}{15} < \frac{9}{15}$, el orden es RQP.

**20.(D)** El cuadrado tiene 30 palitos de lado así que para hacerlo necesitará 30·4 =120 palillos. Para el palito vertical necesita 31 palillos y para el inclinado 30. En total usó 120 + 31 + 30 = 181 palillos.

**21.(D)** Pongamos los paréntesis en todas las que se nos ocurra y si solo nos queda una habremos terminado:
**A)** $2\cdot(3+1)\cdot 5=40$ **B)** $7-(2-1)=6$ **C)** $(4+3)\cdot 2=14$ **E)** $4\cdot(1+2+3)=24$
**D)** $-2\cdot 3-5=-4$ es la única cuenta para la que no se me ocurre nada.

**22.(B)** El 42% de 37 lados son (42·37)/100 = 15,54. Así pues, Caracolito ha recorrido 15 lados completos (y más de la mitad de otro).

**23.(B)** Para hacer las cuentas fáciles, supongamos que los lados del cuadrado inicial miden 100 unidades (cm, palmos, …. Da igual).
Tras el paso de Sara los lados horizontales miden 120 unidades y los verticales 80.
Ahora viene Julia que deja los horizontales a 0,8 · 120 = 96 unidades y los verticales a 1,2 · 80 = 96 unidades.
Así que al final queda un cuadrado un poco más pequeño que el inicial.

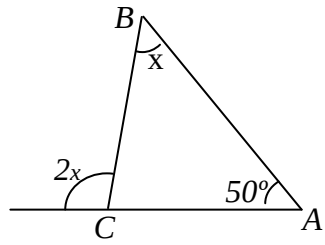
**24.(C)** Tras observar un rato la resta me he dado cuenta de que la resta que da el menor resultado positivo es 963 – 961 = 2. Así que la suma de los números que se ha comido nuestro amigo es 7 + 5 + 1 + 4 + 7 + 8 = 32.

**25.(E)** El número tiene que ser de la forma $\boxed{a+3}\boxed{a}$ con $a$ y $a$ + 3 números de dos cifras.
Como $a$ + 3 debe ser mayor que 9, $a$ debe ser mayor que 6 y como $a$ + 3 debe ser menor de 100, $a$ debe ser menor que 97. Así que hay 90 valores posibles para $a$: del 7 al 96.

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* III

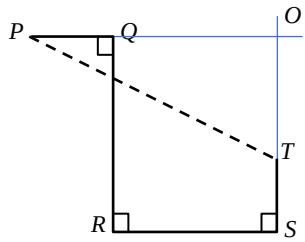
**1. (B)** $2x$ y $x + 50º$ son suplementarios del ángulo $\hat{C}$ del triángulo, y por tanto son iguales.
Así, $2x = x + 50º$, luego $x = 50º$.




**2. (C)** Si pasa por los puntos $A(2, 7)$ y $B(a, 3a)$ la pendiente es $\frac{3a-7}{a-2}=2$ , y por tanto, $3a – 7 = 2(a – 2)$, de donde $a = 3$.

**3. (E)** Alargamos las líneas PQ y TS hasta encontrarse en $O$. Como $PQ = 4$ y $RS = 8$, entonces $PO = 12$. Como $QR = 8$ y $ST = 3$, $OT = 5$.

La distancia de $P$ a $T$ es $\sqrt{12^2+5^2}=13$.




**4. (C)** $\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{4}{24}=\frac{6}{36}=\frac{8}{48}=\frac{10}{60}$; $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}=\frac{6}{24}=\frac{9}{36}=\frac{12}{48}=\frac{15}{60}$ . Solo $\frac{5}{24}$ está comprendida entre las dos fracciones.

**5. (A)** $N=10^{100}\cdot 100^{10}=10^{100}\cdot 10^{20}=10^{120}$ . El 1 está seguido de 120 ceros.

**6. (E)** mcm(20, 16 y 2016) = 2016 · 5 =10 080 (empleamos que el mcm debe ser múltiplo de 2016 y deberemos añadirle los factores primos novedosos en 20 y 16, pero como 2016 = 2000 + 16 es múltiplo de 16, solo debemos aportar un 5.

**7. (E)** Si sumamos a su vez las sumas por parejas, 998 + 1050 + 1234 = 3282, habremos sumado los tres números dos veces, luego la suma de los tres será la mitad, 1641. Si a la suma de los tres le quitamos cada una de las sumas por parejas obtenemos los números por separado.
El mayor es, 1641 – 998 = 643 y el menor, 1641 – 1234 = 407. La diferencia de ambos es 236.

**8. (D)** El primer mensajero enviado de vuelta al castillo llega al castillo hora y media después de haber salido (en la primera hora, acompañando al rey recorrió 5 km, y luego los tuvo que hacer de vuelta, empleando en ello media hora). De igual forma el mensajero $n$ acompaña al rey durante $5n$ km, y luego los recorre de vuelta, tardando en total $\left(n+\frac{n}{2}\right)$ horas.
La diferencia en horas entre el mensajero n y el $(n-1)$, es de hora y media.

**9.(D)** Si el producto final es 36 y uno de ellos es 3, el producto de los dos dígitos no borrados es 12. Doce puede ser expresado como producto de dos dígitos como 3·4 o como 2·6. Pero los tres dígitos finales son también distintos y eso excluye que sean, 3, 4 y 3. Así los dos no borrados son 2 y 6 y el tercero 7.

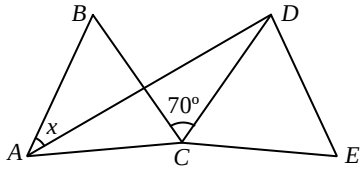
**10. (B)** Si la media de, 4, $a$, $b$ y 22 es 13, su suma es 52 y así $a + b = 26$. Pero por el orden entre ellos y por ser enteros, $5 \le a < b \le 21$. Empezamos en la pareja (5, 21) y acabamos en la (12, 14). Luego hay 12 – 5 + 1 = 8 posibles parejas.

**11. (B)** Si $\frac{x-y}{x+y}=9$ y $\frac{x\cdot y}{x+y}=-60$, cambiando $x + y$ por $a$, tendremos que:

$\begin{cases} x-y=9a \\ x\cdot y=-60a \end{cases}$ y también $\begin{cases} x-y=9a \\ x+y=a \end{cases}$, de donde $x = 5a$, $y = -4a$.

Así, $x \cdot y = -20a^2 = -60a$, y así $a = 0$ (no vale ya que $a$ de partida aparece como denominador) o $a = 3$.
De resultas, $x = 15$, $y = -12$ y $(x + y) + (x - y) + (x \cdot y) = 3 + 27 - 180 = -150$.

**12. (D)** Aparece como triángulo clave el *ACD*, que es isósceles y cuyo ángulo distinto mide 70º + 60º, luego los iguales son de 25º. Así $x$ resulta ser, 60º – 25º = 35º.



**13. (D)** Escribimos en forma de radical los diferentes números:

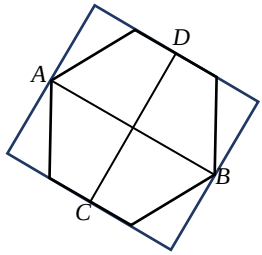
$\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}=\sqrt{340}$; $\sqrt{20}\cdot 17=\sqrt{5780}$; $20\cdot\sqrt{17}=\sqrt{6800}$; $\sqrt{201}\cdot 7=\sqrt{9849}$; $\sqrt{2017}$

El más grande es el cuarto.

El problema podría ser resuelto con un pequeño cálculo mental:

$\sqrt{20}\cdot\sqrt{17}$, está entre 16 y 25; $\sqrt{20}\cdot 17$, está entre 68 y 85 ; $20\cdot\sqrt{17}$, está entre 80 y 100 ; $\sqrt{201}\cdot 7$, está entre 98 y 105 ; $\sqrt{2017}$ está entre 44 y 45.

**14. (B)** Las líneas *AB* y *CD* son perpendiculares, y así su producto equivale al área del rectángulo que hemos circunscrito al hexágono regular. El hexágono puede ser dividido en seis triángulos equiláteros iguales y el rectángulo equivale a ocho de ellos. Si el área del hexágono es 60, la del rectángulo es 80.

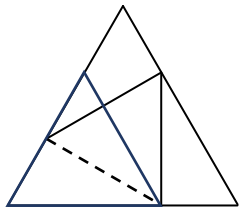



**15. (D)** Si hay *m* chicos y *n* chicas, y $p$ y $q$ son las notas medias respectivas de ambos grupos, tenemos que $\frac{m\cdot p+n\cdot q}{m+n}+1{,}2=\frac{m\cdot(p+3)+n\cdot q}{m+n}$. Quitando denominadores nos queda, $(m\cdot p+n\cdot q)+1{,}2(m+n)=m(p+3)+n\cdot q$ , y operando tendríamos que, $(m+n)\cdot 1{,}2=3m$; $1{,}2\cdot n=1{,}8\cdot m$, y así $\frac{n}{m}=\frac{3}{2}$ , y $\frac{n}{m+n}=\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5}=60\ \%$

**16. (C)** La suma $1+2+3+\ldots+n$ es igual a $\frac{(n+1)\cdot n}{2}$ (la mitad del producto de un natural por su consecutivo). Si queremos que se aproxime a 1000 tendremos que buscar un natural tal que su cuadrado se aproxime a 2000. Hallamos la raíz cuadrada de 2000 que es 44 y pico. El cuadrado de 44 es 1936 y si le sumamos 44 no llega a 2000 (sin embargo el cuadrado de 45 pasa ya de 2000).

**17. (D)** Para hallar el número de divisores de un número se descompone en factores primos y se hace el cálculo de coger los exponentes de los factores primos diferentes, aumentarlos en una unidad y multiplicarlos. Como buscamos números menores que 100, estos pueden tener hasta seis doses, no más de cuatro treses, a lo más dos cincos, o dos sietes. Por tamaño es mejor tener al menos tantos doses como treses, o tantos treses como cincos o sietes. Como $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ pasa de 100 vamos a partir de dos doses y ver como los acompañamos. $2^6$ tiene 7 divisores; $2^5\cdot 3$ tiene 12 divisores; $2^4\cdot 3$ y $2^4\cdot 5$ tienen 10 divisores; $2^3\cdot 3^2$ tiene 12 divisores; $2^2\cdot 3\cdot 5$ y $2^2\cdot 3\cdot 7$ tienen 12 divisores.

**18. (C)** Conviene darse cuenta que el lado del pequeño es altura de un triángulo equilátero, que está en proporción lineal de 2:3 con el triángulo mayor. Si 12 es la altura, el lado es $\frac{24}{\sqrt{3}}$ (solución positiva de $12^2 = m^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2$), y el lado buscado es $\frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = 12\sqrt{3}$ .



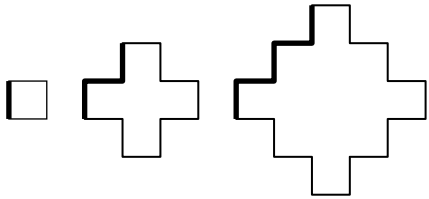
**19. (C)** $\begin{cases} a + \sqrt{2}\, b = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\, a + b = \sqrt{2} \end{cases}$ . El sistema es lineal, simétrico y de solución única, luego $a = b$.

Por lo tanto $a + \sqrt{2}\, a = \sqrt{2}$ , y así $a = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)}{2-1} = 2 - \sqrt{2}$ .

**20. (C)** Empezamos la búsqueda:

2017 = 2016 +1, ( $\sqrt{2016}$ está entre 44 y 45); $44^2 + 9^2 = 1936 + 81 = 2017$ (esta es la suma buscada). Las bases son 44 y 9 y su suma es 53..

**21. (E)** El primer cuadrado tiene 4 cm de perímetro. El segundo 12 y el tercero 20. Los perímetros van aumentando de 8 en 8 (son, en cm, cuatro veces los palitos de la escaleras dibujadas en línea gruesa) y por tanto siguen una fórmula $8n + b$.

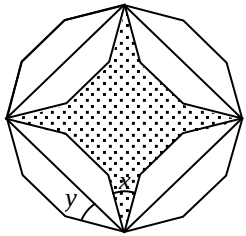


Para hallar $b$, basta con ajustar la fórmula para $n = 1$. $8 \cdot 1 + b = 4 \Rightarrow b = -4$ y $a - b = 12$.

**22. (C)** Para que se conserven las dos últimas cifras debe conservarse la última. Al elevar al cuadrado se conservan las terminaciones, 0, 1, 5, y 6. Como hablamos de terminaciones de dos cifras en una multiplicación, podemos restringirnos a números de dos cifras. La terminación 00 es la única acabada en 0 que se conserva al cuadrado. La penúltima cifra de $(n \cdot 10 + 1)^2 = n^2 \cdot 100 + 20n + 1$, es la final de $2n$, y solo coinciden si $n$ =0. La terminación de dos cifras de $(n \cdot 10 + 5)^2$ es 25. La penúltima cifra de $(n \cdot 10 + 6)^2$ es la última de $2n + 3$, y solo coinciden si $n$ =7. Así que se conservan al elevar al cuadrado las terminaciones, 00, 01, 25 y 76.

**23. (D**) El ángulo del dodecágono regular mide $180^\circ - \frac{360^\circ}{12} = 150^\circ$ .

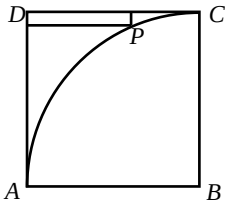
El ángulo "*y*" mide la mitad de 150º – 90º, es decir 30º. El ángulo *x* mide 150º – 4*y* es decir 30º.




**24. (C)** El número $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ es múltiplo de 4, y no de 8. Al dividir por 8 el resto es 4.

**25. (E)** Sea *r* el lado del cuadrado.

Así, $PB^2 = r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2$ . Y trabajando en la ecuación, llegamos a $r^2 - 18r + 65 = 0$ , cuyas soluciones son 5 y 13.
La solución 5 no es posible, ya que es inferior a 8.



# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel IV*

**1. (D)** Al aparecer en el enunciado $\log_2(-x)$, $x$ debe ser negativo, pero como también aparece $\log_2\sqrt{x-1}$, $x-1$ sería, en ese caso, negativo, por lo que no hay ningún número real solución de la ecuación.

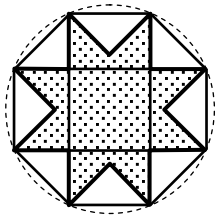
**2. (C)** Como $2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{n}}$, tenemos $2^{x\cdot n} = 2^{-3} \Rightarrow x\cdot n = -3$.

**3. (E)** El mayor factor primo que puede tener cualquier número de los buscados es 23, pues si aparece el siguiente primo, 29, resultaría que el menor número producto de tres primos, uno de cuyos factores sea 29, es $2\cdot 2\cdot 29$, que es mayor que 100.
Así pues, hay que ver cuántos números menores que 100 son producto de tres primos de la lista: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.
La mejor forma de contarlos es ir escribiendo ordenadamente tres factores, de forma que cada factor sea mayor o igual que el que está a su izquierda.

$2\cdot 2\cdot 2, 2\cdot 2\cdot 3, 2\cdot 2\cdot 7, \ldots, 2\cdot 2\cdot 23$ (9 números)
$2\cdot 3\cdot 3, 2\cdot 3\cdot 5, 2\cdot 3\cdot 7, \ldots, 2\cdot 3\cdot 13$ (5 números)
$2\cdot 5\cdot 5, 2\cdot 5\cdot 7, 2\cdot 7\cdot 7$ (3 números)
$3\cdot 3\cdot 3, 3\cdot 3\cdot 5, 3\cdot 3\cdot 7, 3\cdot 3\cdot 11, 3\cdot 5\cdot 5$ (5 números)

En total obtenemos 22 números.

**4. (A)** Una forma cómoda es restar al área del octógono la suma de las áreas de los ocho triángulos rectángulos isósceles blancos.
Al trazar las cuatro diagonales que se indican en la figura adjunta, el octógono se descompone en: un cuadrado de lado 4, cuatro triángulos rectángulos isósceles de catetos $2\sqrt{2}$ y cuatro rectángulos de lados 4 y $2\sqrt{2}$.



Así pues, el área pedida es: $4^2 + 4\left(4\cdot 2\sqrt{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2\right) - 8\left(\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2\right) = 32\sqrt{2}$.

**5. (A)** Al ser $z = 1_{45^\circ}$ resulta que $z^4 = -1$ y que $z^5 = -z$, $z^6 = -z^2$, $z^7 = -z^3$, $z^8 = -z^4$.
Así que la suma pedida es: $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 - z - z^2 - z^3 - z^4 = 1$.

**6. (D)** La suma pedida es $S = 1\cdot2 + 1\cdot3 + ... 1\cdot10 + 2\cdot3 + 2\cdot4 + ... + 2\cdot10 + ... + 9\cdot10$ y utilizando el hecho de que: $(1+2+...+10)^2 = 1^2 + 2^2 + ... + 10^2 + 2\cdot S$, resulta que:

$55^2 = 385 + 2S \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left(55^2 - 385\right) = 1320$ **.**

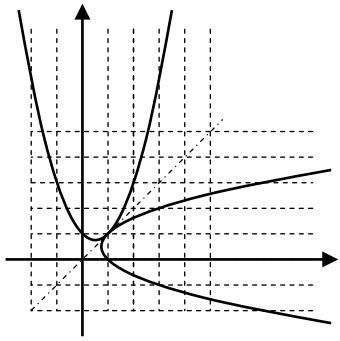
**7. (D)** Efectuando la división obtenemos $\frac{3x^2 - 5x + 1}{x-2} = 3x + 1 + \frac{3}{x-2}$, por lo que la recta $y = 3x + 1$ es asíntota de dicha gráfica.

**8. (B)** Si (*x*, *y*) es solución del sistema, restando, obtenemos: $y - x = x^2 - y^2 - x + y$, es decir $x^2 = y^2$. Así pues:

- Si $x = y$ en la primera ecuación obtenemos $x = x^2 - x + 1 \Rightarrow x = 1$, es decir, la solución es (1, 1).
- Si $x = -y$ resulta en dicha ecuación $-x = x^2 - x + 1 \Rightarrow x^2 = -1$ sin solución real.

Por lo tanto la única solución del sistema es (1, 1).

Representando gráficamente las dos parábolas, simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, se observa claramente que la solución única es (1, 1).



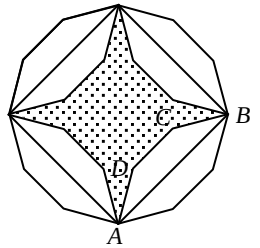
**9. (A)** Restamos al área del cuadrado inscrito la suma de las áreas de los cuatro trapecios isósceles (en blanco). Como el ángulo interior de un dodecágono regular es 150º, el ángulo agudo de cada trapecio es 30º, así que su base mayor, que es el lado *AB* del cuadrado, es:

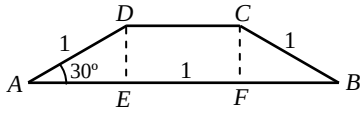
$AB = AE + EF + FB = 1 + 2\left(1\cdot\cos 30^o\right) = 1 + \sqrt{3}$

y su altura $DE = 1\cdot sen30^o = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto el área de la estrella es:

$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot\frac{1+\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 2 + \sqrt{3}.$



**10. (B)** En cada sorteo la probabilidad de no llevarme premio es $\frac{9}{10}$ y al jugar *n* sorteos la probabilidad de no obtener premio en ninguno es $\left(\frac{9}{10}\right)^n$, por lo que la probabilidad de llevarme premio es $1-\left(\frac{9}{10}\right)^n$. Como nos piden encontrar el menor *n* para que $1-\left(\frac{9}{10}\right)^n > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cdot 9^n < 10^n$.

Si $n = 4$, $2\cdot 9^4 = 2\cdot 81^2 > 2\cdot 80^2 = 2\cdot 6400 = 12\,800 > 10^4$

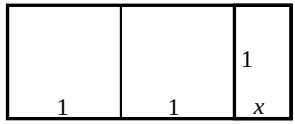
Si $n = 5$, $2\cdot 9^5 = 2\cdot 59049 > 10^5$. Si $n = 6$, $2\cdot 9^6 = 2\cdot\left(9^3\right)^2 = 2\cdot 729^2 = 1062882 > 10^6$.

Pero si $n = 7$, $2\cdot 9^7 = 9\,565\,938 < 10^7$. Así que jugando 7 veces tengo probabilidad mayor que $\frac{1}{2}$ de llevarme premio.

**11. (B)** Si $z_1 = 2+3i = \left(\sqrt{13}\right)_\beta$ es una raíz cuarta de $z = 169_{4\beta}$ entonces también lo serán $z_2 = \left(\sqrt{13}\right)_{\beta+90^\circ} = z_1\cdot 1_{90^\circ} = (2+3i)\cdot i = -3+2i$ , $z_3 = z_1\cdot 1_{180^\circ} = (2+3i)\cdot(-1) = -2-3i$ y $z_4 = z_1\cdot 1_{270^\circ} = (2+3i)\cdot(-i) = 3-2i$.

De las propuestas solamente $3 - 2i$ es solución.

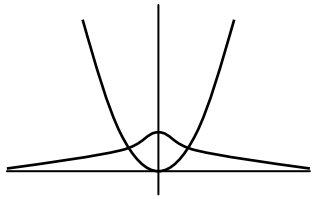
**12. (B)** Llamando *x* a la longitud del menor de los lados del rectángulo pequeño, resulta que el lado largo del rectángulo original es $2 + x$ y por semejanza tenemos, $\frac{2+x}{1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ cuyas soluciones son $x = -1 \pm \sqrt{2}$ y solo la positiva, $x = -1+\sqrt{2}$ tiene sentido.



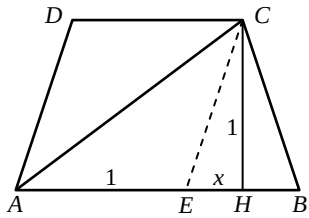

Por lo tanto la longitud del lado pedido es $2+\left(-1+\sqrt{2}\right) = 1+\sqrt{2}$.

**13. (C)** Esbozando las gráficas de ambas funciones vemos que hay dos puntos de corte.

También podríamos haber llegado a esa conclusión resolviendo el sistema formado con las ecuaciones de las dos funciones.



**14. (B)** Trazando el segmento *CE* paralelo a *DA* y la altura *CH*, como muestra la figura, podemos tomar *DC* = *CH* = *AE* como la unidad y llamar *x* al segmento *EH*.




En este caso la diagonal es *AC* = *AB* = 1 + 2*x* y en el triángulo rectángulo *AHC* se verifica que, $(1+2x)^2 = (1+x)^2 + 1^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$ cuyas soluciones son $x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{3}$ y solo tiene sentido la positiva. Por lo tanto $AB = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ y $\frac{AB}{DC} = \frac{\frac{5}{3}}{1} = \frac{5}{3}$.

**15. (A)** Escribiendo $f(x) = \frac{sen^3 x \cdot cos\, x}{1 + tg^2 x}$ como

$$f(x) = \frac{sen^3 x \cdot cos\, x}{\frac{1}{cos^2 x}} = sen^3 x \cdot cos^3 x = \frac{1}{8}(2\, sen\, x\, cos\, x)^3 = \frac{1}{8}(sen 2x)^3$$ podemos observar que el máximo de la función se alcanza cuando *sen*2*x* = 1 y en este caso, $Máx(f(x)) = \frac{1}{8}$.

**16. (A)** Al lanzar 6 dados, distinguibles, hay $VR_6^6 = 6^6$ casos posibles que puede presentar la cara superior de los 6 dados.

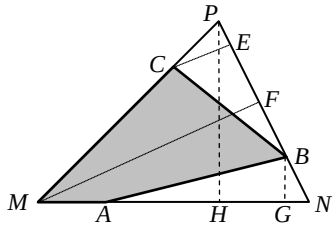
De todas estas posibilidades hay $P_6 = 6!$ casos en los que las caras superiores son distintas, así que la probabilidad pedida es,

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} = \frac{20}{6^4} = \frac{20}{1296} < \frac{20}{1000} = 0{,}02\,.$$

**17. (A)** Con la primera igualdad podemos escribir que $(x+y)^2 = 84 + xy$ y con la segunda $(x+y)^2 = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$.

Igualando ambas expresiones se obtiene $84 + xy = 36 + xy + 12\sqrt{xy}$ y de aquí $12\sqrt{xy} = 48 \Rightarrow \sqrt{xy} = 4 \Rightarrow xy = 16$.

**18**. **(D)** Llamando $S$ al área del triángulo $MNP$ la del triángulo $ANB$ será $\frac{3}{16}S$ ya que su base $AN = \frac{3}{4}MN$ y su altura $BG = \frac{1}{4}PH$. Análogamente $S_{PCB} = \frac{3}{16}S$ puesto que $BP = \frac{3}{4}NP$ y $CE = \frac{1}{4}MF$.

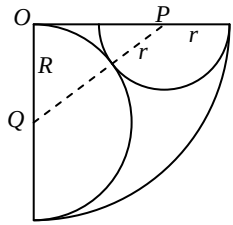



Restando al área del triángulo $MNP$ la de los triángulos $ANB$ y $PCB$ obtenemos el área del cuadrilátero $MABC$. $S_{MABC} = S - \frac{3}{16}S - \frac{3}{16}S = \frac{5}{8}S$

**19. (A)** Consideramos los sucesos
$B_1$ : "La primera bola extraída es blanca"
$B_2$ : "La segunda bola extraída es blanca"
$N_1$: "La primera bola extraída es negra"
Entonces $p(B_2) = p\left[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)\right] = p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap B_2)$ .

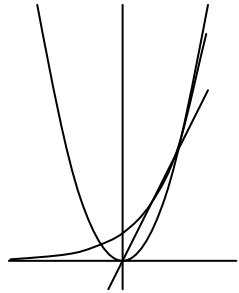
$$p(B_2) = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{m+k}{m+n+k} + \frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n+k} = \frac{m(m+n+k)}{(m+n)(m+n+k)} = \frac{m}{m+n}$$

**20. (E)** Sean $P$ y $Q$ los centros de las dos semicircunferencias que están alineados, obviamente, con el punto de tangencia. Como el radio del cuadrante es 4 entonces $R = PQ = 2$. En el triángulo rectángulo $OPQ$, $PQ^2 = OQ^2 + OP^2$ es decir, $(2+r)^2 = 2^2 + (4-r)^2 \Rightarrow 6r = 4 \Rightarrow r = \frac{2}{3}$




**21. (E)** Con la ayuda de las gráficas de las funciones podemos decir que:

1: tiene soluciones en (2, 3), 2: tiene soluciones en (0, 1)
4: tiene soluciones en (–3, –2), 6: tiene soluciones en (9, 10)
pero en cambio las desigualdades 3 y 5 no se verifican para ningún número real.



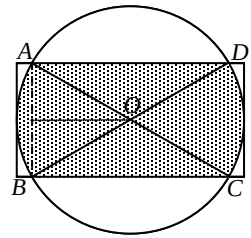
**22. (A)** $10-3\sqrt{11}=\dfrac{100-99}{10+3\sqrt{11}}=\dfrac{1}{10+3\sqrt{11}}$; $8-3\sqrt{7}=\dfrac{1}{8+3\sqrt{7}}$; $5-2\sqrt{6}=\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$

$9-4\sqrt{5}=\dfrac{1}{9+4\sqrt{5}}$; $7-4\sqrt{3}=\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}$. La menor será aquella que tenga el mayor denominador.

Son claras las desigualdades $10+3\sqrt{11}>8+3\sqrt{7}>5+2\sqrt{6}$ y $9+4\sqrt{5}>7+4\sqrt{3}$ entonces solo falta comprobar cuál es mayor si $10+3\sqrt{11}$ o $9+4\sqrt{5}$.

$10+3\sqrt{11}>10+3\sqrt{9}=19$. $\quad 9+4\sqrt{5}<9+4\sqrt{6{,}25}=9+4\cdot 2{,}5=19$ luego $10+3\sqrt{11}>19>9+4\sqrt{5}$ y se concluye que el número menor es $10-3\sqrt{11}$.

**23. (A)** El triángulo *AOB* es equilátero de lado *AO* = 6, por lo que el ángulo $A\hat{O}B$ = 60º. La figura se compone de dos sectores circulares de 60º de amplitud y dos triángulos isósceles, *ADO* y *BCO*.

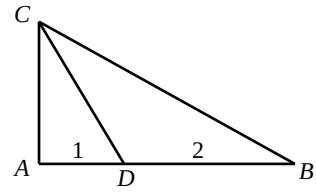



La altura del triángulo equilátero de lado 6 es $3\sqrt{3}$ por lo que $AD=6\sqrt{3}$ y el área del triángulo *ADO* es $\dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$.

El área del sector circular es $\dfrac{1}{6}\pi 6^2=6\pi$.

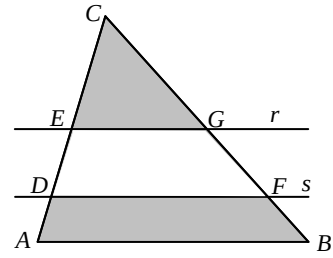
Así pues, el área pedida es: $2\left(6\pi+9\sqrt{3}\right)=12\pi+18\sqrt{3}$.

**24. (C)** El teorema de la bisectriz nos dice que $\dfrac{CA}{AD}=\dfrac{CB}{DB}$ es decir, si $a = AC$, $\dfrac{a}{1}=\dfrac{CB}{2}\Rightarrow CB=2a$.




Entonces, en *ABC*, $4a^2=a^2+3^2\Rightarrow a^2=3.$ y en *ADC*, $CD^2=a^2+1^2=4\Rightarrow CD=2$.

**25. (D)** Tomando $AD = 1$ entonces $DC = 4$ y $AC = 5$.




Los triángulos $CDF$ y $CAB$ son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{DC}{AC} = \frac{4}{5}$ y razón de las áreas $k^2 = \frac{16}{25}$.

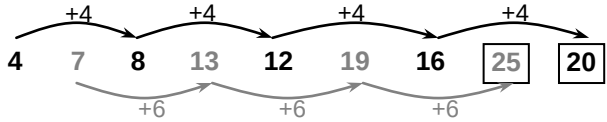
Luego $S_{CDF} = \frac{16}{25} S_{CAB}$ y el área del trapecio $ABFD$ es $\frac{9}{25} S_{CAB}$ que es el área del triángulo $CEG$.

Los triángulos $CEG$ y $CAB$ también son semejantes y la razón de sus áreas es $\frac{9}{25}$ luego la razón de semejanza es $\frac{3}{5}$. Esto nos indica que $\frac{CE}{CA} = \frac{3}{5}$ y como $CA = 5$ entonces $CE = 3$ y $EA = 2$. Como consecuencia $\frac{CE}{EA} = \frac{3}{2}$.

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* I

**1. (D)** En la serie, los números pares se obtienen sumando 4 al número par anterior; los números impares se obtienen sumando 6 al anterior número impar; de esta forma los dos números siguientes de la serie son: 25 y 20
19 + 6 = 25; 16 + 4 = 20




**2. (D)** Un metro tiene 100 centímetros. 100 : 2 = 50 trozos de 2 centímetros. Cada corte proporciona un trozo de 2 cm y en el corte 49 obtiene dos trozos de 2 cm.
La cinta queda cortada en 49 días.

**3. (B)** En la recta dibujada se obtienen 15 segmentos. Son los siguientes: AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF y EF
Una tabla de doble entrada como la que se muestra facilita el conteo de segmentos.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | AB | AC | AD | AE | AF |
| B | | | BC | BD | BE | BF |
| C | | | | CD | CE | CF |
| D | | | | | DE | DF |
| E | | | | | | EF |
| F | | | | | | |

**4. (D)** La miel pesa el doble que la leche, entonces, leche + leche + tarro = 500 g
Como la leche más el tarro pesan 350 g, se deduce que la leche pesa:
500 – 350 = 150 g
El tarro pesa 350 – 150 = 200 g

**5. (A)** Primero, calculamos el número de cifras que tiene el libro de 86 páginas.
- Número de cifras de las páginas 1 a 9……..… 9 cifras
- Número de cifras de las páginas 10 a 79……140 cifras
- Número de cifras de las páginas 80 a 86…….14 cifras

TOTAL: 163 cifras

Después, contamos los números que contienen la cifra 7. En estos 17 números: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 y 79, hay 18 sietes.:
Por último, restamos 18 al número total de cifras.
163 – 18 = 145 cifras comió Comenúmeros.

**6. (C)** Solo se pueden construir triángulos que cumplan que la longitud de cada lado de un triángulo tiene que ser mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos lados y menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.
Con estas condiciones y con los datos dados se pueden construir siete triángulos cuyos lados medirán: a) 3, 3 y 3; b) 3, 3 y 5; c) 3, 5 y 5; d) 5, 5 y 5; e) 10, 10 y 10; f) 10, 10 y 3; g) 10, 10 y 5.

**7. (D)** Primero, se expresa en gramos el peso del cordero: 3 kg 600 g = 3600 g
Después, se calcula la pérdida de peso durante el asado:
$\frac{2}{3}$ de 3.600 = $\frac{2}{3} \cdot 3600 = 2400$ g
Por último, se calcula la cantidad que comió cada uno de los afortunados:
2400 : 8 = 300 g
María comió 300 gramos de cordero.

**8. (D)** Para los escolares de Primaria, se sugiere que la resolución del problema se proponga de forma experimental y que no se utilicen contenidos de combinatoria.

Al lanzar cuatro dados cuya suma de puntos sea 15 se obtienen estos once resultados:

a) 6 – 6 – 2 – 1; b) 6 – 5 – 3 – 1; c) 6 – 5 – 2 – 2; d) 6 – 4 – 4 – 1;
e) 6 – 4 – 3 – 2; f) 6 – 3 – 3 – 3; g) 5 – 5 – 4 – 1; h) 5 – 5 – 3 – 2;
i) 5 – 4 – 4 – 2; j) 5 – 4 – 3 – 3; k) 4 – 4 – 4 – 3.

**9. (E)** Se busca el múltiplo de 8 y de 5 comprendido entre 100 y 150.
El múltiplo de 8 y de 5 mayor que 100 y menor que 150 es 120. Dilo comió 120 peces. Oso comió: 120 : 8 = 15 peces.
Restando 15 a 120 se halla el número de peces que comió Dilo más que Oso.
120 – 15 = 105 peces comió más Dilo que Oso

**10. (C)** La suma actual de las edades de los cuatro hijos del señor Carpanta se calcula restando cinco a 50 por cada hijo:
$50 - 5 \times 4 = 50 - 20 = 30$
La suma actual de las edades de los cuatro hijos es 30. Dentro de dos años la suma de sus edades será: $30 + 2 \times 4 = 30 + 8 = 38$.

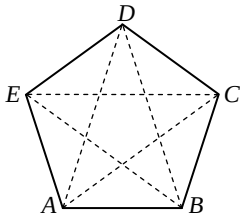
**11. (A)** El perímetro de un rectángulo es igual a dos veces la suma de las longitudes de la base y de la altura: $p = 2 \times (b + a)$. Por lo tanto $b + a = 12$ palillos.
Se pueden formar seis rectángulos de longitudes cuyas dimensiones son:

| base | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| altura | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

**12. (C)** La diferencia que marcan los dos relojes de cada hora es de 20 segundos.
Una hora tiene $60 \times 60 = 3600$ segundos. $3600 : 20 = 180$ horas
Tienen que pasar 180 horas

**13. (C)** Primero, calculamos el área de la parte sombreada de cada una de las figuras, para ello lo mejor es restar a la superficie del cuadrado la de los triángulos en blanco.
Figura A = 36 – (3 + 1,5 + 6 + 7,5) = 36 – 18 = 18 u.c.
Figura B = 36 – (6 + 5 + 6) = 36 – 17 = 19 u.c.
Figura C = 36 – (6 + 3 + 3 + 6) = 36 – 18 = 18 u.c.
La única afirmación cierta es la C

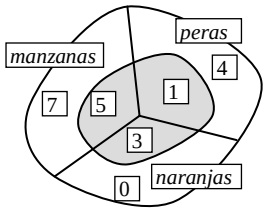
**14. (E)** Se pueden formar 10 triángulos que son los siguientes: *ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE*.
(Para no olvidar o repetir alguno, están ordenados alfabéticamente)




**15. (D)** La altura de la matrioska más pequeña es igual a**:**

$$16 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{16} = 5{,}0625 \text{ cm} = 50{,}625 \text{ mm} \cong 50 \text{ mm}$$

**16. (C)** De las 9 frutas podridas que hay en la cesta, 5 son manzanas, 3 naranjas y, por tanto, 1 pera. Además, 9 frutas podridas + 7 manzanas sanas = 16 frutas. Faltan 4 frutas para completar las 20, que necesariamente tienen que ser peras para que su número sea mayor que el de naranjas. En la cesta hay 5 peras, 4 sanas y 1 podrida.
El esquema aclara la situación.




**17. (B)** Número de calcetines que hay en el cajón: 10 + 12 + 8 + 4 = 34 calcetines
Sacamos un calcetín, quedan: 34 – 1 = 33 calcetines en el cajón.
Número de calcetines azules que quedan en el cajón: 10 – 1 = 9
Probabilidad de sacar un calcetín azul = $\frac{9}{33}$ que simplificado es $\frac{3}{11}$.

**18. (E)** Si los jugadores son A, B y C y el que perdió la partida fue, por ejemplo, el A, al final de la partida A duplicó el dinero de B y de C.
Al comienzo de la partida, los jugadores B y C tenían 12 € cada uno, la mitad de 24 €, por lo que el jugador A pagó 12 euros más a cada uno, por tanto, el jugador A perdió 24 euros (12 + 12). El jugador A comenzó la partida con 48 euros, 24 que pagó a B y C más 24 con los que finalizó la partida.

**19. (C)** Sumamos los cubos de cada planta: 1 + 5 + 13 + 25 = 44
Se han usado 44 cubos

**20. (E)** Como la base es doble que su altura, el área del rectángulo se puede expresar así:
$50 = 2a \times a = 2a^2$ De aquí se deduce que $a^2 = 25$ y por lo tanto $a = 5$ cm y $b = 10$ cm.
Perímetro = $2(a + b) = 2(5 + 10) = 30$ cm

**21. (A)** El grosor de una hoja es $\frac{1}{10}$ de milímetro

1 m = 1 000 000 000 nm
1 mm = 1 000 000 nm
$\frac{1}{10}$ de mm = 1 000 000 : 10 = 100 000 nm
El grosor de una hoja es de 100 000 nanómetros

**22. (A)** Si le quedaron 3 quiere decir que Marco recibió otras 3. Después de darle a Hugo sus fracciones a Don Retorcido le quedaron 6 y eso quiere decir que a Hugo le dio otras 6.

**23. (C)** Para obtener la solución planteamos una tabla de doble entrada como la siguiente en la que hemos escrito los datos conocidos.

| | Mujeres | Hombres | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Llevan gafas | | | 90 |
| No llevan gafas | | | |
| TOTAL | 130 | | 200 |

Con los datos conocidos podemos completar la tabla:
- El número de hombres es: 200 – 130 = 70
- El número de hombres que llevan gafas es: 70 : 2 = 35
- El número de hombres que no llevan gafas es 35
- El número de mujeres y hombres que no llevan gafas es: 200 – 90 = 110
- El número de mujeres que no llevan gafas es: 110 – 35 = 75

| | Mujeres | Hombres | TOTAL |
|---|---|---|---|
| Llevan gafas | 55 | 35 | 90 |
| No llevan gafas | **75** | 35 | 110 |
| TOTAL | 130 | 70 | 200 |

**24. (C)** Calculamos la edad de Bisbís:
36 : 9 = 4. Bisbís tiene 4 años
Calculamos la edad de Guaguá:
$\frac{3}{2}$ de 4 = 6. Guaguá tiene 6 años
La suma de las edades de Guaguá y Bisbís es: 6 + 4 = 10

**25. (A)** Utilizando el método de ensayo y error, se buscan los números que empiezan por 1 y se obtienen ocho números; de la misma forma encontraremos otros ocho números que empiecen por 2, y otros ocho que empiecen por 3. Total: $8 \times 3 = 24$.

112 – 113 – 121 – 122 - 123 – 131 – 132 – 133
211 – 212 – 213 – 221 – 223 – 231 – 232 – 233
311 – 312 – 313 – 321 – 322 – 323 – 331 – 332

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* II

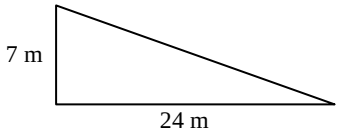
**1. (A)** No nos queda otra que operar:
A) $(20 - 17)\cdot(20 + 17) = 3\cdot 37 = 111$
B) $201 + 7\cdot 20 + 17 = 201 + 140 + 17 = 358$
C) $20\cdot 17 - (201 + 7) = 340 - 208 = 132$
D) $20\cdot(1 + 7) - 20 - 17 = 20\cdot 8 - 20 - 17 = 160 - 20 - 17 = 123$
E) $20 + 17 + 20 + 17 = 74$
El resultado más cercano a 100 es el de la operación A.

**2. (E)** Sabemos que las pirámides de base cuadrada tiene 5 vértices y los prismas de base cuadrada tiene tres vértices más, es decir, 8 vértices. Si las 42 figuras fuesen prismas, contaríamos $8\cdot 42 = 336$ vértices, o sea, nos pasaríamos en $336 - 288 = 48$ vértices. Como por cada tres vértices que nos pasamos representa una pirámide, Alba tiene $48 : 3 = 16$ pirámides.

**3. (E)** Si Esmeralda pensó que el melón pesaba 2 kg es porque la báscula marcó 2180 gramos, (2000 + 180). Por tanto, el peso real del melón es lo que marcó la báscula más 120 gramos, es decir, $2180 + 120 = 2300$ gramos.

**4. (A)** En un triángulo rectángulo sabemos que su área podemos calcularla tomando un cateto como base y el otro como altura. Así pues:

$$\text{Área} = \frac{\text{CAT}\times\text{cat}}{2} \Rightarrow 84 = \frac{24\times\text{cat}}{2} \Rightarrow \text{cat} = 7\ \text{m}.$$

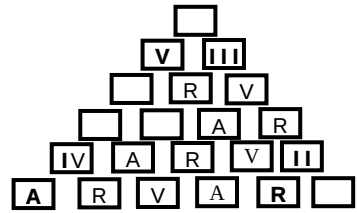



Y la hipotenusa la calculamos con nuestro querido teorema de Pitágoras:

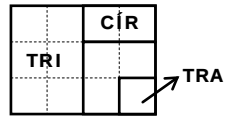
$$\text{hip}^2 = \text{CAT}^2 + \text{cat}^2 \Rightarrow \text{hip}^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow \text{hip} = 25\,\text{m}.$$

**5. (C)** Operemos con el corazón:
I. $8\heartsuit 2 - 2\heartsuit 8 = 8\cdot(8+2) - 2\cdot(2+8) = 60$ $\qquad 6\heartsuit 4 = 6\cdot(6+4) = 60$
(La afirmación I es cierta)
II. $4\heartsuit b = 28 \Rightarrow 4\cdot(4+b) = 28 \Rightarrow 4 + b = 7 \Rightarrow b = 3$
(La afirmación II también es cierta)

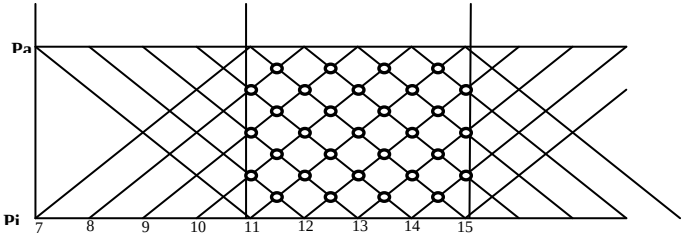
**6. (D)** No nos quedemos parados, solo hay que probar. El ladrillo I puede ser Rojo o Verde. Si supones que es Rojo, verás que al ir asignando los colores a los ladrillos de la pared, llegas a una situación no válida. Así que ha de ser Verde. De esta manera se llega a la solución válida: V–A–A.




**7. (B)** Si representamos mediante un rectángulo las figuras que tiene Don Retorcido, vemos que un cuadradito contiene 20 figuras.
Así pues, hay $6 \cdot 20 = 120$ triángulos.




**8. (B)** En efecto, este problema es un poco trastornante. Hay más cruces de los que parece en un principio, ten en cuenta que hay cruces a las horas en punto y a las medias.
Por suerte, cuando Juan Jesús navegó de Pi a Pa hizo este dibujo:




Se producen 31 cruces.

**9. (E)** ¿Qué número hay que sumar a –7 para obtener –1? $-7 + P = -1$, $P = 6$.
¿Qué número hay que restar a –5 para obtener 4? $-5 - Q = 4$, $Q = -9$.
¿Qué número hay que restar a 9 para obtener –4? $9 - R = -4$, $R = 13$.
La suma de $P$, $Q$ y $R$ es $6 + (-9) + 13 = 10$

**10. (A)** Don Retorcido empezó con una hoja de 40 cm x 20 cm y, después de sus dos primeros cortes pasó a tener cuatro piezas de 20 cm x 10 cm. Por último, acabó con dieciséis hojitas de 10 cm x 5 cm, por lo que el perímetro total final es $16 \cdot (10 + 10 + 5 + 5) = 480$ cm.

**11. (C)** Si representamos con cuadraditos BLANCOS los versos que se saben y con cuadraditos NEGROS los que aún no se saben…

Ana: □□□ ■■

Berta: □□□ ■■■ ■■■

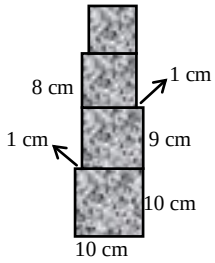
Carolina: ■■ ■■ ■■■ ■■■ ■■■ ■■■

Como los cuadraditos negros de Carolina representan a 48 versos, cada cuadradito son 48:16 = 3 versos.

Las amigas tenían que aprenderse un total de $(5+9+16)\cdot 3 = 90$ versos.

**12. (C)** El perímetro nos lo da esta cuenta:

$10+2\cdot(10+9+8+7+6+5+4+3+2+1)+10\cdot 1 = 130$ cm.




**13. (B)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | D | G | $21=3\cdot 7$ |
| B | E | H | $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ |
| C | F | I | $288=2^5\cdot 3^2$ |
| $112=2^4\cdot 7$ | $72=2^3\cdot 3^2$ | $45=3^2\cdot 5$ | |

El 7 podemos colocarlo fácilmente sin más que ver en qué fila y columna coinciden un factor 7.

Igual ocurre con el 5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A=7 | D | G | $21=3\cdot 7$ |
| B | E | H=5 | $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ |
| C | F | I | $288=2^5\cdot 3^2$ |
| $112=2^4\cdot 7$ | $72=2^3\cdot 3^2$ | $45=3^2\cdot 5$ | |

Ahora vamos con el $8=2^3$. Su lugar debe ser C o F pero hay que descartar F porque si no, D o E deberían ser 9 y si miramos sus filas correspondientes vemos que no puede ser.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A=7 | D | G | $21=3\cdot 7$ |
| B | E | H=5 | $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ |
| C=8 | F | I | $288=2^5\cdot 3^2$ |
| $112=2^4\cdot 7$ | $72=2^3\cdot 3^2$ | $45=3^2\cdot 5$ | |

Y ya podemos saber quiénes son B y E.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A=7 | D | G | $21=3\cdot 7$ |
| B=2 | E=6 | H=5 | $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ |
| C=8 | F | I | $288=2^5\cdot 3^2$ |
| $112=2^4\cdot 7$ | $72=2^3\cdot 3^2$ | $45=3^2\cdot 5$ | |

Y ya terminamos: el 4 solo puede ser F y podemos rellenar toda la cuadrícula.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A=7 | D=3 | G=1 | $21=3\cdot 7$ |
| B=2 | E=6 | H=5 | $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ |
| C=8 | F=4 | I=9 | $288=2^5\cdot 3^2$ |
| $112=2^4\cdot 7$ | $72=2^3\cdot 3^2$ | $45=3^2\cdot 5$ | |

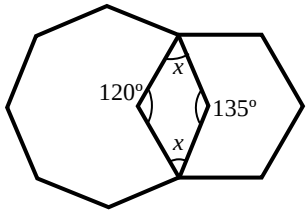
**14. (A)** Si escribimos la multiplicación en la forma habitual es muy sencillo y entretenido ir averiguando los valores de las letras. Con un primer vistazo averiguamos que la *E* ha de valer 7. Y ya puedes seguir tú hasta que encuentres la solución. Piensa bien en las que te llevas cada vez.

$$\begin{array}{r} 1ABCDE \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline ABCDE1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 142857 \\ \times \quad\quad 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

$A+B+C+D+E = 4+2+8+5+7 = 26$

**15. (C)** Cada ángulo de un octógono regular mide: $\frac{6\cdot 180^o}{8} = 135^o$.

Y cada ángulo de un hexágono regular mide $\frac{4\cdot 180^o}{6} = 120^o$.




Así pues, fijándonos en el cuadrilátero central podemos hallar el ángulo pedido, $x + x + 120^o + 135^o = 360^o \rightarrow x = 52{,}5^o$.

**16. (E)** Como mcm ($a$, $b$) = $2^2\cdot 3$ y mcm ($a$, $c$) = $3\cdot 5$, deducimos que, a la fuerza, $a$ = 3. De esta manera, $b$ solo puede tomar dos valores, $b = 2^2 = 4$ o $b = 3\cdot 4 = 12$ y con $c$ ocurre algo similar, $c$ = 5 o $c = 3\cdot 5 = 15$. La única suma imposible de $b + c$ es 7.

**17. (A)** Podemos llamar *A*, *B*, *C* a cada una de las tarjetas y $A_1$ y $A_2$ a cada una de las dos caras de la tarjeta *A*. Así vemos que al voltearlas hay ocho posibilidades:

$A_1\ B_1\ C_1 \quad A_1\ B_1\ C_2 \quad A_1\ B_2\ C_1 \quad A_1\ B_2\ C_2$
$A_2\ B_1\ C_1 \quad A_1\ B_1\ C_2 \quad A_1\ B_2\ C_1 \quad A_2\ B_2\ C_2$

El enunciado nos dice que la suma total de todas esas caras que ahí aparecen es 120. Como cada cara aparece cuatro veces podemos deducir que la suma de las seis caras es 120:4 = 30.

Y terminamos, la suma de las caras que no se ven es 30 – (9 + 4 + 7) = 10.

**18. (D)** Si $\text{Área} = 100\pi\ \text{m}^2 \rightarrow 100\pi = \pi r_1^{\,2} \rightarrow r_1^{\,2} = 100 \rightarrow r_1 = 10\ \text{m}$

Si $\text{Perímetro} = 100\pi\ \text{m} \rightarrow 100\pi = 2\pi r_2 \rightarrow r_2 = 50\ \text{m}$

La diferencia entre sus radios son 40 metros.

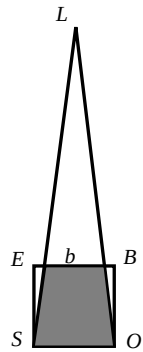
**19. (B)** La condición del enunciado dice que $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot A = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot B$ y operando obtenemos que $\frac{3}{10}\cdot A = \frac{2}{5}\cdot B$, es decir, $15A = 20B$, por tanto, si dividimos todo entre 5 obtenemos la respuesta: $3A = 4B$.

**20. (C)** En el recinto **A** debemos colocar los números desde el 1 hasta el 20 que sean mayores que 11 y no sean múltiplos ni de 4 ni de 6.
¿Qué números son esos? Pues el 13, el 14, el 15, el 17 y el 19. Cinco números.

**21. (D)** Escribimos los tres números como potencias de exponente 17 y comparamos:
$P = 11^{51} = 11^{3\cdot 17} = (11^3)^{17} = 1331^{17}$ $Q = 1317^{17}$ $R = 37^{34} = 37^{2\cdot 17} = (37^2)^{17} = 1369^{17}$
Respondemos: $Q < P < R$ .

**22. (E)** Este es un problema para recordar algunos cuadrados perfectos. Si escribimos entre paréntesis las teclas pulsadas y entre corchetes los números reales con los que se ha hecho la operación, tenemos:
$(12)\cdot(12) = 1156 = [34]\cdot[34] \Rightarrow (1) \to [3]$ $(2) \to [4]$
$(3)\cdot(3) = 81 = [9]\cdot[9] \Rightarrow (3) \to [9]$
$(45)\cdot(45) = 144 = [12]\cdot[12] \Rightarrow (4) \to [1]$ $(5) \to [2]$
$(67)\cdot(67) = 5625 = [75]\cdot[75] \Rightarrow (6) \to [7]$ $(7) \to [5]$
Las únicas teclas que quedan por pulsar son el (8) y el (9) y los únicos números por asignar son el [6] y el [8]. Por tanto, si pulso (8) es en realidad un [6] y si pulso (9) es en realidad un [8].

**23. (A)** Sabemos que el lado del cuadrado *BESO* mide 4 cm y, por tanto, la altura del triángulo *SOL* (como tiene área 32 cm$^2$) ha de medir 16 cm. Para calcular el área del trapecio nos falta saber la longitud *b* de su base menor. Fíjate que el triángulo superior blanco es semejante a *SOL*, así pues el cociente entre sus alturas es igual al cociente entre sus bases:




$\frac{16-4}{16} = \frac{b}{4} \to b = \frac{4\cdot 12}{16} = 3$ cm.
Área del trapecio: $\frac{4+3}{2}\cdot 4 = 14$ cm$^2$.

**24. (C)** Como la frase «dentro de dieciséis años mi edad será el doble que la que tenía hace dos años» se dirá dentro de cinco años, si la pronunciáramos hoy sería «dentro de veintiún años mi edad será el doble que la que tendré dentro de tres años». Si *x* representa la edad que tengo hoy, la ecuación que se corresponde con dicha situación es $x + 21 = 2(x + 3)$ .

**25. (B)** La suma de los primos menores que 40 es:
$$2+3+5+7+11+13+17+19+23+29+31+37 = 197$$
Por tanto Gustavita se equivocó en el número $230 - 197 = 33$ .

# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* III

**1. (B)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2** | **4** | ***x*** | **2** |
| ***y*** | **3** | **3** | ***z*** |
| **6** | ***u*** | **1** | ***t*** |

Las sumas horizontales son $8 + x$, $6 + y + z$, $7 + u + t$, y valen las tres lo mismo.

Las sumas verticales son $8 + y$, $7 + u$, $4 + x$, $2 + z + t$, y también tienen las cuatro el mismo valor.

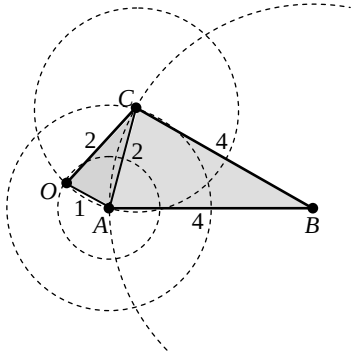
De las primeras, $8 + x = 7 + u + t$.

De las segundas $4 + x = 7 + u$.

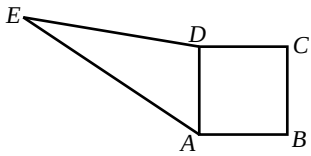
Restando estas dos ecuaciones, miembro a miembro tenemos $4 = t$.

**2. (A)** Según los datos, el número total de libros ha de ser múltiplo de 4 y de 9. Como estos son primos entre sí, el número tiene que ser múltiplo de 36. El único múltiplo de 36 comprendido entre 50 y 100 es 72. Así, hay 18 (72/4) libros de novela y 8 (72/9) libros de poesía. No son ni novelas ni libros de poesía $72 – 18 – 8 = 46$.

**3. (D)** Como la suma de los dos lados menores de un triángulo ha de ser mayor que el lado mayor, los dos lados indicados y la diagonal han de ser concurrentes. Los lados del cuadrilátero, entonces miden 4, 1, 4 y 2. Y su perímetro es 11. (Ver figura adjunta)

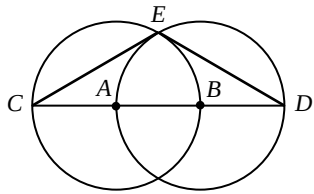



**4. (C)** El área del triángulo mide 16 cm$^2$ y su base mide 4 cm. Su altura, distancia desde *E* hasta el lado *AD*, mide 8 cm. Y la distancia desde *E* hasta la recta *BC* mide 12 cm.



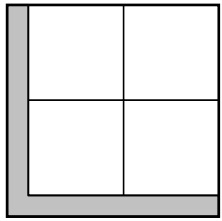
**5. (C)** En el Concurso de Primavera, como es bien sabido, en cada pregunta sólo hay una respuesta correcta. Con los datos aportados, la única respuesta que puede ser correcta es **C**. Pues si **A** fuera correcta, también lo sería **B** y habría dos respuestas correctas, lo que no puede ser. Si **B** fuera correcta, también lo sería **C** (por el contrarrecíproco de no **C** $\Rightarrow$ no **B**), lo que tampoco puede ser. La misma causa excluye **D** o **E** como respuestas correctas. Sólo queda **C**.

**6. (C)** El triángulo *ABE* es equilátero, de modo que el ángulo $A\hat{E}B$ mide 60º. Como los triángulos *CEA* y *DEB* son isósceles y sus ángulos centrales miden 120º cada uno, los ángulos $C\hat{E}A$ y $D\hat{E}B$ miden 30º cada uno, y el ángulo $C\hat{E}D$ mide 30º + 60º + 30º = 120º.




**7. (A)** Como *QRS* es múltiplo de 5, S necesariamente es 5. Al ser *PQR* múltiplo de 4, *QR* debe ser múltiplo de 4. Las únicas posibilidades son 12, 24, 32 y 52. La última se descarta porque $S = 5$ y no puede ser $Q = 5$. Ahora, *RST* es múltiplo de 3. Como *S* es 5 y *R* sólo puede ser 2 o 4, con $R = 2$ tenemos 25*T*, que sólo es múltiplo de 3 con $T = 2$ o $T = 5$, imposible, en cualquier caso. Con $R = 4$ tenemos 45*T*, que sólo puede ser múltiplo de 3 con $T = 3$. De modo que $QR = 24$ y $PQRST = 12453$. Y esto implica que $P = 1$.

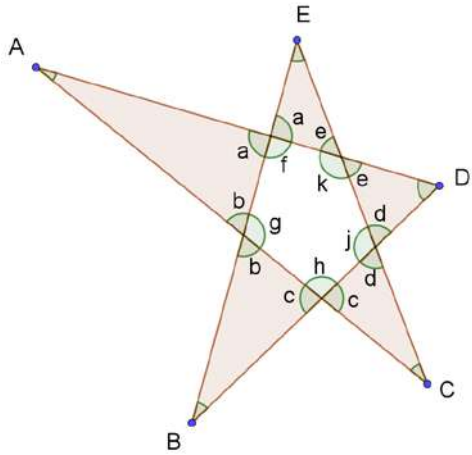
**8. (E)** Si el área del cuadrado es 125 cm$^2$, el lado mide $5\sqrt{5}$ cm, y el área del polígono en forma de L de la figura, 25 cm$^2$. Llamando $x$ al lado menor del polígono, tenemos que $5\sqrt{5}\,x + \left(5\sqrt{5} - x\right)x = 25$. Esta ecuación se puede escribir como $x^2 - 10\sqrt{5}x + 25 = 0$, cuyas soluciones son $x = 5\sqrt{5} - 10$ y $x = 5\sqrt{5} + 10$. La segunda solución sería mayor que el lado del cuadrado inicial, por lo que se desecha. La solución correcta es $5\sqrt{5} - 10 = 5 \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right)$.



**9. (A)** $\left.\begin{array}{ll} E_1 & a \cdot b = 2 \\ E_2 & b \cdot c = 3 \\ E_3 & c \cdot d = 4 \\ E_4 & d \cdot e = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow E_2 \cdot E_4 \div \left(E_1 \cdot E_3\right) \quad \dfrac{e}{a} = \dfrac{15}{8}$

**10. (B)** Un polígono estrellado se denota por N/M, siendo N el número de vértices y M el paso (nº de orden del siguiente vértice con el que se une uno dado). El polígono estrellado de la figura es 5/2. Sólo son posibles los polígonos estrellados en los que N/M es una fracción irreducible, es decir, aquellos en los que N y M son primos entre sí. En ellos, la suma de los ángulos interiores es $180º\cdot(N - 2M)$. En nuestro caso $180º\cdot(5 - 2\cdot2) = 180º$.

Pero…es claro que esta información no la tienen todos los niños que participan en el concurso, de modo que aportaremos otro método de resolución. Observando la figura, tenemos:




$$\left.\begin{array}{l} A+a+b=180º \\ B+b+c=180º \\ C+c+d=180º \\ D+d+e=180º \\ E+e+a=180º \end{array}\right\} \Rightarrow A+B+C+D+E+2(a+b+c+d+e)=900º$$

Ahora, al ser *a* y *f* adyacentes, lo mismo que *b* y *g*, *c* y *h*, *d* y *j*, *e* y *k*

$$\left.\begin{array}{l} a=180º-f \\ b=180º-g \\ c=180º-h \\ d=180º-j \\ e=180º-k \end{array}\right\}$$

tenemos que $A+B+C+D+E+2\left[900º-(f+g+h+j+k)\right]=900º$

La suma de los ángulos interiores de un pentágono convexo es 540º, por tanto

$A+B+C+D+E=900º-2\cdot(900º-540º)=900º-720º=180º$ .

**11. (D)** En la tabla se recogen los resultados igualmente posibles y los favorables:
Los casos favorables están denotados por 1 y los no favorables por 0. La probabilidad de que el número que muestra el dado rojo sea mayor que el que muestra el dado azul es:

$$p = \frac{1+2+3+4+5}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

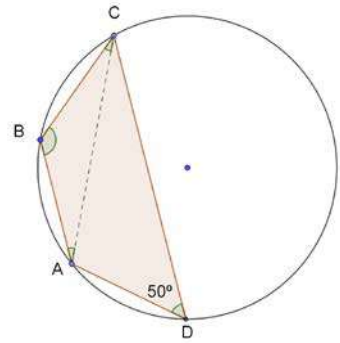
| A \ R | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **3** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| **4** | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **5** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**12. (C)** Puesto que la media fue 76, ninguno obtuvo menos de 60 puntos y 5 obtuvieron 100 puntos, llamando $x$ al número total de estudiantes e $y$ a la puntuación mínima, podemos plantear el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 76x = 500 + y(x-5) \\ y \geq 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{76x-500}{x-5} \geq 60 \Rightarrow 76x - 500 \geq 60x - 300 \Rightarrow 16x \geq 200$$

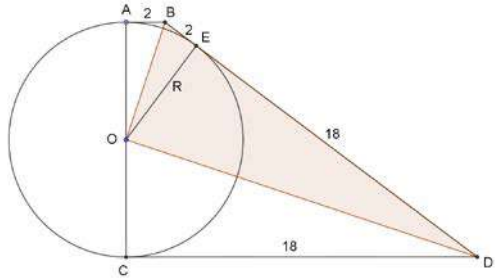
Y el número mínimo de estudiantes que verifica la inecuación es $x = 13$.

**13. (B)** Sabemos que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios, por lo que el ángulo $A\hat{B}C = 130^\circ$. Esto indica que los dos ángulos iguales del triángulo $ABC$ miden 25º cada uno. Como $AB$ es paralelo a $CD$, el cuadrilátero es un trapecio, y al estar inscrito en la circunferencia, es isósceles. Por tanto, el ángulo $B\hat{C}D = 50^\circ$, $A\hat{C}D = 25^\circ$ y $D\hat{A}C = 105^\circ$.




**14. (A)** En la figura se observa que el radio de la esfera es la altura de un triángulo rectángulo en el que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 2 y 18 cm. respectivamente. Aplicando el Teorema de la Altura, tenemos que:

$$R = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$$



**15. (C)** Las probabilidades de los cuatro sucesos son:

$$p(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=0'125$$

$$p(B)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}=0'5$$

$$p(C)=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=0'375$$

$$p(D)=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4=0'3125$$

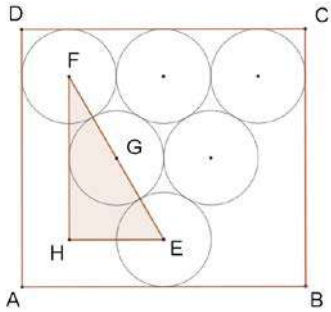
El orden de probabilidades crecientes de los cuatro sucesos es *ADCB*

**16. (C)** Como *AB* = 6 cm. y dicha longitud es 6 veces el radio de cada circunferencia, los radios miden todos 1 cm. En el triángulo *EHF*, el lado *HE* mide 2 cm y el lado EF mide 4 cm.

Así $FH=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ .

La distancia que se pide es:

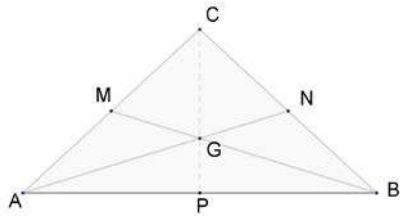
$FH-2R=2\sqrt{3}-2=2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$.




**17. (E)** Si llamamos *x* a la altura de la mesa, *R* a la de Raquel y *P* a la de Pablo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}x+R=P+80\\x+P=R+100\end{array}\right\}\Rightarrow 2x+P+R=P+R+180\Rightarrow 2x=180\Rightarrow x=90.$$

**18**. **(D)** Al trazar la tercera mediana, *CP*, el triángulo *ABC* queda dividido en 6 triángulos de igual área. Por tanto, el cuadrilátero *MGNC* tiene área igual a 6 cm$^2$.




**19. (B)** Si la edad de Pablo es *x*, entonces $x=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(100-x)$; $3x=200-2x$; $x=40$

**20. (A)** La longitud del arco del sector es la longitud de la circunferencia de la base del cono. Así, podemos obtener el radio de la base: $\frac{3\times 40^o}{180^o}\cdot\pi = 2\pi R$; $R=\frac{1}{3}$.

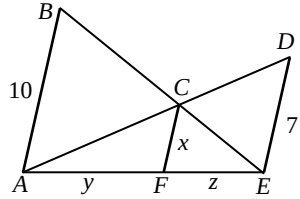
Aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos la altura del cono:

$$h=\sqrt{3^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{80}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$$

Y el volumen del cono es: $V=\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\frac{1}{9}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{3}=\frac{4\pi\sqrt{5}}{81}$

**21. (A)** Si llamamos *x* a la longitud del segmento *FC*, *y* a la del segmento *AF* y *z* a la del segmento *FE*, por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y+z}{10}=\frac{z}{x}\\ \frac{y+z}{7}=\frac{y}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{17}{70}\cdot(y+z)=\frac{y+z}{x}\Rightarrow x=\frac{70}{17}$$

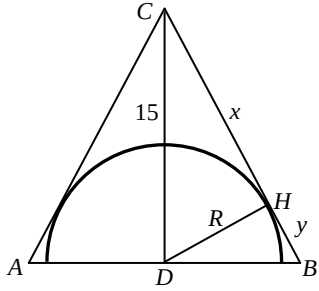



**22. (B)**. Los casos favorables son: RRR, RRVR, RVRR y VRRR. Las probabilidades de cada uno de los casos son, por el mismo orden, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$. Pero las cuatro tienen el mismo valor, $\frac{1}{10}$. Así, la probabilidad pedida es $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

**23. (B)** Aplicando el Teorema de la Altura, tenemos que $R^2=x\cdot y$. Como el lado del triángulo isósceles mide 17, pues es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 15 y 8, los segmentos *x* e *y* se pueden calcular aplicando el Teorema de los Catetos: $x=\frac{15^2}{17}$; $y=\frac{8^2}{17}$.

De modo que

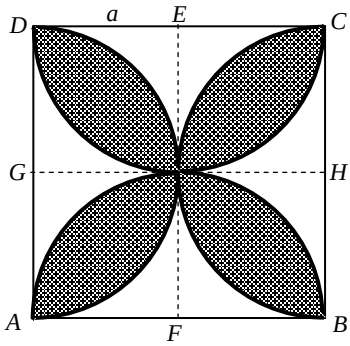
$$R^2=x\cdot y=\frac{15^2\cdot 8^2}{17^2}\Rightarrow R=\frac{120}{17}.$$



**24. (A)** El grado del cociente es 98, y el grado del resto es 1, de modo que podemos escribir:
$x^{100} - 2x^{99} + 4 = \left(x^2 - 3x + 2\right) \cdot C(x) + mx + n$.
Ahora, sustituyendo x por 1 y 2 sucesivamente tenemos:
$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow 3 = m + n \\ x = 2 \Rightarrow 4 = 2m + n \end{array}\right\} \Rightarrow m = 1; \quad n = 2. \Rightarrow R(x) = x + 2.$$

**25. (A)** El área de cada pétalo se puede calcular restando al área del cuadrado de lado *a*, el doble de la diferencia entre el área del cuadrado y el área del cuarto de círculo. Es decir, el área del pétalo vale: $a^2 - 2 \cdot \left(a^2 - \dfrac{\pi \cdot a^2}{4}\right) = a^2 \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$.

Como el área sombreada es 4 veces el área de un pétalo, es $A = \left(2\pi - 4\right) \cdot a^2$



# XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel IV*

**1. (D)** Al ser una función lineal trabajamos con la pendiente que es constante.

$m = \dfrac{f(2017) - f(2005)}{2017 - 2005} = \dfrac{f(2035) - f(2017)}{2035 - 2017}$, de donde

$\dfrac{100}{12} = \dfrac{f(2035) - f(2017)}{18}$, por tanto $f(2035) - f(2017) = 150$.

**2. (D)** La primera cifra de todos los números con nueve cifras puede ser del 1 al 9. Por tanto, el número mínimo de cartas que hay que sacar para que se repita la primera cifra son diez, ya que lo peor que puede pasar es que saque nueve cartas con la primera cifra diferente y la décima carta ya tiene que ser un número con la primera cifra repetida.

**3. (B)** Llamamos $k$ al número pedido, $k = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Por tanto,

$$k^3 = 2+\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2 \cdot \left(2-\sqrt{5}\right)} + 3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + 2 - \sqrt{5}$$

$$= 4 + 3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot(4-5)} + 3\sqrt[3]{(4-5)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)} = 4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$= 4 - 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) = 4 - 3k$. Solo nos queda resolver $k^3 = 4 - 3k$.

Aplicando Ruffini podemos factorizar la ecuación en $(k-1)\left(k^2 + k + 4\right) = 0$. La única solución real es $k = 1$, por tanto, $k = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

**4. (A)** Observando la gráfica vemos que para que $f(f(f(x)))$ sea 0, $f(f(x))$ tiene que ser – 4 ó 0. Vamos a estudiar cada caso:

- Para que $f(f(x))$ sea – 4, entonces $f(x)$ tiene un único valor (en la gráfica no se puede determinar el valor exacto, será un valor negativo menor que – 4, llamémoslo $a$).

  i) Para que $f(x)$ sea $a$, entonces $x$ tiene un único valor $b < a < -4$.

- Para que $f(f(x))$ sea 0, entonces $f(x)$ tiene que ser – 4 ó 0.

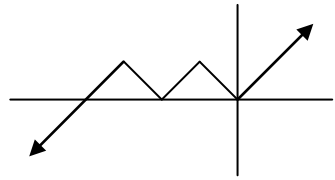
  ii) Para que $f(x)$ sea 0, entonces $x$ tiene que ser – 4 ó 0.

  iii) Para que $f(x)$ sea – 4, entonces $x$ tiene un único valor que es $a$.

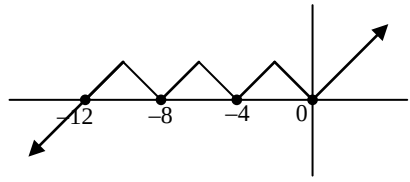
En total, cuatro soluciones, de menor a mayor $b$, $a$, – 4 y 0.

Resulta interesante hallar y representar las funciones $f(f(x))$ y $f(f(f(x)))$

$$f(f(x))=\begin{cases} x+8 & si \quad x<-6 \\ -x-4 & si \quad -6\le x<-4 \\ x+4 & si \quad -4\le x<-2 \\ -x & si \quad -2\le x<0 \\ x & si \quad 0\le x \end{cases}$$



$$f(f(x))=\begin{cases} x+12 & si \quad x<-10 \\ -x-8 & si \quad -10\le x<-8 \\ x+8 & si \quad -8\le x<-6 \\ -x-4 & si \quad -6\le x<-4 \\ x+4 & si \quad -4\le x<-2 \\ -x & si \quad -2\le x<0 \\ x & si \quad 0\le x \end{cases}$$




En la gráfica se ven claramente las cuatro soluciones: $-12$, $-8$, $-4$ y $0$.

**5. (D)** Que *f* sea una función periódica de periodo T = 5 y en el intervalo [3, 8) significa que $f(3)=f(8)=f(13)=...=f(2013)$, por tanto $f(2017)=f(7)=4$.

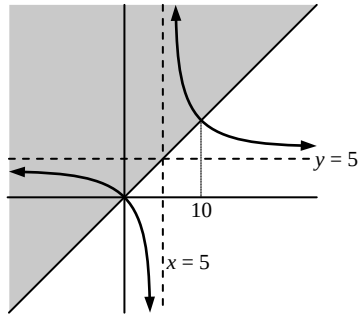
**6. (D)** El cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del pequeño pero dentro del grande es $\frac{x}{y}=\frac{\pi R^2}{\pi R^2-\pi r^2}=\frac{R^2}{R^2-r^2}$.

Operamos $xR^2-xr^2=R^2y \Rightarrow (x-y)R^2=xr^2 \Rightarrow \frac{R^2}{r^2}=\frac{x}{x-y}$.

Solo queda $\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}$.

**7. (A)** Los números que verifican que su producto es igual a cinco veces su suma cumplen $xy=5(x+y) \Rightarrow y=\frac{5x}{x-5}$. Representamos la función y la condición $x \le y$. La recta $x = 5$ es la asíntota vertical de la función. Los puntos de corte entre la curva y la recta $\begin{cases} y=\frac{5x}{x-5} \\ x=y \end{cases}$ son $O(0, 0)$ y $P(10, 10)$. En la gráfica se ve claramente que las posibles soluciones estarán en $(-\infty, 0]\cup(5, 10]$.

• En $x \in (-\infty, 0]$, los valores posibles de $y$ son 0, 1, 2, 3 y 4. De los cuales solo cumplen la condición de ser enteros los puntos (–20, 4) y (0, 0).
• En $x \in (5, 10]$, los valores posibles de $x$ son 6, 7, 8, 9 y 10. De los cuales solo cumplen la condición de ser enteros los puntos (6, 30) y (10, 10).
En total, cuatro soluciones.



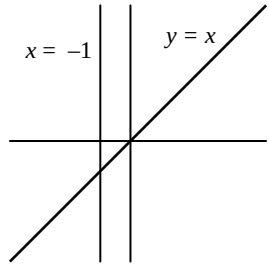

**8. (A)** $f\left(tg^2\theta\right) = f\left(\dfrac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = f\left(\dfrac{sen^2\theta}{1-sen^2\theta}\right) = \sqrt{sen^2\theta} = sen\theta$

**9. (B)** Llamamos $a$, $b$ y $c$ a los lados del ortoedro. Los lados del triángulo $XYZ$ son las diagonales de las caras. Por tanto obtenemos las siguientes condiciones

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2=64 \\ b^2+c^2=81 \\ a^2+c^2=55 \end{array}\right\}$$ sumando las tres ecuaciones obtenemos $2a^2+2b^2+2c^2=200$.

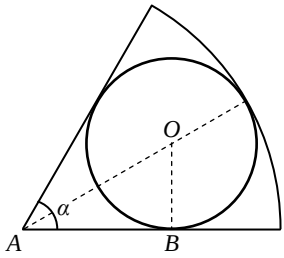
Es decir, $a^2+b^2+c^2=100$, por tanto la diagonal del ortoedro será $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{100}=10$.

**10. (E)** Trabajamos la ecuación dada. $x^2-xy+x-y=0$
$\Rightarrow x(x-y)+(x-y)=0 \qquad \Rightarrow (x+1)(x-y)=0$.
Esta ecuación tiene dos soluciones $\begin{cases} x=-1 \\ x=y \end{cases}$. Si lo representamos gráficamente vemos que son dos rectas que se cortan.




**11. (C)** En total hay 64 calcetines, el primero que cogemos puede ser de cualquier color y quedarán 7 calcetines del mismo color de un total de 63. Por tanto, $P=\dfrac{7}{63}=\dfrac{1}{9}$.

**12. (A)** En el triángulo rectángulo *ABO*, *OB* = *r*, *AO* = 2*r* y por tanto $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$ De aquí se deduce que $\frac{\alpha}{2}=30^{o}\Rightarrow\alpha=60^{o}$.




Luego, si la amplitud del sector es 60º, $\frac{A_{sector}}{A_{circulo}}=\frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2}=\frac{R^2}{6r^2}=\frac{(3r)^2}{6r^2}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

**13. (E)** La división pedida también se puede escribir como $P(x):(x-1)(x-2)$. Cuando simplificamos el dividendo y el divisor entre $(x-2)$, el resto de la división $P(x):(x-1)$ también queda simplificado por $(x-2)$. Pasa lo mismo cuando simplificamos entre $(x-1)$.

Aplicando el teorema del resto, resulta fácil encontrar el resto de la división $P(x):(x-1)$ (será *P*(1)) y el resto de $P(x):(x-2)$ (será *P*(2)). Luego tendremos que trabajar con dichos restos.

El resto de la división pedida será $P(2)(x-1)-P(1)(x-2)=7(x-1)-(x-2)$ que tiene por solución $6x-5$.

**14. (B)** Si las soluciones de la ecuación son $x_1$ y $x_2$ sabemos que $x_1 + x_2 = b$ y $x_1 \cdot x_2 = c$, es decir $c=sen\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}$.

$b=sen\frac{\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\Rightarrow b^2=sen^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{2}+2\,sen\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}=1+2c$.

**15. (C)** El cociente de dividir 2017 entre 9 es 224 y el resto 1. Eso significa que si sumamos 220 + 221+ …+ 224 + … + 227 + 228 = 2016. Como solo le falta uno para la suma pedida, ponemos 229 y quitamos el 228.

**16. (D)** Llamando $V_s$ al volumen del sólido y $V_l$ al volumen del líquido tenemos que $V_l=\left(1+\frac{1}{12}\right)V_s$, cuando se solidifica $V_s=\frac{1}{1+\frac{1}{12}}V_l=\frac{12}{13}V_l$.

Por tanto, disminuye $\frac{1}{13}$.

**17. (E)** Llamamos $x = A\hat{C}M$ , $y = B\hat{C}N$ . Como *AN* = *AC*, entonces el triángulo *ACN* es isósceles y por tanto el ángulo $A\hat{N}C = x + 43º$ . Del mismo modo, como *BM* = *BC*, el triángulo *MBC* es isósceles y por tanto el ángulo $B\hat{M}C = y + 43º$ . Fijándonos en los ángulos del triángulo *MNC*, tenemos $43º+x+43º+y+43º=180º$ , de donde $x + y = 51º$ . Por tanto, $A\hat{C}B = x + 43º+y = 43º+51º = 94º$ .

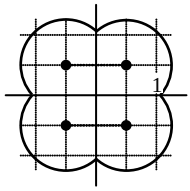
**18**. **(A)** *A* y *B* pertenecen a la parábola, por tanto, $A\left(a, a^2 - 7a - 1\right)$, $B\left(b, b^2 - 7b - 1\right)$. Como el origen de coordenadas es el punto medio, cumple que $\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 0 \\ \dfrac{a^2 - 7a - 1 + b^2 - 7b - 1}{2} = 0 \end{cases}$.

Las soluciones del sistema son $a = 1,\ b = -1$ ó $a = -1,\ b = 1$. En ambos casos los puntos serán (1, -7) y (-1, 7). La distancia entre ellos es:

$d = \sqrt{(1+1)^2 + (-7-7)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ .

**19. (E)** Para valores de *x* > 0, *y* > 0, nos queda la ecuación $x^2 + y^2 = x + y$ que es la ecuación de una circunferencia $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . De todos los puntos de la circunferencia solo valen los que cumplen *x* > 0, *y* > 0, pero éstos ya son infinitos.

Como curiosidad, mostramos la representación gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ **.**



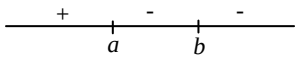

**20. (A)** Buscamos algunas de las características de la función $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ y así vamos descartando.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ . Por tanto, solo pueden ser A), C) o E).

Cortes con el eje X. $(a - x)(b - x)^2 = 0$ , tiene por soluciones *x*=*a* y *x*=*b*. Tendrá dos puntos de corte. Por tanto, solo pueden ser A) o C)

Estudiamos el signo de la función

Por tanto, es la A).



**21. (D)** Para conseguir el cuadrado de área más pequeña, la distancia del punto a la recta (distancia más corta) tendrá que ser la diagonal del cuadrado (distancia más larga).

$d_{\mathrm{Pr}} = \dfrac{|3-2+4|}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Un cuadrado de lado $l$ tiene una diagonal que mide $l\sqrt{2}$.

Por tanto, $\dfrac{\sqrt{10}}{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. En cuyo caso, el área será $\dfrac{5}{4}$.

**22. (C)**. Trabajamos con la afirmación dada $sen\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

$$(sen\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow sen^2\alpha + \cos^2\alpha + 2sen\alpha\cos\alpha = \frac{1+3+2\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow 1 + sen2\alpha = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow sen2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, por tanto, $2\alpha = 60º$ ó $120º$. De este modo $\alpha$ tendrá por soluciones $30º$ ó $60º$. Es decir, dos soluciones.

**23. (E)** El $\log_b c = \log_{a^{30}} a^{42} = x$. Aplicando la definición $\left(a^{30}\right)^x = a^{42} \Rightarrow 30x = 42$. Por tanto, $x = \dfrac{7}{5}$.

**24. (A)** Sea *P(x, y)* y *Q(0, 0)*, la "distancia taxi" queda definida como $d_{taxi}(P, Q) = |x-0| + |y-0| = 2$. Solo hay que analizar la figura que forman.

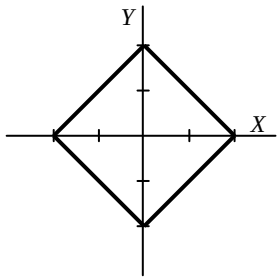
Si $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y = 2$

Si $x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y = 2$

Si $x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y = 2$

Si $x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y = 2$

Forman un cuadrado.




**25. (C)** Para analizar qué número está próximo a $\sqrt{101} - 10$, multiplicamos y dividimos por el conjugado. $\dfrac{\left(\sqrt{101}-10\right)\left(\sqrt{101}+10\right)}{\sqrt{101}+10} = \dfrac{101-100}{\sqrt{101}+10} = \dfrac{1}{\sqrt{101}+10} \approx \dfrac{1}{20}$.

# Participantes y relación de ganadores del XXI CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Una vez más en la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 40 000 estudiantes de más de 500 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3485 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3406. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | NIVEL 2 | | NIVEL 3 | | NIVEL 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | | 1º ESO, 2º ESO | | 3º ESO, 4º ESO | | 1º B, 2º B | |
| nº de participantes | 234 | 631 | 444 | 628 | 440 | 516 | 337 | 176 |
| Totales por nivel | 865 | | 1072 | | 956 | | 513 | |

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

1. Raúl Martínez Castillo (6º Primaria) Edith Stein, CPR
2. Diego López Aragón (5º Primaria) CP La Navata
3. Daniel Ribalta Andrés (6º Primaria) CP de Prácticas Asunción Rincón

**NIVEL II**

1. Daniel Mecha Martín (2º ESO) CPR Gredos San Diego Guadarrama
2. HyongGuk Hwang. (1º ESO) IES Gerardo Diego
3. Álvaro Torrico Espiga (2º ESO) CPR San Agustín

**NIVEL III**

1. Shenghao Zhang (4º ESO) CPR Arcángel Rafael
2. Nicolás Rey Rodríguez (3º ESO) CPR Fray Luis de León
3. Javier Durán Fernández (4º ESO) Colegio Alemán de Madrid

**NIVEL IV**

1 Alejandro Epelde Blanco (1º Bchto) Montessori School Los Fresnos
1. Saúl Rodríguez Martín (2º Bchto) CPR Villa de Griñón
3. Jia Jie Tao (2º Bchto) IES San Mateo
3. Marcos Vázquez Verdejo (2º Bchto) CPR Divina Pastora

## RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XXI CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2017

| NIVEL I | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| CP TIRSO DE MOLINA | Madrid | 281 |
| CP DE PRÁCTICAS ASUNCIÓN RINCÓN | Madrid | 218 |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 212 |
| CPR SAN AGUSTÍN | Madrid | 265 |
| CP ESCUELAS BOSQUE | Madrid | 258 |
| CP FEDERICO GARCÍA LORCA | Majadahonda | 252 |
| CP JOSÉ CALVO SOTELO | Madrid | 251 |
| CPR EDITH STEIN | Madrid | 247 |
| CPR AGUSTINIANO | Madrid | 247 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 243 |

| NIVEL II | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| CPR SAN AGUSTÍN | Madrid | 283 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 269 |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 266 |
| CPR JOYFE | Madrid | 247 |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 244 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 240 |
| IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO | Tres Cantos | 238 |
| IES MARÍA GUERRERO | Collado Villalba | 236 |
| CPR NORFOLK | Cobeña | 230 |
| IES GRAN CAPITÁN | Madrid | 225 |
| CPR NUESTRA SRA DEL BUEN CONSEJO | Madrid | 225 |

| NIVEL III | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 283 |
| CPR AMOR DE DIOS | Madrid | 246 |
| CPR JOYFE | Madrid | 239 |
| KING´S COLLEGE | Tres Cantos | 230 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 228 |
| CPR ARCANGEL RAFAEL | Madrid | 226 |
| IES ÁNGEL CORELLA | Colmenar Viejo | 209 |
| RUNNYMEDE COLLEGE | Alcobendas | 202 |
| IES JOSÉ LUIS SAMPEDRO | Tres Cantos | 200 |
| CPR SAN AGUSTÍN | Madrid | 196 |

| NIVEL IV | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES SAN MATEO | Madrid | 266 |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 271 |
| IES FORTUNY | Madrid | 217 |
| CPR VILLA DE GRIÑÓN | Griñón | 195 |
| CPR MIRABAL | Boadillo del Monte | 191 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 178 |
| IES CERVANTES | Madrid | 177 |
| IES CARDENAL CISNEROS | Madrid | 177 |
| CPR VIRGEN DE ATOCHA | Madrid | 174 |
| IES ARQUITECTO VENTURA RODRÍGUEZ | Boadillo del Monte | 172 |

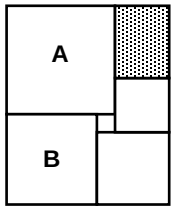
## XXXV CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 3 de junio de 2017

**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

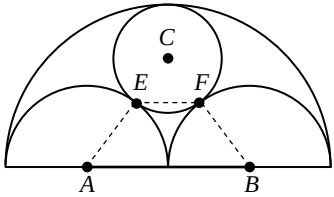
**Problema 1.** (7 puntos)

El rectángulo de la figura está dividido en seis regiones. Cinco de ellas, que no están sombreadas, son cuadrados. Si el área del cuadrado A es 144 y el área del cuadrado B es 100, ¿cuál es el área del rectángulo sombreado?



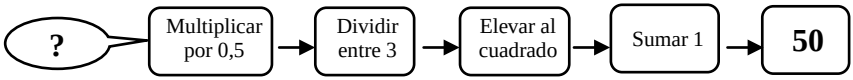

**Problema 2.** (7 puntos)

En un semicírculo de radio 2 dibujamos dos semicircunferencias de radio 1 con centros *A* y *B* y una circunferencia con centro *C* y tangente a las tres semicircunferencias. Los puntos *E* y *F* son los de tangencia de la circunferencia con las dos semicircunferencias pequeñas. Calcula el área del trapecio *ABFE*.



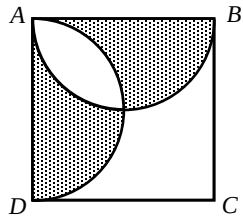

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Para llegar a 50 en la siguiente cadena de operaciones, ¿por qué número positivo tendrías que haber comenzado?




**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *n* la suma de las cifras de *T*. La media de las edades del abuelo, la abuela y sus *n* nietos es 28 años. La media de las edades de los nietos es 10 años. Si el abuelo tiene 4 años más que la abuela, ¿qué edad tiene el abuelo?

**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k$ el cociente de sus cifras ($k > 1$). En la figura se muestra un cuadrado de lado $k$ y dos semicircunferencias de diámetros $AB$ y $AD$.
¿Cuál es el área de la región sombreada?

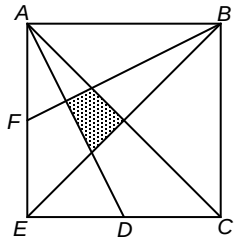



**Problema 1B.** (1 punto)
Sean $m, n, p$ y $q$ números enteros diferentes tales que $2^m + 2^n - 2^p + 2^q = 131$.
Calcula $m + n + p + q$.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Andrés y Beatriz deciden ir en moto desde un pueblo hasta otro que se encuentra a $4T$ km de distancia. Andrés va a una velocidad constante de 50 km/h . En cambio Beatriz conduce la mitad del trayecto a 40 km/h y la otra mitad a 60 km/h. Calcula la diferencia, en segundos, entre los tiempos que emplean cada uno.

**Problema 3B.** (2 puntos)
¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $P + S = C$ donde $P$ es un número primo, $S$ un cuadrado perfecto y $C$ un cubo perfecto, todos menores que $T$. Por ejemplo: 7 + 1 = 8 es una solución.

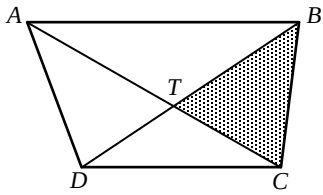
**Problema 4.** (5 puntos)
Sea $a$ la respuesta del problema 3A, $b$ la respuesta del problema 3B. En el cuadrado de la figura la longitud de sus lados es $\frac{b}{a}$, $D$ y $F$ son los puntos medios de los lados $CE$ y $EA$, respectivamente. Calcula el área del cuadrilátero sombreado.



**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

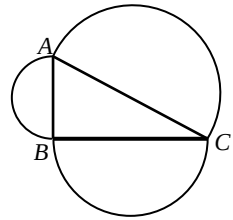
**Problema 1.** (7 puntos)
Cinco enteros positivos consecutivos, $p < q < r < s < t$ , todos menores que 2000, tienen por suma un cuadrado perfecto, mientras que la suma de los tres centrales, $q$, $r$ y $s$ es un cubo perfecto. Calcula la raíz cuadrada de la suma de los cinco.

**Problema 2.** (7 puntos)
En el trapecio *ABCD* de la figura se verifica que el área del triángulo *ABC* es 150 y el área del triángulo *ACD* es 120. Calcula el área del triángulo *BCT*.




Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
Los lados del triángulo rectángulo *ABC* con ángulo recto en *B*, son diámetros de tres semicircunferencias, como muestra la figura. Si el área del semicírculo de diámetro *AB* es $8\pi$ y la longitud del arco de diámetro *AC* es $\frac{17}{2}\pi$ , calcula la longitud del diámetro *BC*.




**Problema 2A.** (1,5 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior. La media de una lista de $T - 4$ enteros positivos es 10, la mediana es 9 y la única moda que es 8. ¿Cuál es el mayor entero que puede aparecer en dicha lista?

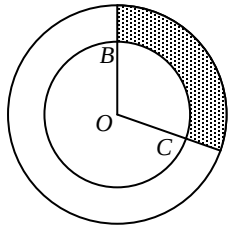
**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{5}$. ¿Cuántos enteros $n$, de tres cifras pero no mayores que 200, verifican que $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ es divisible entre $k$?

**Problema 1B.** (1 punto)

Obtén la única solución real de la ecuación $\sqrt{7-2x} = 2x-1$.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Si el cociente entre los radios de las circunferencias concéntricas de la figura es $T$, calcula el cociente entre el área de la parte de corona circular sombreada y el área del sector circular $OBC$.

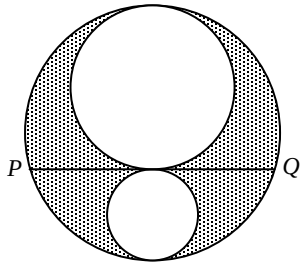



**Problema 3B.** (2 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = 4T$. Calcula la diferencia entre el perímetro y el doble de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que el radio del círculo inscrito es $k$.

**Problema 4.** (5 puntos)

Sea $a$ la respuesta del problema 3A, $b$ la respuesta del problema 3B y sea $k$ la suma de todas las cifras de $a$ y $b$. En la figura adjunta se observan dos circunferencias más pequeñas, tangentes entre sí y también tangentes a la circunferencia mayor.
Si el área de la zona sombreada es igual a $k\pi$, ¿cuál es la longitud de $PQ$?



**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

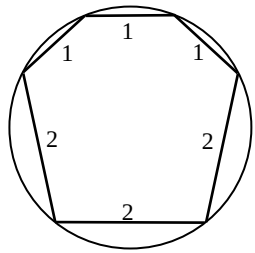
En el conjunto de los números reales positivos definimos la función $f$ mediante la expresión:

$$f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)} \quad .$$

¿Cuál es el valor mínimo que toma $f$? ¿Para qué valor de $x$ se alcanza ese valor mínimo?

**Problema 2.** (7 puntos)

¿Cuál es el área del círculo de la figura en el que los lados del hexágono inscrito, de manera consecutiva, son: 1, 1, 1, 2, 2, 2?




Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)

La media de seis números reales distintos es 275, la media de los cuatro más pequeños es 200 y la media de los cuatro mayores es 340. ¿Cuál es la media de los dos centrales?

**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya área es $\frac{2T+1}{8}$ y su diagonal $\frac{T}{2}$.

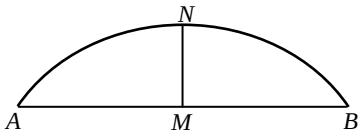
**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k$ un número real tal que el área de la región situada por encima del eje de abscisas y formada por los puntos $(x, y)$ cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades: $|2x|+|y| \le 2k; \quad |x|+|y| \ge k$ es $T$. Calcula $k$.

**Problema 1B.** (1 punto)
Si $a$ es la solución de la ecuación $\log_{\sqrt{2}} x = 20$, calcula $\log_2 \sqrt{a}$.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior. En "*Relevoslandia*" la unidad monetaria es el "*relev*". Esteban tiene billetes de 20 relevs y billetes de 80 relevs, siendo la media de relevs por billete $7T - 1$. ¿Cuál es el menor número de billetes que puede tener Esteban?

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior. Antonio tiene $\frac{T}{15}$ monedas y Beatriz $\frac{T}{6}$ todas perfectamente equilibradas. Cada uno tira sus monedas y gana quien obtenga más caras. Si la probabilidad de que gane Antonio es $\frac{p}{q}$, fracción irreducible, calcula $p + q$.

**Problema 4.** (5 puntos)
Sean $a$ y $b$ las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente y sea $k = 3(b - a)$. En la figura se observa un segmento circular en el que la cuerda $AB$ es $kn$ y la flecha, $MN$, es $n$. Si $n$ es un entero positivo, ¿cuál es el menor valor de $n$ para el que el radio del círculo al que pertenece dicho segmento circular, sea también un entero positivo?



**XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid**

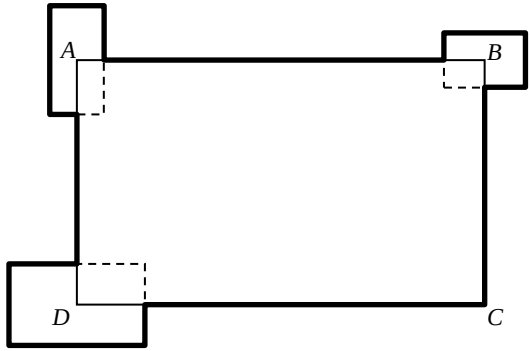
18 de noviembre de 2017

**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** Las edades de Carlos, Hugo y Elvira vienen dadas por números enteros. Hugo tiene 65 años y la suma de las edades de Carlos y Elvira es 100 años. Hace 9 años la edad de Elvira era un número múltiplo de 17 que, además, no era primo con el número de la edad actual de Hugo. ¿Cuál es la edad actual de Carlos?

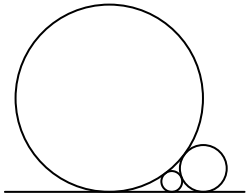
**2.** Los números A = 878 787 878 787 y B = 787 878 787 878, de 12 cifras cada uno, están formados sólo por sietes y ochos. ¿Cuál es su máximo común divisor?

**3.** El perímetro del rectángulo *ABCD* es de 30 cm. Dibujamos otros tres rectángulos cuyos centros son los vértices *A*, *B* y *D* y sus lados paralelos a los del rectángulo *ABCD*, como muestra la figura que no está hecha a escala. Si la suma de los perímetros de estos tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono cuyos lados están marcados con línea gruesa?

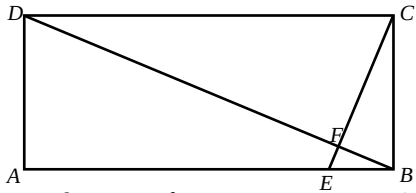


**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** En la figura adjunta se observan tres circunferencias tangentes entre sí y también tangentes a una recta. Si los radios de las circunferencias mayores miden 36 y 9, ¿cuánto mide el radio de la pequeña?



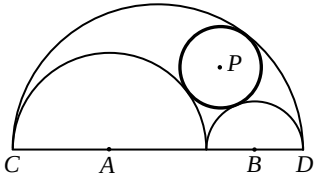
**2.** En el rectángulo *ABCD* de la figura, *AB* = 24 y *AD* = 10. El segmento *CE* es perpendicular a la diagonal *BD* y el punto *F* la intersección de ambos segmentos. ¿Cuál es la longitud del segmento *EF*?




**3.** ¿Cuántos números de cinco cifras, que empiecen por 37, verifican que tanto [37abc], como [37bca] y [37cab] son múltiplos de 37? Por ejemplo: 37296, 37962 y 37629 son tres de ellos.
Nota. La expresión [37abc] representa al número cuyas cifras son 3, 7, a, b, c.

**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato. (45 minutos)

**1.** En la figura se observan dos semicircunferencias de centros *A* y *B* y radios 2 y 1 respectivamente. Otra semicircunferencia de diámetro *CD*, tangente exterior a ambas semicircunferencias y una circunferencia de centro *P* que es tangente a las tres semicircunferencias anteriores. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia de centro *P*?



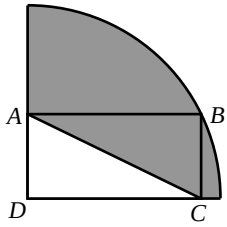

**2.** Sean $x$ e $y$ números reales tales que $|x| \neq |y|$ y que verifican las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x^3 = 13x + 3y \\ y^3 = 3x + 13y \end{array}\right\}$. Calcular $\left(x^2 - y^2\right)^2$.

**3.** Determinar el valor de $x + y$ sabiendo que: $\left.\begin{array}{l} [x] + [y] + y = 43{,}8 \\ x + y - [x] = 18{,}4 \end{array}\right\}$

Nota. $[a]$ es la parte entera de $a$, es decir, el mayor entero menor o igual que $a$.

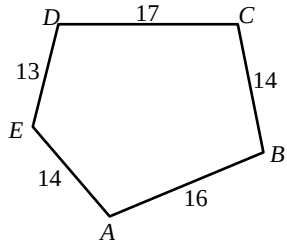
**PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** En la figura adjunta se observa un cuadrante de circunferencia de centro *D* y radio *r* y un rectángulo *ABCD* inscrito en el cuadrante. Si el perímetro del rectángulo es 16 y el perímetro de la región sombreada es $10 + 3\pi$, ¿cuál es el valor del radio *r* ?

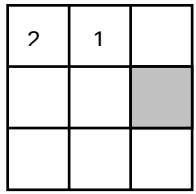



**2.** Escribimos en una lista todos los números enteros desde el 1 hasta el 2017. Si suprimimos todos los cuadrados perfectos y también todos los cubos perfectos, ¿cuántos números nos quedarán en esa lista?

**3.** Se considera el pentágono *ABCDE* de la figura en el que se indican las longitudes de sus lados. Con centro en cada uno de sus vértices, dibujamos cinco circunferencias de forma que las que tienen por centro dos vértices del mismo lado son tangentes entre sí. ¿Cuál es el centro de la mayor que hemos dibujado y cuál es su radio?



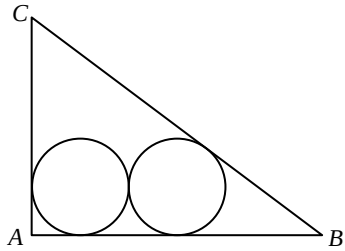

**4.** Las nueve casillas del "cuadrado mágico" de la figura están ocupadas por los nueve divisores de 100. (El producto de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es el mismo). Si el 20 y el 1 ocupan las casillas que muestra la figura, ¿qué número ocupará la casilla sombreada?



**PRUEBA INDIVIDUAL** **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

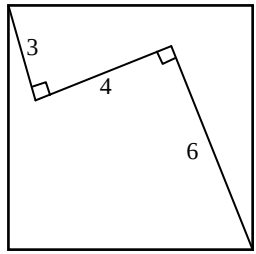
**1.** ¿Hay algún triángulo en el que las medidas de sus ángulos, en grados sexagesimales, vengan dadas por números enteros y que verifiquen que la suma de la medida de uno de ellos más el producto de las medidas de los otros dos sea 2017?
Indicación. Te puede ayudar saber que 919 es un número primo.

**2.** En el triángulo rectángulo $ABC$, de catetos $AC = 3$ y $AB = 4$, inscribimos dos circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. Calcula el radio de las circunferencias.




**3.** En un trayecto en tren entre dos ciudades, una hora después de la salida, el tren se detuvo por un pequeño fallo mecánico que se solucionó en media hora pero que hizo que el tren continuara su viaje a la mitad de la velocidad normal. Por esta circunstancia llegó a su destino con dos horas de retraso. Expertos consultados aseguraron que si la avería se hubiera producido 100 km más adelante, la demora habría sido de sólo una hora. ¿Cuál es la distancia que separa a estas dos ciudades?
Nota. Suponemos que el tren circula siempre a velocidad constante.

**4.** Calcula el área del cuadrado de la figura.



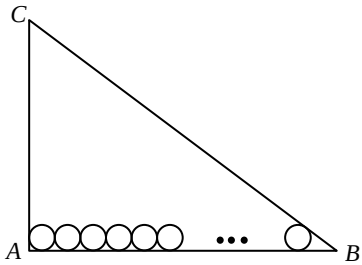
**PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato** (90 minutos)

**1.** Los números *x*, *y*, *z*, son enteros. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 = 31 \\ -x^2 + 6yz + 2z^2 = 44 \\ x^2 + xy + 8z^2 = 100 \end{array}\right\}$$

**2.** Encuentra todas las parejas de enteros positivos (*x*, *y*) tales que $4^y - 615 = x^2$.

**3.** En el triángulo rectángulo *ABC*, de catetos *AC* = 3, *AC* = 4, inscribimos *n* circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de *n* se verifica que el radio de cada una de ellas es $\frac{1}{2017}$?




**4.** El número 21! Tiene más de 60 000 divisores (positivos). Si elegimos al azar uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar?

## **PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** El peso total de un frasco y su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el frasco contiene 15 pastillas vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuántos gramos pesa el frasco?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 2B
Los números *m, n, p* y *q* son enteros positivos y diferentes.
Si además satisfacen la ecuación $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=T$ , ¿cuál es el valor de su suma?

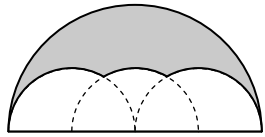
**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 2C.
En el último examen de Matemáticas de mi clase la nota media ha sido $5+\frac{T}{100}$ . Si la nota media de las chicas fue de 6 y la de los chicos de 5, ¿cuántos estudiantes hay en mi clase si no puede haber más de 30?

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3º y 4º de ESO.-**

**2A.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 3A.
En la figura adjunta se observa un semicírculo de radio *T*, y tres semicírculos iguales de radio $\frac{T}{2}$ . ¿Cuál es el área de la zona sombreada?.



**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**2B.-** En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que sacamos dos del mismo color?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 3C.

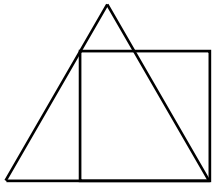
Dos trenes viajan a velocidad constante. El más lento recorre en 15 minutos $\frac{T}{27}$ km menos que el más rápido y tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del tren más rápido?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 1A.

En la figura se observa un triángulo equilátero y un cuadrado de perímetro *T* que tiene un vértice común con el triángulo y otros dos en lados del triángulo. Si escribimos el perímetro del triángulo como $a+b\sqrt{3}$ con *a* y *b* enteros positivos, ¿calcula el número $\frac{a}{b}$ ?



**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**3B.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 1B.

Los puntos $A\left(\frac{T}{2},\ 92\right)$; $B(17,\ 76)$ *y* $C(19,\ 84)$ son los centros de tres círculos de radio 3. Una recta que pasa por el punto *B* corta a los tres círculos de forma que la suma de las áreas de los trozos de círculo que deja a cada lado es la misma. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** El producto de las edades de un padre y sus dos hijos es 4018. Si actualmente el padre tiene menos de 45 años, ¿qué edad tenía cuando nació el hijo mayor?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

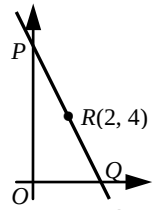
**FASE CERO: viernes 24 de noviembre de 2017**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

**1.** Colocamos cifras en los huecos del número 2□□, una en cada hueco, para formar un número de tres cifras. ¿De cuántas formas podemos hacerlo para que el número obtenido sea mayor que 217?

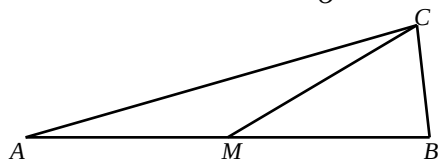
A) 81 B) 82 C) 83 D) 92 E) 93

**2.** En la siguiente gráfica el punto P está en el eje *OY*, *Q* es el (4, 0) y la recta *PQ* pasa por el punto *R*(2, 4). ¿Cuál es el área del triángulo *OPQ*?




A) 8 B) 12 C) 32 D) 24 E) 16

**3.** En el triángulo de la figura, el punto *M* es el punto medio del lado *AB*, $C\hat{M}B = 30^\circ$ y $C\hat{A}B = 15^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo $C\hat{B}A$?




A) 75º B) 65º C) 60º D) 80º E) 85º

**4.** Jorge tiene 144 cubitos idénticos de 1 cm de arista. Utiliza todos para construir un prisma rectangular cuya base tiene un perímetro de 20 cm, pero hay distintas posibilidades. ¿Cuál es la suma de todas las posibles alturas del prisma?

A) 31 B) 25 C) 15 D) 22 E) 16

**5.** Irene es más baja que Jorge, Francisco es más alto que Gustavo, Jorge es más alto que Francisco y Herminia es más baja que Gustavo. ¿Quién es el más alto?

A) Francisco B) Gustavo C) Herminia D) Irene E) Jorge

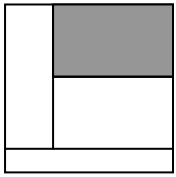
**6.** El cociente entre la longitud del lado menor de un rectángulo y la longitud del lado mayor es igual al cociente del lado mayor y la diagonal. ¿Cuál es el cuadrado del cociente entre la longitud del lado menor y la diagonal?

A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$

**7.** En el triángulo $ABC$, $AB = 6$, $AC = 8$ y $BC = 10$. Si $D$ es el punto medio del lado $BC$, ¿cuál es la suma de los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos $ADB$ y $ADC$?

A) $1+\sqrt{5}$ B) $\frac{11}{4}$ C) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ D) $\frac{17}{6}$ E) 3

**8.** El cuadrado $PQRS$, de lado 42, está dividido en cuatro rectángulos del mismo perímetro, tal y como muestra la figura. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?



A) 252 B) 432 C) 441 D) 490

E) 540

**9.** Las longitudes de los lados de un triángulo obtusángulo son:10, 17 y $x$. Si $x$ es un número entero, ¿cuál es la suma de los posibles valores de $x$?

A) 161 B) 148 C) 63 D) 323 E) 224

**10.** La región del espacio formada por los puntos que distan 3 unidades del segmento $AB$ tiene por volumen $216\pi$. ¿Cuál es la longitud de dicho segmento?

A) 6 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

**11.** Conduciendo a velocidad constante, Alberto tarda 3 horas en ir desde su casa a casa de sus padres. Un día empezó a conducir a su velocidad habitual pero, después de llevar la tercera parte del camino, empezó a llover y redujo su velocidad en 20 km/h, tardando en total 276 minutos. ¿Qué distancia hay entre la casa de Alberto y la de sus padres?

A) 132 km B) 135 km C) 138 km D) 141 km E) 144 km

**12.** Isa tiene 30 varillas, de longitudes enteras y diferentes, entre 1 y 30 cm. Toma tres de ellas, de longitudes 3 cm, 7 cm y 15 cm y las coloca encima de una mesa. Debe elegir una cuarta para formar con las cuatro un cuadrilátero. ¿Cuántas de las 27 restantes puede elegir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

**13.** En un triángulo rectángulo, de lados 3, 4 y 5, inscribimos de dos formas diferentes dos cuadrados. El primero, de lado $x$, tiene un vértice que coincide con el vértice del triángulo correspondiente al ángulo recto. El segundo, de lado $y$, tiene dos vértices consecutivos en la hipotenusa. ¿Cuál es el valor de $\frac{x}{y}$?

A) $\frac{12}{13}$ B) $\frac{35}{37}$ C) 1 D) $\frac{37}{35}$ E) $\frac{13}{12}$

**14.** En el rectángulo $ABCD$, $AB = 3$ y $BC = 4$. El punto $E$ es el pie de la perpendicular desde $B$ a la diagonal $AC$. ¿Cuál es el área del triángulo $AED$?

A) 1 B) $\frac{42}{25}$ C) $\frac{28}{15}$ D) 2 E) $\frac{54}{25}$

**15.** Prolongamos por *B* el diámetro *AB*, de una circunferencia de radio 2, hasta un punto *D* de tal forma que *BD* = 3. Elegimos un punto *E* tal que *ED* = 5 y los segmentos *ED* y *AD* sean perpendiculares. El segmento *AE* corta a la circunferencia en el punto *C*, entre *A* y *E*. ¿Cuál es el área del triángulo *ABC*?

A) $\frac{100}{37}$ B) $\frac{140}{39}$ C) $\frac{145}{39}$ D) $\frac{140}{37}$ E) $\frac{120}{31}$

**16.** ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 2017, escritos en la notación habitual, llevan la cifra cero?

A) 469 B) 471 C) 475 D) 478 E) 481

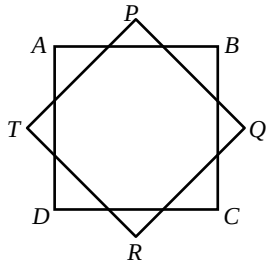
**17.** Si *a* y *b* son números reales positivos y las raíces de las ecuaciones $x^2 + ax + 2b = 0$ y $x^2 + 2bx + a = 0$ son todas reales, el menor valor posible *a* + *b* es:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**18.** La ecuación $\left|\left|x-2\right|-1\right| = a$ tiene exactamente tres raíces reales. ¿Cuál es el valor de *a*?

A) 0 B) 1 C) $\frac{7}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) 3

**19.** En la figura adjunta se observan dos cuadrados: el *ABCD*, de área *S*, y el *PQRT*, de área *S'*. Si los puntos de intersección dividen a los lados del cuadrado *ABCD* en tres partes iguales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?




A) *S* = *S'* B) 2*S* = 3*S'* C) 5*S* = 6*S'*

D) 8*S* = 9*S'* E) Nada de lo anterior

**20.** El número *x* es positivo y $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$ . ¿Cuánto vale $x^5 + \frac{1}{x^5}$ ?

A) 55 B) 63 C) 322 D) 123 E) $49\sqrt{7}$

**21.** Si *x* e *y* son números positivos que verifican $[x]\cdot x = 36$, $[y]\cdot y = 71$, $x + y$ es igual a:

A) $\frac{107}{8}$ B) $\frac{119}{8}$ C) $\frac{125}{9}$ D) $\frac{107}{6}$ E) $\frac{101}{7}$

Recuerda: [*a*] "parte entera de *a*" es el mayor entero menor o igual que *a*.

**22.** Pedro elige tres enteros positivos *a*, *b* y *c*. Quino determina el valor de $a+\frac{b}{c}$ y obtiene como respuesta 101. Rosa calcula $\frac{a}{c}+b$ y obtiene 68. Sara determina el valor de $\frac{a+b}{c}$ y obtiene como resultado *k*. ¿Cuál es el valor de *k*?

A) 13 B) 168 C) 152 D) 12 E) 169

**23.** Amalia tiene una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara al realizar un lanzamiento es de $\frac{1}{3}$ y Bruno tiene otra en la que la probabilidad de obtener cara es de $\frac{2}{5}$. Tira cada uno, alternativamente, su moneda empezando Amalia y gana el primero que obtenga cara. Si $\frac{p}{q}$, irreducible, es la probabilidad de que gane Amalia, $q - p$ es igual a:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**24.** En el triángulo equilátero *ABC* prolongamos desde *B* el lado *AB* hasta el punto *B'* de tal manera que *BB'* = 3*AB*. Análogamente en los otros dos lados: *CC'* = 3*BC* y *AA'* = 3*CA*. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo *A'B'C'* y el área del triángulo *ABC*?

A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 37

**25.** ¿Cuántos triángulos hay que tengan los vértices en los puntos (*i*, *j*) donde *i* y *j* son enteros del 1 al 5, ambos inclusive?

A) 2128 B) 2148 C) 2154 D) 2160 E) 2300

**26.** Sea *S* el conjunto de puntos (*x*, y) del plano tales que dos de los tres números, 3, (*x* + 2), (*y* + 4) son iguales y el tercero es menor o igual que esos otros dos. ¿Cuál de las siguientes es una correcta descripción de *S* ?

A) *S* es un punto B) *S* es un par de rectas que se cortan C) *S* es un triángulo

D) *S* es: tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos diferentes

E) *S* es: tres semirrectas con un punto común

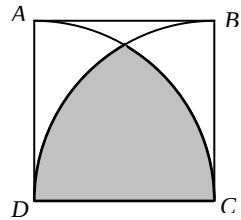
**27.** Los lados *AB* y *AC* del triángulo equilátero *ABC* son tangentes a una circunferencia en los puntos *B* y *C*, respectivamente. ¿Qué fracción del área de dicho triángulo cae fuera de la circunferencia?

A) $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi-\frac{1}{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ E) $\frac{4}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$

**28.** Los tres vértices del triángulo equilátero están en la hipérbola $x \cdot y = 1$, siendo uno de los vértices de la hipérbola el baricentro del triángulo. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

A) $\sqrt{48}$ B) $\sqrt{60}$ C) $\sqrt{108}$ D) $\sqrt{120}$ E) 13

**29.** En un cuadrado de lado $a$ trazamos dos cuadrantes de circunferencia, como muestra la figura, con centros en $A$ y $B$. ¿Cuál es el área de la parte sombreada?




A) $\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$ B) $\frac{1}{6}a^2$ C) $\frac{\pi}{6}a^2$

D) $\frac{\sqrt{3}-1}{6}a^2$ E) Faltan datos

**30.** Si $f(x) = sen x + 2\cos x + 3tg x$ (con $x$ en radianes), ¿en qué intervalo está el menor valor positivo de $x$ para el que $f(x) = 0$?

A) (0, 1) B) (1, 2) C) (2, 3) D) (3, 4) E) (4, 5)

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

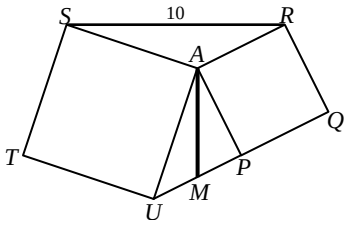
**LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE LOCAL:** segunda prueba. Viernes 20 de diciembre de 2017
Tiempo: 3h 30 min

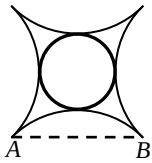
**1.** Considera un entero $N$ de cinco cifras. Forma el entero $P$, de seis cifras, colocando un 2 al comienzo de $N$, y el entero $Q$, también de seis cifras, colocando un 2 al final de $N$. Si $Q = 3P$, escribe todos los valores posibles de $N$.

**2.** En la figura adjunta se observan dos cuadrados: $APQR$ y $ASTU$, que tienen un vértice común, $A$. Si $SR = 10$ y $M$ es el punto medio de $UP$, calcula la longitud de $AM$.



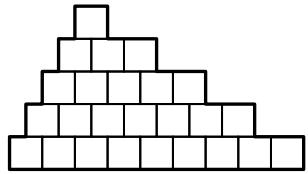

**3.** Norine tiene una lista de varios enteros consecutivos y efectúa el producto de todos ellos obteniendo como resultado un número $N$, de seis cifras, que empieza por 47 y acaba en 74. ($N = 47\ldots74$). Escribe la lista que tiene Norine.

**4.** En la figura adjunta puedes ver una circunferencia tangente a cuatro arcos iguales, siendo cada uno de ellos la cuarta parte de una circunferencia. Si $AB = 2$ cm, calcula el radio de la circunferencia.




**5.** Con cuatro dígitos diferentes, ninguno igual a cero, sabes que es posible formar 24 números de cuatro cifras cada uno, todos distintos. ¿Cuál es el mayor divisor primo de la suma de estos 24 números?

**6.** En la figura puedes ver una "pirámide" de cuadrados de lado 1 con las siguientes condiciones:



a. El número de cuadrados de la fila de abajo es impar (nueve en el dibujo)
b. Cada fila, salvo la de abajo, tiene dos cuadrados menos que la que tiene debajo.
c. Cada cuadrado se apoya en dos cuadrados de la fila que tiene debajo.
d. En la fila superior hay un cuadrado solo.

Si la "pirámide" tiene $n$ filas, encuentra una relación que exprese su área $A$ en función de su perímetro $P$.

**7.** Los habitantes del planeta *EMO* son rojos o verdes y tienen 2, 3 ó 4 cabezas. Colocamos en fila a seis de ellos, cada uno con una de las seis características citadas, es decir, R2, R3, R4, V2, V3, V4, de forma que cualesquiera dos que estén juntos difieren en el color y en el número de cabezas. ¿De cuántas formas los podemos colocar en esa fila?

**8.** El entero positivo $N$ tiene exactamente seis divisores. Si el producto de cinco de ellos es 648, ¿cuál es el otro divisor de $N$?.

**9.** Hugo y María, ambos con menos de 80 años pero más de 10, observan que si escriben sus edades una a continuación de la otra, primero la de Hugo, obtienen un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. A continuación, Hugo se da cuenta de que eso volverá a pasar dentro de 17 años. ¿Cuál es la edad actual de Hugo?

**10.** Para el conjunto $\{a, b, c, d\}$ la suma de todos los productos de dos factores de sus elementos es:
$ab + ac + ad + bc + bd + cd$ y la suma de todos los productos de tres factores es:
$abc + abd + acd + bcd$.
Sea $f(n)$ la suma de los productos de $n$ factores de los 2017 primeros enteros positivos.
Así por ejemplo $f(1) = 1 + 2 + \ldots + 2017$.
¿Cuál es el valor de $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(2017)$?

# LIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## Prueba de selección
## Comunidad de Madrid

**Primera sesión, viernes 19 de enero de 2018**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \quad x^4 - 1$

2. Sea $n$ un número natural. Probar que si la última cifra de $7^n$ es 3, la penúltima es 4.

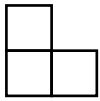
3. Sea $AD$ la mediana de un triángulo $ABC$ tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

**Segunda sesión, Sábado 20 de enero de 2018**
Tiempo: 3 horas y media

4. Diremos que un entero positivo es "*curioso*" si puede expresarse como suma de los cuadrados de tres divisores suyos diferentes. Demostrar:
   a. Cualquier número *curioso* es múltiplo de 3.
   b. Hay infinitos números *curiosos*.

5. Sean $x, y, z$ números reales distintos entre sí dos a dos. Determinar todos los valores de $a$ para que $x - \frac{y}{z} - \frac{z}{y} = y - \frac{z}{x} - \frac{x}{z} = z - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = a$.

6. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula $9 \times 9$. ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

## XXIII$^a$ OLIMPIADA de MAYO
## Primer Nivel
## Mayo de 2017

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

### PROBLEMA 1
A cada número de tres dígitos Matías le sumó el número que se obtiene invirtiendo sus dígitos. Por ejemplo, al número 927 le sumó el 729. Calcular en cuántos casos el resultado de la suma de Matías es un número con todos sus dígitos impares.

### PROBLEMA 2
¿Es posible pintar 33 casillas de un tablero de $9 \times 9$ de forma que cada fila y cada columna del tablero tenga como máximo 4 casillas pintadas, pero si además pintamos cualquier otra casilla aparece alguna fila o columna que tiene 5 casillas pintadas?

### PROBLEMA 3
Sea $ABCD$ un rombo de lados $AB = BC = CD = DA = 13$. Sobre el lado $AB$ se construye el rombo $BAFE$, exterior al $ABCD$ y tal que el lado $AF$ es paralelo a la diagonal $BD$ del $ABCD$. Si el área del $BAFE$ es igual a 65, calcular el área del $ABCD$.

### PROBLEMA 4
Sea $n$ un entero par mayor que 2. Sobre los vértices de un polígono regular de $n$ lados se pueden colocar fichas rojas o azules. Dos jugadores, A y B, juegan alternándose turnos del siguiente modo: cada jugador, en su turno, elige dos vértices que no tengan fichas y coloca en uno de ellos una ficha roja y en el otro una ficha azul. El objetivo de A es conseguir que haya tres vértices consecutivos con fichas del mismo color. El objetivo de B es impedir que esto suceda. Al comienzo del juego no hay fichas en ninguno de los vértices.
Demostrar que independientemente de quien empiece a jugar, el jugador B siempre podrá conseguir su objetivo.

### PROBLEMA 5
Diremos que dos números enteros positivos $a$ y $b$ forman una *pareja adecuada* si $a+b$ divide a $ab$ (su suma divide a su multiplicación). Hallar 24 números enteros positivos que se puedan distribuir en 12 parejas adecuadas, y de modo que cada número entero figure en una sola pareja y el mayor de los 24 números sea lo menor posible.

## Segundo Nivel

### PROBLEMA 1

Decimos que un número entero positivo es *ascendente* si sus cifras leídas de izquierda a derecha están en orden estrictamente creciente. Por ejemplo, 458 es ascendente y 2339 no lo es.
Hallar el mayor número ascendente que es múltiplo de 56.

### PROBLEMA 2

Varios números reales diferentes están escritos en el pizarrón. Si $a$, $b$, $c$ son tres de estos números, distintos entre sí, al menos una de las sumas $a+b$, $b+c$, $c+a$ también es uno de los números del pizarrón. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que pueden estar escritos en el pizarrón?

### PROBLEMA 3

En un cuadrilátero $ABCD$ se cumple que $A\hat{B}C = A\hat{D}C = 90^\circ$ y $B\hat{C}D$ es obtuso. En el interior del cuadrilátero se ubica el punto $P$ tal que $BCDP$ es un paralelogramo. La recta $AP$ corta al lado $BC$ en $M$. Además $BM = 2$, $MC = 5$ y $CD = 3$.
Determinarla longitud de $AM$.

### PROBLEMA 4

Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567.¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7?

### PROBLEMA 5

Ababa juega con una palabra formada por las letras de su nombre y se ha puesto ciertas reglas:
Si encuentra una A seguida inmediatamente de una B las puede sustituir por BAA.
Si encuentra dos B consecutivas las puede borrar.
Si encuentra tres A consecutivas las puede borrar.
Ababa empieza con la palabra ABABABAABAAB. Con las reglas anteriores, ¿cuántas letras tiene la palabra más corta a la que puede llegar? ¿Por qué no puede llegar a una palabra más corta?

# XXIII OLIMPIADA DE MAYO – 2017. RESULTADOS DE ESPAÑA

## PRIMER NIVEL

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Álvaro Gamboa Rodríguez | ORO |
| 2 | Sergio Pérez Plaza | PLATA |
| 3 | Félix García Taboada | PLATA |
| 4 | Alejandro Krum de Vicente | BRONCE |
| 5 | Pablo Robles | BRONCE |
| 6 | Pablo Cobo Cuenca | BRONCE |
| 7 | Jaime Martins-Soares Larrinaga | BRONCE |
| 8 | Nieves Fernández González | MENCIÓN |
| 9 | Miguel Garniza del Amo | MENCIÓN |
| 10 | Enrique Matorras Muñoz | MENCIÓN |

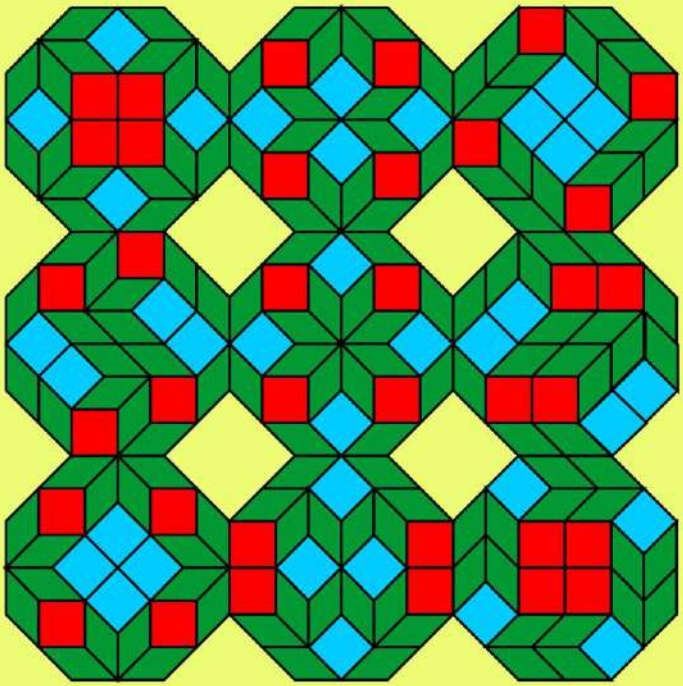
## SEGUNDO NIVEL

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Javier Nistal Salas | ORO |
| 2 | Gabriel Salov | PLATA |
| 3 | Jimena Lozano Simón | PLATA |
| 4 | Víctor David Sánchez González | BRONCE |
| 5 | Marta Bonilla Rangel | BRONCE |
| 6 | Inés Blanco Rivas | BRONCE |
| 7 | Daniel Mecha Martín | BRONCE |
| 8 | Pablo López Renedo | MENCIÓN |
| 9 | Miguel Navarro Muñoz | MENCIÓN |
| 10 | Jorge Carrasco Coquillat | MENCIÓN |

Comunidad
de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

# XXIII Concurso de Primavera



## Matemáticas 2019

Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alfredo Martínez Sanz*
*Belén Alzola Bujarrabal*
*Carlos Ramírez Carrillo*
*Esteban Serrano Marugán*
*Francisco López Álvarez*
*Hugo Fernández Hervás*
*Isabel Benito Miguel*
*Javier Soler Areta*
*Jesús García Gual*
*Joaquín Hernández Gómez*
*Jorge González Ortega*
*José María Sordo Juanena*
*Juan Jesús Donaire Moreno*
*Luis Ferrero de Pablo*
*Marco Castrillón López*
*María Gaspar Alonso-Vega*
*María Moreno Warleta*
*Merche Sánchez Benito*
*Miguel Ángel Baeza Alba*
*Pablo Martínez Dalmau*
*Roberto Tomé Grasa*
*Víctor Manuel Sánchez González*

**Edita:** Asociación Matemática Concurso de Primavera

**ISBN**: 978-84-608-5881-2

**Depósito Legal**: M-8301-2017

## *In memoriam*

En la Comunidad de Madrid, todas las personas relacionadas con las matemáticas sabemos quién es Joaquín, un profe con barbas lleno de entusiasmo. Profesores de universidad y de secundaria y estudiantes interesados por las matemáticas, todos ellos conocen a Joaquín. Y ahora estamos tristes porque el pasado 19 de octubre, Joaquín falleció. Nos ha dejadohuérfanos pero, aun así, una gran satisfacción nos conforta al comprobar que la obra de Joaquín sigue adelante.

¡Aquí lo tenéis!, otro libro del Concurso de Primavera, otra alegría. Gracias, Joaquín, por compartir con nosotros tu entusiasmo por las Matemáticas.

El Comité Organizador

**Joaquín Hernández Gómez, profesor de matemáticas**

Joaquín nació en 1953 en Fuente del Arco, un pequeño pueblo de Badajoz. Era hijo de maestros y como el mismo Joaquín recordaba a menudo, ya con doce años repetía sin cesar que quería ser profesor de matemáticas. Estudió los primeros cursos de la carrera de Matemáticas en la Universidad de Sevilla y terminó la licenciatura en la Universidad Complutense de Madrid. Empezó a cumplir su sueño, se hizo profesor de instituto, dio sus primeras clases en La Rioja y tiempo después recaló en el IES San Juan Bautista de Madrid donde permaneció los últimos 25 años.

Desde sus comienzos Joaquín destacó por su forma de enseñar matemáticas. Pasión, rigor, problemas y amor por sus alumnos, fueron los cuatro pilares que sustentaron su actividad profesional. Siempre creyó que una selección adecuada de los problemas era la mejor manera de enganchar a los alumnos y todo ello sin perder nunca el rigor necesario. A esto le añadía un entusiasmo contagioso, daba igual que estuviera justificando que el ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto, o que se encontrara resolviendo una sencilla ecuación, sus pizarras llenas de su inconfundible letra daban testimonio de su entrega ilimitada. Como además respetaba y quería a todos sus alumnos, Joaquín se convirtió en un profesor admirado por estudiantes y compañeros, en todos ellos dejó huella y la lista de vocaciones matemáticas que despertó es enorme. Joaquín ha sido capaz de acercar dos

mundos que tanto se necesitan y que muchas veces parecen lejanos: la enseñanza secundaria y la universitaria.

Y, como él decía, comenzó a *producir*. Además de profesor de instituto, Joaquín ha sido…

– Director de Instituto en IES Rafael Alberti, de Coslada
– Profesor en la Facultad de Matemáticas de la UCM.
– Profesor del Máster de Formación del Profesorado en Matemáticas en la UCM.
– Preparador de estudiantes para las Olimpiadas Matemáticas.
– Ponente en infinidad de cursos dirigidos a profesores de secundaria.
– Uno de los creadores del Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid. La mayor reunión matemática del país que mueve anualmente más de 50.000 alumnos de Secundaria y Bachillerato. Concurso que se ha extendido a La Rioja y al País Vasco.
– Creador del Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid que ahora, por decisión de sus organizadores, lleva el nombre de Joaquín Hernández. Un original concurso por equipos para centros escolares que participan en tres pruebas (individual, equipos y relevos). La próxima edición será la XIX.
– Principal responsable en los últimos años del Concurso Puig Adam de resolución de problemas, destinado a estudiantes de 3º ESO, 4º ESO y 1º BACH. Este curso se celebrará la XXXVII edición.
– Profesor pionero del Proyecto ESTALMAT en Madrid. Un proyecto destinado a detectar y estimular el talento matemático entre niños

de 12 y 13 años. El proyecto se inició en Madrid en 1998 y actualmente está funcionando en diez comunidades autónomas.

– Profesor pionero de la Escuela de Pensamiento Matemático de Torrelodones, creada en 2003.

– Fundador de la editorial La Tortuga de Aquiles.

– Autor de libros de texto (3º ESO, 4º ESO y BACH) de Matemáticas de la editorial SM.

– Autor de numerosos libros de divulgación matemática en la editorial Nivola.

Y todas estas actividades realizadas con absoluta dedicación.

El pasado mes de junio, Joaquín recibió el Premio a la Mejor Historia Docente. Un reconocimiento que otorga *Smartick* a personas que han destacado en el ámbito de la educación matemática. ¡Qué merecido se lo tenía!

Pero las matemáticas y la docencia no lo eran todo en su vida. Tenía una pasión desaforada por la montaña y cada vez que podía iba al Pirineo a perderse por sus valles, cimas y senderos, que conocía de Este a Oeste. No era nada raro que mientras descansaba en un collado contemplando los picos nevados, después de horas de ascenso, te sorprendiera con alguna de sus preguntas, ¿qué es mayor, $e^{\pi}$ o $\pi^{e}$?

Joaquín era trabajador, siempre aprendiendo, con ilusión contagiosa, alegre, sabía disfrutar, era buena persona, gran lector, interesado por muchísimos temas, dispuesto siempre a ayudar, humilde, generoso, con sentido del humor, comprensivo,… , ¡era la caña!

Pero más allá de su trabajo y de sus pasiones estaba su gran amor: su familia. Su mujer, Luisa, a la que adoraba y sus hijos, Alicia y Pedro, a los que quería con locura. A ellos les dedicamos este libro, un recuerdo agradecido y alegre de nuestro amigo y maestro Joaquín.

Como decía a sus alumnos cuando contestaban con especial acierto: ¡¡¡Tate!!!

Gracias, Joaquín, por compartir con nosotros tu pasión por la vida.

*Comité Organizador del Concurso de Primavera*

**AGRADECMIENTOS:**

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM

Al vicerrectorado de alumnos de la UCM

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid.

Alas editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **SM.**

A Smartick

# ÍNDICE

**ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE**

Nivel I (5º y 6º de Primaria)……..…15
Nivel II (1º y 2º de ESO)……..……21
Nivel III (3º y 4º de ESO)……..…….. 27
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato)……..…….. 33

**ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE**

Nivel I (5º y 6º de Primaria)……..……38
Nivel II (1º y 2º de ESO)……..……44
Nivel III (3º y 4º de ESO)……..…….. 50
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato)……..…….. 55
Tabla de soluciones 1ª Fase ……..…….. 60
Tabla de soluciones 2ª Fase ……..……... 61

**SOLUCIONES**

Soluciones 1ª Fase Nivel I ……..……62
Soluciones 1ª Fase Nivel II ..……..……67
Soluciones 1ª Fase Nivel III ……..…….. 73
Soluciones 1ª Fase Nivel IV …….. 78
Soluciones 2ª Fase Nivel I ……..……85
Soluciones 2ª Fase Nivel II …….. 89
Soluciones 2ª Fase Nivel III …….. 96
Soluciones 2ª Fase Nivel IV ……..……..100
Participantes y relación de ganadores del XXII Concurso de Primavera de Matemáticas ……..…… 108

XXXVI Concurso “Puig Adam” …….. 111
XVIII Concurso Intercentros……... 117
LV Olimpiada Matemática Española. Fase cero ……..…… 126
LV Olimpiada Matemática Comunidad de Madrid ……..…… 130
LV Olimpiada Matemática Española…… ……..…… 132
XXIV Olimpiada de Mayo. Primer nivel ……..…133
XXIV Olimpiada de Mayo. Segundo nivel ……..…134
Relación de ganadores en la “XXIV Olimpiada de Mayo 2018).. 135

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 21 de febrero de 2018**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** **X** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** "¡Qué frío hace aquí!" dice Nadia. Lucía enciende la calefacción y en una hora la temperatura sube 15º. ¿A qué temperatura estaba la casa antes si ahora está a 23º?

**A)** 12º **B)** 2º **C)** 16º **D)** 38º **E)** 8º

**2** Luca compró doce cuadernos, pagó con un billete de 20 € y le devolvieron 5,12 €. ¿Cuánto le devolvieron a Lino que compró seis cuadernos y pagó con un billete de 10 €?

**A)** 5,12 € **B)** 4,98 € **C)** 4,56 € **D)** 4,12 € **E)** 2,56 €

**3** En mi clase se han presentado tres chicos y cinco chicas como candidatos para formar parte del grupo de mediación. En mi papeleta debo escribir el nombre de un chico y de una chica. Si todos me parecen buenos candidatos, ¿de cuántas formas podré rellenar la papeleta?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 15 **E)** 18

**4** El rollo de cocina que tenemos en el aula de plástica tiene 82,5 metros de largo y 22 cm de ancho. Está troquelado para cortar servilletas cuadradas. ¿Cuántas servilletas tiene el rollo?

**A)** 350 **B)** 3500 **C)** 35 000 **D)** 375 **E)** 3750

**5** Santiago tiene un bote lleno de monedas de dos céntimos. Para calcular el dinero que tiene ha pesado un bote igual, pero vacío, y el bote lleno. El primero pesa 250 g y el segundo 1,7 kg. Después ha averiguado en internet que una moneda de 2 céntimos pesa 3,06 g. ¿Qué número aproxima mejor la cantidad de dinero que hay en el bote?

**A)** 1 € **B)** 5 € **C)** 10 € **D)** 50 € **E)** 100 €

**6** Miguel es muy pequeñín. Come cada cuatro horas y hace caca cada dieciocho. El lunes a las 10:00 ocurrió el terrible momento en que hace las dos cosas a la vez. ¿Cuándo volverán a coincidir ambos eventos por primera vez?

**A)** El lunes a las 22:00 **B)** El martes a las 10:00 **C)** El martes a las 18:00
**D)** El martes a las 22:00 **E)** El miércoles a las 18:00

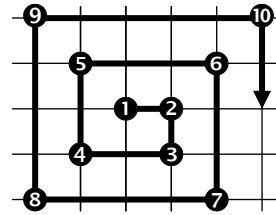
**7** Diego ha aprendido hoy el criterio de divisibilidad del 3: *Un número es múltiplo de tres si la suma de sus cifras es múltiplo de tres.* Adriana le propone un reto: "Dime qué número puedo poner en el hueco para que sea múltiplo de tres este número tan largo: 23□41775". Diego le dice que hay más de una posibilidad. "Pues dime la suma de todos los posibles", le dice Adriana. ¿Qué debe contestar Diego?

**A)** 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 21

**8** Marta tiene en su escritorio un bote con bolígrafos. La mitad de los bolis no pintan, y de los restantes, tres son azules, dos rojos y uno negro. Si coge un boli sin mirar, ¿qué probabilidad tiene de que pinte rojo?

**A)** $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{2}{6}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{4}{12}$

**9** Con estacas y cuerda Joaquín está construyendo esta bonita espiral. Si entre la estaca 1 y la 2 hay un metro de distancia, ¿cuántos metros de cuerda habrá utilizado en total cuando llegue a la estaca 20?



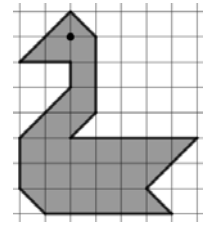

**A)** 80 **B)** 100 **C)** 120

**D)** 200 **E)** 240

**10** En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

**A)** $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

**11** Juanje ha dibujado al pato Gauss usando una cuadrícula de 1cm x 1cm. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área del patito?



**A)** 20 **B)** 23,5 **C)** 24

**D)** 25 **E)** 25,5

**12** Des-pa-ci-to, haz todos los cálculos muy despacito. Pasito a pasito, pon gran cuidadito y dinos qué cuenta da el resultado mayor.

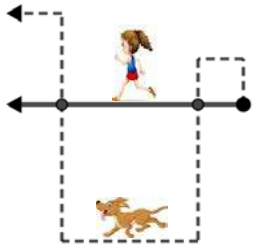
**A)** 10 + 3 x (5 – 2) **B)** 4 + 4 x 4 **C)** 23 – 14 + 2 x 3

**D)** 6 + 3 x 5 – 2 **E)** 215 – 199

**13** Goraspita coge tres números, multiplica cada uno de ellos por sí mismo y después al mayor de esos productos le resta la suma de los otros dos productos. Por ejemplo, con el trío (8, 10, 3) obtendría: $10 \times 10 - (8 \times 8 + 3 \times 3) = 27$. Goraspita se pone muy contento cuando el resultado de la cuenta da cero. Para hoy se ha propuesto ver qué pasa con estos cuatro tríos de números: (3, 4, 5); (13, 10, 12); (12, 13, 5); (9, 12, 15). ¿Con cuántos de ellos obtendrá cero?

**A)** Con todos **B)** Con uno **C)** Con dos **D)** Con tres **E)** Con ninguno

**14** Todas las mañanas Ana sale a correr 12 km acompañada de su perrita Phoebe. Ana lo hace en línea recta, pero Phoebe va y viene formando cuadrados alrededor de la trayectoria de Ana y cruzándose con ella de vez en cuando, como ves en la figura, hasta coincidir con ella al final de la trayectoria. ¿Cuántos kilómetros corre Phoebe?



**A)** 12 **B)** 24 **C)** 36 **D)** 48 **E)** Depende de la trayectoria

**15** Alicia y María están en el duelo de *Saber y Ganar*. Alicia tiene 240 puntos y María 300. Tienen que apostar sobre la última pregunta de cada una. La que acierte su pregunta añadirá a su cuenta los puntos apostados, restando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Si falla perderá de su cuenta los puntos apostados, sumando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Alicia apostó 80 puntos y acertó. María apostó 60 y falló. ¿Con cuántos puntos se quedó María?

**A)** 220 **B)** 240 **C)** 180 **D)** 200 **E)** 160

**16** A la niña Centésima le encanta jugar a las sumas. Pone las cuatro tarjetas de la figura sobre la mesa, coge el número de tarjetas que quiere y suma los números que hay en ellas. ¿Cuántos números entre 2 y 21 no podrá obtener Centésima al hacer las sumas?

**A)** 7 **B)** 9 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 11

**17** Comenúmeros estaba hambriento y se ha comido todas las cifras que son números primos que ha encontrado en la lista de números del 100 al 199:

**100 – 101 – 10 – 10 – 104 – 10 –...**

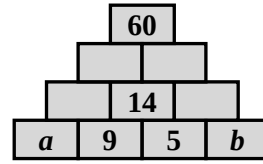
¿Cuántas cifras se ha merendado el glotón?

**A)** 40 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 80 **E)** 90

**18** Sofía recogió un cesto de manzanas del jardín. Le dio la mitad de las manzanas a Fernando. Después le dio tres manzanas a Martita, cuatro a Richi y aún quedaron seis para ella. ¿Cuántas manzanas recogió Sofía?

**A)** 13 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 26

**19** En esta pirámide, el número de cada ladrillo es la suma de los dos que están en los ladrillos que tiene justo debajo. ¿Cuánto debe valer $a + b$ si queremos llegar al 60?



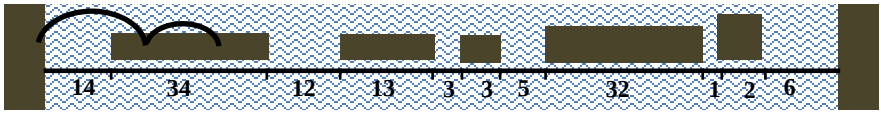

**A)** 12 **B)** 18 **C)** 32

**D)** 46 **E)** No se puede saber

**20** Un número es impar de orden 1 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 sale par.
Un número es impar de orden 2 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 1.
Un número es impar de orden 3 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 2.
Y así sucesivamente... ¿Cuál de los siguientes números es el impar con mayor orden?

**A)** 25 **B)** 29 **C)** 33 **D)** 37 **E)** 41

**21** Pataplúm, la pulga saltarina, puede recorrer hasta 20 metros de un solo salto. Hoy quiere cruzar el río de la figura saltando de isla en isla sin mojarse. ¿Cuál es el mínimo número de saltos que tiene que dar Pataplúm para llegar de una orilla a la otra? (En el dibujo, que no está a escala, todas las medidas están en metros).

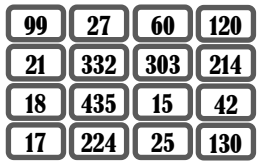



**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**22** Formamos una secuencia comenzando con los números 1, 2 y 3. El cuarto número es la suma de los tres anteriores: 1 + 2 + 3 = 6, y el quinto la suma de los tres anteriores: 2 + 3 + 6 = 11. Si seguimos así, ¿qué número ocupará la novena posición?

**A)** 125 **B)** 37 **C)** 68 **D)** 230 **E)** 59

**23** Esteban y Carmen juegan al quién es quién con números. Carmen ha elegido uno de estos dieciséis números. Esteban pregunta y Carmen contesta:




— ¿Es par? No.
— ¿Es múltiplo de tres? Sí.
— ¿La suma de sus cifras es un número par? Sí.

¿Cuánto suman todos los números que pudo haber pensado Carmen?

**A)** 417 **B)** 852 **C)** 549 **D)** 879 **E)** 1076

**24** "¡La base de mi rectángulo mide el doble que su altura!", grita Lucía. "¡Pues la altura del mío mide el triple que su base!", exclama Julián. Si la base del de Julián mide lo mismo que la altura del de Lucía y el de Lucía tiene 54 cm de perímetro, ¿cuál es el perímetro del de Julián?

**A)** 108 cm **B)** 81 cm **C)** 72 cm **D)** 54 cm **E)** 27 cm

**25** Y para terminar, Don Retorcido pregunta: "Adivina, adivinanza. ¿Cómo se llama el polígono de cuatro lados cuyas diagonales, que se cortan en su punto medio, son distintas y perpendiculares entre sí?"

**A)** Rectángulo **B)** Romboide **C)** Trapecio **D)** Cuadrado **E)** Rombo

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 21 de febrero de 2018**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.**

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

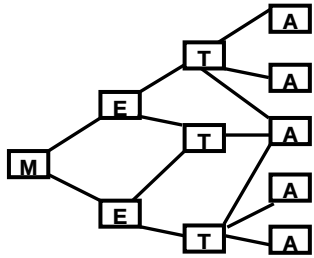
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** ¿Cuántos caminos diferentes hay para conseguir la **META**?




**A)** 11 **B)** 8 **C)** 30 **D)** 18 **E)** 5

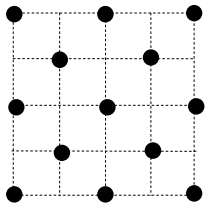
**2** En el zoo juegan con números: Alce y Buey escriben, cada uno de ellos, un número de tres cifras; Cocodrilo y Delfín escriben, cada uno, un número de una sola cifra; y Elefante escribe un 5. Al sumarlos todos obtengo 2018 y a ti te pregunto: ¿Cuánto suman todas las cifras de los números de los cinco animales?

**A)** 74 **B)** 11 **C)** 59 **D)** 37 **E)** 69

**3** Panda tarda 24 minutos en limpiar una piña y Perezoso, mucho más lento, tarda 3 horas. Si los dos trabajan juntos para el gran banquete, ¿en cuánto tiempo limpiarán 51 piñas?

**A)** 18 h **B)** 16 h **C)** 17 h **D)** 25 h 30 min **E)** 86 h 42 min

**4** Candela dibuja una cuadrícula en la que el lado de cada cuadradito mide 1 cm. Isabel señala trece puntos en esa cuadrícula. Gabriela dibuja todos los cuadrados posibles que pueden formarse usando esos puntos como vértices. Don Retorcido, que no para, te pregunta: ¿Cuánto suman las áreas, en $cm^2$, de todos esos cuadrados que dibujó Gabriela?



**A)** 36 **B)** 44 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 52

**5** Lo sentimos pero en este problema solo puedes trabajar con números de seis cifras formados únicamente por unos y doses. En estas condiciones, ¿cuál es la resta del mayor múltiplo de nueve y el menor múltiplo de seis?

**A)** 111 000 **B)** 90 909 **C)** 110 990 **D)** 110 889 **E)** 111 111

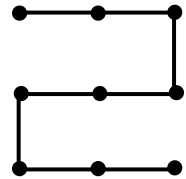
**6** Por allí vienen las trillizas a toda velocidad. Abren el cajón de sus calcetines, todos desparejados y revueltos: ocho rojos, diez negros y doce azules. Hay muy poca luz y no distinguen bien los colores. ¿Cuántos calcetines tienen que coger como mínimo para asegurarse de que cada una obtenga un par de calcetines del mismo color?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**7** En el ascensor del gran pino pueden montarse como máximo 102 ardillas o 68 mapaches. Si acaban de subirse 42 ardillas, ¿cuántos mapaches pueden subirse todavía hasta llenar el ascensor?

**A)** 60 **B)** 40 **C)** 28 **D)** 26 **E)** 30

**8** Noor quiere poner en su móvil una clave de desbloqueo que cumpla estas condiciones: tiene que empezar en el vértice superior de la izquierda; ha de pasar por los nueve puntos sin cruzarse nunca con ningún camino anterior; y todos los trazos han de ser horizontales o verticales pero no valen oblicuos. Aquí te mostramos una posible clave. ¿Cuántas claves diferentes tiene Noor para elegir?



**A)** 5 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 4 **E)** 8

**9** Dos amigas coleccionan círculos, unos rojos y otros verdes. Los tres quintos de los círculos de Andrea son rojos y la mitad de los círculos de Paula son rojos. Sabiendo que ambas tienen la misma cantidad de círculos rojos, ¿qué podemos asegurar del número $A$ de círculos verdes de Andrea y el número $P$ de los verdes de Paula?

**A)** $6A = 5P$ **B)** $3A = 2P$ **C)** $2A = 3P$ **D)** $A = 3P$ **E)** $5A = 6P$

**10** Un número es impar de orden 1 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 sale par.
Un número es impar de orden 2 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 1.
Un número es impar de orden 3 si es impar y al sumarle 1 y dividir por 2 el resultado es un impar de orden 2. Y así sucesivamente...
Si 65 es el primer impar de orden 6, ¿cuál es el primer impar de orden 7?

**A)** 131 **B)** 129 **C)** 121 **D)** 97 **E)** 85

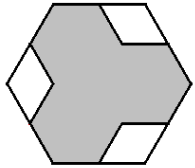
**11** Profe, se me dan fatal los números decimales, me lío con las comas.
¡Ah, ¿sí?!, gritó Don Retorcido, ¿pues a ver si resuelves esta operación que me puso mi profesor cuando yo era como tú? $(0{,}2 \cdot 0{,}03) : (0{,}004 \cdot 0{,}0005)$

**A)** 3000 **B)** 400 **C)** 0,003 **D)** 30 000 **E)** 0,000 000 012

**12** Si un número termina en la cifra 4, su cubo también termina en 4. ¿Cuántas terminaciones se conservan al elevar al cubo?

**A)** Cuatro **B)** Cinco **C)** Seis **D)** Ocho **E)** Las diez

**13** Dos de los vértices de los rombos que se ven en la figura son puntos medios de los lados del hexágono regular. Si el área del hexágono es de 36 $cm^2$, el área, en $cm^2$, de la zona sombreada es:



**A)** 33 **B)** 30 **C)** 27

**D)** 24 **E)** 21

**14** He repartido mi bizcocho entre mis tres amigos. En principio, di a Don Retorcido 2/3 del total; a Comenúmeros 1/5 del total; y lo que sobró para Mozart. Al instante, Comenúmeros protestó y Don Retorcido, gruñendo, le dijo "anda, comilón, toma 1/4 de mi parte". Mozart quedó triste y Don Retorcido le dio 1/5 de lo que ahora tenía. Si después de la última negociación el trozo de Mozart pesaba 140 gramos, ¿cuántos gramos pesaba la porción final de Comenúmeros?

**A)** 180 **B)** 220 **C)** 140 **D)** 240 **E)** 200

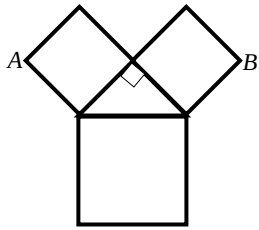
**15** ¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:
*Mi número favorito es el* 5 *y por eso he pensado en el número* A *que está formado por* 55 *cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. ¿*Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

**A)** 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

**16** ¿A qué exponente hay que elevar 8 para obtener $16^{21}$?

**A)** 42 **B)** 63 **C)** 168 **D)** 28 **E)** 62

**17** La figura que te mostramos está formada por un triángulo rectángulo isósceles y tres cuadrados. Si la distancia entre *A* y *B* son 12 cm, ¿cuál es el área, en $cm^2$, de la figura?




**A)** 108 **B)** 90 **C)** 84

**D)** 72 **E)** 81

**18** ¿Cuánto vale el número $x = 10+11-12-13+14+15-16-17+...+46+47-48-49+50$ ?

**A)** 49 **B)** 10 **C)** –29 **D)** 50 **E)** 70

**19** Alicia y María están en el duelo de *Saber y Ganar*. Alicia tiene 240 puntos y María 300. Tienen que apostar sobre la última pregunta de cada una. La que acierte su pregunta añadirá a su cuenta los puntos apostados, restando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Si falla perderá de su cuenta los puntos apostados, sumando la mitad de estos a la cuenta de la otra. Alicia apostó 80 puntos y acertó. María apostó 60 y falló. ¿Cuál es la diferencia de puntos entre las puntuaciones finales de Alicia y María?

**A)** 150 **B)** 140 **C)** 139 **D)** 120 **E)** 100

**20** Luis juega con cinco cartas ABCDE a desordenarlas de una curiosa manera.
Cambio 1: coge la carta del centro y la pone la primera, quedando CABDE.
Cambio 2: coge la última carta y la pone en el medio, quedando CAEBD.
El cambio 3 es igual que el cambio 1, el cambio 4 es igual que el cambio 2 y así sucesivamente.
Y así sigue sin pausa hasta que al realizar el cambio número 2018 queda agotado. ¿Qué carta ocupa la primera posición?

**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

**21** Con los porcentajes hay que andarse con cuidado. ¿Cuáles de las siguientes frases son verdaderas?

P) El 27 % de 39 es igual al 39 % de 27.

Q) El 20 % del 30 % de cierta cantidad es lo mismo que el 60 % de dicha cantidad.

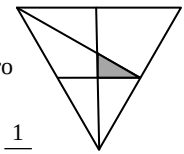
R) Una cantidad menos su 20 % es lo mismo que el 80 % de esa cantidad.

**A)** Solo R **B)** Solo Q y R **C)** Solo P y R **D)** Las tres **E)** Solo P

**22** Si $a$ y $b$ son números no nulos que cumplen $3a+2b=5a+b$, ¿cuánto vale $b$ dividido entre $a$?

**A)** 3 **B)** 8 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 0,5

**23** En el triángulo equilátero hemos marcado los puntos medios de cada lado y aprovechándolos, hemos construido el triángulo relleno de pintura gris. ¿Qué fracción del triángulo equilátero ocupa el triángulo gris?



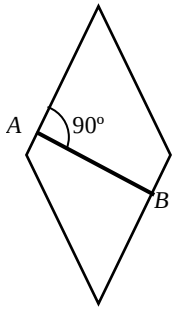
**A)** $\frac{1}{12}$ **B)** $\frac{1}{24}$ **C)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{1}{16}$ **E)** $\frac{1}{32}$

**24** Cati se jubila y el último día de clase sus alumnos le regalan este problema:
*Profe, te aseguramos que solo uno de estos números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es?*

**A)** 346 927 **B)** 346 928 **C)** 346 923 **D)** 346 922 **E)** 346 921

**25** Terminamos con un rombo. Si el perímetro del rombo mide 24 cm y su área 24 $cm^2$, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento *AB*?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4
**D)** 5 **E)** 6



concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 21 de febrero de 2018**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.**

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** **X** LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

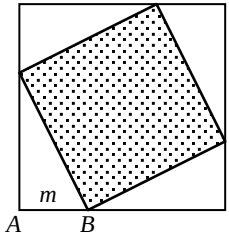
**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En un cuadrado de lado 1 inscribimos un segundo cuadrado como vemos en la figura. Si $AB = m$, el área del cuadrado interior es:




**A)** $m^2 + 2m + 1$ **B)** $m^2 - 2m + 1$

**C)** $2m^2 - 2m + 1$ **D)** $2m^2 + 2m + 1$

**E)** $m^2 + m + 1$

**2** Dos descuentos sucesivos del 10 % y del 20 % son equivalentes a un descuento del:

**A)** 30 % **B)** 15 % **C)** 25 % **D)** 28 % **E)** 35 %

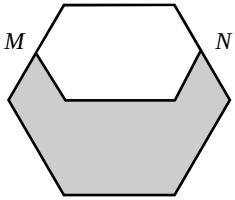
**3** Una escalera de 25 m de longitud está apoyada en una pared vertical, de forma que el pie de la escalera dista 7 m de la pared. Si la volvemos a colocar, estando ahora el punto más alto de la escalera 4 m más bajo que antes, ¿a qué distancia estará ahora el pie de la pared?

**A)** 9 m **B)** 10 m **C)** 11 m **D)** 12 m **E)** 15 m

**4** Sean $a$ y $b$ son enteros positivos. Si $a + b$ y $a^3 + b^3$ terminan en 3, entonces $a^2 + b^2$ termina en:

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**5** En la figura, $M$ y $N$ son puntos medios de dos lados del hexágono regular. El hexágono interior, no regular, tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. Si el área del hexágono regular es 180 $cm^2$, el área, en $cm^2$, de la cabeza de gato (zona sombreada) es:



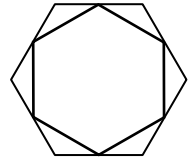

**A)** 105 **B)** 120 **C)** 126

**D)** 132 **E)** 144

**6** Dos corredores $A$ y $B$ parten a la vez de Madrid a Alcalá, ciudades que distan 30 km entre sí. El corredor $A$ va a una velocidad de 4 km/h menos que el $B$. Cuando el $B$ llega a Alcalá da la vuelta y encuentra al $A$ a 6 km de Alcalá. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del corredor $A$?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 20

**7** Inscribimos en un hexágono regular otro hexágono regular cuyos vértices son los puntos medios de los lados del primero. ¿Cuál es el cociente entre el área del hexágono mayor y el área del inscrito?

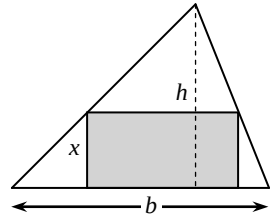


**A)** $\frac{6}{5}$ **B)** $\frac{3}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{5}{4}$ **E)** 2

**8** ¿En cuál de las siguientes ecuaciones se verifica que $y$ no es ni directa ni inversamente proporcional a $x$?

**A)** $x + y = 0$ **B)** $3xy = 10$ **C)** $x = 5y$ **D)** $3x + y = 10$ **E)** $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$

**9** En un triángulo de base $b$ y altura $h$ inscribimos un rectángulo como se muestra en la figura. Si la altura $x$ del rectángulo es la mitad de la base de dicho rectángulo, entonces se verifica que:




**A)** $x = \frac{h}{2}$ **B)** $x = \frac{bh}{b+h}$ **C)** $x = \frac{bh}{b+2h}$

**D)** $x = \sqrt{\frac{bh}{2}}$ **E)** $x = \frac{b}{2}$

**10** El cociente entre el área del cuadrado inscrito en una circunferencia y el área del cuadrado circunscrito a la misma circunferencia es:

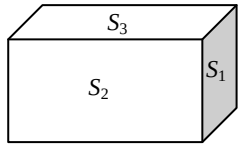
**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{2}{5}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{3}{5}$

**11** Si $x$ e $y$ son números positivos, con $x > y$, $z \neq 0$, la desigualdad que no siempre es verdadera es:

**A)** $x + z > y + z$ **B)** $x - z > y - z$ **C)** $x\,z > y\,z$ **D)** $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$

**E)** $x\,z^2 > y\,z^2$

**12** De un paralelepípedo (caja rectangular) conocemos el área de la cara lateral, $S_1$, de la cara frontal, $S_2$, y de la cara superior, $S_3$. Si $V$ es el volumen de la caja, entonces:




**A)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = V$ **B)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \sqrt{V}$

**C)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = 2V$ **D)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = V^2$ **E)** $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = V^3$

**13** Tomamos un número cualquiera de tres cifras, *abc*, y con él formamos el número de seis cifras N = *abc abc*. Entonces podemos asegurar que el número N es divisible por:

**A)** 14 **B)** 26 **C)** 33 **D)** 99 **E)** 143

**14** El área de un trapecio es 1400 cm$^2$ y su altura 50 cm. Nos piden encontrar la longitud de las bases sabiendo que ambas longitudes, en cm, son múltiplos de 8. El número de soluciones del problema es:

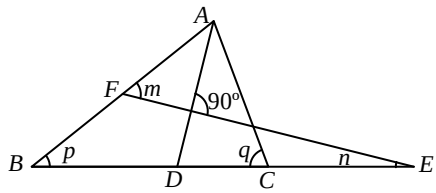
**A)** Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Más de tres

**15** Un triángulo y un trapecio tienen la misma área y la misma altura. Si la base del triángulo mide 18 cm, la longitud de la paralela media del trapecio es:

**A)** 30 cm **B)** 9 cm **C)** 18 cm

**D)** No se puede obtener con esos datos **E)** Nada de lo anterior

**16** En el triángulo *ABC* de la figura, *AD* es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y perpendicular a *EF*. Llamando a los ángulos marcados como se indica en la figura, entonces se verifica que:

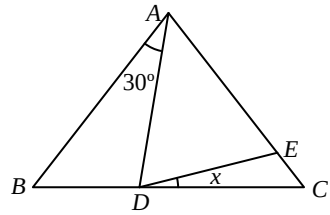



**A)** $m = \frac{1}{2}(p-q)$ **B)** $m = \frac{1}{2}(p+q)$ **C)** $n = \frac{1}{2}(p+q)$

**D)** $n = \frac{1}{2}m$ **E)** Nada de lo anterior

**17** En la figura adjunta $AB = AC$, $B\hat{A}D = 30^\circ$ y $AE = AD$.

La medida del ángulo $x$ es:




**A)** 7º 30´ **B)** 10º **C)** 12º 30´ **D)** 15º **E)** 20º

**18** ¿Cuántos triángulos escalenos hay, de perímetro menor que 13, que tengan la medida de sus lados expresada con números enteros?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 18

**19** Sacamos al azar tres tarjetas de una caja que contiene cinco tarjetas numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor número que aparece en las tarjetas sea el 4?

**A)** $\frac{3}{10}$ **B)** $\frac{1}{10}$ **C)** $\frac{1}{5}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**20** Si $M$ es un entero positivo, designamos por $M!$ al producto $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot M$. ¿Cuál es el mayor entero $n$ para el que $5^n$ es divisor de $98! + 99! + 100!$ ?

**A)** 23 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 27

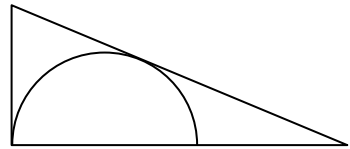
**21** Elegimos al azar un entero entre 1000 y 9999. ¿Cuál es la probabilidad de que sea impar y con todos sus dígitos diferentes?

**A)** $\frac{14}{75}$ **B)** $\frac{56}{225}$ **C)** $\frac{107}{400}$ **D)** $\frac{7}{25}$ **E)** $\frac{9}{25}$

**22** Si $a$, $b$ y $c$ son números reales no nulos y $a + b + c = 0$, ¿cuál es el valor o los posibles valores de $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$?

**A)** 0 **B)** 1 y –1 **C)** 2 y –2 **D)** 0, 2 y –2 **E)** 0, 1 y –1

**23** En el triángulo rectángulo de catetos 5 y 12 inscribimos una semicircunferencia como muestra la figura. ¿Cuál es su radio?



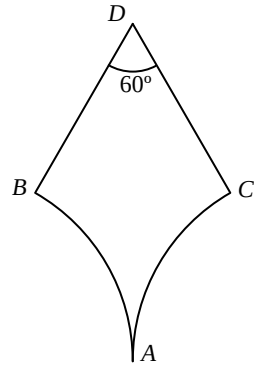
**A)** $\frac{17}{6}$ **B)** $\frac{13}{5}$ **C)** $\frac{59}{18}$

**D)** $\frac{10}{3}$ **E)** $\frac{60}{17}$

**24** María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

**A)** 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

**25** En la figura que observas, $DB$ y $DC$ son segmentos de longitud 2, el ángulo $B\hat{D}C$ es de 60º y los arcos $BA$ y $CA$ son iguales y miden un sexto de la longitud de una circunferencia de radio 2. ¿Cuál es el área de la figura?




**A)** $3\sqrt{3}-\pi$ **B)** $4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$

**C)** $2\sqrt{3}$ **D)** $4\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

**E)** $4+\frac{4\pi}{3}$

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 21 de febrero de 2018**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** La raíz cúbica de $3^{(3^3)}$ es:

**A)** $3^3$ **B)** $3^{(3^3-1)}$ **C)** $3^{(2^3)}$ **D)** $3^{(3^2)}$ **E)** $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$

**2** Seis gatos se comieron 20 ratones. El primer gato se comió un ratón, el segundo dos y el tercero tres. El cuarto gato se comió más ratones que cualquiera de los otros cinco. ¿Cuál es el mínimo número de ratones que se pudo comer el cuarto gato?

**A)** 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 4

**3** Las gráficas de las funciones $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x)=2x$ se cortan en:

**A)** Un punto de abscisa 2 **B)** Un punto de abscisa 0 **C)** Ningún punto
**D)** En dos puntos **E)** Más de dos puntos

**4** Las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son una inversa de la otra siempre que:

**A)** $a = c$ **B)** $a = bc$ **C)** $a = b$ **D)** $b = c$ **E)** $c = ab$

**5** Si $m$ y $n$ son números impares, con $m > n$, el mayor entero que divide a todos los posibles números de la forma $m^2 - n^2$ es:

**A)** 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 16

**6** Las expresiones $a + bc$ y $(a + b)(a + c)$ son:

**A)** Siempre iguales **B)** Nunca iguales **C)** Iguales si $a + b + c = 1$
**D)** Iguales si $a + b + c = 0$ **E)** Iguales solamente cuando $a = b = c = 0$

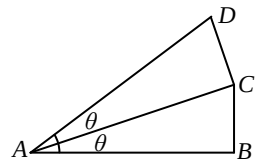
**7** Los números reales $x, y, z$ verifican las desigualdades $0 < x < 1$, $-1 < y < 0$, $1 < z < 2$. De los siguientes números, ¿cuál es, con seguridad, positivo?

**A)** $y + x^3$ **B)** $y + xz$ **C)** $y + y^2$ **D)** $y + 2y^2$ **E)** $y + z$

**8** ¿Cuál de las siguientes funciones tiene su gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas?

**A)** $y = x^2 + x$ **B)** $y = x^2\operatorname{sen} x$ **C)** $y = x\cos x$ **D)** $y = x\operatorname{sen} x$ **E)** $y = x^3$

**9** En la figura adjunta, $AB = 1$, $A\hat{B}C = A\hat{C}D = 90^\circ$ y $C\hat{A}B = D\hat{A}C = \theta$. ¿Cuál es la longitud de *AD*?




**A)** $\cos\theta + tg\theta$ **B)** $\dfrac{1}{\cos 2\theta}$ **C)** $\cos^2\theta$

**D)** $\cos 2\theta$ **E)** $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

**10** Se considera la sucesión de números $10^{\frac{1}{13}}, 10^{\frac{2}{13}}, 10^{\frac{3}{13}}, \ldots, 10^{\frac{n}{13}}, \ldots$ ¿Cuál es el menor entero positivo *n* tal que el producto de los *n* primeros términos de la sucesión es mayor que 100 000?

**A)** 8 **B)** 7 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 11

**11** El complejo sen 300º– *i* cos 300º se puede también escribir como:

**A)** $1_{210^\circ}$ **B)** $1_{150^\circ}$ **C)** $1_{240^\circ}$ **D)** $1_{120^\circ}$ **E)** $1_{330^\circ}$

**12** Si *a*, *b* y *c* son números positivos que verifican el sistema $\begin{cases} ab = 26 \\ ac = 128 \\ bc = 52 \end{cases}$, la suma $a + b + c$ es igual a:

**A)** 29 **B)** $\dfrac{37}{2}$ **C)** 49 **D)** $\dfrac{93}{4}$ **E)** $\dfrac{109}{4}$

**13** La suma de las cifras del mayor número menor que 1000, con cuatro divisores primos diferentes es:

**A)** 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 21

**14** Si $f(x) = ax + b$ y $f^{-1}(x) = bx + a$, ¿cuál es el valor de $a + b$?

**A)** –2 **B)** –1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

**15** Si $4^x = 9$ y $9^y = 256$, el producto *xy* es igual a:

**A)** 21 **B)** 4 **C)** 10 **D)** 36 **E)** 48

**16** Si $m$ y $n$ son enteros positivos con $n > 1$ y tales que $m^n = 2^{25} \cdot 3^{40}$, $m + n$ es igual a:

**A)** 209 962 **B)** 1954 **C)** 209 957 **D)** 6598 **E)** 2018

**17** ¿Cuál de los siguientes números es igual a la suma de 100 enteros consecutivos?

**A)** 1 627 384 950 **B)** 2 345 678 910 **C)** 3 579 111 300
**D)** 4 692 581 470 **E)** 5 815 937 260

**18** En un programa de televisión hay tres cuestiones de opción múltiple con tres respuestas cada una. Un concursante contesta al azar y gana si acierta al menos dos de las cuestiones. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

**A)** $\frac{1}{27}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{2}{9}$ **D)** $\frac{7}{27}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**19** Alicia no se quiere sentar al lado de Beatriz ni al lado de Carlos. Darío no se quiere sentar al lado de Emilio. ¿De cuántas formas pueden sentarse los cinco en una fila de cinco sillas?

**A)** 12 **B)** 16 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 40

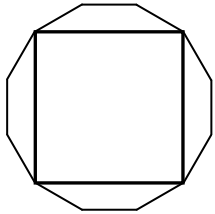
**20** El cociente entre las áreas del polígono regular de ángulo interior $\alpha$ y el polígono regular inscrito en él con vértices en los puntos medios de los lados es:

**A)** $\frac{2}{1-\cos\alpha}$ **B)** $\frac{2}{1+\cos\alpha}$ **C)** $\frac{4}{1+sen\alpha}$ **D)** $\frac{4}{2-\cos\alpha}$ **E)** 2

**21** En el conjunto de enteros positivos definimos una función $f$ tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para cualesquiera $x$ e $y$. Si $f(10) = 14$ y $f(40) = 20$, ¿cuál es el valor de $f(500)$?

**A)** 29 **B)** 30 **C)** 39 **D)** 48 **E)** 50

**22** El cuadrado de la figura tiene de área 2 dm$^2$. El área, en dm$^2$, del dodecágono regular circunscrito es:



**A)** $1+\sqrt{2}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** 3

**D)** $3\sqrt{2}-1$ **E)** 4

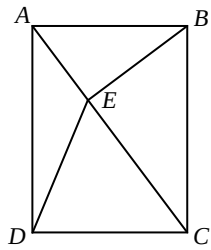
**23** Pablo recuerda que la clave que puso en la cerradura de su maleta era de cuatro cifras distintas y solo dos eran impares. ¿Cuántas claves, como máximo, deberá introducir para abrir la maleta?

**A)** 2400 **B)** 2000 **C)** 1896 **D)** 1800 **E)** 1680

**24** En un triángulo rectángulo de catetos $a$ y $b$, si llamamos $x$ a la altura sobre la hipotenusa, se verifica:

**A)** $ab = x^2$ **B)** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ **C)** $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$ **D)** $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{x^2}$ **E)** $a^2+b^2=2x^2$

**25** Las dimensiones del rectángulo de la figura son $AB = 3$ y $BC = 4$. Si el punto $E$ es el pie de la perpendicular desde $B$ a la diagonal $AC$, ¿cuál es el área del triángulo $AED$?




**A)** 1 **B)** $\frac{42}{25}$ **C)** $\frac{28}{15}$

**D)** 2 **E)** $\frac{54}{25}$

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2018**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | **5** ***puntos*** |
| *Cada pregunta* ***en blanco o errónea*** | **0** ***puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes* ***en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta* ***errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

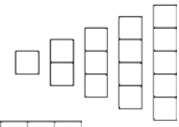
**COLABORAN**

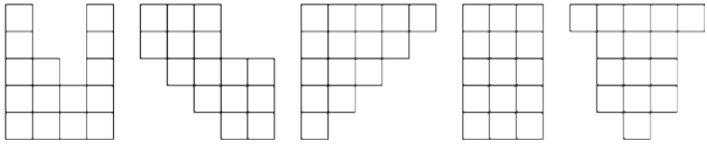
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** El número 42 es el resultado de multiplicar dos números de una sola cifra, $42 = 6 \times 7$. ¿Cuántos números mayores que 40 son producto de dos números de una sola cifra?

**A)** Doce **B)** Once **C)** Diez **D)** Nueve **E)** Ocho

**2** Estas cinco piezas pueden colocarse para formar cuatro de las cinco figuras que ves abajo. ¿Cuál de ellas es la que no se puede formar?





**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

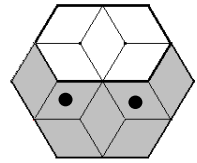
**3** Cuando el viento sopla a favor el Capitán Primavera navega a 45 km/h y cuando sopla en contra lo hace a 25 km/h. Si hoy ha recorrido 310 km en 10 horas, a ratos con el viento a favor y a ratos con él en contra, ¿cuántas horas sopló el viento a favor?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**4** Una bolsa de garrapiñados cuesta 2 €. La gente compra las bolsas de una en una y paga con dos monedas de 1 € o con un billete de 5 €. Si hemos dispuesto de cien monedas de 1 € para dar cambio, y una de cada tres personas paga el precio exacto, ¿cuántas bolsas podremos vender como máximo sin ir a buscar más cambio?

**A)** 45 **B)** 51 **C)** 66 **D)** 75 **E)** 81

**5** La figura hecha con diamantes es una cabeza de gato (zona sombreada) con diadema. Si la cabeza de gato tiene un perímetro de 48 cm, el perímetro, en cm, de la diadema es:



**A)** 32 **B)** 36 **C)** 30 **D)** 16

**E)** 24

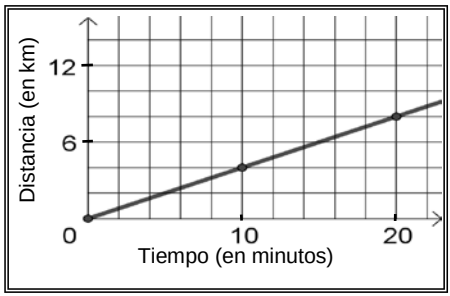
**6** En 2018 celebramos la 22ª edición del Concurso de Primavera. ¿Qué edición celebraremos en 2081?

**A)** 92ª **B)** 85ª **C)** 93ª **D)** 89ª **E)** 84ª

**7** Todo el mundo sabe que en Canarias hay una hora menos que en Madrid, pero tal vez no sepas que en Canarias hay tres horas más que en Buenos Aires. Y cuando en Buenos Aires son las diez de la mañana, en Nueva York aún son las ocho. Pero lo más sorprendente es que cuando en Nueva Delhi son las nueve y media de la noche, en Nueva York son las doce del mediodía. ¿Qué hora es en Madrid cuando en Nueva Delhi son las 21:00?

**A)** 15:30 **B)** 15:00 **C)** 6:00 **D)** 18:30 **E)** 17:30

**8** La gráfica muestra la distancia que va recorriendo Irene con su bici. Si sigue a la misma velocidad durante una hora y media, ¿cuántos kilómetros recorrerá?




**A)** 20 **B)** 24 **C)** 32 **D)** 36 **E)** 40

**9** He pensado un número, lo he dividido entre 3 y he obtenido el mismo resultado que si le hubiera restado 14. ¿Cuánto suman las cifras del número que he pensado?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

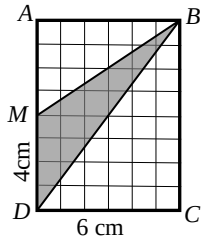
**10** Esteban va a la playa con Ariel. Esteban se baña cada 20 minutos y sus baños duran 5 minutos. Ariel se baña cada media hora y sus baños duran un cuarto de hora. Si ambos salen del agua a las 10:00, ¿a partir de qué momento volverán a coincidir 5 minutos en el agua?

**A)** 12:00 **B)** 11:45 **C)** 11:30 **D)** 11:00 **E)** 10:15

**11** Alfredo y Juanje saltan a la comba. Alfredo lo hace lentamente: uuuuno, dooos,…, pero Juanje va a toda velocidad: udotr… Tanto es así, que por cada dos saltos que da Alfredo, Juanje da siete. Los dos empiezan a saltar a la vez y cuando Alfredo ha terminado su entrenamiento después de 100 saltos, Juanje aún ha seguido y ha dado 50 saltos más. ¿Cuántos saltos ha dado Juanje en total?

**A)** 300 **B)** 400 **C)** 500 **D)** 350 **E)** 450

**12** En el rectángulo *ABCD*, *AD* mide 8 cm y *AB* mide 6 cm. *M* es el punto medio del lado *AD*. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área del triángulo sombreado *MBD*?



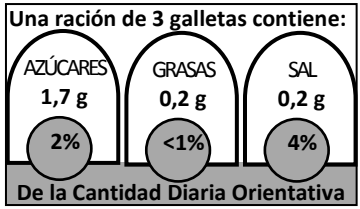

**A)** 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 12,5 **E)** 15

**13** Inés tiene una cartulina rectangular de 594 mm por 841 mm.
Quiere hacer cuadrados de 15 cm de lado haciendo cortes siempre paralelos a los lados. ¿Cuántos cuadrados podrá hacer como máximo?

**A)** 10 **B)** 15 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 24

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** En esta etiqueta aparecen los gramos de azúcares, grasas y sal que contiene una ración de 3 galletas y el porcentaje de la cantidad diaria orientativa que representan dichos gramos. Según eso, ¿cuántos gramos de sal se corresponden con la cantidad diaria orientativa?




**A)** 0,9 **B)** 1,8 **C)** 5 **D)** 6,3 **E)** 9

**15** ¡Mira cómo mola! Tengo un rectángulo de 24 cm de perímetro, pero si prolongo su altura 2 cm obtengo un cuadrado. ¿Cuál es el área de mi rectángulo?

**A)** 24 $cm^2$ **B)** 144 $cm^2$ **C)** 35 $cm^2$ **D)** 36 $cm^2$ **E)** 48 $cm^2$

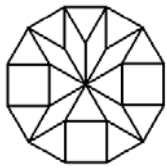
**16** ¡Pues mi rectángulo mola mucho más! Su área es 24 $cm^2$ y si prolongo su base 2 cm obtengo un cuadrado. ¿Cuál es el perímetro de mi rectángulo?

**A)** 20 cm **B)** 12 cm **C)** 48 cm **D)** 16 cm **E)** 9 cm

**17** En carnaval nos vamos a disfrazar de animales y el profesor nos ha dicho que tiene que haber ocho mamíferos, cinco aves, cuatro reptiles, cuatro peces y cuatro anfibios. Hemos metido 25 papelitos con los nombres de las especies en una bolsa para rifar quién irá de qué. Mariquilla quiere ir de sapo. Va a sacar su papelito en quinto lugar, cuando ya han salido dos mamíferos, un ave y un anfibio. Cruza los dedos y… ¿Qué probabilidad tiene de que le toque anfibio?

**A)** $\frac{4}{25}$ **B)** $\frac{3}{20}$ **C)** $\frac{3}{25}$ **D)** $\frac{1}{7}$ **E)** $\frac{1}{5}$

**18** ¿Cuántos segmentos hay dibujados en la figura?



**A)** 36 **B)** 39 **C)** 42

**D)** 45 **E)** 48

**19** Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N** + **I** + **D** + **O**?

$$\begin{array}{r} \mathbf{A\ M\ O} \\ \mathbf{+\quad A} \\ \hline \mathbf{A\ D\ A\ N} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathbf{A\ M\ O} \\ \mathbf{+\quad A} \\ \hline \mathbf{H\ A\ D\ A} \end{array}$$

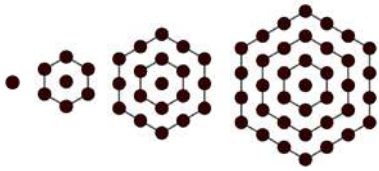
$$\mathbf{O\ N\ D\ A} \qquad\qquad \mathbf{M\ I\ M\ O}$$

**A)** 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

**20** Los espías antiguos utilizaban el método de César para enviarse mensajes secretos. El método consiste en cambiar cada letra por la que está tres posiciones después en el orden alfabético. Si quieren escribir HOLA, escriben KRÑD. ¿Cuál de estos mensajes tiene sentido si se descifra usando el método de César?

**A)** HUUO **B)** FRUZ **C)** WDTI **D)** ELHP **E)** XEGW

**21** El primer día del otoño Ardilleta encontró una nuez. El segundo encontró seis e hizo un hexágono alrededor de la primera nuez. Y quiso seguir cada día del otoño buscando las nueces necesarias para completar un nuevo hexágono, pero a los quince días ya estaba agotada. ¿Cuántas nueces tuvo que encontrar Ardilleta el último día?



**A)** 1200 **B)** 180 **C)** 108 **D)** 90 **E)** 84

**22** Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

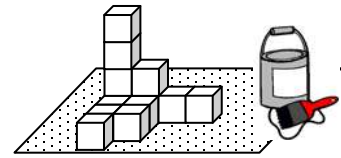
| | | | |
|---|---|---|---|
| 777 | 495 | 1000 | 888 |
| 301 | 238 | 658 | 735 |
| 357 | 26 | 764 | 336 |
| 154 | 343 | 922 | 989 |

**A)** ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?

**C)** ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?

**E)** ¿La cifra de las unidades es 8?

**23** Ferb ha hecho la construcción que ves con cubitos blancos y una vez terminada la ha pintado de rojo sin levantarla del suelo. Phineas, que venía distraído, ha tropezado con ella y los cubos han quedado desperdigados. ¿Cuántos de los cubitos tienen exactamente tres de sus caras pintadas de rojo?



**A)** Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

**24** La niña Centésima quería hacer esta enorme multiplicación:

6340502127 x 948300057

Pero antes de que empezara vino Comenúmeros y se comió todas las cifras impares, así que Centésima hizo una multiplicación mucho más pequeña con las cifras que quedaron. ¿Cuál es la suma de las cifras del resultado de la multiplicación que hizo Centésima?

**A)** 24 **B)** 26 **C)** 42 **D)** 18 **E)** 14

**25** Y para terminar pregunta Don Retorcido: ¿Cuál es la suma de las cifras del menor número de cuatro cifras que es múltiplo de 7?

**A)** 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2018**

**NIVEL II (1º y 2º de E.S.O.)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | **5** ***puntos*** |
| *Cada pregunta* ***en blanco o errónea*** | **0** ***puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes* ***en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta* ***errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

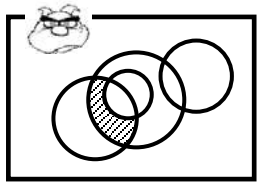
**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** ¿Preparados?, ¿listos?, ¡ya! Uno de fracciones para empezar. ¿Qué fracción hay que sumar a $1-\frac{2}{3}$ para obtener $4-\frac{5}{6}$?

**A)** $\frac{7}{2}$ **B)** $\frac{19}{6}$ **C)** $\frac{10}{3}$ **D)** $\frac{8}{3}$ **E)** $\frac{17}{6}$

**2** Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?

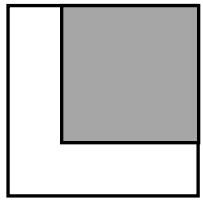


**A)** 5 **B)** 4 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

**3** Daniel juega con sus relojes de arena que tienen todos media hora de duración. Da la vuelta a uno y cada 8 minutos va dando la vuelta a un nuevo reloj. Justo cuando lleva 47 minutos con este juego, ¿cuántos relojes tendrán todavía arena sin caer en la parte superior?

**A)** 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

**4** Sobre mi cuadrado blanco ha caído encima uno gris cuyo lado mide 2 cm menos que el del blanco. Si la superficie visible blanca es de 36 $cm^2$, ¿cuántos centímetros mide el lado del cuadrado gris?



**A)** 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 7 **E)** 6

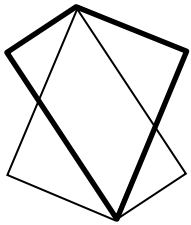
**5** Tres amigos juegan con números de dos cifras. Cada uno escribe una pareja de números pero solo nos dejan ver uno de ellos: Daniel muestra el 14, Gabriel el 20 y Luis el 36. Y lo que son las casualidades, ¡los tres productos de cada pareja dan el mismo resultado! ¿Cuánto suman los tres números que no nos han enseñado los amigos?

**A)** 164 **B)** 188 **C)** 200 **D)** 70 **E)** 126

**6** Don Retorcido ha cogido dos números $a$ y $b$, enteros positivos. Ha visto que $a + b$ termina en 1 y que $a^2 + b^2$ termina en 3. ¿En qué cifra termina $a^{2018} + b^{2018}$?

**A)** 6 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 7 **E)** 3

**7** Aprovechando dos rectángulos (uno de lados 5 cm y 15 cm y el otro de lados 9 cm y 13 cm) hemos diseñado una cometa como puedes ver en el boceto. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene la cometa?



**A)** 60 **B)** 42 **C)** 96 **D)** 100 **E)** 82

**8** Paula, Rubén, Miguelito y Luci se reunieron para celebrar la Primavera. Paula y Rubén compraron tres tartas iguales, Paula compró dos y Rubén una. Al final, como Miguelito y Luci no tenían dinero, pagaron a los dos compradores con 24 canicas. ¿Cuál es el reparto justo de las canicas entre Paula y Rubén?

**A)** 20 y 4 **B)** 16 y 8 **C)** 12 y 12 **D)** 18 y 6 **E)** 19 y 5

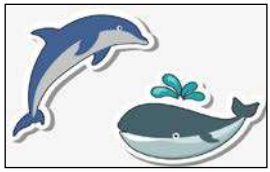
**9** ¡Examen de divisiones enteras! (¡¡Biennnnn!!) Leed con calma estas cuatro afirmaciones:

I. Si multiplico por 3 el divisor el cociente quedará dividido entre 3.
II. Si divido entre 4 el dividendo y el divisor, el cociente quedará multiplicado por 4.
III. Si sumo 5 al dividendo y al divisor, el cociente no varía.
IV. Si resto 6 al divisor, el cociente aumentará en 3 unidades.

¿Cuántas de estas afirmaciones son correctas siempre?

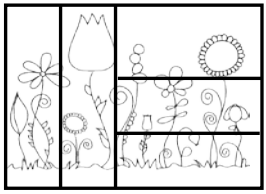
**A)** Ninguna **B)** Solo la I y III **C)** Solo la III **D)** Todas **E)** Solo la IV

**10** Al examen de natación se presentaron 15 delfines y 10 ballenas y la nota media fue 16. Sabiendo que la nota media de los delfines fue 18, ¿cuál fue la nota media de las ballenas?



**A)** 13 **B)** 17 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

**11** Ana y Pablo están diseñando la bandera de la Primavera y han decidido que tendrá cinco franjas (dos verticales y tres horizontales) y podrán usar los colores de la primavera: verde, rojo y azul. Si prohíben que dos franjas que se toquen tengan el mismo color, ¿cuántas banderas cumplirán sus condiciones?



**A)** 15 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 8

**12** La niña Centésima calcula muy deprisa y por eso muchas veces se equivoca. Si cada operación correcta es 1 punto y las incorrectas son 0 puntos, ¿qué nota sacará Centésima en este miniexamen?

$3 - (3-4)^3 = 2$ $\qquad$ $3 - (3-4)\cdot(3-4) - 4 = -2$

$3 - (3-4)^2 = 4$ $\qquad$ $3 - 4 - 3 = 2$

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**13**

Nuestro querido profesor
además de retorcido
es un poco presumido
y al preguntarle su edad
salió con este acertijo

*Tengo el triple de edad que mi hijo, y si sumo las dos cifras de mi edad con las de la suya, obtengo, ¡oh! sorpresa, el número de años que tiene mi hijo.*
*¡Me faltan datos!*, protestó alguien.
*¡Ah sí!*, apuntó don Retorcido, *la suma de las dos cifras de mi edad es igual a la suma de las de mi hijo*.
¿Cuántos años suman entre los dos?

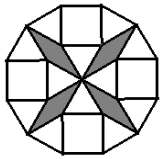
**A)** 88 **B)** 72 **C)** 96 **D)** 36 **E)** 61

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** Del triángulo *ABC* sabemos que el ángulo *B* mide 58º y el *C* mide 42º. Además, la bisectriz del ángulo *A* corta a su lado opuesto en el punto *P*.
En el triángulo *APC*, la bisectriz del ángulo *P* corta a su lado opuesto en el punto *Q*.
En el triángulo *APQ*, ¿cuánto mide el ángulo *Q*?

**A)** 80º **B)** 49º **C)** 91º **D)** 98º **E)** 90º

**15** Hemos dividido un dodecágono regular en cuadrados, triángulos equiláteros y rombos. Si cada uno de los rombos sombreados tiene 12 $cm^2$ de área. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, de cada cuadrado?



**A)** 15 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 24 **E)** 30

**16** *– Don Retorcido, ¿puede usted decirme qué hora es?*
*– Desde luego, fíjese: si a la mitad del tiempo de día transcurrido le suma usted la tercera parte de lo que queda de día, aún faltan siete horas para ser la hora actual.*
*– ¡¿Perdón?! Si lo sé, pregunto a Comenúmeros.* ¿Qué hora es?

**A)** 18 h **B)** 15 h **C)** 16 h **D)** 21 h **E)** 12 h

**17** Nuestros amigos juegan con piedras y calculan de maravilla.
Pitágoras le dice a Tales: *Un cuarto de mis piedras son un sexto de las tuyas.*
Tales le dice a Arquímedes: *Un tercio de mis piedras son dos quintos de las tuyas.*
Si entre los tres tienen 180 piedras, juega tú también y dinos cuántas piedras tiene Pitágoras.

**A)** 72 **B)** 52 **C)** 48 **D)** 45 **E)** 60

**18** El menor número divisible por 3, 5 y 7 cuyas cifras son 3, 5 y 7, es también divisible por…

**A)** 49 **B)** 25 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 13

**19** A la niña Centésima le encanta la letra inicial de su nombre y con ayuda de unos palitos va formando ces más y más grandes. De repente se hace esta pregunta: ¿Cuántos palitos necesitaré en total si solo quiero construir la C número 10 y la C número 100?

**A)** 438 **B)** 440 **C)** 330 **D)** 118 **E)** 341

**20** Eva, Alicia y Clara se han pasado toda la tarde jugando a las cartas. Tanto que casi están mareadas y empiezan a ver visiones. Por muchas vueltas que le hayan dado al as de espadas, ¿cuál de estas cartas es imposible conseguir?

**A)**

**B)**

**C)**

**D)**

**E)**

**21** Lo nunca visto, Don Retorcido y Comenúmeros frente a frente en la competición mundial de suma de fracciones monstruosas. Don Retorcido realiza siete sumas a la hora y Comenúmeros, más lento, hace cinco sumas a la hora. Si Comenúmeros tardó 14 horas más que Don Retorcido en completar la competición, ¿de cuántas sumas constaba el campeonato?

**A)** 217 **B)** 140 **C)** 420 **D)** 245 **E)** 175

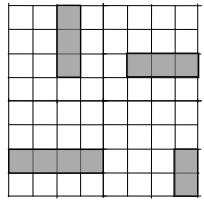
**22** Si el complementario de un ángulo más el suplementario de ese ángulo suman 208º, ¿cuánto mide el ángulo?

**A)** 47º **B)** 28º **C)** 62º **D)** 52º **E)** 31º

**23** En un agujero he metido los diez números que van del 10 al 19. Cojo cuatro y veo que *A* es un cuadrado perfecto, *B* es un múltiplo de 6, *C* es impar y *D* es múltiplo de 4. Si la suma de los cuatro es múltiplo de 5, ¿cuál es el número *C*?

**A)** 11 **B)** 13 **C)** 15 **D)** 17 **E)** 19

**24** Tienes que colocar un barquito de 2 × 1, horizontal o vertical en este tablero. ¿En cuántas posiciones puedes situarlo si está absolutamente prohibido que dos barquitos estén en contacto, ni siquiera en un único vértice?



**A)** 22 **B)** 17 **C)** 15 **D)** 19

**E)** 24

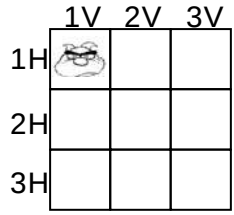
**25** Un crucinúmero con tres números en horizontal, tres números en vertical y una cifra en cada casilla.

1H: múltiplo de 11.
2H: un cuadrado perfecto.
3H: múltiplo de 11.

1V: el mismo número que 1H.
2V: la suma de sus cifras es 20.
3V: una potencia de 6.

¡Hasta el año que viene! Huy, casi nos olvidamos de la pregunta.
¿Qué cifra hay en la casilla de Comenúmeros?

**A)** 9 **B)** 8 **C)** 2 **D)** 7 **E)** 6



concurso de primavera MATEMÁTICAS

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2018**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | **5 *puntos*** |
| *Cada pregunta* ***en blanco o errónea*** | **0 *puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta* ***correcta*** *te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes* ***en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta* ***errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** ¿Cuál es el valor de $2{,}018 \cdot 2017 - 10{,}17 \cdot 201{,}8$?

**A)** 2016 **B)** 2017 **C)** 2018 **D)** 20,18 **E)** 201,7

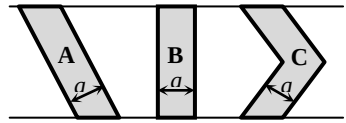
**2** En el triángulo *ABC* el ángulo $\hat{C}$ es el triple del ángulo $\hat{A}$ y el ángulo $\hat{B}$ es el cuádruple del ángulo $\hat{A}$. Entonces, el triángulo *ABC* es:

**A)** Equilátero **B)** Obtusángulo **C)** Rectángulo **D)** Acutángulo **E)** Isósceles

**3** ¿Cuál de los siguientes números es impar para todo entero *n*?

**A)** $2019n$ **B)** $n^2 + 2019$ **C)** $n^3$ **D)** $n + 2018$ **E)** $2n^3 + 2019$

**4** En la figura adjunta las tres cintas A, B y C tienen el mismo ancho *a*. Las tres se apoyan en dos rectas paralelas. ¿Qué cinta tiene la menor área?




**A)** La cinta A **B)** La cinta B **C)** La cinta C

**D)** Las tres tienen la misma área **E)** Depende del valor de *a*

**5** La suma de las áreas de los cuadrados cuyos lados son los lados de un triángulo rectángulo isósceles es 72 cm$^2$. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

**A)** 6 cm$^2$ **B)** 8 cm$^2$ **C)** 9 cm$^2$ **D)** 12 cm$^2$ **E)** 18 cm$^2$

**6** El perímetro de un triángulo equilátero es 2018 cm mayor que el de un cuadrado. Si cada lado del triángulo es *d* cm mayor que el lado del cuadrado, ¿cuántos enteros positivos no son posibles para valores de *d* ?

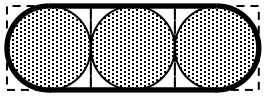
**A)** 0 **B)** 9 **C)** 221 **D)** 672 **E)** Infinitos

**7** En esta suma cada letra, *x, y, z*, representa una cifra distinta de cero. ¿Qué cifra representa la letra *x*?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

$$\begin{array}{cccc} & x & x \\ & y & y \\ + & z & z \\ \hline z & y & x \end{array}$$

**8** En la figura que ves hay tres cuadrados y tres círculos rodeados por una línea gruesa. Si el área de cada cuadrado es *a* y el área de cada círculo *b*, ¿cuál es el área del recinto interior a la línea gruesa?

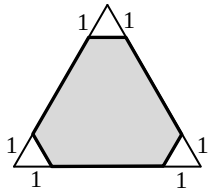


**A)** $3b + a$ **B)** $3a - b$ **C)** $a + 2b$ **D)** $2a + 2b$ **E)** $2a + b$

**9** Cuando un barril está lleno al 30 % tiene 30 litros menos que cuando le falta el 30 % para estar lleno. ¿Cuántos litros contiene el barril lleno?

**A)** 60 **B)** 75 **C)** 90 **D)** 100 **E)** 120

**10** En un triángulo equilátero de lado 5 hemos trazado paralelas a los lados construyendo el hexágono sombreado. ¿Qué porcentaje del área del triángulo ocupa el hexágono?

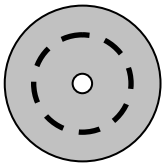



**A)** 72 % **B)** 75 % **C)** 80 %
**D)** 85 % **E)** 88 %

**11** La mediana de una lista de cinco enteros positivos es 1 más que la moda y 1 menos que la media. ¿Cuál es la mayor diferencia que puede haber entre dos números de la lista?

**A)** 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

**12** En la corona circular de la figura, determinada por dos circunferencias de radios 2 y 14, hemos dibujado otra circunferencia (a trazos) que divide a dicha corona en dos regiones de igual área. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia?



**A)** 7,5 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 9,5 **E)** 10

**13** En una caja hay 2 calcetines blancos, 3 azules y 4 rojos. Sé que de los 9 hay 3 con agujeros, pero no sé de qué color. Sin mirarlos, cojo unos cuantos. ¿Cuántos debo coger, como mínimo, para estar seguro de ponerme un par del mismo color y sin agujeros?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

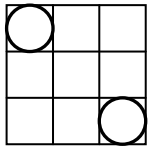
**14** Alberto hace una travesía de 210 km en bicicleta. Al final resulta que ha alcanzado una media de 5 km/h más de la que había previsto y ha llegado una hora antes de lo esperado. ¿Qué velocidad media ha alcanzado?

**A)** 35 km/h **B)** 21 km/h **C)** 42 km/h **D)** 30 km/h **E)** 36 km/h

**15** María tiene unos dados muy curiosos. En sus caras figuran los números: **–1**, **2**, **–3**, **4**, **–5**, **6**. Si lanza dos de ellos y suma los resultados obtenidos, ¿cuál de las siguientes sumas no podrá obtener?

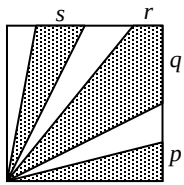
**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

**16** Dividimos un cuadrado de lado 3 en nueve cuadrados de lado 1. En dos de las esquinas inscribimos sendas circunferencias como muestra la figura. Si elegimos un punto de cada circunferencia y calculamos la distancia entre ambos, ¿cuál es la menor distancia que podemos obtener?



**A)** $2\sqrt{2}-1$ **B)** $\sqrt{2}+1$ **C)** $2\sqrt{2}$ **D)** 2 **E)** $3\sqrt{2}-2$

**17** En un cuadrado de 36 cm$^2$ de área sombreamos algunas regiones como se muestra en la figura. Si el área sombreada es de 27 cm$^2$, ¿cuál es, en cm, la suma $p + q + r + s$?




**A)** 4 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

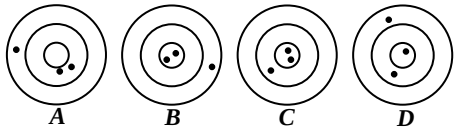
**18** Escribimos en la pizarra varios enteros positivos diferentes. Si el producto de los dos menores es 16 y el producto de los dos mayores es 225, ¿cuánto suman todos los números?

**A)** 38 **B)** 42 **C)** 44 **D)** 58 **E)** 63

**19** En una caja hay ocho tarjetas numeradas con: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128. Bea toma unas cuantas al azar y Carlos el resto. Cuando las tienen, Bea observa que la suma de las suyas supera en 31 a la suma de las de Carlos. ¿Cuántas tarjetas cogió Bea?

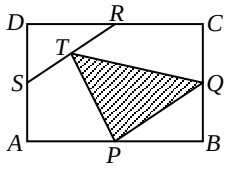
**A)** 6 **B)** 5 **C)** 4 **D)** 3 **E)** 2

**20** Juan Jesús lanza tres dardos a cada una de las cuatro dianas de las figuras. Obtiene 29 puntos en la diana *A*, 43 en la diana *B* y 47 en la *C*. ¿Cuántos puntos obtuvo en la diana *D*?




**A)** 31 **B)** 33 **C)** 36 **D)** 38 **E)** 39

**21** En el rectángulo *ABCD* los puntos *P, Q, R, S,* son los puntos medios de los lados. Si *T* es el punto medio de *RS*, ¿qué fracción del área del rectángulo ocupa el triángulo *PQT* ?



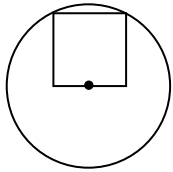

**A)** $\frac{2}{7}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{2}{9}$

**22** El área total de un ortoedro (prisma rectangular recto) es 22 $cm^2$ y la suma de las longitudes de todas sus aristas es 24 cm. ¿Cuál es, en cm, la máxima distancia entre dos de los vértices de dicho prisma?

**A)** $\sqrt{11}$ **B)** $\sqrt{12}$ **C)** $\sqrt{13}$ **D)** $\sqrt{14}$

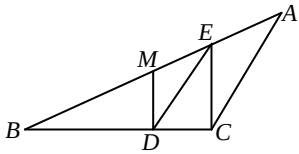
**E)** No se puede determinar

**23** En la figura adjunta puedes ver una circunferencia y un cuadrado del que dos de sus vértices están en la circunferencia y uno de sus lados pasa por el centro de dicha circunferencia. Si el radio de la circunferencia mide 1 cm, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del cuadrado?



**A)** $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{\pi}{3}$ **C)** $\frac{5}{4}$ **D)** 1 **E)** $\frac{\pi}{4}$

**24** En el triángulo obtusángulo *ABC* de la figura, *M* es el punto medio del lado *AB* y *MD* y *EC* son perpendiculares al lado *BC*. Si el área de dicho triángulo es 24, ¿cuál es el área del triángulo *EBD* ?




**A)** 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 18

**25** Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

**A)** 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505

**E)** Hace falta más información

concurso de primavera MATEMÁTICAS

**XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 21 de abril de 2018**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

**¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!**

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

## PUNTUACIÓN

**En los problemas 1 a 13:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | **5 *puntos*** |
| *Cada pregunta **en blanco o errónea*** | **0 *puntos*** |

**En los problemas 14 a 25:**

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

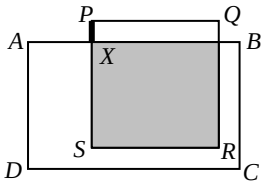
**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**1** En la figura se observa un rectángulo *ABCD* de lados 10 y 6 y un cuadrado *PQRS* de lado 6. Si el área del rectángulo sombreado es la mitad del área del rectángulo *ABCD*, ¿cuál es la longitud del segmento *PX* ?




**A)** 0,5 **B)** 1 **C)** 1,2 **D)** 1,5 **E)** 2

**2** Tenemos 18 tarjetas y en cada una de ellas escribimos el 4 o el 5. Si la suma de todos los números escritos es divisible entre 17, ¿en cuántas tarjetas está escrito el 4?

**A)** 13 **B)** 9 **C)** 7 **D)** 5 **E)** 4

**3** En cada uno de los cinco cuadrados de la figura escribo un número de forma que cada uno de los tres centrales es la media aritmética de los dos que tiene a su lado. ¿Qué número es *x*?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***x*** | **26** | | | **8** |

**A)** 28 **B)** 30 **C)** 31 **D)** 32 **E)** 34

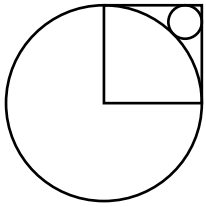
**4** ¿Para cuántos enteros $n$ con $1 \le n \le 100$ se verifica que el número $n^n$ es un cuadrado perfecto?

**A)** 55 **B)** 54 **C)** 50 **D)** 15 **E)** 51

**5** En una hoja de papel dibujamos cuatro rectas diferentes y contamos los puntos en los que se cortan dos o más rectas. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser el número que obtenemos?

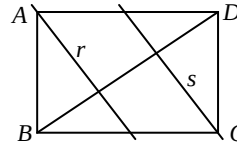
**A)** 6 **B)** 5 **C)** 3 **D)** 2 **E)** 1

**6** La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $\left(a - b\sqrt{2}\right)$ cm, el valor de $a + b$ es:



**A)** 30 **B)** 40 **C)** 50 **D)** 60 **E)** 70

**7** En el rectángulo *ABCD* de la figura, las rectas *r* y *s*, que pasan por los vértices *A* y *C*, son perpendiculares a la diagonal *BD* y la dividen en tres trozos iguales de 1 cm de longitud cada uno. El área de dicho rectángulo, en $cm^2$, y redondeada a las décimas es:




**A)** 4,1 **B)** 4,2 **C)** 4,3 **D)** 4,4 **E)** 4,5

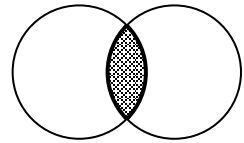
**8** ¿Cuántos enteros *n* verifican que $n^4 + 6n < 6n^3 + n^2$?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** Nada de lo anterior

**9** Los números enteros *a*, *b*, *c*, *d*, verifican la igualdad $a\log 2 + b\log 3 + c\log 5 + d\log 7 = 2018$. ¿Cuál es el valor de $a + b + c + d$? (log significa logaritmo en base 10)

**A)** 2016 **B)** 2017 **C)** 2018 **D)** 4036 **E)** 5034

**10** Dos circunferencias de radio 2 se solapan de forma que el arco de cada una interior a la otra es el 25 % de su longitud. ¿Cuál es el área de la zona solapada?



**A)** $\pi - 2$ **B)** $2\pi - 4$ **C)** $2\pi - 2$
**D)** $2\pi - 3$ **E)** $\pi$

**11** Un número de dos cifras verifica que el producto de sus cifras más la suma de ambas coincide con dicho número. ¿Cuál es la cifra de las unidades del número en cuestión?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**12** Si el número real $\alpha$ verifica que $\cos\alpha = tg\alpha$, ¿cuál es el valor de $\frac{1}{sen\alpha} + \cos^4\alpha$?

**A)** – 2 **B)** – 1 **C)** 0 **D)** 1 **E)** 2

**13** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\left|x - \left|2x + 1\right|\right| = 3$?

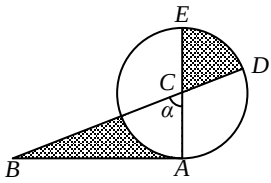
**A)** Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

A partir de aquí las respuestas en blanco valen un punto.

**14** Un polígono convexo tiene exactamente tres ángulos obtusos. ¿Cuál es el máximo número de lados de dicho polígono?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**15** La figura adjunta muestra una circunferencia de centro *C* y diámetro *AE*, un segmento *AB* perpendicular a dicho diámetro y un segmento *BD* que contiene al centro *C*.




Si $\alpha = A\hat{C}B$, en radianes, y las dos zonas sombreadas tienen la misma área, entonces:

**A)** $tg\alpha = \alpha$ **B)** $tg\alpha = 2\alpha$ **C)** $tg\alpha = 4\alpha$ **D)** $tg\,2\alpha = \alpha$ **E)** $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha$

**16** Si *a* y *b* son números reales con $a > 1$, $b \neq 0$ y se verifica que $a\,b = a^b$ y $\frac{a}{b} = a^{3b}$, entonces el valor de $b^{-a}$ es:

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 32 **E)** $8\sqrt{2}$

**17** Dos semirrectas que parten de un punto *O* forman un ángulo de 30º. Los puntos *A* y *B* están uno en cada una y *AB* = 1. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento *OB*?

**A)** 1 **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$

**18** Si $a = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+...}}}$ y $b = \sqrt{9-\sqrt{9-\sqrt{9-...}}}$, ¿cuál es el valor de *ab*?

**A)** $\frac{3}{2}\left(\sqrt{26}-2\right)$ **B)** $\frac{3}{2}\left(\sqrt{37}-1\right)$ **C)** $4\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ **D)** $3\sqrt{6}+1$

**E)** Nada de lo anterior

**19** Dos de las alturas de un triángulo escaleno miden 4 y 12 cm. Si la longitud de la tercera altura, en cm, viene dada también por un número entero, ¿cuál es el máximo valor que puede tener este número?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

**20** Si $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ consideramos los números $A = (\cos\alpha)^{\cos\alpha}$, $B = (sen\alpha)^{\cos\alpha}$ y $C = (\cos\alpha)^{sen\alpha}$, ¿qué afirmación de las siguientes es verdadera?

**A)** $A < B < C$ **B)** $A < C < B$ **C)** $B < A < C$
**D)** $B < C < A$ **E)** $C < A < B$

**21** Dos de las medianas de un triángulo son perpendiculares y miden 8 y 12 cm. Entonces el área del triángulo, en $cm^2$, es:

**A)** 24 **B)** 32 **C)** 48 **D)** 64 **E)** 96

**22** Si $a$, $b$ y $c$ son enteros positivos que verifican $a < b < c$ y $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, ¿cuál es el valor de $a + b + c$?

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

**23** Supongamos que contestas al azar las tres últimas cuestiones de esta prueba. ¿Cuál es el número de aciertos más probable?

**A)** Cero **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres
**E)** Todos son igual de probables

**24** ¿Cuántos enteros positivos menores o iguales que 2018 verifican que alguna de sus cifras es cero?

**A)** 470 **B)** 472 **C)** 476 **D)** 479 **E)** 482

**25** Si $\text{sen}\, x + \cos x = a$, entonces $\text{sen}^4 x + \cos^4 x$ es:

**A)** $1 - \frac{(1-a^2)^2}{2}$ **B)** $a^4$ **C)** $\frac{1-(1-a^2)^2}{2}$ **D)** $a^4 + 1$ **E)** $1 + \frac{(1-a^2)^2}{2}$

# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **E** | 1 | **B** | 1 | **C** | 1 | **D** |
| 2 | **E** | 2 | **A** | 2 | **D** | 2 | **C** |
| 3 | **D** | 3 | **A** | 3 | **E** | 3 | **C** |
| 4 | **D** | 4 | **E** | 4 | **D** | 4 | **A** |
| 5 | **C** | 5 | **D** | 5 | **A** | 5 | **D** |
| 6 | **D** | 6 | **C** | 6 | **B** | 6 | **C** |
| 7 | **B** | 7 | **B** | 7 | **C** | 7 | **E** |
| 8 | **A** | 8 | **E** | 8 | **D** | 8 | **D** |
| 9 | **B** | 9 | **B** | 9 | **C** | 9 | **E** |
| 10 | **A** | 10 | **B** | 10 | **A** | 10 | **E** |
| 11 | **D** | 11 | **A** | 11 | **C** | 11 | **A** |
| 12 | **B** | 12 | **C** | 12 | **D** | 12 | **E** |
| 13 | **D** | 13 | **C** | 13 | **E** | 13 | **D** |
| 14 | **C** | 14 | **B** | 14 | **D** | 14 | **A** |
| 15 | **D** | 15 | **A** | 15 | **B** | 15 | **B** |
| 16 | **A** | 16 | **D** | 16 | **B** | 16 | **C** |
| 17 | **D** | 17 | **E** | 17 | **D** | 17 | **A** |
| 18 | **E** | 18 | **B** | 18 | **C** | 18 | **D** |
| 19 | **B** | 19 | **A** | 19 | **A** | 19 | **C** |
| 20 | **C** | 20 | **B** | 20 | **D** | 20 | **A** |
| 21 | **C** | 21 | **C** | 21 | **B** | 21 | **C** |
| 22 | **A** | 22 | **D** | 22 | **A** | 22 | **C** |
| 23 | **B** | 23 | **B** | 23 | **D** | 23 | **A** |
| 24 | **C** | 24 | **E** | 24 | **D** | 24 | **D** |
| 25 | **E** | 25 | **C** | 25 | **B** | 25 | **E** |

# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **C** | 1 | **E** | 1 | **C** | 1 | **B** |
| 2 | **B** | 2 | **D** | 2 | **C** | 2 | **D** |
| 3 | **C** | 3 | **E** | 3 | **E** | 3 | **D** |
| 4 | **D** | 4 | **A** | 4 | **B** | 4 | **A** |
| 5 | **A** | 5 | **B** | 5 | **C** | 5 | **D** |
| 6 | **B** | 6 | **E** | 6 | **D** | 6 | **C** |
| 7 | **E** | 7 | **C** | 7 | **D** | 7 | **B** |
| 8 | **D** | 8 | **A** | 8 | **E** | 8 | **B** |
| 9 | **A** | 9 | **A** | 9 | **B** | 9 | **D** |
| 10 | **A** | 10 | **A** | 10 | **E** | 10 | **B** |
| 11 | **B** | 11 | **C** | 11 | **A** | 11 | **E** |
| 12 | **C** | 12 | **B** | 12 | **E** | 12 | **E** |
| 13 | **B** | 13 | **B** | 13 | **C** | 13 | **C** |
| 14 | **C** | 14 | **C** | 14 | **A** | 14 | **C** |
| 15 | **C** | 15 | **D** | 15 | **D** | 15 | **B** |
| 16 | **A** | 16 | **A** | 16 | **A** | 16 | **C** |
| 17 | **D** | 17 | **C** | 17 | **E** | 17 | **D** |
| 18 | **C** | 18 | **A** | 18 | **C** | 18 | **B** |
| 19 | **E** | 19 | **A** | 19 | **B** | 19 | **B** |
| 20 | **D** | 20 | **C** | 20 | **C** | 20 | **E** |
| 21 | **E** | 21 | **D** | 21 | **B** | 21 | **D** |
| 22 | **E** | 22 | **E** | 22 | **D** | 22 | **C** |
| 23 | **D** | 23 | **E** | 23 | **A** | 23 | **A** |
| 24 | **A** | 24 | **B** | 24 | **B** | 24 | **A** |
| 25 | **A** | 25 | **E** | 25 | **A** | 25 | **A** |

# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* I

**1. (E)** Calculamos la diferencia de temperaturas:
$23 - 15 = 8$
La casa estaba a 8 grados.

**2. (E)** Realizamos las siguientes operaciones:
$20\ € - 5{,}12\ € = 14{,}88\ €$ pagó Luca por 12 cuadernos
$14{,}88 : 12 = 1{,}24\ €$ vale cada cuaderno
$1{,}24 \times 6 = 7{,}44\ €$ valen los seis cuadernos de Lino
$10\ € - 7{,}44\ € = 2{,}56\ €$
A Lino le devolvieron 2,56 €

**3. (D)** Utilizamos una tabla de doble entrada para calcular el número de formas distintas en las que se puede rellenar la papeleta. Nombremos a las chicas con las letras: A, B, C, D y E, y a los chicos con las letras X, Y y Z.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| X | A, X | B, X | C, X | D, X | E, X |
| Y | A, Y | B, Y | C, Y | D, Y | E, Y |
| Z | A, Z | B, Z | C, Z | D, Z | E, Z |

Podemos rellenar de estas formas la papeleta:
(A, X), (B, X), (C, X), (D, X), (E, X), (A, Y), (B, Y), (C, Y), (D, Y), (E, Y), (A, Z), (B, Z), (C, Z), (D, Z), (E, Z).
En total 15 formas distintas.

**4. (D)** La longitud del lado de una servilleta cuadrada es 22 cm. Expresamos en centímetros la longitud del rollo y operamos:
$82{,}50\ m \times 100 = 8250\ cm$
$8250\ cm : 22\ cm = 375$
El rollo tiene 375 servilletas.

**5. (C)** Expresamos los pesos en la misma unidad y operamos:
$1{,}7\ kg = 1700\ g$
$1700\ g - 250\ g = 1450\ g$ pesan las monedas
$1450\ g : 3{,}06\ g = 473{,}8562$ monedas de 2 céntimos
$473{,}8562 \times 2 = 947{,}7124$ céntimos
$947{,}7124$ céntimos $\cong 10$ euros
En el bote hay aproximadamente 10 €.

**6. (D)** Calculamos el múltiplo común más pequeño de 4 y de 18.
$\text{mcm}(2^2, 2\times3^2) = 2^2 \times 3^2 = 36$. Al cabo de 36 horas vuelven a coincidir.
36 horas = 1 día y medio
Come y hace caca cada 36 horas, lo que es igual a un día y medio
10 h + 36 h = 46 h = 24 h + 22 h
Lunes 10 h + 1 día y 12 horas = martes 22 h
Los dos eventos vuelven a coincidir el martes a las 22:00 horas.

**7. (B)** Un número es múltiplo de tres cuando la suma de sus cifras es múltiplo de tres.
Sumamos las cifras conocidas del número que le ha dado Adriana:
2 + 3 + 4 + 1 + 7 + 7 + 5 = 29
Buscamos múltiplos de tres mayores que 29:
30 = 29 + 1; 33= 29 + 4; 36 = 29 + 7.
Las cifras que se pueden poner en el cuadrado son: 1, 4 y 7
Su suma es: 1 + 4 + 7 = 12

**8. (A)** En total hay 6 bolígrafos; de los cuales $\frac{1}{2}$ son bolígrafos que no pintan y $\frac{2}{6}$ son bolígrafos rojos que pintan. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

La probabilidad de coger un boli que pinte rojo es $\frac{1}{6}$.

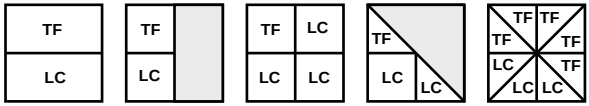
**9. (B)** Siguiendo el desarrollo de la espiral, observamos que la distancia entre dos estacas impares consecutivas es igual al número par entre esos dos impares expresado en metros.
Por tanto, hasta la estaca 21 habrá 2 + 4 +…+ 18 + 20 = 110 m
En consecuencia, hasta la estaca 20 tendremos 110 – 10 = 100 m
Una forma sencilla de realizar la suma anterior es:
(2 + 20) + (4 + 18) + (6 + 16) + (8 + 14) + (10 + 12) = 22 × 5 = 110 m

**10.(A)** Para facilitar la resolución del problema, nombramos Trinafantus con TF y Loca-Cola con LC.
Seguimos estos pasos:

- En el vaso de Juan hay1/2 (50%) de TF y 1/2 (50%) de LC.
- Después de que Olivia bebiese la mitad del contenido quedan en el vaso un cuarto (1/4) de TF y un cuarto (1/4) de LC.
- A continuación, rellena el vaso con 1/2 de LC. Ahora en el vaso hay un cuarto (1/4) de TF y tres cuartos (3/4) de LC.
- Después de que Rafa bebiese la mitad del contenido de vaso, queda un octavo (1/8) de TF y tres octavos (3/8) de LC.
- Finalmente rellena el vaso con 1/2 de TF. El vaso contiene 5/8 de TF y 3/8 de LC

Quedan en el vaso3/8 tres octavos de Loca-Cola.

Puede resultar de ayuda tratar geométricamente el problema mediante un esquema como el de la figura.




**11.(D)** Como la cuadrícula es de 1 cm × 1 cm, la superficie de cada casilla es de 1 $cm^2$.
Para calcular el área del patito podríamos dividir la superficie del patito en diferentes figuras planas; pero la mejor forma es contando uno a uno el número de casillas que ocupa el patito (10 medias casillas y 20 casillas completas).
El área del patito es de 25 $cm^2$.

**12.(B)** Resolvemos cada una de las operaciones y obtenemos estos resultados:
A: $10 + 3 \times (5 - 2) = 10 + 3 \times 3 = 10 + 9 = 19$
B: $4 + 4 \times 4 = 4 + 16 =$ **20**
C: $23 - 14 + 2 \times 3 = 23 - 14 + 6 = 15$
D: $6 + 3 \times 5 - 2 = 6 + 15 - 2 = 19$
E: $215 - 199 = 16$

**13.(D)** Realizamos las mismas operaciones que hizo Goraspita con cada uno de los tríos de números:
$5 \times 5 - (4 \times 4 + 3 \times 3) = 25 - 25 = 0$
$13 \times 13 - (10 \times 10 + 12 \times 12) = -75$
$13 \times 13 - (12 \times 12 + 5 \times 5) = 0$
$15 \times 15 - (12 \times 12 + 9 \times 9) = 0$
Se obtiene cero con tres tríos.

**14.(C)** Según el gráfico, la velocidad de la perrita es tres veces mayor que la de Ana
$12 \times 3 = 36$
Phoebe recorre 36 kilómetros.

**15.(D)** Puntos de Alicia: $240 + 80 = 320$
Puntos de María: $300 - 40 = 260$; $260 - 60 = 200$
María se quedó con 200 puntos.

**16.(A)** En primer lugar, realizamos todas las sumas posibles con los cuatro números de la tabla: $2 + 3 = 6$; $2 + 7 = 9$; $3 + 7 = 10$; $2 + 9 = 11$; $3 + 9 = 12$; $7 + 9 = 16$; $2 + 3 + 7 = 12$; $2 + 3 + 9 = 14$; $2 + 7 + 9 = 18$; $3 + 7 + 9 = 19$; $2 + 3 + 7 + 9 = 21$; A continuación, tachamos las sumas obtenidas y los números de las tarjetas: ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, ~~9~~, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, 13, ~~14~~, 15, ~~16~~, 17, ~~18~~, ~~19~~, 20, ~~21~~
Quedan estos números sin tachar: 4, 6, 8, 13, 15, 17, 20.
Centésima no podrá obtener siete números.

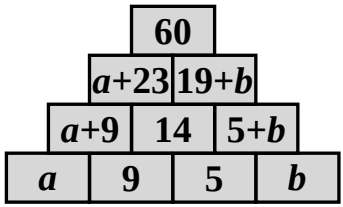
**17.(D)** Las cifras que son números primos son:, 2, 3, 5 y 7. En cada decena hay 4 números que tienen esas cifras. Además en los números en los que la cifra de las decenas es cualquiera de estas cuatro cifras, habrá otras 10 cifras que son números primos.
En total Comenúmeros se habrá comido 4 + 4 + 14 + 14 + 4 + 14 + 4 + 14 + 4 + 4, es decir, 90 cifras.
Una tabla con los números del 100 al 199 facilita la resolución de este problema.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 4 cifras |
| 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 4 cifras |
| 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 14 cifras |
| 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 14 cifras |
| 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 4 cifras |
| 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 14 cifras |
| 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 4 cifras |
| 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 14 cifras |
| 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 4 cifras |
| 190 | 191 | 192 | 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 4 cifras |

TOTAL: 90 cifras

**18.(E)** Las manzanas que dio a Martita (3), a Richi (4) y las que quedaron para Sofía (6) hacen la mitad de las manzanas que recogió en el jardín.
3 + 4 + 6 = 13 manzanas. 13 × 2 = 26. Sofía recogió 26 manzanas.

**19.(B)** Teniendo en cuenta que el número de cada ladrillo es la suma de los dos números que están en los ladrillos de debajo, podemos poner los números de cada ladrillo en función de $a$ y $b$, como se muestra en la figura. Se sigue de ahí que $60 = (a + 23) + (19 + b)$ y, por lo tanto, $a + b = 60 - 23 - 19 = 18$.




**20.(C)** El resultado de los cinco números es el siguiente:
25: orden 3; 29: orden 2; 33: orden 5; 37: orden 2; 41: orden 3
El número impar con mayor orden es el 33.

**21.(C)** Sumamos las distancias:
14 + 34 + 12 + 13 + 3 + 3 + 5 + 32 + 1 + 2 + 6 = 125 m
125 : 20 = 6,25
Pataplum tiene que dar 7 saltos completos.

**22.(A)** Secuencias:
4ª**:** 1 + 2 + 3 = 6; 5ª: 2 + 3 + 6 = 11; 6ª: 3 + 6 + 11 = 20; 7ª: 6 + 11 + 20 = 37;
8ª: 11 + 20 + 37 = 68; 9ª: 20 + 37 + 68 = 125
El 125 es el número que ocupa la novena posición.

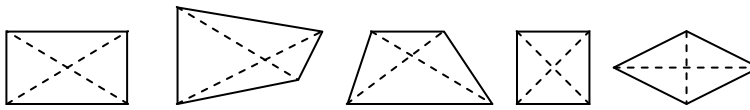
**23.(B)** Siguiendo las indicaciones, se tachan los siguientes números

| | | | |
|---|---|---|---|
| 99 | ~~27~~ | ~~60~~ | ~~120~~ |
| ~~21~~ | ~~332~~ | 303 | ~~214~~ |
| ~~18~~ | 435 | 15 | ~~42~~ |
| ~~17~~ | ~~224~~ | ~~25~~ | ~~130~~ |

Quedan sin tachar los números: 99, 303, 435, 15
99 + 303 + 435 + 15 = 852
La suma de los números que ha pensado Carmen es 852.

**24.(C)** Dado que el perímetro de un rectángulo es igual a:
2 × (longitud de la *base* + longitud de la *altura*)
El perímetro del rectángulo de Lucía es:
2 × (2 × *altura* + *altura*) = 6 × *altura* = 54 cm y, por tanto, la altura del de Lucia mide 9 cm.
Por otra parte, el perímetro del rectángulo de Julián es:
2 × (*base* + 3 × *base*) = 8 × *base*.
Como la base del de Julián es igual a la altura del de Lucía, tendremos que el perímetro del de Julián es: 8 × 9 = 72 cm.

**25.(E)** El único cuadrilátero que sus diagonales son perpendiculares y de distinta longitud es el Rombo.



# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

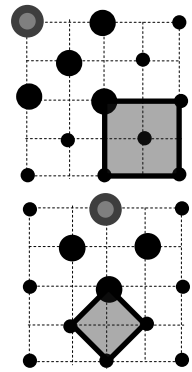
*Soluciones 1ª Fase Nivel* II

**1. (B)** Para obtener la solución solo hay que ir recorriendo los caminos de forma sistemática. Hay ocho caminos.

**2. (A)** Vamos a sumar dos números de 3 cifras, que como mucho pueden sumar $999 \cdot 2 = 1998$ con tres números de una cifra, que como mucho pueden sumar $5 + 9 \cdot 2 = 23$ y queremos que el resultado sea 2018.
Observa que si las cifras de las centenas o las decenas de los números pensados por Alce y Buey no fueran 9, no podríamos alcanzar esa cantidad pues 989 + 999 + 23 = 2011. Así que el número que pensó alce es 99*a*, el que pensó Buey es 99*b*, el que pensó Cocodrilo es *c*, Delfín es *d* y el que pensó Elefante es 5.
La suma es $990 \cdot 2 + (5 + a + b + c + d) = 1980 + (5 + a + b + c + d) = 2018$.
Así que la suma de las unidades de esos cinco números es $5 + a + b + c + d = 38$.
No podemos saber qué número escribió cada uno, pero sabemos que la suma de las cifras de los números escritos es $9 + 9 + 9 + 9 + 5 + a + b + c + d = 36 + 38 = 74$.

3. (A) Panda en 240 minutos = 4 horas limpia 10 piñas, así que en dos horas limpia 5 piñas.
Veamos cuántas limpian juntos en 6 horas (que es múltiplo de 2 y de 3). En 6 horas Panda limpia $5 \cdot 3 = 15$ piñas y Perezoso 2, así que juntos limpian 17 piñas.
Como $51 = 3 \cdot 17$, en tres periodos de 6 horas habrán terminado.
Es decir, tardan $6 \cdot 3 = 18$ horas.

**4. (E)** Vamos poco a poco para no olvidarnos de ningún cuadrado:
En el primer cuadrado hemos marcado en grande los puntos que podemos usar como vértice superior izquierdo de un cuadrado si usamos la cuadrícula para trazar los lados, como el del ejemplo. Todos ellos tienen área 4 $cm^2$ y hay 5.
Con el punto gris se puede formar además otro cuadrado grande de área 16 $cm^2$.
En el cuadrado de abajo los puntos grandes son el vértice superior de los cuadrados que se forman trazando diagonales, como el del ejemplo.
Todos ellos tienen área 2 $cm^2$ y hay 4. Además, con el gris se puede formar un cuadrado más grande de área 8 $cm^2$.
Así pues, el área total es $5 \cdot 4 + 16 + 4 \cdot 2 + 8 = 52$ $cm^2$.

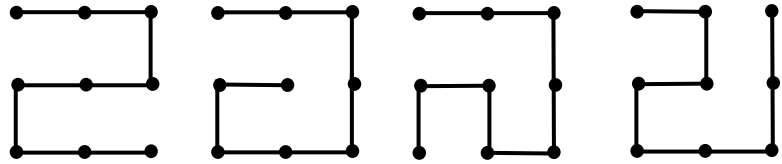


**5. (D)** Recuerda los criterios de divisibilidad: un número es múltiplo de 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9 y es múltiplo de 6 si lo es de 2 y de 3, es decir: la cifra de las unidades es par y la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
Para hacer el múltiplo de 9 más grande posible, escribamos 222 222 como la suma de sus cifras es 12, tendremos que cambiar doses por unos hasta que la suma sea 9. Empezamos por el de las unidades, decenas, … porque así será el mayor. En total hay que cambiar 3 doses: 222 111.
Para hacer el menor múltiplo de 6 procedemos igual: partiendo de 111 112, que es par y cuya suma de cifras es 7, cambiamos unos por doses de derecha a izquierda hasta obtener suma 9: 111 222.
La diferencia es 222 111 – 111 222 = 110 889.

**6. (C)** Para resolver este problema hay que ponerse en lo peor. Si cogen 6, podrían ser tres de un color y tres de otro, así que hay que coger más. Si cogen 7, podrían ser tres de un color, tres de otro y el séptimo del tercer color, así que tampoco es suficiente. Veamos qué pasa con 8.
Podrían ser todos del mismo color y tendrían 4 pares.
Podrían ser 7 de un color y el octavo de otro, tendrían 3 pares.
Podrían ser 6 y 2 o 6, 1 y 1 y siempre habría al menos 3 pares.
Podrían ser 5 y 3 o 5, 2 y 1. También tendrían tres pares.
Podrían ser 4 y 4 o 4, 3 y 1 o 4, 2 y 2. En cualquier caso las trillizas estarían contentas.
Por último, podrían ser 3, 3 y 2 y también tendrían sus tres pares.

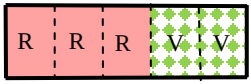
**7. (B)** Observa que $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ y $68 = 2 \cdot 2 \cdot 17$, así que 3 ardillas pesan como 2 mapaches. Si ya hay 42 ardillas, podríamos meter otras 60 ardillas más, que equivalen a 40 mapaches.

**8. (E)** Vamos a hacer todas las que comienzan conectando con el punto de la derecha:

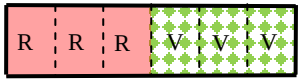


Podremos hacer otras 4 comenzando con el punto de abajo, sí que hay 8 claves que cumplen las condiciones de Noor.

**9. (B)** Representamos los círculos de Andrea en un rectángulo dividido en 5 partes iguales:




Como por un lado sabemos que Paula tiene la misma cantidad de círculos rojos que Andrea y por otro que los rojos son la mitad de los verdes, los círculos de Paula se pueden representar así:



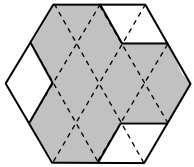

Si $A$ es el numero de círculos verdes de Andrea y $P$ es el número de círculos verdes de Paula, está claro que $3A = 2P$.

**10.(B)** Una posibilidad es probar con las 5 opciones y ver qué pasa. Empezaríamos con 131:
$131 \rightarrow (132:2) = 66$ Par. Así que es de orden 1…
$129 \rightarrow (130:2) = 65 \rightarrow (66:2) = 33 \rightarrow (34:2) = 17 \rightarrow (18:2) = 9 \rightarrow (10:2) = 5 \rightarrow$
$\rightarrow (6:2) = 3 \rightarrow (4:2) = 2$. Hemos realizado siete divisiones así que es de orden 7.
Como nos piden el menor, tendremos que hacer lo mismo con las otras tres opciones y comprobaremos que 121 es de orden 3, 97 es de orden 5 y 85 es de orden 2, por lo que 129 es el menor número de orden 7 de las cinco opciones que nos ofrecen.
Más bonito es demostrar que 129 es el menor impar de orden 7 de todos los enteros positivos posibles. Veamos cómo se hace:
Si queremos que sea lo más pequeño posible, en la séptima división nos tiene que dar el menor par posible, es decir, 2. Haciendo el proceso inverso siete veces a partir de 2 tenemos:
$2 \rightarrow (2 \cdot 2) - 1 = 3 \rightarrow (3 \cdot 2) - 1 = 5 \rightarrow (5 \cdot 2) - 1 = 9 \rightarrow (9 \cdot 2) - 1 = 17 \rightarrow$
$\rightarrow (17 \cdot 2) - 1 = 33 \rightarrow (33 \cdot 2) - 1 = 65 \rightarrow (65 : 2) - 1 = 129$.

**11.(A)** Las multiplicaciones son fáciles, solo hay que contar números después de las comas para colocar la coma bien.
$(0{,}2 \cdot 0{,}03) \rightarrow 2 \cdot 3$ es 6. A partir del 6 contamos tres posiciones hasta la coma y da 0,006.
$(0{,}004 \cdot 0{,}0005) \rightarrow 4 \cdot 5$ es un 20. A partir del cero contamos 7 posiciones hasta la coma: 0,0000020 = 0,0000002.
Dividir entre 0,0000002 es lo mismo que dividir entre 2/1 000 000 que es como multiplicar por 1 000 000 y dividir entre 2.
$0{,}006 \cdot 1\,000\,000 = 6000$ y 6000: 2 = 3000.

**12.(C)** Si un número acaba en 0, su cubo acaba en 0. Si acaba en 1, su cubo acaba en 1 pues $1^3 = 1$. Si el número acaba en 2, el cubo acaba en 8. Si acaba en 3, el cubo acaba 7 ($3^3 = 27$), si acaba en 4, el cubo también acaba en 4. El cubo acaba en 5 si el número acaba en 5 y si acaba en 6, su cubo también acaba en 6. El cubo de un número que acaba en 8 acaba 2 y el de un número que acaba en 9 acaba en 9. Así que nos sirven los números que acaban en 0, 1, 4, 5, 6 y 9.

**13.(C)** Trazando algunas líneas desde los puntos medios ves que se forman 12 rombos (debes unir los triángulos de abajo y de arriba). El área de cada rombo es 36:12 = 3 cm$^2$ y como en el dibujo hay 9 coloreados, el área de la figura es $9 \cdot 3 = 27$ cm$^2$.



**14.(B)** Empezamos operando con las fracciones de lo que recibió cada uno inicialmente:

Don Retorcido $\rightarrow$ 2/3 del total
Comenúmeros $\rightarrow$ 1/5 del total

Mozart $\rightarrow 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

Tras el primer cambio cada uno tiene:

Don Retorcido$\rightarrow \frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ Comenúmeros $\rightarrow \frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{11}{30}$ Mozart $\rightarrow \frac{2}{15}$

Tras el último cambio:

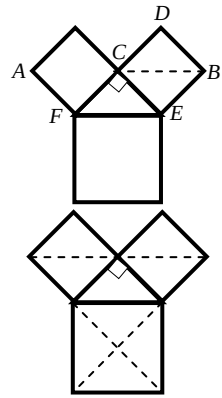
Don Retorcido $\rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{10}$ Comenúmeros $\rightarrow \frac{11}{30}$ Mozart $\rightarrow \frac{2}{15}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{30}$

Por lo que si 7/30 del total son 140 gramos, 1/30 son 20 gramos y Comenúmeros recibirá $11 \cdot 20 = 220$ gramos.

**15.(A)** Si multiplicamos un número por 1001 hacemos lo mismo que si lo multiplicamos por 1000 y luego le sumamos el número inicial (para conseguir 1001). Nuestra suma queda algo de la forma 555…5000 + 555…5555, teniendo cada número 55 cincos.
Si sumamos las tres últimas cifras obtenemos 3 cincos, la cuarta cifra nos da un cero y nos llevamos una.
Así completamos todas las cifras hasta las tres primeras en las que obtenemos 556 (por la que nos llevamos).
Tenemos entonces: dos cincos al principio y tres al final, un seis y 51 unos. Sumándolos $51 + 5 \cdot 5 + 6 = 82$

**16.(D)** Trabajando con potencias: $16^{21} = \left(2^4\right)^{21} = 2^{84} = 2^{3\cdot 28} = \left(2^3\right)^{28} = 8^{28}$

**17.(E)** Como el triángulo rectángulo es isósceles los dos cuadrados son iguales y sus diagonales miden 6 cm. Utilizando Pitágoras (en el triángulo *BCD*) vemos que el cuadrado del lado del cuadrado mide 18 cm, por lo que el área de cada cuadrado pequeño mide 18 $cm^2$ y la del triángulo 9 $cm^2$. Utilizando Pitágoras (en el triángulo *CEF*) de nuevo calculamos el cuadrado de la hipotenusa del triángulo y obtenemos que mide 36 $cm^2$, que debe coincidir con el área del cuadrado grande.
En total $18\cdot 2 + 9 + 36 = 81$ $cm^2$.
Y ahora otra manera de resolverlo sin palabras.
Observa el dibujo y… termina el razonamiento.




**18.(B)** Agrupamos los números de cuatro en cuatro y vemos que siempre obtenemos el mismo resultado, – 4. Al juntar todos los números del 10 al 49 (el 50 queda fuera de los grupos) de cuatro en cuatro obtenemos 10 grupos. Operando los grupos con el 50 obtenemos el resultado: $(-4)\cdot 10 + 50 = -40 + 50 = 10$.

**19.(A)** Cada vez que alguien acierta mejora la diferencia contra su concursante en una vez y media los puntos apostados, y cuando falla empeora la situación en esa misma cantidad. Alicia acierta una apuesta de 80, por lo que mejora su diferencia en 120 puntos y María falla una apuesta de 60 por lo que empeora su diferencia en 90 puntos.
Si empieza Alicia perdiendo por 60 y luego mejora su situación en 120 + 90 = 210 puntos, al final acaba ganando por 150 puntos.

**20.(B)** Ponemos los diez primeros movimientos por orden:
ABCDE → CABDE → CAEBD → ECABD → ECDAB → DECAB → DEBCA → → BDECA → BDAEC → ABDEC → ABCDE.
Comprobamos que se repite el patrón cada diez movimientos por lo que tenemos que fijarnos como queda tras el octavo movimiento ya que $2018 = 201\cdot 10 + 8$.
Es, decir *BDAEC*, la primera letra es la *B*.

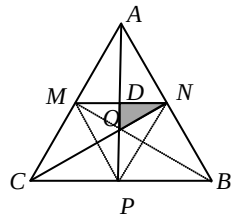
**21.(C)** La letra P equivale numéricamente a $\frac{27}{100}\cdot 39 = \frac{39}{100}\cdot 27$. Por lo que es cierta.

La letra Q equivale numéricamente a $\frac{20}{100}\cdot\frac{30}{100} = \frac{60}{100}$. Por lo que es falsa ya que multiplicando se obtiene 6/100.

La letra R equivale numéricamente a $1-\frac{20}{100}=\frac{80}{100}$. Por lo que es cierta.

**22.(D)** Tenemos que: $3a + 2b = 5a + b$.
Si restamos $b$ en cada lado de la ecuación obtenemos $3a + b = 5a$.
Restando ahora $3a$ a cada lado de la ecuación obtenemos $b = 2a$,
Por lo que $b/a = 2$.

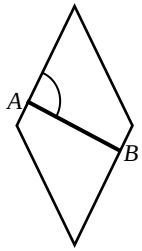
**23.(B)** Trazamos tres líneas adicionales en el dibujo, *MP*, *NP* y *MB*, que pasa por *O*. Vemos que el triángulo *MPN* es 1/4 del triángulo grande, *ABC*, y que el triángulo sombreado *OND* es 1/6 del triángulo *MPN* por lo que el área es $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$ del grande.

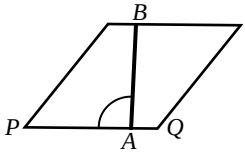



También se puede resolver utilizando semejanza de triángulos:
Los triángulos *DNO* y *PCO* son semejantes, siendo *DN* la mitad de *PC* y *PC* la mitad de *BC*. De esto deducimos que *DN* es una cuarta parte de *BC*.
Como *DO* es la mitad de *PO* deducimos que *DO* es un tercio de *DP*. Como *DP* es la mitad de *AP* (que es la altura del triángulo original) obtenemos que *DO* es un sexto de la altura original.
Hemos obtenido entonces que la base de nuestro triángulo sombreado es un cuarto que la del original y la altura un sexto por lo que el área es 1/24 del grande.

**24.(E)** Como los cuadrados perfectos solo pueden acabar en 0, 1, 4, 5, 6 o 9 el único que puede ser un cuadrado perfecto es el 346 921. De hecho, $589^2 = 346\,921$.

**25.(C)** Girando la figura podemos considerar el rombo como un paralelogramo cuya altura es el segmento pedido y cuya base, *PQ*, es uno de los lados del rombo. Como el perímetro del rombo es de 24 cm, cada lado mide 6 cm. Como el área del paralelogramo es base por altura, resulta que $6\cdot AB = 24 \Rightarrow AB = 4$ cm.



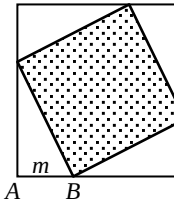



# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* III

**1. (C)** El lado del cuadrado interior es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $m$ y $1 - m$, es decir, mide $\sqrt{m^2 + (1-m)^2}$ .

Y su área, $m^2 + (1-m)^2 = 2m^2 - 2m + 1$ ..



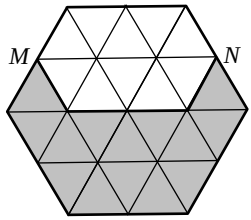

**2. (D)** Habrá que pagar el 90% · 80% = 72% .Por ello tendremos un descuento del 28%.

**3. (E)** Manejamos dos triángulos rectángulos de hipotenusa 25. El primero tiene 7 de cateto y el otro mide $\sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ . Calculada la altura de la escalera en su primera posición, la altura en la segunda es 20, y el otro cateto mide $\sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ .

**4. (D)** Especulemos con las terminaciones de $a$ y $b$.

| | $a$ | $b$ | $a^3+b^3$ | $a^2+b^2$ |
|---|---|---|---|---|
| terminación | 0 | 3 | 7 | |
| | 1 | 2 | 9 | |
| | 4 | 9 | **3** | **7** |
| | 5 | 8 | 7 | |
| | 6 | 7 | 9 | |

**5. (A)** Dividimos el hexágono en orejas de gato y nos salen 24 triángulos, de los cuales 14 forman la cabeza del gato. Si los 24 tienen 180 $cm^2$ de área, 2 tienen 15 $cm^2$ y la cabeza, 105.

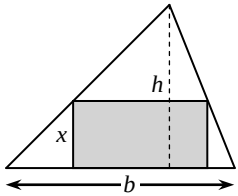



**6. (B)** Si llamamos $v$ y $v + 4$ a las velocidades respectivas de A y B, resulta que hasta el momento del encuentro, B ha recorrido 12 km más, y por tanto han transcurrido 3 horas desde el comienzo de la carrera. A ha ido a 8 km/h y B a 12km/h.

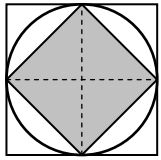
**7. (C)** Si dividimos el hexágono interior en seis triángulos equiláteros, podemos darnos cuenta de que los triángulos extra del hexágono regular mayor son un tercio de esos triángulos equiláteros.
Así la relación de áreas es de 4 a 3.

**8. (D)** Dos soluciones de la ecuación, $3x + y = 10$ son (1, 7**)** y (3, 1). Vemos que de una a otra la $x$ aumenta al triple. Sin embargo, el valor de la $y$ ni se hace triple ni tampoco se transforma en un tercio de su valor.

**9. (C)** La base del rectángulo mide $2x$. El triángulo sobre el rectángulo y el de partida son semejantes, y por ello: $\frac{h-x}{h}=\frac{2x}{b}$, de donde $(h-x)\cdot b = 2x\cdot h$ ,y operando $h\cdot b = 2x\cdot h + x\cdot b$, luego $x=\frac{h\cdot b}{2h+b}$ .

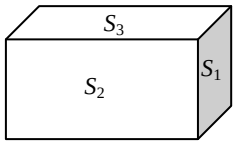



**10.(A)** El cuadrado inscrito puede dibujarse teniendo como vértices los puntos medios de los lados del cuadrado circunscrito. Un rápido vistazo nos avisa que el área del primero es la mitad del área del segundo.



**11.(C)** Una igualdad se conserva si a ambos miembros les sumamos un número, sea este positivo o negativo. También se conserva una desigualdad si multiplicamos (o dividimos) ambos miembros por un número estrictamente positivo. Sin embargo la desigualdad cambia al multiplicar ambos miembros por un número estrictamente negativo. En el enunciado no se especifica si z es positivo o negativo, con lo que la igualdad de C no será cierta en el segundo caso.

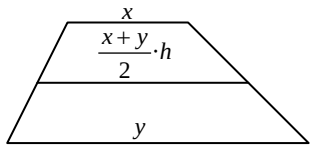
**12.(D)** Si $a$, $b$ y $c$, son respectivamente el largo, el ancho y el alto de la caja, el volumen es $V = a\cdot b\cdot c$ .
Como $S_1 = b\cdot c$, $S_2 = a\cdot b$ y $S_3 = a\cdot c$ tenemos que:
$S_1\cdot S_2\cdot S_3 = V^2$



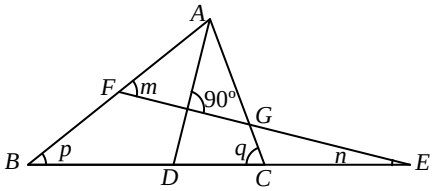

**13.(E)** El número $abcabc$ = $abc\cdot 1001$ , pero $1001 = 7\cdot 11\cdot 13$ y descomponiendo las posibles respuestas solo $143 = 11\cdot 13$ divide a 1001.

**14.(D)** Si el área es 1400 cm$^2$ y la altura 50 cm, la semisuma de las bases es 28 cm. Las bases suman 56 y este número debe ser suma de dos múltiplos de 8. Pueden ser: 8 y 48, 16 y 40, 24 y 32.

**15.(B)** El área del triángulo es $\frac{b\cdot h}{2}$, y la del trapecio, $\frac{x+y}{2}\cdot h$. Si las áreas y las alturas son iguales la mitad de la base del triángulo es igual a la semisuma de las bases del trapecio y por tanto a su paralela media.




**16.(B)** Si llamamos G a la intersección de *AC* y *EF*, el triángulo *AFG* es isósceles (ya que la bisectriz de $\hat{A}$ es perpendicular a *FG*) y si llamamos $\alpha = B\hat{A}D = D\hat{A}C$, entonces, $m = A\hat{G}F = C\hat{G}E = 90^o - \alpha$, y como $q = n + 90^o - \alpha = n + m$,



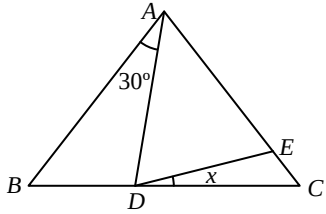

tenemos que $p + q = 180^o - 2\alpha = 2m \Rightarrow m = \frac{p+q}{2}$.

**17.(D)** Recordemos que los triángulos *ABC* y *ADE* son isósceles.

Si llamamos $\alpha = D\hat{A}E$, $\hat{B} = \hat{C} = \frac{150^o - \alpha}{2}$.

Como $A\hat{E}D = 90^o - \frac{\alpha}{2}$, $D\hat{E}C = 90^o + \frac{\alpha}{2}$, y

$x = 180^o - \frac{150^o - \alpha}{2} - \left(90^o + \frac{\alpha}{2}\right) = 15^o$.




**18.(C)** Tendremos que jugar primero con que los lados formen un triángulo, y por ello el mayor será menor que la suma de los otros dos. Así escritos por tamaño, los posibles triángulos escalenos con perímetro menor que 13 y lados enteros son solo (5, 4, 3), (5, 4, 2) y (4, 3, 2).

**19.(A)** Para que el mayor número sea el 4, tiene que haber una tarjeta con un 4 y ninguna con un 5. Así que tenemos tres tarjetas para dos puestos. Hay 3 casos favorables sobre 10 posibles (las formas de elegir sin orden tres tarjetas de un grupo de cinco).

**20.(D)** 98! + 99! + 100! = 98! · (1 + 99 + 99·100) = 98! · 10 000. Es decir que esa suma de factoriales tiene *cuatro cincos más* que 98!, ($10\,000 = 2^4 \cdot 5^4$). De 1 a 98 hay diecinueve múltiplos de 5 y tres múltiplos de 25, luego $5^{19+2}$ es la mayor potencia de 5 que divide a 98!, y 22 + 4 la respuesta requerida.

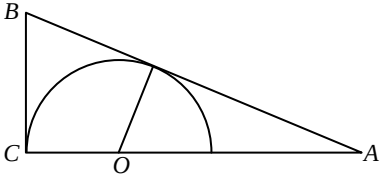
**21.(B)** Entre 1000 y 9999 hay 9000 enteros. Un número impar de cuatro cifras que está en ese rango, tiene 5 posibles terminaciones, y si sus cifras han de ser diferentes, hay 8 posibles cifras para la unidad de millar (el 0 no es posible), 8 para la centena (ahora sí puede entrar el 0) y 7 para decena. Así que candidatos hay: 5·8·8·7, y la probabilidad pedida es, $\frac{5\cdot 8\cdot 8\cdot 7}{9000} = \frac{56}{225}$.

**22.(A)** Si $a + b + c = 0$, tiene que haber dos positivos y uno negativo, o dos negativos y uno positivo. Sean $a$ y $b$ los de igual signo.

En el primer caso $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{a\cdot b\cdot c}{|a\cdot b\cdot c|} = 1+1-1-1 = 0$.

En el segundo caso $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{a\cdot b\cdot c}{|a\cdot b\cdot c|} = -1-1+1+1 = 0$.

**23.(D)** El triángulo tiene hipotenusa 13. Si dibujamos el radio de la circunferencia perpendicular a la hipotenusa, el triángulo *ABC* queda dividido en dos triángulos: *OBC* de área $\frac{5r}{2}$ y *OAB* de área $\frac{13r}{2}$. Luego el área de nuestro triángulo *ABC* que es $\frac{5\cdot 12}{2} = 30$, es también 9*r*. Luego $r = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$.




**24.(D)** Vuelven a coincidir los tres cada 3·4·5 = 60 días. De dos en dos lo hacen cada 12, 15 y 20 días. La pregunta se puede cambiar por "¿Cuántos números del 1 al 365 no son múltiplos ni de 3, ni de 4 ni de 5? Para la respuesta haremos el cálculo de cuántos números del 1 al 365 son, o múltiplos de 3, o de 4, o de 5.

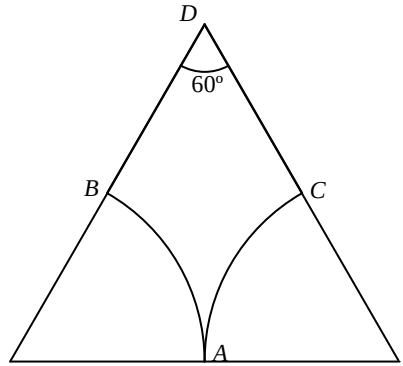
De 3 tenemos 121, de 4 tenemos 91 y de 5 tenemos 73. A la suma deberemos descontarles los que son múltiplos de 12 (30), los que son múltiplos de 15 (24) y los que son múltiplos de 20 (18), porque han sido contados dos veces. Al resultado deberemos añadir los múltiplos de 60 (6), ya que fueron contados al principio tres veces y descontados después tres veces. Así la cuenta nos da:

121 + 91 + 73 – 30 – 24 – 18 + 6 = 219. Quedan 365 – 219 = 146 días en que no llama ninguno de los nietos.

**25.(B)** La figura puede ser mirada como un triángulo equilátero de lado 4, al que le hemos quitado dos sectores circulares de radio 2 y ángulo 60º.

Su área será: $\frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot 2^2}{3} = 4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$ .

.



# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 1ª Fase Nivel* IV

**1. (D)** El cálculo requerido es: $\sqrt[3]{3^{(3^3)}}$ .

Desarrollando poco a poco la expresión: $\sqrt[3]{3^{(3^3)}} = 3^{\frac{3^3}{3}} = 3^{3^{2-1}} = 3^{3^2}$ . De forma que obtenemos el resultado buscado.

**2. (C)** Entre los primeros tres gatos se comieron 1 + 2 + 3 = 6 ratones, luego quedaron 14 ratones para los gatos cuarto, quinto y sexto. Buscamos el mínimo número de ratones que se pudo comer el cuarto gato comiendo más que cualquiera de los otros 5. Siendo sistemáticos, y empezando por la menor opción del enunciado:
Si el cuarto gato se hubiera comido 4, quedarían 10 ratones para el quinto y sexto y al menos uno de ellos habría tenido que comerse 5 o más ratones en contradicción con que el cuarto comiese más que él.
Si el cuarto gato se hubiera comido 5, quedarían 9 ratones para el quinto y sexto y ocurriría lo mismo que antes con uno de ellos comiendo 5 o más otra vez.
Sin embargo, si el cuarto gato se hubiera comido 6, podría darse el caso en que el quinto y sexto se hubieran comido cada uno 4 ratones, completando el total de 14, y comiendo el cuarto gato más ratones que cualquiera de los demás.

**3. (C)** En primer lugar, recordemos la expresión notable "suma por diferencia":
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ .
Con ella, podemos reescribir la función *f* para $x \neq 2$ (donde *f* está definida) como:
$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$ . De esta forma, *f*(*x*) y *g*(*x*) se cortarán si *f*(*x*) = *g*(*x*) para algún valor de *x*. $f(x) = g(x) \Rightarrow x+2 = 2x \Rightarrow x = 2$ .
Sin embargo *f* no está definida en *x* = 2, por lo que no hay ningún punto de corte.

**4. (A)** Si un número *x* es solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y su inverso $\dfrac{1}{x}$ también lo es, entonces ha de verificarse además la ecuación $a\dfrac{1}{x^2} + b\dfrac{1}{x} + c = 0$ .

Multiplicando por $x^2$, $a + bx + cx^2 = 0$ . Igualando la primera ecuación con ésta, se tiene $ax^2 + bx + c = 0 = a + bx + cx^2$ ; de donde se deduce que $a\left(x^2 - 1\right) = c\left(x^2 - 1\right)$.
Dividiendo por $x^2 - 1$ (caso general), se obtiene en efecto *a* = *c*.
Otro método. El producto de las dos soluciones es: $x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow a = c$ .

**5. (D)** Si $m > n$ son impares, entonces pueden escribirse de la forma $m = 2m_0 + 1$ y $n = 2n_0 + 1$ con $m_0 > n_0$ números naturales (0, 1, 2…). Por tanto, recurriendo nuevamente a la expresión notable "suma por diferencia", deducimos que $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = ((2m_0+1)+(2n_0+1))((2m_0+1)-(2n_0+1)) =$ $= (2(m_0+n_0+1)2(m_0+n_0)) = 4(m_0+n_0+1)(m_0+n_0)$.

Podríamos pensar que ya hemos acabado y que el mayor entero que divide a todos los posibles números $m^2 - n^2$ con $m > n$ impares es 4. ¡Pero cuidado! $m_0 + n_0$ y $m_0 + n_0 + 1$ son números naturales consecutivos, luego al menos uno de ellos es par y aporta un nuevo factor 2 a la descomposición. Nuestro candidato es pues el 8. Si no estamos seguros de poder descartar un número mayor, basta con coger $m = 3 > 1 = n$ donde $m^2 - n^2 = 3^2 - 1^2 = 8$ para ver que 8 es, en efecto, el mayor entero que divide a todos los números así construidos.

**6. (C)** Desarrollando la expresión $(a+b)(a+c) = a^2 + ab + ac + bc = a(a+b+c) + bc$.

Se tiene pues que $(a+b)(a+c) = a + bc$ si $a(a+b+c) + bc = a + bc$ ; es decir, si $a(a+b+c) = a$. Esto ocurrirá si $a = 0$ o si $a + b + c = 1$. Podemos descartar así las opciones A, B y D. Además, la opción E indica que el resultado sólo acontece en caso de que se dé $a = b = c = 0$, lo cual no es cierto pues hemos deducido que también se tiene si $a + b + c = 1$. Esto último es lo que indica la respuesta C.

**7. (E)** Razonemos sobre cada una de las opciones:

A – Si $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$ , entonces $y + x^2 = -\frac{1}{8} < 0$.

B – Si $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{3}{4}$, $z = \frac{3}{2}$ , entonces $y + xz = -\frac{1}{4} < 0$.

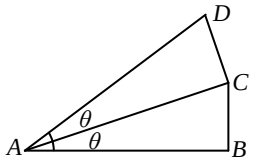
C – Si $y = -\frac{1}{2}$ , entonces $y + y^2 = -\frac{1}{4} < 0$.

D – Si $y = -\frac{1}{4}$ , entonces $y + 2y^2 = -\frac{1}{8} < 0$.

E – Siendo $-1 < y$ ; $1 < z$, sumando ambas inecuaciones concluimos que $0 < y + z$, y por tanto que la expresión se corresponde con un número positivo.

**8. (D)** La gráfica de la función $y = f(x)$ es simétrica respecto del eje de ordenadas si se cumple $f(x) = f(-x)$ para todo valor de $x$. Podríamos probar con todas las opciones para descartar una a una, pero centrémonos en la respuesta correcta D donde se propone $f(x) = x\,\mathrm{sen}\,x$. $f(-x) = (-x)\mathrm{sen}(-x) = (-x)(-\mathrm{sen}\,x) = x\,\mathrm{sen}\,x = f(x)$ . Por tanto, se concluye que la gráfica en D es simétrica respecto del eje de ordenadas.

**9. (E)** De acuerdo con las indicaciones del enunciado, en el triángulo *ABC*, dado que $A\hat{B}C = 90^o$ y $C\hat{A}B = \theta$, se verifica $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$. De igual manera, en el triángulo *ACD*, dado que $A\hat{C}D = 90^o$ y $D\hat{C}B = \theta$, se verifica $\cos\theta = \frac{AC}{AD}$. Multiplicando ambas expresiones, se concluye que $\cos^2\theta = \frac{AB}{AD}$. Como por hipótesis *AB* = 1, invirtiendo ambos lados de la igualdad se llega a $AD = \frac{1}{\cos^2\theta}$.




**10.(E)** El producto de los *n* primeros términos de la sucesión $10^{\frac{1}{13}}, 10^{\frac{2}{13}}, 10^{\frac{3}{13}}, ..., 10^{\frac{n}{13}}$ es $10^{\frac{1+2+3+...+n}{13}}$, donde la suma de los *n* primeros números naturales se puede calcular como $\frac{n(n+1)}{2}$. Escribiendo 100 000 como una potencia de 10, se deduce que ésta es $10^5 = 10^{\frac{65}{13}}$. Por tanto, buscamos el menor entero positivo *n* tal que $\frac{n(n+1)}{2}$ sea mayor o igual que 65. En particular, con *n* = 10 se tiene $\frac{n(n+1)}{2} = 55$ y con *n* = 11 se tiene $\frac{n(n+1)}{2} = 66$. Por tanto la respuesta es *n* = 11.

**11.(A)** Recordemos en primer lugar la siguiente relación entre el seno y coseno de un ángulo: $sen x = \cos(x - 90^o)$. Y, equivalentemente: $\cos x = sen(x + 90^o)$. De esta forma, sen300º = cos210º y $-\cos 300^o = -sen 390^o = sen(-390^o) = sen 330^o = sen 210^o$. Por tanto, podemos reescribir el número complejo dado como: $sen 300^o - i\cos 300^o = |1|\cos 210^o + i|1|sen 210^o$. Una vez expresado en la forma módulo argumental, es inmediato que el número es $1_{210^o}$.

**12.(E)** Podemos establecer las siguientes relaciones:

$a^2 = \frac{ab \cdot ac}{bc} = \frac{26 \cdot 128}{52} = 64$, luego *a* = 8 .

$b^2 = \dfrac{ab \cdot bc}{ac} = \dfrac{26 \cdot 52}{128} = \dfrac{169}{16}$, luego $b = \dfrac{13}{4}$.

$c^2 = \dfrac{ac \cdot bc}{ab} = \dfrac{128 \cdot 52}{26} = 256$, luego $c = 16$.

Así, $a + b + c = 8 + \dfrac{13}{4} + 16 = \dfrac{32 + 13 + 64}{4} = \dfrac{109}{4}$.

**13.(D)** Busquemos el número empezando por el 999, siendo éste el mayor número menor que 1000, descartando aquellos números cuyas cifras no sumen una de las posibles respuestas (10, 12, 15, 18 ó 21) hasta encontrar uno que incluya en su factorización cuatro divisores primos diferentes: 999 hasta 994 tienen cifras con suma no propuesta, $993 = 3 \cdot 331$ (suma 21), 992 y 991 tienen cifras con suma no propuesta, $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, ¡eureka! Como sus cifras suman 18, ésta es la respuesta.

**14.(A)** Si $f(x) = ax + b$ y $f^{-1}(x) = bx + a$, entonces $x = f^{-1}\big(f(x)\big)\ \forall x$

$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}\big(ax + b\big) = b(ax + b) + a = abx + b^2 + a = x,\ \forall x. \Rightarrow ab = 1,\ b^2 + a = 0$

Como $a = -b^2$ sustituyendo en la otra expresión se obtiene $-b^3 = 1 \Rightarrow b = -1$ y por lo tanto $a = -1$. Por lo tanto $a + b = -2$.

**15.(B)** Sabiendo que $4^x = 9$, entonces $4^4 = 256 = 9^y = \left(4^x\right)^y = 4^{xy} \Rightarrow xy = 4$.

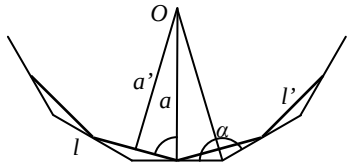
**16.(C)** Queremos expresar el número $2^{25} \cdot 3^{40}$ en la forma $m^n$ con $m$ y $n$ enteros positivos y $n > 1$. Por tanto, necesitamos que con $\dfrac{25}{n}$ y $\dfrac{40}{n}$ enteros y $n > 1$. Dado que los únicos divisores comunes de 25 y 40 son el 1 y el 5, tiene que cumplirse que $n = 5$ y, así, $m = 2^{\frac{25}{5}} \cdot 3^{\frac{40}{5}} = 2^5 \cdot 3^8 = 209\,952$. El resultado pedido es por tanto $m + n = 209\,957$.

**17.(A)** Supongamos que vamos a sumar los 100 enteros consecutivos a partir del $n$. En tal caso, querremos computar $n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + 99)$. Si reagrupamos los sumandos, vemos que el cálculo es equivalente a $100n + (1 + 2 + \ldots + 99)$. Ahora bien, la suma de los primeros 100 números enteros positivos es $\dfrac{1 + 99}{2} \cdot 99 = 4950$, luego la suma de nuestros 100 enteros consecutivos será $100n + 4950$. Si nos damos cuenta, este número debe tener un 5 en las decenas y un 0 en las unidades, por lo que la única respuesta posible es la A (donde $n = 16273800$, ¡bien grande!).

**18.(D)** Contestando al azar, el concursante dispone de tres opciones para la 1ª pregunta, por tres opciones para la 2ª y por tres opciones para la 3ª tercera. Luego dispone de 3·3·3 = 27 opciones para sus respuestas. De entre ellas, sólo ganará si contesta al menos dos de las tres cuestiones correctamente. Si falla la 1ª pregunta con cualquiera de las dos opciones incorrectas, deberá contestar correctamente a la 2ª y la 3ª. De la misma forma, le ocurrirá que tendrá dos formas de fallar únicamente tanto la 2ª pregunta como la 3ª. Esto hace un total de 2 + 2 + 2 = 6 opciones de acertar exclusivamente dos de las cuestiones. Si además, consideramos la posibilidad de que acierte las tres preguntas, tendrá un total de 6 + 1 = 7 opciones ganadoras. De esta forma, la probabilidad de que gane será de $\frac{7}{27}$.

**19.(C)** Designemos a cada uno por la inicial de su nombre y distingamos casos según dónde se siente Alicia (A), la más tiquismiquis:
Si A se sienta la primera de la fila, tenemos las siguientes opciones: {A,D,B,C,E}, {A,D,B,E,C}, {A,D,C,B,E}, {A,D,C,E,B}, {A,E,B,C,D}, {A,E,B,D,C}, {A,E,C,B,D}, {A,E,C,D,B}. En total, 8 formas de sentarse.
Si A se sienta la segunda de la fila, las opciones son: {D,A,E,B,C}, {D,A,E,C,B}, {E,A,D,B,C}, {E,A,D,C,B }. En total, 4 formas de sentarse.
Si A se sienta en medio, pueden recurrir a: {B,D,A,E,C}, {B,E,A,D,C}, {C,D,A,E,B}, {C,E,A,D,B}. En total, 4 formas de sentarse.
Si A se sienta la cuarta o quinta, hay tantas como si se sienta la segunda o primera (respectivamente) por simetría.
Así pues, hay un total de 8 + 4 + 4 + 4 + 8 = 28 formas de que se sienten en la fila.

**20.(A)** Sean $l$ el lado y $a$ la apotema del polígono regular de ángulo interior $\alpha$ y $l'$ el lado y $a'$ la apotema de polígono regular inscrito en él con los vértices en los puntos medios de los lados (también de ángulo interior $\alpha$ al tener el mismo número de lados). Con ayuda del dibujo podemos apreciar que $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a'}{a}$ y que $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{l'/2}{l/2}=\frac{l'}{l}$. El área de un polígono regular de $n$ lados viene dada por la expresión: $S=\frac{perímetro\ \cdot\ apotema}{2}$.

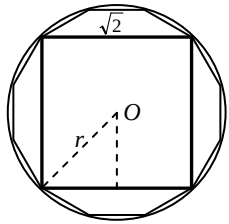



Luego el cociente de las áreas indicado es : $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{l\cdot n\cdot a}{2}}{\frac{l'\cdot n\cdot a'}{2}}=\frac{l}{l'}\cdot\frac{a}{a'}=\frac{1}{sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2}{1-\cos\alpha}$.

Hemos aplicado la fórmula del seno del ángulo mitad. .

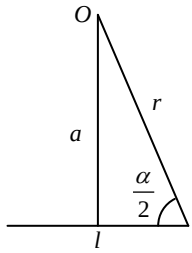
**21.(C)** Ateniendo a la definición de $f$ como $10 = 2\cdot 5$, entonces $14 = f(10) = f(2) + f(5)$. Además, aplicando de forma reiterada la definición a $40 = 2^3 \cdot 5$, se tiene $20 = f(40) = f\left(2^3\right) + f(5) = f\left(2^2\right) + f(2) + f(5) = 3f(2) + f(5)$. Así, si resolvemos el sistema formado por ambas expresiones en $f(2)$ y $f(5)$, obtenemos $f(2) = 3$ y $f(5) = 11$. Finalmente, como $500 = 2^2 \cdot 5^3$, se obtiene $f(500) = 2f(2) + 3f(5) = 2\cdot 3 + 3\cdot 11 = 39$.

**22.(C)** Sabemos que el área del cuadrado es 2 dm$^2$, por lo que su lado medirá $\sqrt{2}$ dm. Sabiendo esto, calculamos el radio $r$ de la circunferencia circunscrita al cuadrado, usando el Teorema de Pitágoras. $r^2 + r^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow r = 1$.




Las expresiones de la apotema y el lado de un polígono regular en función de su ángulo interior y el radio de la circunferencia circunscrita son:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r\cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right);\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l/2}{r} \Rightarrow l = 2r\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$




El área del polígono regular de $n$ lados se puede obtener ahora mediante la expresión:

$$S = \frac{l\cdot n\cdot a}{2} = \frac{2r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot n\cdot r\, sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{r^2\cdot n\cdot sen\,\alpha}{2}$$ y resulta

$$S = = \frac{1^2\cdot 12\cdot sen\left(\frac{360^o}{12}\right)}{2} = 6\cdot sen\,30^o = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

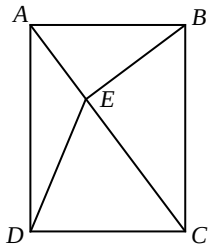
**23.(A)** La clave que puso Pablo en la cerradura de su maleta consistía de cuatro cifras distintas con solamente dos de ellas impares y, por tanto, las otras dos pares. Veamos en primer lugar cuántos grupos distintos de cifras pudo haber tomado Pablo. Para las cifras impares hubo de seleccionar dos de las cinco posibles, luego pudo tomar $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$. De la misma manera pudo proceder con las cifras pares en su clave, por lo que en total tuvo diez posibilidades para las cifras pares por las diez de las cifras impares; en total, $10^2$. Si además consideramos de cuántas formas pudo ordenar cada posible grupo de cuatro cifras, estas ordenaciones son $4! = 24$. De esta forma, el número de claves distintas que pudo haber configurado es de $10^2 \cdot 24 = 2400$. Si tiene la mala suerte de tener que probar todas hasta dar con la correcta para abrir la maleta, deberá probar como máximo 2400 claves.

**24.(D)** El área del triángulo rectángulo de catetos *a* y *b* es $S = \frac{a \cdot b}{2}$.

Pero además, conociendo la hipotenusa mediante el Teorema de Pitágoras $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ y la altura *x* sobre la misma, también podemos calcular dicho área como: $S = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. Igualando ambas expresiones se deduce que $ab = x\sqrt{a^2 + b^2}$ Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad entonces $a^2b^2 = x^2\left(a^2 + b^2\right)$. Y si finalmente dividimos la igualdad por $a^2b^2x^2$ se concluye que $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$.

**25.(E)** El triángulo *ABC* es rectángulo, por tanto es aplicable el Teorema de Pitágoras $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$. Sabiendo esto, el área del triángulo *ABC* la podemos calcular bien mediante el producto de los catetos o bien mediante el producto de la hipotenusa por la altura sobre la misma.

$$\frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} \Rightarrow \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{5 \cdot BE}{2} \Rightarrow BE = \frac{12}{5}$$




Como *E* es el pie de la perpendicular desde *B* a la diagonal *AC*, el triángulo *AEB* es rectángulo. Aplicando de nuevo el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$AE^2 = AB^2 - BE^2 = 9 - \frac{144}{25} = \frac{225 - 144}{25} = \frac{81}{25} \Rightarrow AE = \frac{9}{5}$$

Dado que el segmento *AC* es la diagonal del rectángulo, los triángulos *ABE* y *AED* tienen la misma altura sobre la base común *AE* y por tanto la misma área. Concluimos así que el área del triángulo *AED* es $S_{AED} = \frac{AE \cdot BE}{2} = \frac{\frac{9}{5} \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{54}{25}$.

# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* I

**1. (C)** Comenzamos multiplicado sucesivamente 9 por 9, 8, 7,… hasta obtener un producto menor que 40. Como $9 \times 5 = 45$ y $9 \times 4 = 36$, hemos obtenido **cinco** productos mayores que 40. A continuación, y dado que no debemos volver a emplear el 9, multiplicamos 8 por 8,7 y 6, con lo que hemos obtenido otros **tres** productos mayores que 40 ($8 \times 5 = 40$). Procediendo del mismo modo, con el 7 obtenemos **dos** productos más, $7 \times 7$ y $7 \times 6$. Y puesto que $6 \times 6 = 36$ aquí termina el proceso
En total tenemos $5 + 3 + 2 = 10$ números mayores que 40.

**2. (B)** Salta a la vista que en B) no es posible encajar la pieza formada por cinco cuadraditos.

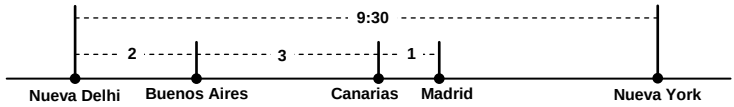
**3. (C)** Si el capitán estuvo $t$ horas navegando con el viento a favor, durante ese tiempo recorrió $45 \times t$ km y con el viento en contra recorrió $25 \times (10 - t) = 250 - 25 \times t$ km. Luego, en total, recorrió $250 - 20 \times t$ km que, sabemos, es igual a 310 km. Por tanto, $20 \times t = 310 - 250 = 60$, de donde $t = \dfrac{60}{20} = 3$ horas.

**4. (D)** Si $N$ es la tercera parte de las bolsas pagadas con dos monedas de 1 € cada una, se ha dispuesto en total de $(100 + 2 \times N)$ € para devolver por la compra de las restantes $2 \times N$ bolsas compradas con billetes de 5 € y, como a cada comprador se le devuelven 3 €, nos quedaremos sin cambio cuando:
$100 + 2 \times N = 3 \times 2 \times N$ , es decir, $100 = 4 \times N$, por lo que $N = 25$..
Luego como máximo podremos vender $25 \times 3 = 75$ bolsas sin ir a buscar más cambio.

**5. (A)** De la simetría de la diadema deducimos que el perímetro del hexágono es igual al perímetro de la cabeza de gato. Por tanto, medio lado del hexágono mide $\dfrac{48}{12} = 4$ cm.
Dado que el perímetro de la diadema es de 8 medios lados, dicho perímetro mide $8 \times 4 = 32$ cm.

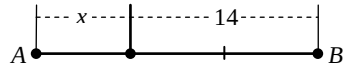
**6. (B)** Como $2081 - 2018 = 63$ y $63 + 22 = 85$, entonces en 2081 celebraremos la 85ª edición.

**7. (E)** El enunciado del problema dice:
Hay una hora más en Madrid que en Canarias; hay 3 horas más en Canarias que en Buenos Aires; hay 2 horas más en Buenos Aires que en Nueva York y hay 9:30 horas más (21:30 – 12:00 = 9:30) en Nueva Delhi que en Nueva York. Lo que permite ordenar los tiempos en un diagrama como el siguiente:
dónde se ve inmediatamente que la hora de Nueva Delhi menos la de Madrid es:
9:30 – (2:00 + 3:00 + 1:00) = 3:30 horas. Por lo que cuando en Nueva Delhi sean las 21:00 en Madríd serán las 21:00 – 3:30 = 17:30 horas.




**8. (D)** La gráfica nos muestra que la distancia recorrida es proporcional al tiempo empleado en recorrerla. Como en 10 minutos recorre 4 km, en 90 minutos recorrerá 9 veces esa distancia, es decir, recorrerá $9 \times 4 = 36$ km.

**9. (A)** En la figura el segmento *AB* representa el número pensado, *x* es su tercera parte y 14 es el doble de esa tercera parte. Por tanto $x = 7$ y nuestro número es $3 \times 7 = 21$. La suma de sus cifras es 3.




**10.(A)** Esteban comienza sus baños a los 20 minutos de llegar a la playa y luego se baña cada 20 + 5 = 25 minutos, por lo que se baña sucesivamente entre los [20, 25]; [45, 50]; [70, 75]; [95,100]; [120, 125]; [145, 150]… minutos de llegar.
Ariel, por su parte, comienza su primer baño 30 minutos después de llegar a la playa y se baña sucesivamente cada 30 + 15 = 45 minutos, es decir, entre los [30, 45]; [75, 90]; [120, 135]… minutos de llegar a la playa.
Vemos pues que a los 120 minutos de llegar coinciden durante 5 minutos y, puesto que han llegado a las 10:00, coincidirán a las 12:00.

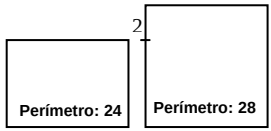
**11.(B)** Mientras Alfredo da 2 saltos Juanje da 7. Cuando Alfredo de 100 saltos Juanje dará *x*.
Luego $x = \dfrac{100 \times 7}{2} = 350$
Como Juanje da 50 saltos más, en total ha dado 400 saltos.

**12.(C)** Si tomamos como base del triángulo el lado *MD* la altura viene dada por *AB* y el área será: $\dfrac{4 \times 6}{2} = 12$ cm$^2$.

**13.(B)** La cartulina de Inés, es de 59,4 cm por 84,1 cm. Como 59,4 : 15 = 3,96 solo podrá aprovechar 3 tiras paralelas al lado de 84,1 cm.
Igualmente, como 84,1 : 15 = 5,6066… únicamente aprovechará 5 tiras paralelas al otro lado del rectángulo. Por lo tanto podrá hacer $3 \times 5 = 15$ cuadrados como máximo.

**14.(C)** Si al 4% corresponden 0,2 g de sal, al 100% corresponderán $x$ g de sal. De donde $x = \dfrac{100 \times 0{,}2}{4} = 5$ g de sal.

**15.(C)** En la figura hemos representado el rectángulo de perímetro 24 cm y el cuadrado de perímetro 28 cm (24 + 2 + 2). Se deduce que el lado del cuadrado mide 28 : 4 = 7 cm y que, por tanto, la base del rectángulo también mide 7 cm y su altura 7 – 2 = 5 cm.
En consecuencia, el área del rectángulo es $7 \times 5 = 35$ cm$^2$.




**16.(A)** Como al prolongar en 2 cm uno de los lados del rectángulo se obtiene un cuadrado, deducimos que la diferencia de sus lados es de 2 cm.
Por otra parte, como $24 = 6 \times 4$, vemos inmediatamente la solución: el rectángulo mide de base 4 cm y 6 cm de altura, luego su perímetro es de 6 + 6 + 4 + 4 = 20 cm.

**17.(D)** Cuando Mariquilla saca su papelito, de la bolsa se han extraído cuatro papeletas, de las que una de ellas corresponde a anfibios. Quedan pues 21 papelitos de los que 3 son de anfibios, por lo tanto la probabilidad de sacar anfibio es $\dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$.

**18.(C)** El problema es organizar bien el conteo de segmentos.
Lados del dodecágono: 12 segmentos.
Seis rombos: $6 \times 4 = 24$. Pero tienen 3 lados en común, luego 24 – 3 = 21 segmentos.
Tres cuadrados (sin un lado cada uno): 9 segmentos.
En total: 12 + 21 + 9 = 42 segmentos.

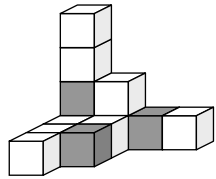
**19.(E)** La columna de las unidades de la segunda suma implica A = 0 o A = 5. Si A = 0 es fácil ver que todas las letras tienen que representar 0, por lo que desechamos esa solución. Si A = 5, la columna de los millares de la primera suma conduce a O = 6. A continuación la columna de las unidades de la primera suma lleva a N = 4; la columna de los millares de la primera suma hace D = 9; la columna de las decenas de la primera suma implica M = 3 y la columna de los millares de la segunda suma hace I = 1. Por tanto N + I + D + O = 4 + 1 + 9 + 6 = 20.

**20.(D)** Con el alfabeto delante es inmediato ver que el único mensaje con sentido es ELHP que, descifrado, significa BIEN.

**21.(E)** Haciendo un listado con las nueces que encuentra cada día se ve sin dificultad la regla de formación.
Día 1: 1
Día 2: 6
Día 3: $(3 - 1) \times 6 = 12$
Día 4: $(4 - 1) \times 6 = 18$
….
Día 15: $(15 - 1) \times 6 = 84$

**22.(E)** La respuesta afirmativa a las dos primeras preguntas selecciona los números 1000, 238, 26, 336, 154 y 922. En principio, la pregunta E) resuelve el problema pues solo el número 238 se ajusta a ella.
No obstante podemos comprobar que entrelos números seleccionados hay dos múltiplos de 4 (1000 y 336) y que otros dos incluyen la cifra 6. Además ninguno es tal que la suma de sus cifras es mayor que 18 y hay 3 múltiplos de 7 (238, 336 y 154).
Confirmamos pues que la E) es la tercera pregunta.

**23.(D)** En la figura se han señalado los tres únicos cubitos que tienen exactamente tres de sus caras pintadas de rojo.



**24.(A)** Comenúmeros ha reducido la multiplicación a $640\,022 \times 48\,000 = 30\,721\,056\,000$. La suma de sus cifras es $3 + 7 + 2 + 1 + 5 + 6 = 24$.

**25.(A)** Dado que $1000 : 7 \cong 142{,}85$ el número que dividido entre 7 sea igual a 143 será el menor número de cuatro cifras que es múltiplo de 7.
Por lo que ese número es $143 \times 7 = 1001$.Y la suma de sus cifras es 2.

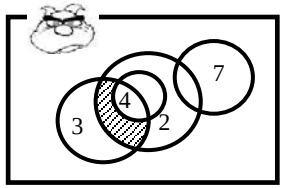
# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* II

**1. (E)** Nos preguntan: ¿cuánto hay que sumar a $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ para obtener $4-\frac{5}{6}=\frac{19}{6}$?

Sencillo, restamos y se acabó: $\frac{19}{6}-\frac{1}{3}=\frac{17}{6}$.

**2. (D)** Tenemos que identificar qué hay en esos círculos. El círculo que está contenido en otro es el que corresponde a los múltiplos de 4 y el que lo contiene es el de los múltiplos de 2. Como no hay múltiplos de 4 y 7 en los números que hay hasta el 20, ya hemos identificado todos los círculos.
La parte rayada corresponde a los múltiplos de 3 y de 2 que no son múltiplos de 4. O sea, el 6 y el 18. Hay dos números.




**3. (E)** Puedes hacer un esquema o un dibujo o una tabla.

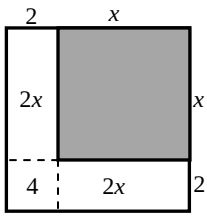
| Min: 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 22 | 14 | 6 | | | |
| | 30 | 22 | 14 | 6 | | |
| | | 30 | 22 | 14 | 6 | |
| | | | 30 | 22 | 14 | |
| | | | | 30 | 22 | |

A los 47 minutos habrá tres relojes con arena todavía por caer: a uno le quedarán 7 minutos, a otro 15 y a otro 23.

**4. (A)** Si llamamos $x$ a la longitud, en cm, del cuadrado gris, podemos asegurar que el área de la zona blanca es:

$$36 = 2x + 2x + 4\,.$$

Por tanto, $x = 8$.



**5. (B)** Si llamamos por sus iniciales a los números ocultos de los tres amigos, tenemos que $14 \cdot D = 20 \cdot G = 36 \cdot L$ y si factorizamos veremos todo más claro: $2 \cdot 7 \cdot D = 2^2 \cdot 5 \cdot G = 2^2 \cdot 3^2 \cdot L$. Como los números buscados son de dos cifras, podemos encontrarlos fácilmente sin más que completar los factores que faltan para obtener las igualdades: $2 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 5 \cdot (3^2 \cdot 7) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot (5 \cdot 7)$

$D = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90 \quad G = 3^2 \cdot 7 = 63 \quad L = 5 \cdot 7 = 35$

La suma de los tres números es $D + G + L = 90 + 63 + 35 = 188$.

Observa que ya no hay más soluciones válidas porque los números ya no serían de dos cifras.

**6. (E)** Podemos elaborar una tabla con las terminaciones de dichas operaciones. No hace falta calcularlas, solo nos interesa el último dígito, el de las unidades.

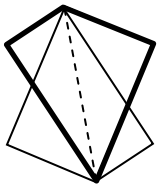
| $a$ | b | a + b | $a^2$ | $b^2$ | $a^2 + b^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 9 | 1 | 4 | 6 | 0 |
| 3 | 8 | 1 | 9 | 4 | 3 |
| 4 | 7 | 1 | 6 | 9 | 5 |
| 5 | 6 | 1 | 5 | 6 | 1 |

Por tanto, ya hemos identificado que los dos números en cuestión terminan, uno en 4 y el otro en 7. Y ahora calcular hasta encontrar algo interesante:

| $a$ | $b$ | $a+b$ | $a^2$ | $b^2$ | $a^2+b^2$ | $a^3$ | $b^3$ | $a^3+b^3$ | $a^4$ | $b^4$ | $a^4+b^4$ | $a^5$ | $b^5$ | $a^5+b^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 8 | 1 | 9 | 4 | 3 | 7 | 2 | 9 | 1 | 6 | 7 | 3 | 8 | 1 |

Anda, las terminaciones se repiten de cuatro en cuatro. Como 2018 = 504·4 + 2, la terminación de $a^{2018} + b^{2018}$ es la misma que la de $a^2 + b^2$, es decir, 3.

**7. (C)** La cometa está formada por dos triángulos rectángulos cuyos catetos son los lados de los dos rectángulos. El área de la cometa es, por tanto, es $A = \frac{5 \cdot 15}{2} + \frac{9 \cdot 13}{2} = 96$ cm$^2$.



**8. (A)** El reparto justo hay que realizarlo en función de la cantidad de tarta que dan Paula y Rubén a sus amigos. Vamos a elaborar una tabla:

| | **Cantidad de tarta que…** | | |
|---|---|---|---|
| | **… compran** | **…comen** | **… dan a sus amigos** |
| **Paula** | 2 | 3/4 | 2 – 3/4 = 5/4 |
| **Rubén** | 1 | 3/4 | 1 – 3/4 = 1/4 |
| **Miguelito** | – | 3/4 | – |
| **Luci** | – | 3/4 | – |

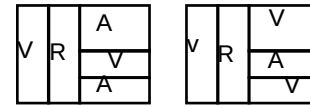
Así pues, Paula da cinco veces más cantidad (5 cuartos) que Rubén (1 cuarto), por lo que deberá recibir cinco veces más canicas que Rubén.
Paula se quedará con 20 canicas y Rubén con 4.

**9. (A)** Resulta que todas son falsas. Aquí te ponemos un ejemplo apropiado a cada una de ellas para que veas que no son verdaderas. A estos ejemplos se les llama contraejemplos.

I. Si multiplico por tres el divisor de una división entera, el cociente quedará dividido entre tres. (21:5 y 21:15)
II. Si divido entre cuatro el dividendo y el divisor, el cociente quedará multiplicado por cuatro. (36:20 y 9:5)
III. Si sumo cinco al dividendo y al divisor, el cociente no varía. (7:2 y 12:7)
IV. Si resto seis al divisor, el cociente aumentará en tres unidades. (15:8 y 15:2)

**10.(A)** Si representamos con $B$ la nota media de las ballenas, la suma de todas las notas obtenidas por los 25 animales podemos calcularla de dos maneras diferentes: $25 \cdot 16 = 15 \cdot 18 + 10 \cdot B$, es decir, $400 = 270 + 10B$.
Por tanto, la nota media de las ballenas fue $B = 13$.

**11.(C)** Si colocamos primero las franjas verticales, vemos que para cada comienzo podemos formar dos diseños, por ejemplo, si elegimos VR para empezar tenemos esas dos banderas.




Como tenemos seis maneras de colorear las verticales (VR, RV, VA, AV, RA, AR), en total podemos diseñar doce banderas diferentes con esas condiciones.

**12.(B)** Las operaciones correctamente hechas y sin saltarse pasos son:

$3 - (3 - 4)^3 = 3 - (-1)^3 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$

$3 - (3 - 4)(3 - 4) - 4 = 3 - (-1)(-1) - 4 = 3 - 1 - 4 = 3 - 5 = -2$

$3 - (3 - 4)^2 = 3 - (-1)^2 = 3 - 1 = 2$

$3 - 4 - 3 = 3 - 7 = -4$

Centésima solo hizo bien la segunda operación. Sacó un punto. Ay, las prisas.

**13.(B)** No hay que asustarse con este problema. Lo importante es elegir una buena notación:
La edad del hijo es el número de dos dígitos $\underline{ab}$, por tanto, su edad es $10a + b$.
La edad de su padre es el número de dos dígitos $\underline{cd}$, y su edad es $10c + d$.
Si traducimos la información del enunciado, obtenemos estas ecuaciones:

$$10c + d = 3 \cdot (10a + b)$$

$$c + d + a + b = 10a + b$$

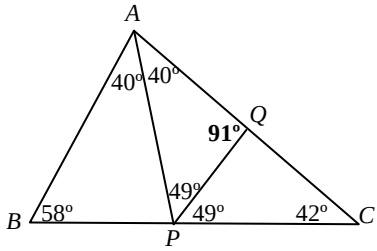
$$c + d = a + b$$

Reescribo la segunda ecuación sustituyendo $c + d$ por $a + b$:

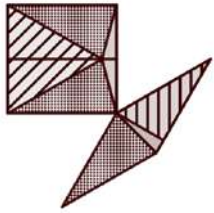
$$a + b + a + b = 10a + b \rightarrow b = 8a$$

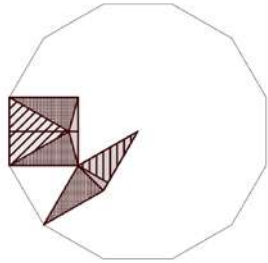
Y ya hemos terminado. Como $a$ y $b$ son cifras, la única posibilidad que hay es que $a = 1$ y $b = 8$.
El hijo tiene 18 años, su padre, el triple, 54, y la suma de sus edades es 72

**14.(C)** En el triángulo $ABC$, el ángulo $A$ mide 80º (180º – 58º – 42º).
En el triángulo $APC$, el ángulo $P$ es 98º (40º + 58º).
En el triángulo $APQ$, el ángulo $A$ es 40º; el ángulo $P$, 49º (98º:2) y por ello,
el ángulo $Q$ es 91º (180º – 40º – 49º).




**15.(D)** Cada cuadrado tiene el doble de área que cada rombo. Observa bien estos dibujos y te convencerás.





**16.(A)** Como la hora la divide entre dos, tiene que ser múltiplo de 2.
Como (24 – hora) lo divide entre 3 y 24 es múltiplo de 3, hora es múltiplo de 3.
Entonces, hora es múltiplo de 6.

Si son las 6 horas, $\frac{6}{2}+\frac{24-6}{3}+7\neq 6$.

Si son las 12 horas, $\frac{12}{2}+\frac{24-12}{3}+7\neq 12$.

Si son las 18 horas, $\frac{18}{2}+\frac{24-18}{3}+7=18$. Son las 18 horas.

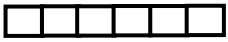
**17.(C)** Pitágoras tiene *P* piedras, Tales *T* piedras y Arquímedes *A* piedras.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}P=\frac{1}{6}T\Rightarrow P=\frac{2}{3}T\\ \frac{1}{3}T=\frac{2}{5}A\Rightarrow A=\frac{5}{6}T\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{3}T+T+\frac{5}{6}T=180\Rightarrow\frac{4T+6T+5T}{6}=180\Rightarrow T=72$$

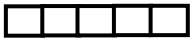
Como Tales tiene 72 piedras, Pitágoras tiene $\frac{72\cdot 2}{3}=48$.

También se puede resolver usando únicamente las fracciones.
Como un cuarto de las piedras de *P* son un sexto de las *T* podemos representar sus piedras así:

Pitágoras:

Tales: 

Como un tercio de las piedras de *T* son dos quintos de las de *A*, podemos representar las piedras de *A* así:

Arquímedes: 

Es decir, entre los tres suman 15 rectangulitos que hacen un total de 180 piedras. Por tanto, cada rectangulito representa 180:15 = 12 piedras, por lo que Pitágoras tiene 4·12 = 48 piedras.

**18.(A)** Como 3·5·7 es 105, el número que nos piden tiene que ser múltiplo de 105. El menor múltiplo de 105 formado por las cifras 3, 5 y 7 es 105·7 = 735.
Como 105 = 3·5·7, 735 es 3·5·7·7, por lo que 735 es múltiplo de 49.

**19.(A)** Observamos que la C número 1 tiene 3 palitos; la número 2, 7 palitos; la número 3, 11 palitos; de modo que para pasar de una C a la siguiente, Centésima necesita añadir 4 palitos.
Comenzando a contar desde la primera C:
Para construir la C número 10 necesitará pasar 9 veces de una C a otra, por lo que el número de palitos será $3 + 9 \cdot 4 = 39$.
Para construir la C número 100 necesitará pasar 99 veces de una C a otra, por lo que el número de palitos será $3 + 99 \cdot 4 = 399$.
Así que, necesitará en total $39 + 399 = 438$ palitos.

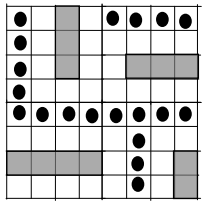
**20.(C)** La carta imposible de conseguir es la C, pues todas las demás se consiguen girando un múltiplo de 90º respecto del centro del cuadrado.
Observa que la carta C es la imagen en un espejo del as de espadas.

**21.(D)** Si $x$ representa el tiempo empleado por Don Retorcido en completar la competición:
El número de sumas que resuelve Don Retorcido es $7x$.
El número de sumas que resuelve Comenúmeros es $5 \cdot (x + 14)$.
La ecuación que se corresponde con dicha situación es $7x = 5 \cdot (x + 14)$, obteniendo al resolverla que el tiempo empleado es 35 horas. Por ello, el número de sumas es $7 \cdot 35 = 245$.

**22.(E)** Si $\alpha$ representa el ángulo que tenemos que calcular:
El complementario se expresa como $(90^\circ - \alpha)$.
El suplementario se expresa como $(180^\circ - \alpha)$.
La ecuación que se corresponde con dicha situación es $(90^\circ - \alpha) + (180^\circ - \alpha) = 208^\circ$, obteniendo, al resolverla, que el ángulo buscado mide 31º.

**23.(E)** $A$ es 16 (es el único cuadrado perfecto entre 11 y 19)
$D$ es 12 (los múltiplos de 4 entre 11 y 19 son 12 y 16, pero $A = 16$)
$B$ es 18 (los múltiplos de 6 entre 11 y 19 son 12 y 18, pero $D = 12$)
$A + B + D = 46$. El único número válido que sumado con 46 da un múltiplo de cinco es 19 ($46 + 19 = 65$), así que $C$ es el número 19.

**24.(B)** El barquito sólo puede colocarse en la 1ª vertical, en 4 posiciones distintas; en la 6ª vertical, en 3 posiciones distintas; en la 1ª horizontal, en 3 posiciones distintas; en la 5ª horizontal, en 7 posiciones distintas.
En total, $4 + 3 + 3 + 7 = 17$ posiciones distintas.



**25.(E)** 3V: la única potencia de 6 con 3 cifras es 216.
3H1V: 2 porque en 1H y 1V va el mismo número.
3H: el único múltiplo de 11 que empieza con 2 y acaba en 6 es el 286.
2H2V: puede ser un 4 o un 6, pues tras descartar el 121 (la casilla 1H2V tendría que ser 10) los únicos cuadrados perfectos de tres cifras tienen un 4 o un 6 como cifra de las decenas. Si es un 6, la casilla 1H2V sería un 6, por lo que la 2H1V sería un 6 y el número 661 no es un cuadrado perfecto. Así que 2V es 848.
1H: el múltiplo de 11 de tres cifras que termina en 82 es el 682.
La cifra que hay en la casilla de Comenúmeros es un 6.

| | 1V | 2V | 3V |
|---|---|---|---|
| 1H | **6** | **8** | **2** |
| 2H | **8** | **4** | **1** |
| 3H | **2** | **8** | **6** |

# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel III*

**1. (C)** $2{,}018 \cdot 2017 - 10{,}17 \cdot 201{,}8 = \dfrac{2018 \cdot 2017}{1000} - \dfrac{1017 \cdot 2018}{1000} = \dfrac{2018\,(2017-1017)}{1000} = 2018$

**2. (C)** El triángulo es rectángulo:

$\hat{C} = 3\hat{A};\ \hat{B} = 4\hat{A} \Rightarrow \hat{A} + 3\hat{A} + 4\hat{A} = 8\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 22^\circ\,30'$

Entonces $\hat{C} = 3 \cdot 22^\circ 30' = 67^\circ\,30'$ y $\hat{B} = 4 \cdot 22^\circ 30' = 90^\circ$

**3. (E)** $2019n$, $n^2 + 2019$, $n^3$ y $n + 2018$ tienen distinta paridad según el valor de $n$. Sin embargo, $2n^3$ es par para todo valor de $n$, y, en consecuencia, $2n^3 + 2019$ es impar para todo valor de $n$.

**4. (B)** Si $a$ es la anchura de las cintas, la base de la cinta B es $a$, mientras que las bases de las cintas A y C son mayores que $a$. Como las tres cintas tienen la misma altura, la cinta de menor área es la que tiene menor base, B.

**5. (C)** Si los catetos del triángulo rectángulo isósceles miden $l$, la hipotenusa del triángulo mide $\sqrt{2} \cdot l$ , y la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados es

$$l^2 + l^2 + 2l^2 = 4l^2 = 72 \Rightarrow l^2 = 18 \Rightarrow A = \frac{l^2}{2} = 9\ \text{cm}^2.$$

**6. (D)** Si el lado del triángulo es $l$ y el del cuadrado es $l_c$ $3l = 2018 + 4l_c$ .
Como nos dicen que $l = l_c + d$, se cumple que

$3(l_c + d) = 2018 + 4l_c \Rightarrow d = \dfrac{2018 + l_c}{3}$

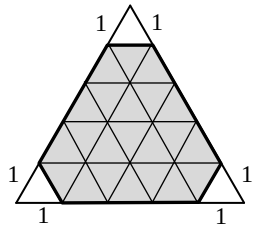
El valor entero positivo mínimo para $l_c$ es 1, por lo que el valor entero positivo mínimo para $d$ es $\dfrac{2019}{3} = 673$ . Esto implica que $d$ no puede tomar los 672 valores enteros positivos inferiores a 673.

**7. (D)** De la suma de las decenas sabemos que $x + y + z$ es un número de dos cifras, pero $x, y, z$ representan cifras distintas, por lo que $z$ debe valer 1. No puede ser 2, porque para que fuera así $x + y$ debería ser 18 y eso no es posible.
Al ser $z = 1$ en la suma de las unidades tenemos que $x + y + 1 = x + 10$.
Por tanto $y = 9$ y nos llevamos 1 de la suma de las unidades.
En la suma de las decenas tenemos que: $x + y + 1 + 1 = x + 11 = 19 \Rightarrow x = 8$

**8. (E)** Si el área del cuadrado es $a$ y el área del círculo es $b$, el área de la figura encerrada por la línea gruesa es $3a - (a - b) = 2a + b$. .

**9. (B)** La diferencia entre estar lleno al 30% a faltarle un 30% para estar lleno es un 40% del volumen total del barril. Como nos dicen que esa diferencia son 30 litros, el volumen total del barril es $V = \dfrac{30}{0{,}4} = 75\ L$

**10.(E)** El triángulo equilátero de lado 5 se puede dividir en 25 triángulos equiláteros iguales de lado 1, de los cuales 22 forman el hexágono. El área del hexágono es entonces $\dfrac{22}{25} = 0{,}88$ del área del triángulo, es decir, un 88%.




**11.(A)** Supongamos que los datos son, ordenados de menor a mayor, *a*, *b*, *c*, *d* y *e*. Si la mediana es una unidad mayor que la moda, $a = b =$ moda y $c = a + 1$. Nos piden el valor máximo de $e - a$. Como la mediana, *c*, es una unidad menor que la media, podemos escribir:

$$\frac{a+a+c+a+e}{5} = c+1 \Rightarrow 2a+c+d+e+ = 5c+5 \Rightarrow 2a+a+1+d+e = 5a+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d-a+e-a = 9$$

Como $d - a \geq 2$, debe ser $e - a \leq 7$.

**12.(E)** El área de la corona es $A = \pi\left(14^2 - 2^2\right) = 192\pi$. La mitad de dicha área es $96\pi$, que es el área de cualquiera de las dos coronas en las que queda dividida la original por la circunferencia intermedia. Si a la corona interior le añadimos el círculo pequeño inicial, de área $4\pi$, obtenemos el área del círculo intermedio: $96\pi + 4\pi = 100\pi$.
El radio de dicho círculo, entonces, es 10.

**13.(C)** Cogiendo 6 calcetines, en el peor de los casos, hay tres de cada color sin agujero y los tres con agujero. Si cogemos 7 calcetines, con seguridad habrá dos del mismo color sin agujero.

**14.(A)** Si llamamos $v_m$ a la velocidad media en *km/h* y *t* al tiempo en horas, la velocidad media prevista es $v_m - 5$ y el tiempo previsto es $t + 1$. Por tanto:

$$210 = v_m \cdot t = \left(v_m - 5\right)\left(t+1\right) \Rightarrow v_m - 5t - 5 = 0 \Rightarrow v_m = 5(t+1)$$

$$5(t+1)t = 210 \Rightarrow t^2 + t - 42 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 6 \Rightarrow v_m = 35\ km/h \\ t_2 = -7\ \textit{no tiene sentido} \end{cases}$$

**15.(D)** El 3 sí. 6 + (– 3) = 3. El 4 sí. 2 + 2 = 4. El 5 sí. 6 + (– 1) = 5. El 8 sí. 2 + 6 = 4 + 4 = 8. El único que no es posible es el 7.

**16.(A)** La menor distancia entre dos puntos, uno de cada circunferencia, es la correspondiente al segmento de diagonal entre las dos circunferencias. Dicho segmento mide dos veces la diagonal de un cuadrado de lado 1 menos dos veces el radio de las circunferencias, es decir $2\sqrt{2}-1$.

**17.(E)** El área sombreada se puede calcular sumando las áreas de los triángulos, todos ellos de altura 6 y bases $p$, $q$, $r$ y $s$. Por tanto, el área es $A = 3p + 3q + 3r + 3s = 27$. Dividiendo por 3 los dos miembros de la igualdad, tenemos: $p + q + r + s = 9$.

**18.(C)** Los posibles productos de dos números enteros distintos que dan 16 son $1 \times 16$ y $2 \times 8$, y los que dan 225 son $1 \times 225$, $3 \times 75$, $5 \times 45$ y $9 \times 25$. Como los números han de estar ordenados de menor a mayor, siendo los dos menores aquellos cuyo producto es 16, la única posibilidad es 2, 8, 9, 25, y su suma es 44.

**19.(B)** Los números de las tarjetas son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128. Si la suma de Bea es 31 unidades mayor que la de Carlos, $S_B = 31 + S_C$.

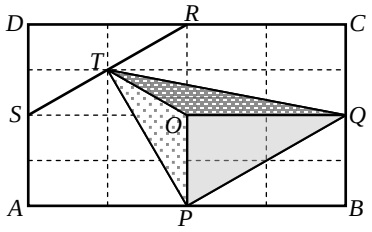
Como $S_B + S_C = 255 \Rightarrow 2 \cdot S_C = 224$ y $S_C = 112$ y $S_B = 143$. La suma de Bea solo es posible con las tarjetas 128, 8, 4, 2 y 1. Además sabemos que esta forma es única, porque el número 143 tiene una única representación en sistema binario, que es 10001111, mientras que 112 se representa en binario mediante 01110000. Así pues, Bea tiene 5 tarjetas (las correspondientes a los cinco unos de su suma en binario), mientras que Carlos tiene 3 tarjetas.

**20.(C)** Si llamamos "$a$" a la puntuación menor, "$b$" a la intermedia y "$c$" a la mayor, de la primera diana tenemos $a + 2b = 29$, de la segunda $a + 2c = 43$ y de la tercera $b + 2c = 47$. La cuarta diana, la que nos piden, corresponde a $a + b + c$.
De la segunda diana despejamos $a = 43 - 2c$. De la tercera despejamos $b = 47 - 2c$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la primera diana:

$$43-2c+2(47-2c)=29 \Rightarrow c=18 \Rightarrow \begin{cases} a=43-36=7 \\ b=47-36=11 \end{cases}$$

Y la suma $a + b + c = 7 + 11 + 18 = 36$.

**21.(B)** El triángulo $PQT$ se puede descomponer como suma de los triángulos $PQO$, $POT$ y $QOT$. El triángulo $PQO$ tiene área igual a $\frac{1}{8}$ del área del rectángulo y cada uno de los dos triángulos $POT$ y $QOT$ tiene área igual a $\frac{3}{32}-\frac{1}{32}=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$ del área del rectángulo. Por tanto, el triángulo $PQT$ tiene área igual a $\frac{1}{8}+\frac{2}{16}=\frac{1}{4}$ del área del rectángulo.



**22.(D)**. Si las dimensiones del ortoedro son *a*, *b* y *c*, el área total es $2ab + 2ac + 2bc = 22$ y la suma de las longitudes de todas sus aristas es $4(a + b + c) = 24$.
De esta última igualdad obtenemos $a + b + c = 6$, y elevando al cuadrado,
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 36$
$a^2 + b^2 + c^2 = 36 - 22 = 14$
La máxima distancia entre dos vértices del ortoedro corresponde a la diagonal del mismo, cuyo valor es $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{14}$ .

**23.(A)** Si llamamos *x* al lado del cuadrado, se debe cumplir que

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = r^2 = 1 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5}.$$

**24.(B)** El triángulo *BDE* se puede descomponer como suma de los triángulos *BDM* y *DME*, de modo que

$$A_{BDE} = A_{BDM} + A_{DME} = \frac{BD \cdot DM}{2} + \frac{DM \cdot DC}{2} = \frac{(BD + DC) \cdot DM}{2} = \frac{BC \cdot DM}{2}$$

Como *DM* es la mitad de la altura del triángulo *ABC* y *BC* es la base del triángulo *ABC*, el área del triángulo *BCE* es la mitad del área del triángulo *ABC*, es decir, $\frac{24}{2} = 12$ .

**25.(A)** Si *a* es el número de puntos azules, el número de puntos verdes es $2018 - a$.

La fracción que corresponde a cada punto verde es $\frac{a}{2018 - a}$, mientras que la que corresponde a cada punto azul es $\frac{2018 - a}{a}$. La suma de todas las fracciones es:

$$(2018 - a) \cdot \frac{a}{2018 - a} + a \cdot \frac{2018 - a}{a} = a + 2018 - a = 2018 .$$

# XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

*Soluciones 2ª Fase Nivel* IV

**1. (B)** Como el área del rectángulo *ABCD* es el doble del área sombreada, tenemos que $60 = 2 \cdot 6 \cdot (6 - PX)$, por tanto $PX = 1$.

**2. (D)** Si en todas las tarjetas estuviera escrito el 4, la suma de las 18 tarjetas sería 72 $(4 \cdot 17 + 4)$, para encontrar el siguiente múltiplo de 17 nos faltarían 13. Como cada tarjeta de 5 aporta una unidad más que la tarjeta de 4, entonces nos harán falta 13 tarjetas de 5. Por tanto, 13 tarjetas con 5 y 5 tarjetas con 4.

**3. (D)** Completando los cuadraditos tenemos

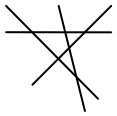
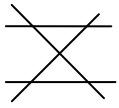
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 26 | $52 - x$ | $\frac{60 - x}{2}$ | 8 |

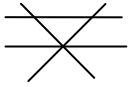
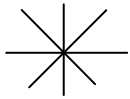
La tercera casilla es $52 - x$ porque $26 = \frac{x + 52 - x}{2}$

La cuarta casilla es $\frac{60 - x}{2}$ porque $\frac{52 - x + 8}{2} = \frac{60 - x}{2}$

Y como la tercera casilla es la media de la segunda y la cuarta, entonces $52 - x = \frac{26 + \frac{60 - x}{2}}{2}$, cuya solución es $x = 32$.

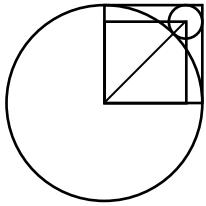
**4. (A)** Son cuadrados perfectos todos los pares, es decir, 50, y de los impares también son cuadrados perfectos $1^1$, $9^9$, $25^{25}$, $49^{49}$, $81^{81}$, ya que aunque el exponente sea impar la base es un cuadrado perfecto. En total 55.

**5. (D)** Pueden ser: 6 puntos  o 5 puntos 

o 3 puntos  o 1 punto . 

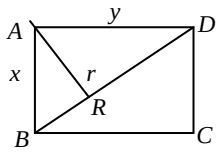
Por tanto, no puede ser 2.

**6. (C)** Nos ayudamos del cuadrado interior cuyos vértices opuestos son los centros de las dos circunferencias. El lado de este cuadrado mide $10-r$ y la diagonal mide $10+r$. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $(10+r)^2=(10-r)^2+(10-r)^2$, resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $r_1=30+20\sqrt{2}$ (esta no puede ser ya que el radio de la circunferencia pequeña sería mayor que el de la grande) y $r_2=30-20\sqrt{2}$.



Comparando con el enunciado $\left(a-b\sqrt{2}\right)$, tenemos que $a=30$ y $b=20$.
Por lo tanto $a+b=50$.

**7. (B)** Como *r* y *s* dividen en tres trozos iguales de 1 cm a la diagonal *BD*, significa que *BD* mide 3 cm, *BR* 1 cm y *RD* 2 cm.
Nos fijamos en el triángulo *ABD* que es rectángulo y tiene dibujada la altura sobre la hipotenusa. Así que aplicando el teorema del cateto $x^2=1\cdot 3\Rightarrow x=\sqrt{3}$.




Del mismo modo $y^2=2\cdot 3\Rightarrow y=\sqrt{6}$. Por tanto, el área del rectángulo será $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=3\sqrt{2}\approx 4{,}2$ cm$^2$.

**8. (B)** Observando la expresión vemos que para números muy grandes no se cumple ya que $n^4>n^3$. Por tanto, hay que ver dónde se produce ese cambio. Las expresiones $n^4+6n$ y $6n^3+n^2$ serán iguales si $n=1$ y $n=6$. Comprobamos que $n=2$ cumple la condición ya que $2^4+6\cdot 2<6\cdot 2^3+2^2$, así que serán todos los valores entre 1 y 6; es decir, 2, 3, 4 y 5. Por tanto, cuatro valores.

**Otro método.** Resolvemos la inecuación

$$n^4+6n<6n^3+n^2\Leftrightarrow n^4-6n^3<n^2-6n\Leftrightarrow n^3(n-6)<n(n-6)$$

Si $n=1$ o $n=-1$ o $n=6$ se verifica la igualdad.
Si $n>6$, simplificando se obtiene $n^3<n$ que no se verifica para ningún valor de *n*.
Si $n<6$, simplificando resulta $n^3>n$ que solo se verifica para los enteros 2, 3, 4 y 5.

**9. (D)** Aplicamos las propiedades de los logaritmos

$$\log 2^a+\log 3^b+\log 5^c+\log 7^d=2018\Rightarrow \log\left(2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\right)=2018$$

$\Rightarrow 2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d=10^{2018}=2^{2018}\cdot 5^{2018}$. Comparando las potencias tenemos $a=2018$, $b=0$, $c=2018$ y $d=0$. Por tanto, la suma pedida es 4036.

**10.(B)** Como el arco es un 25% de su longitud, el sector circular correspondiente a ese ángulo será un cuarto del círculo y el ángulo central será de 90º. El área de dicho sector circular (de radio 2) será $A=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi$. Ahora consideramos el triángulo que conseguimos de restar al sector circular el segmento circular. Ese triángulo es rectángulo con catetos iguales al radio del círculo, por tanto el área del triángulo es 2. La diferencia entre el área del sector circular y el área del triángulo será el área del segmento circular (que es la mitad del área pedida), $A=\pi-2$, por tanto, el área pedida será $2\pi-4$.

**11.(E)** Llamemos *a* a las decenas y *b* a las unidades del número en cuestión. La condición del enunciado asegura que $a\cdot b+a+b=10a+b$. Operando llegamos a que $a\cdot b=9a$, por tanto, $b=9$. El número en cuestión podría ser, 19, 29, 39,…, 99.

**12.(E)** Se verifica que $\cos\alpha=tg\alpha$, por tanto $\cos\alpha=\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=sen\alpha$. El valor de la expresión pedida $\frac{1}{sen\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{1}{sen\alpha}+\left(\cos^2\alpha\right)^2=\frac{1}{sen\alpha}+sen^2\alpha$. Utilizando la relación fundamental tenemos $\frac{1}{sen\alpha}+1-\cos^2\alpha$, pero como $\cos^2\alpha=sen\alpha$, entonces, $\frac{1}{sen\alpha}+1-sen\alpha=\frac{1+sen\alpha-sen^2\alpha}{sern\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+sen\alpha}{sen\alpha}$, por tanto, $\frac{sen\alpha+sen\alpha}{sen\alpha}=2$.

**13.(C)** $\left|x-\left|2x+1\right|\right|=3\Rightarrow\begin{cases}\left|x-2x-1\right|=3 \quad \text{si} \quad x>-\frac{1}{2}\\ \left|x+2x+1\right|=3 \quad \text{si} \quad x\le-\frac{1}{2}\end{cases}$.

De la primera ecuación $\left|-x-1\right|=3$ sacamos:

i) $-x-1=3$ de donde $x=-4$. Esta no vale.

ii) $x+1=3$ de donde $x=2$. Esta sí vale.

De la segunda ecuación $\left|3x+1\right|=3$ sacamos:

i) $3x+1=3$ de donde $x=\frac{2}{3}$. Esta no vale.

ii) $-3x-1=3$ de donde $x=-\frac{4}{3}$. Esta sí vale.

Por tanto, tiene 2 soluciones.

**14.(C)** La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es $S = 180\cdot(n-2)$ donde $n$ es el número de lados del polígono.
Como el polígono convexo tiene exactamente tres ángulos obtusos, la suma de dichos ángulos tendrá un máximo no alcanzable de $180^\circ\cdot 3 = 540^\circ$. Por tanto, podemos suponer que la suma es, como mucho, $540^\circ - \varepsilon$ y, como poco, $270^\circ + \varepsilon$. Analicemos los polígonos en función de sus lados:

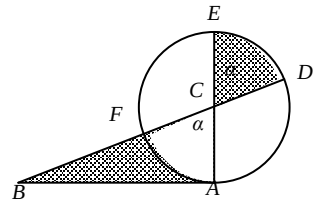
Polígono de 4 lados:
La suma de los ángulos interiores mide $180^\circ\cdot 2 = 360^\circ$, por lo que el cuarto ángulo será siempre agudo al medir, como mucho, $360^\circ - (270^\circ + \varepsilon) = 90^\circ - \varepsilon$. Por tanto, es posible un polígono convexo de 4 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.

Polígono de 5 lados:
La suma de los ángulos interiores mide $180^\circ\cdot 3 = 540^\circ$, por lo que la suma de los dos ángulos restantes medirá, como poco, $540^\circ - (540^\circ - \varepsilon) = \varepsilon$ . Por tanto, es posible un polígono convexo de 5 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.

Polígono de 6 lados:
La suma de los ángulos interiores mide $180^\circ\cdot 4 = 720^\circ$, por lo que la suma de los tres ángulos restantes medirá, como poco, $720^\circ - (540^\circ - \varepsilon) = 180^\circ + \varepsilon$. Por tanto, es posible un polígono convexo de 6 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.

Polígono de 7 lados:
La suma de los ángulos interiores mide $180^\circ\cdot 5 = 900^\circ$, por lo que la suma de los cuatro ángulos restantes medirá, como poco, $900^\circ - (540^\circ - \varepsilon) = 360^\circ + \varepsilon$. Por tanto, es necesario que uno de los cuatro ángulos restantes mida más de $90^\circ$; por lo que no es posible un polígono convexo de 7 lados con exactamente 3 ángulos obtusos.
En conclusión, el máximo número de lados que puede tener un polígono convexo con exactamente 3 ángulos obtusos es 6.

**15.(B)** El ángulo $D\hat{C}E = A\hat{C}B = \alpha$ , al ser opuestos por el vértice.




$$A_{\text{Sector } ECD} = \frac{\pi r^2 \alpha}{2\pi} = \frac{r^2\alpha}{2} \quad \text{y}$$

$$A_{\text{Recinto } ABF} = \frac{AB\cdot r}{2} - \frac{r^2\alpha}{2}$$

Como $A_{\text{Sector } ECD} = A_{\text{Recinto } ABF} \Rightarrow \frac{r^2\alpha}{2} = \frac{AB\cdot r}{2} - \frac{r^2\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2\alpha = \frac{AB\cdot r}{2} \Rightarrow r\alpha = \frac{AB}{2} \Rightarrow \frac{AB}{r} = 2\alpha \Rightarrow \tan\alpha = 2\alpha$$

**16.(C)** Como se tiene que $a \cdot b = a^b$ y $\dfrac{a}{b} = a^{3b} \Rightarrow$ (multiplicando ambas igualdades)

$a^2 = a^{4b} \Rightarrow 2 = 4b \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

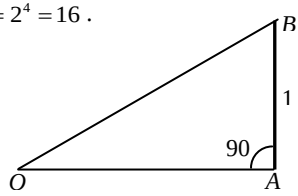
Sustituyendo el valor de $b$ en la primera ecuación se tiene que $a \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{a} \Rightarrow$

$$\frac{a^2}{4} = a \Rightarrow a^2 = 4a \Rightarrow a^2 - 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

Como $a > 1 \Rightarrow a = 4$. Por tanto, $b^{-a} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$.

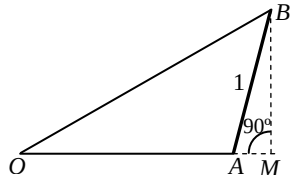
**17.(D)** Analicemos los posibles casos:

Caso 1: $O\hat{A}B = 90^o$




$$sen\left(30^o\right) = \frac{1}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = 2$$

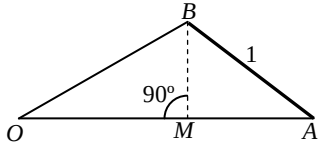
Caso 2: $O\hat{A}B > 90^o$




$$sen30^o = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$

Caso 3: $O\hat{A}B < 90^o$




$$sen30^o = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$

Por tanto, la longitud máxima posible del segmento $OB$ es 2.

**18.(B)** Como $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + ...}}}} \Rightarrow a^2 = 6 + a$ con $a > 0, \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow a = 3$

Como $b = \sqrt{9 - \sqrt{9 - \sqrt{9 - \sqrt{9 - ...}}}} \Rightarrow b^2 = 9 - b$ con $b > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + b - 9 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{-1 + \sqrt{37}}{2}$

Por tanto, $ab = 3 \cdot \left(\dfrac{-1 + \sqrt{37}}{2}\right) = \dfrac{3}{2}\left(\sqrt{37} - 1\right)$

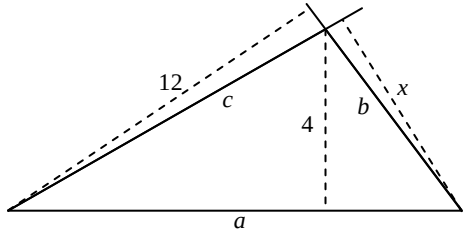
**19.(B)** Si llamamos $a$, $b$ y $c$ a los lados y $x$ a la altura desconocida, se tiene que el área del triángulo se puede calcular de tres maneras distintas: $A = \frac{4a}{2} = \frac{12b}{2} = \frac{x \cdot c}{2}$.

$\frac{4a}{2} = \frac{12b}{2} \Rightarrow a = 3$ $\qquad$ $\frac{12b}{2} = \frac{x \cdot c}{2} \Rightarrow c = \frac{12b}{x}$

Por otro lado, sabemos que en cualquier triángulo, la suma de dos lados cualesquiera tiene que ser mayor que el tercero, por lo que se tiene que $c + b > a$.

$c + b > a \Rightarrow c + b > 3b \Rightarrow c > 2b \Rightarrow \frac{12b}{x} > 2b \Rightarrow 12b > 2b \cdot x \Rightarrow x < 6$

Por lo tanto, el valor máximo que puede tomar la tercera altura es 5 cm.




**20.(E)** Comparamos los elementos dos a dos:

- Comparamos $A = (\cos\alpha)^{\cos\alpha}$ con $C = (\cos\alpha)^{sen\alpha}$ (igual base):

  Como $\cos\alpha \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ será menor aquel que tenga mayor exponente.

  Sabemos que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < sen\alpha \Rightarrow C < A$.

- Comparamos $A = (\cos\alpha)^{\cos\alpha}$ con $B = (sen\alpha)^{\cos\alpha}$ (igual exponente):

  Sabemos que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha < sen\alpha \Rightarrow A < B$.

  Por tanto, $C < A < B$.

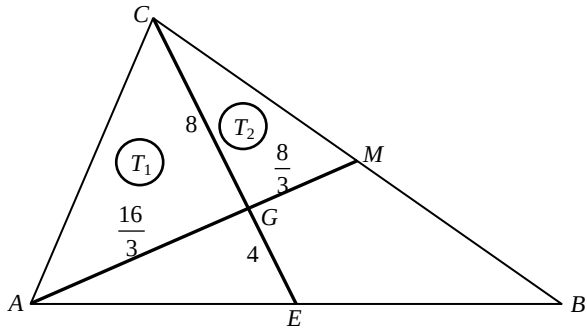
**21.(D)** Las medianas de un triángulo se cortan en el baricentro. El baricentro dista del vértice el doble que del punto medio del lado opuesto. Por tanto, la mediana que mide 8 cm queda dividida en dos segmentos que miden $\frac{16}{3}$ y $\frac{8}{3}$ respectivamente y la mediana que mide 12 cm queda dividida en dos segmentos que miden 8 y 4 respectivamente, tal y como se indica en el dibujo.

Como las medianas forman un ángulo recto, los triángulos $T_1$ y $T_2$ son rectángulos. Calculemos sus áreas:

$$Area_{T_1} = \frac{\frac{16}{3}\cdot 8}{2} = \frac{64}{3}\ \text{cm}^2 \quad \text{y} \quad Area_{T_2} = \frac{\frac{816}{3}\cdot 8}{2} = \frac{32}{3}\ \text{cm}^2$$

Por tanto, $Area_{AMC} = Area_{T_1} + Area_{T_2} = \frac{64}{3} + \frac{32}{3} = 32\ \text{cm}^2$

Como la mediana *AM* divide al triángulo *ABC* en dos triángulos de igual área (*AMC* y *ABM*), se tiene que $Área_{ABC} = 64\ \text{cm}^2$.




**22.(C)** Como $a < b < c \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$.

Es claro que $a \neq 1$ ya que si $a = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ y eso no es posible ya que *b* y *c* son enteros positivos.

Si $a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c+b}{bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2c + 2b = bc \Rightarrow 2c - bc = -2b \Rightarrow$

$\Rightarrow c(2-b) = -2b \Rightarrow c = \frac{-2b}{b-2} \Rightarrow c = \frac{2b}{b-2}$

. Por tanto, si $a = 3 \Rightarrow c = \frac{6}{1} = 6$.

En conclusión, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ y $2 + 3 + 6 = 11 \Rightarrow a + b + c = 11$.

**23.(A)** P(Acertar ninguna pregunta) $P(x=0)=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{64}{125}$

P(Acertar 1 pregunta) $P(x=1)=3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{48}{125}$

P(Acertar 2 preguntas) $P(x=2)=3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$

P(Acertar 3 preguntas) $P(x=3)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{125}$

Por tanto, lo más probable es que el número de aciertos sea 0.

**24.(A)** Del 1 al 100 hay 10 números (10, 20, …, 90, 100).
Del 101 al 200 hay 19 números (101, 110, 102, 120, …, 109, 190,200).
Del 201 al 1000 hay $19\cdot 9=171$ números.
Del 1001 al 1100 hay $10\cdot 10=100$ números.
Del 1101 al 2000 hay $19\cdot 9=171$ números.
Del 2001 al 2018 hay 18 números.
Total 10 + 171 + 100 + 171 + 18 = 470.

**25.(A)** Si $senx+\cos x=a\Rightarrow (senx+\cos x)^2=a^2\Rightarrow sen^2x+2senx\cos x+\cos^2 x=a^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 2senx\cos x+1=a^2\Rightarrow senx\cos x=\frac{a^2-1}{2}.$

$1=\left(sen^2x+\cos^2 x\right)^2=sen^4x+2sen^2x\cos^2 x+\cos^4 x\Rightarrow$

$\Rightarrow sen^4x+\cos^4 x=1-2sen^2x\cos^2 x\Rightarrow sen^4x+\cos^4 x=1-2\cdot\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2\Rightarrow$

$\Rightarrow sen^4x+\cos^4 x=1-\frac{\left(1-a^2\right)^2}{2}.$

# Participantes y relación de ganadores del XXII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

Una vez más en la primera fase celebrada en los propios centros se superó la cifra de 45 000 estudiantes de 489 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3715 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3335. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página (https://www.concursoprimavera.es) de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | NIVEL 2 | | NIVEL 3 | | NIVEL 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P y 6º P | | 1º ESO, 2º ESO | | 3º ESO, 4º ESO | | 1º B, 2º B | |
| nº de participantes | 216 | 536 | 428 | 644 | 450 | 484 | 382 | 195 |
| Totales por nivel | 752 | | 1072 | | 934 | | 577 | |

Los tres, y en algún caso cuatro, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Diego Martínez Casillas | (6º Primaria) CPR Alkor |
| 2. | Juan Ignácio de Dios Coba | (5º Primaria) CPR San Agustín |
| 3. | Iñigo Fernández Cubián | (6º Primaria) CPR Sagrado Corazón |
| 3 | Diego López Aragón | (6º Primaria) CP La Navata |

**NIVEL II**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Diego Recio Calvo | (2º ESO) IES Clara Campoamor |
| 2. | Álvaro Gamboa Rodríguez | (1º ESO) IES Ciudad de los Poetas |
| 3. | Juan Barquero Draper | (2º ESO) CPR San Agustín |
| 3. | Raquel Izquierdo Pato | (2º ESO) IES JoséLuis Sampedro |
| 3. | Enrique Matorras Muñoz | (2º ESO) CPR Laude Fontenebro Schol |

**NIVEL III**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Jorge Maceín Sanz | (4º ESO) IES San Juan Bautista |
| 1. | Nicolás Rey Rodríguez | (4º ESO) CPR Fray Luis de León |
| 1. | Gabriel Valery Salov | (4º ESO) IES Juan de Herrera |
| 2. | Jimena Lozano Simón | (3º ESO) Colegio Alemán de Madrid |

**NIVEL IV**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Alejandro Epelde Blanco | (2º Bchto) Montessori School Los Fresnos |
| 2. | Pablo Soto Martín | (1º Bchto) IES San Mateo |
| 3. | Martín Gómez Abejón | (2º Bchto) IES Ramiro de Maeztu |

## RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las **tres mejores puntuaciones** de cada centro en cada nivel)

XXII CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2018

| NIVEL I | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 308 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 301 |
| CPR SAN AGUSTÍN | Madrid | 289 |
| CP CIUDAD DE ROMA | Madrid | 275 |
| CPR COLEGIO ESTUDIANTES LAS TABLAS | Madrid | 274 |
| CP LA NAVATA | Galapagar | 274 |
| CPR COLEGIO ALBORADA | Alcalá de Henares | 268 |
| CP BLAS DE OTERO | Coslada | 261 |
| CPR MENESIANO | Madrid | 260 |
| CPR AMANECER | Alcorcón | 255 |

| NIVEL II | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| CPR SAN AGUSTÍN MADRID | Madrid | 298 |
| CPR LUYFE RIVAS | Rivas-Vaciamadrid | 275 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 268 |
| CPR AGUSTINIANO | Madrid | 261 |
| IES AVENIDA DE LOS TOREROS | Madrid | 258 |
| CPR NUESTRA SRA DEL BUEN CONSEJO | Madrid | 257 |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 254 |
| CPR ALARCÓN | Pozuelo de Alarcón | 251 |
| IES MIRASIERRA | Madrid | 243 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 235 |

| NIVEL III | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| COLEGIO ALEMÁN DE MADRID | Madrid | 315 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 305 |
| CPR JOYFE | Madrid | 285 |
| CPR SAN AGUSTÍN | Tres Cantos | 274 |
| IES CAMILO JOSÉ CELA | Pozuelo de Alarcón | 268 |
| IES SAPERE AUDE | Villanueva del Pardillo | 259 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 252 |
| IES MARGARITA SALAS | Majadahonda | 248 |
| CPR EL VALLE | Madrid | 248 |
| CPR DIVINA PASTORA | Madrid | 243 |

| NIVEL IV | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 286 |
| IES SAN MATEO | Madrid | 286 |
| CPR SAN JOSÉ DEL PARQUE | Madrid | 235 |
| CPR CORAZÓN DE MARÍA | Madrid | 231 |
| IES CERVANTES | Madrid | 223 |
| IES EL BURGO LAS ROZAS | Las Rozas de Madrid | 221 |
| CPR LICEO EUROPEO | Alcobendas | 202 |
| IES LUIS DE GÓNGORA | Torrejón de Ardoz | 199 |
| KING´S COLLEGE | Tres Cantos | 188 |
| IES MARGARITA SALAS | Majadahonda | 183 |

# XXXVI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 19 de mayo de 2018

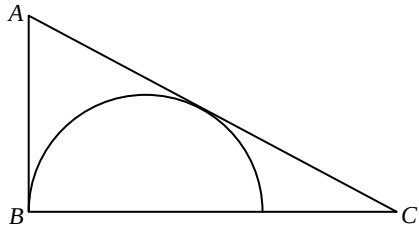
**NIVEL I (3º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

Encuentra el mayor número de cuatro cifras, **[*abcd*]**, tal que la suma de ellas sea igual al producto de las dos últimas e igual también al número formado por las dos primeras, es decir, $\boldsymbol{a + b + c + d = c \cdot d = [ab]}$.

**Problema 2.** (7 puntos)

En el triángulo *ABC*, de lados *AB* = 85, *BC* = 75 y *CA* = 40, una semicircunferencia tangente a los lados *AB* y *AC* tiene su diámetro sobre el lado *BC*. Calcula el radio de esta semicircunferencia.



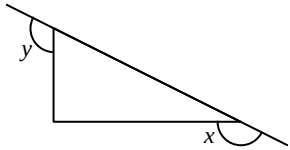

Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto) La suma de dos números es 7 y la diferencia entre ellos es 2. ¿Cuál es el valor de su producto?

**Problema 2A.** (1,5 puntos**)** Sea *T* la respuesta del problema anterior y $k = 4T$.
En una clase de la Universidad hay *k* estudiantes. Hay algunas parejas (chico-chica) que se sientan juntos. En concreto, un tercio de los chicos están sentados con una chica y la mitad de las chicas están sentadas con un chico. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

**Problema 3A.** (2 puntos) Sea *T* la respuesta del problema anterior.
En el triángulo *ABC*, *D* es el punto medio del lado *AB*, *E* es el punto medio de *DB* y *F* es el punto medio del lado *BC*. Si el área del triángulo *AEF* es *T*, ¿cuál es el área del triángulo *ABC*?

**Problema 1B.** (1 punto) El triángulo de la figura es rectángulo. ¿Cuál es la suma de los ángulos $x$ e $y$?

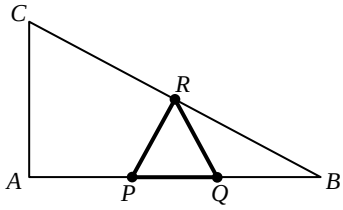



**Problema 2B.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{10}$.

¿Cuál es la cifra de las unidades del número $k^1 + k^2 + k^3 + \ldots + k^k$?

**Problema 3B.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = T - 1$.
Un número tiene $k$ divisores y su mitad y su tercera parte tienen cuatro divisores cada una. Si la suma de todos los divisores del número es 216, ¿cuál es dicho número?

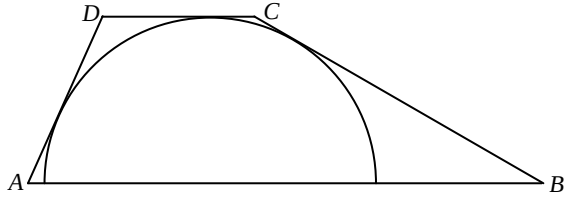
**Problema 4.** (5 puntos) Sea $a$ la respuesta del problema 3A y $b$ la respuesta del problema 3B. El triángulo $ABC$ de la figura es rectángulo en $A$ y $R$ es el punto medio de la hipotenusa $BC$. Sobre el cateto mayor, $AB$, se marca el punto $P$ tal que $CP = BP$ y sobre el segmento $BP$ se marca el punto $Q$ de manera que el triángulo $PQR$ es equilátero. Si el área del triángulo $ABC$ es $b - a$, ¿cuál es el área del triángulo $PQR$?



**NIVEL II (4º de E.S.O.)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)
Todas las cifras del número entero positivo $n$ son treses, ($n$ = 333…3), además $n$ es divisible entre 383. Cuando dividimos el entero $\frac{n}{383}$ entre 1000, ¿qué resto obtenemos?

**Problema 2.** (7 puntos)
En el trapecio $ABCD$ de bases $AB$ y $CD$ trazamos un semicircunferencia cuyo centro está en el lado $AB$ y es tangente a los otros tres lados del trapecio.
Si $AB = 289$ y $BC = 196$, calcula la longitud de $AD$.




Segunda parte (1 hora 30 minutos)

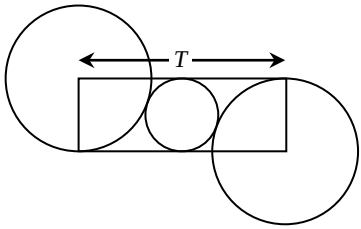
**Problema 1A.** (1 punto) Patricia tiene el mismo número de hermanas que de hermanos. Cada uno de sus hermanos tiene el 50 % más de hermanas que de hermanos (es decir, que si tuviera por ejemplo 8 hermanos tendría 12 hermanas). ¿Cuánto suman en total el número de hermanos y de hermanas de la familia?

**Problema 2A.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.
Calcula la cifra de las decenas del número $T^T$.

**Problema 3A.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.
En el rectángulo $ABCD$ de lados $AB = 15T$ y $BC = 10T$, marcamos un punto $P$ en su interior tal que $CP = 9T$ y $DP = 12T$. Determina la longitud de $AP$.

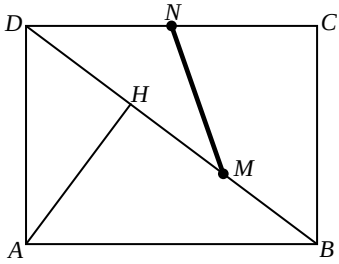
**Problema 1B.** (1 punto) En una bolsa hay 49 bolas azules y 1 roja. ¿Cuántas bolas azules debemos sacar de la bolsa para que el 90 % de las que queden sean azules?

**Problema 2B.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior. En la figura puedes ver un rectángulo de longitud $T$ y anchura igual al radio de las dos circunferencias grandes que son tangentes a la pequeña, siendo ésta tangente a su vez a dos lados del rectángulo. Calcula la anchura del rectángulo.




**Problema 3B.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $n = T^2$.
Calcula el valor de $m$ para que el área de la región formada por los puntos $(x, y)$ tales que $y \geq \frac{|x|}{2}$ e $y \leq m|x| + n$ sea $80n$.

**Problema 4.** (5 puntos) Sea $a$ la respuesta del problema 3A y $b$ la respuesta del problema 3B. En el rectángulo $ABCD$ de lados $AB = a + b$ y $BC = 3|b|$, la perpendicular a la diagonal $BD$, trazada desde $A$, corta a $BD$ en el punto $H$. Si $M$ es el punto medio de $BH$ y $N$ el punto medio de $CD$, calcula la longitud del segmento $MN$.



**NIVEL III (1º de Bachillerato)** Primera parte (1 hora 30 minutos)

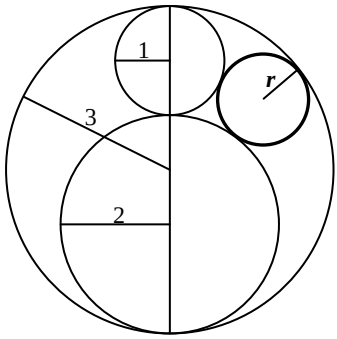
**Problema 1.** (7 puntos)

Separamos los números 1, 2, 3,…, 101 en dos conjuntos A y B. El conjunto A contiene *m* de ellos y el resto en el conjunto B. Si pasamos el número 40 del conjunto en el que está al otro la media aritmética de cada uno de los nuevos conjuntos aumenta en 0,5 respecto de la que tenía antes. Encuentra los dos posibles valores de *m*.

.

**Problema 2.** (7 puntos)

En la figura puedes observar cuatro circunferencias tangentes entre sí, tres de ellas de radios 1, 2 y 3. Calcula el radio *r* de la otra circunferencia, la más pequeña.




Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)

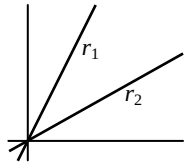
En un triángulo en el que la medida de cada uno de sus ángulos, en grados, viene dada por un número entero, se verifica que uno de sus ángulos es 30º mayor que la media de los otros dos. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tomar un ángulo de dicho triángulo?

**Problema 2A.** (1,5 puntos)

Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = \frac{T}{33}$.

La función $f(x) = \frac{cx}{2x+k}$ verifica que $f\left(f(x)\right) = x$ siempre que $x \neq \frac{-k}{2}$. ¿Cuál es el valor de $c$ ?

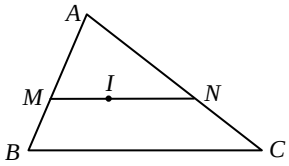
**Problema 3A.** (2 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = T + 7$.
En la figura se observan dos rectas $r_1$ y $r_2$ de ecuaciones $y = mx$ e $y = nx$ respectivamente.
Si el ángulo que forma la recta $r_1$ con el eje de abscisas es doble del que forma $r_2$ y la pendiente de $r_1$ es $k$ veces la pendiente de $r_2$, ¿cuál es el valor de $m \cdot n$?




**Problema 1B.** (1 punto)
Si escribes el número 888888 como producto de dos números de tres cifras cada uno, encuentra la diferencia entre estos dos números.

**Problema 2B.** (1,5 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = T - 36$.
Un círculo de área $A_1$ está contenido en otro de área $A_1 + A_2$. Si el radio de este segundo círculo es $k$ y los números $A_1$, $A_2$ y $A_1 + A_2$ están en progresión aritmética, calcula el radio del círculo de área $A_1$.

**Problema 3B.** (2 puntos)
Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $k = 3T^2$.
En el triángulo $ABC$ de la figura, $I$ es el punto de corte de las bisectrices (incentro) y el segmento $MN$, que pasa por $I$ es paralelo al lado $BC$. Si $AB = 3k$, $BC = 6k$ y $AC = 5k$, calcula el perímetro del triángulo $AMN$.




**Problema 4.** (5 puntos)
Sean $a$ y $b$ las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente.
La longitud de uno de los lados de un triángulo es $\frac{b}{a}$. De los otros dos, la longitud de uno de ellos es doble de la del otro. ¿Cuál es el mayor valor posible para el área de este triángulo?

## XVIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2018

**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** En la isla Colorín hay 15 casas numeradas del 1 al 15 y hay exactamente 15 caminos de **un solo sentido**. De cada casa sale un camino, y cada camino une dos casas. El primer día, en cada casa hay un duende que lleva escrito en su camiseta el número de la casa. El segundo día todos los duendes salen de la casa en la que están y, recorriendo el único camino posible, llegan hasta la casa que está al final del camino.
Después de este cambio la distribución quedó así:

| **Duende** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Casa** | 10 | 4 | 12 | 8 | 15 | 9 | 14 | 1 | 11 | 5 | 6 | 2 | 7 | 13 | 3 |

El tercer día los duendes vuelven a salir de la casa en la que están y recorren el camino hasta la casa siguiente, y el cuarto día vuelven a hacer lo mismo.
¿Hay algún duende que vuelve a su casa el cuarto día? Si es que sí, indica cuáles y si es que no, justifica la respuesta.

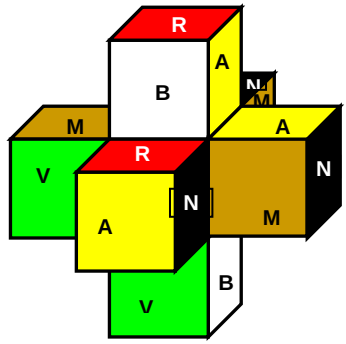
**2.** En una caja hay 45 euros en monedas de 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos. Si metiéramos en la caja una moneda de 5 céntimos, dos de 10 céntimos, tres de 20 céntimos y cuatro de 50 céntimos, entonces la caja tendría la misma cantidad de monedas de cada tipo. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay en la caja?

**3.** En el triángulo acutángulo *ABC*, sea *D* el punto del lado *AC* tal que *BD* es perpendicular a *AC* y sea *E* el punto del lado *AB* tal que *CE* es perpendicular a *AB*. Sabiendo las siguientes igualdades entre ángulos: $C\hat{B}D = 2A\hat{B}D$ y $A\hat{C}E = 3B\hat{C}E$, calcula las medidas de los tres ángulos del triángulo *ABC*.

**Nota:** Llamamos ángulo $P\hat{Q}R$ al ángulo agudo de vértice *Q* que forman los segmentos *PQ* y *QR*.

**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Con **siete cubos idénticos** he formado una bonita estrella como ves en el dibujo. La única regla que he respetado es que dos caras que se tocan no pueden estar pintadas del mismo color.

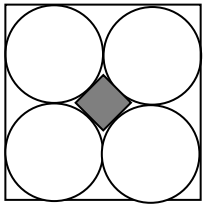



**A**marillo
**B**lanco
**M**arrón
**N**aranja
**R**ojo
**V**erde

Del cubo que está colocado más a la izquierda vemos dos caras, la de arriba de color marrón y la frontal de color verde. ¿Qué colores tienen las restantes caras: la de abajo; la del fondo; la de la izquierda; la de la derecha?

**2.** Cuatro amigos se encuentran en el interior de en una habitación cerrada con un candado que solo puede abrirse con una clave secreta. Ninguno sabe cómo ha llegado hasta ahí y el pánico empieza a invadirles.
De repente una voz les susurra: "Ahhh, la clave que abre el candado **es un número de siete cifras, ninguna de ellas repetida; cada cifra divide al número de la clave; y la clave es el mayor número que tiene esas cuatro propiedades**. Ahhh, solo contáis con quince minutos, si no,...". El pánico se apoderó de los amigos.
**a)** Averigua qué tres cifras no pueden formar parte del número misterioso.
**b)** Encuentra el número misterioso.
(La historia es triste, nunca nadie volvió a ver a los cuatro amigos)

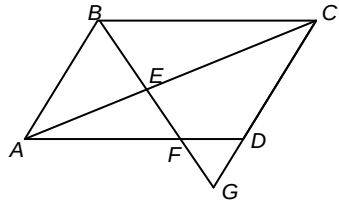
**3.** ¡Qué bonito dibujo! Un cuadrado grande de 4 cm de lado, cuatro círculos iguales tangentes entre ellos y otro cuadrado pequeñito tangente a los cuatro círculos. ¿Qué área tiene este cuadrado más pequeño?



**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato. (45 minutos)

**1.** Tenemos cuatro dados con caras del 1 al 6. Dos de ellos están equilibrados, pero los otros dos están trucados.
Uno de los dados trucados tiene la siguiente propiedad: la probabilidad del doble de un número es el doble de la probabilidad del número y la probabilidad del triple de un número es el triple de la del número.
En el otro dado la probabilidad del doble de un número es la mitad de la del número y la probabilidad del triple de un número es la tercera parte de la probabilidad del número.
En ambos dados ocurre que la probabilidad de sacar un 4 es igual a la probabilidad de sacar un 5.
Metemos nuestros cuatro dados en un cubilete y los lanzamos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 22?

**2.** En la figura ves un paralelogramo *ABCD*. El punto *G* está en la prolongación del lado *CD* y el segmento *BG* corta a la diagonal *AC* en el punto *E* y al lado *AD* en el punto *F*. Sabiendo que *BE* = 16 cm y *EF* = 12 cm, ¿cuántos centímetros mide el segmento *FG*?




**3.** La matrícula de un coche tiene solo cinco cifras, sin letras. Al instalarla, el propietario se equivocó y la puso al revés, lo de abajo para arriba y, ¡cosas de la simetría!, aún así, el número boca abajo tenía sentido y se podía leer. Debido a esto, el propietario no se dio cuenta de su error. Si la diferencia del número que ahora tenía y el original es 78633, ¿cuál es la matrícula correcta?
**Observación:** el número 1 en las matrículas de los coches se escribe l.

**PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** En la isla Colorín todos los camaleones eran rojos. Cada uno de ellos tiene exactamente un amigo o tiene exactamente 5 amigos. Un día, cada camaleón con exactamente un amigo se volvió amarillo y cada camaleón con exactamente 5 amigos se volvió verde. Resultó así que los que son amigos son de colores diferentes. Más tarde, 30 camaleones amarillos se volvieron verdes y 40 verdes se volvieron amarillos. De este modo resultó que los que son amigos son del mismo color. ¿Cuántos camaleones hay en la isla Colorín?

**2.** Del pentágono *ABCDE*, sabemos que $E = 150º$, que $AB = 17$ cm y $DE = 8$ cm, que los triángulos *ABC* y *CDE* son equiláteros. Calcula el perímetro del pentágono *ABCDE*.

**3.** Un juego consiste en escribir un número entero positivo en cada una de las seis caras de un cubo (puedes repetir números). Después hay que escribir en cada vértice del cubo el resultado de multiplicar los tres números que hay en las caras que coinciden en él y por último hay que sumar los ochos números que hay escritos en los vértices. El objetivo es que esta suma sea 105.
Da todas las posibles combinaciones ganadoras.

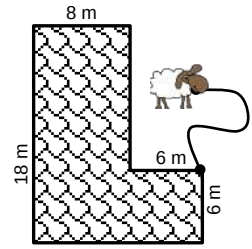
**4.** En cada casilla de una cuadrícula de $3 \times 3$ hemos escrito nueve números de tal manera que cada número es el doble del que tiene justo debajo y es la tercera parte del que tiene justo a su derecha. Si la suma de todos ellos es 728, escribe la cuadrícula con sus nueve números.

**PRUEBA INDIVIDUAL** **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

**1.** Todavía queda mucho para que llegue el verano. Mientras tanto…
En la suma que ves, letras diferentes representan números diferentes. Sabiendo que **G = J – 1**, ¿qué número se esconde detrás de **AGOSTO**?

| |
|---|
| J U N I O |
| + J U L I O |
| A G O S T O |

**2.** Francisquita ha atado a su ovejita Beeé en el vértice de su casa en forma de **L**. Si la cuerda mide 12 metros, ¿en qué superficie, en $m^2$, de su jardín puede pastar la ovejita Beeé?

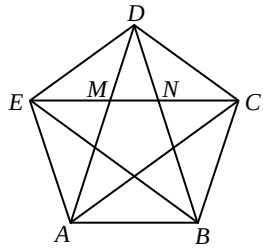



**3.** Una señora reparte las manzanas de su huerta a las personas que le van pidiendo de la siguiente forma:
Al primero que llega le da la mitad de las manzanas más media manzana.
Al segundo, la mitad de las que quedan más media manzana.
Al tercero, la mitad de las que quedan más media manzana y así sucesivamente con los siguientes.
Cuando llega el décimo y recoge las manzanas que le corresponden, éstas se acaban.
¿Cuántas manzanas tenía la señora?

**4.** En un examen de matemáticas, la niña Centésima contestó bien a 100 preguntas y por ello obtuvo una puntuación de 20 000 puntos. Por cada pregunta bien contestada le otorgaban puntos en función del tipo: si era de geometría le daban 4000 puntos; si era de álgebra, 800 puntos; y si era de aritmética, 10 puntos. ¿Cuántas preguntas de cada clase contestó bien la niña Centésima?

**PRUEBA INDIVIDUAL** **Bachillerato** (90 minutos)

**1.** En el pentágono regular de la figura, $MN = 1$.
Determina las longitudes de los segmentos: $EM$, $EC$ y $ED$.




**2.** Determina los vértices y el área del rectángulo de mayor área inscrito entre las parábolas $y = 12 - x^2$ , $y = x^2 - 12$ .

**3.** Las bases de la Asociación *Mathandyou* dicen que para tratar los diferentes asuntos de su interés se formarán pequeñas comisiones de 10 socios cada una con la condición de que no haya dos comisiones que tengan más de un socio en común. Este año se han formado 40 comisiones. Demuestra que la asociación tiene más de 60 socios. ¿Cuántos socios tiene como mínimo la asociación?

**4.** Elena es muy hábil multiplicando por 2, y a Nicolás le gusta más dividir entre 3. Un día toman el número $\frac{729}{64}$ y comienza Elena multiplicándolo por 2, después Nicolás divide el resultado entre 3 y siguen así alternativamente formando una sucesión.

a) ¿Cuál de los dos obtendrá el número 1?
b) Si continuaran indefinidamente, ¿se podría calcular la suma de los infinitos términos? En caso afirmativo, calcúlala y si no fuera posible, justifícalo.

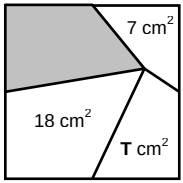
**PRUEBA POR RELEVOS** (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

**1A.-** En la isla Colorín viven 90 tortugas y la media de sus edades es de 790 años. La media de las edades de las tortugas hembra es de 810 años y la de las tortugas macho es de 720 años. ¿Cuántas tortugas macho hay en la isla?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea **T** la respuesta del problema 2B.
En un cuadrado hemos señalado un punto interior y lo hemos unido con los puntos medios de los lados del cuadrado.
¿Qué área tiene la región sombreada?




**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea **T** la respuesta del problema 2C.
La carretera de las Matemáticas es una larguísima recta que pasa por ocho bonitas ciudades, situadas de Sur a Norte en este orden: Apotema; Baricentro; Cálculo; Divisor; Ecuación; Factor; Grado; Hipotenusa. Completa la tabla de distancias, en km, entre esas ciudades:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Apotem** | | | | | | | |
| | **Baricentro** | | | | | | |
| | | **Cálculo** | | | | | |
| **28** | | | **Divisor** | | | | |
| | **27** | | | **Ecuación** | | | |
| **43** | | **25** | | | **Factor** | | |
| | | | **22** | | | **Grado** | |
| | | **38** | | **T** + 4 | | | **Hipotenusa** |

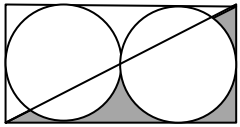
¿Qué distancia hay de Apotema a Ecuación?

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3º y 4º de ESO.-**

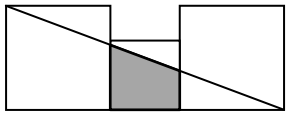
**2A.-** Sea **T** la respuesta del problema 3A.
Esteban ha hecho una serie de exámenes y tras cada uno de ellos ha sacado la nota media de todos los realizados hasta el momento. En el penúltimo sacó un 82,5 y su media aumentó medio punto. En el último sacó (**T** + 40) puntos y su media disminuyó 1 punto.
¿Cuál fue la **media final** de Esteban en sus exámenes?
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**2B.-** ¿Cuál es el área de la zona sombreada si la base del rectángulo mide 12 cm y su altura 6 cm?
Importante: haz todos tus cálculos tomando la aproximación $\pi \approx 3$.



**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea **T** la respuesta del problema 3C.
En la figura ves dos cuadrados de lado 8 cm y un cuadrado de lado $\frac{T}{50}$ cm.
¿Qué área ocupa la zona sombreada?



**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea **T** la respuesta del problema 1A.

Si $f(x)=\dfrac{6}{x+1}$ y $(g\circ f)(x)=\dfrac{24-12x}{(x+1)^2}$, calcula $(f\circ g)\left(\dfrac{10}{T}\right)$.

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**3B.-** Sea **T** la respuesta del problema 1B.

¿Cuántos puntos tienen en común las gráficas de las funciones $y=\cos x$, $y=\dfrac{1}{\mathrm{T}\cdot\pi^2}x^2$?

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3C.-** María sale de casa y va a recoger a su hija al aeropuerto. Para ello conduce a 50 km/h durante la primera hora, pero se da cuenta de que si continúa a esa velocidad llegará una hora tarde, así que aumenta la velocidad en 30 km/h el resto del viaje y llega 30 minutos antes. ¿Qué distancia hay entre la casa de María y el aeropuerto?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: viernes 23 de noviembre de 2018**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

**1.** La suma de dieciocho enteros consecutivos podría ser…

A) 1818 B) 1821 C) 1823 D) 1825 E) 1827

**2.** ¿Qué área, en $m^2$, tiene el triángulo de lados 7 m, 24 m y 25 m?

A) 300 B) 84 C) 87,5 D) 56 E) 168

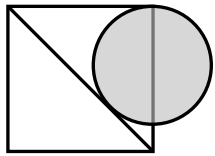
**3.** ¿Para cuántos enteros $n$ se cumple que $64 < 8^n < 32^{10}$?

A) 47 B) 1 C) 15 D) 14 E) 4

**4.** En un segmento hemos marcado los puntos $LVOME$ en ese orden. Sabiendo que: $ME = VM$, $LE - LO = 35$ cm, $LV = 2VO$, $LO = OM$, ¿qué distancia, en cm, hay de $V$ a $M$ ?

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

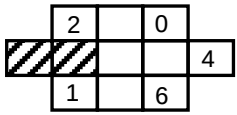
**5.** En la figura se ve un cuadrado de lado 1 y una circunferencia cuyo diámetro está sobre uno de los lados del cuadrado y además es tangente a una diagonal del cuadrado. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



A) $\sqrt{2}-1$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**6.** En este entramado queremos colocar los números desde el 0 hasta el 10 de tal manera que las casillas de dos números consecutivos no se toquen (ni siquiera en un vértice) ¿Cuánto suman los números que han de colocarse en de las casillas rayadas?




A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

**7.** Al multiplicar un número de cinco cifras por 101 obtengo un número que acaba en …8965. ¿Cuánto suman las cuatro últimas cifras del número de partida?

A) 28 B) 12 C) 16 D) 17 E) 21

**8.** ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que son múltiplos de 12 y sus cifras suman 12?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

**9.** Las soluciones de la inecuación $\left|\frac{|x|+1}{|x-1|}\right| \leq \frac{3x}{|x|}$ son los valores del conjunto…

A) $S=(0,+\infty)$ B) $S=\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$ C) $S=\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup(1,2]$

D) $S=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ E) $S=\left[\frac{1}{2},1\right)\cup[2,+\infty)$

**10.** En un triángulo de lados *a*, *b* y *c* se cumple que $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$. La medida del ángulo opuesto al lado *c* es:

A) 15º B) 30º C) 45º D) 60º E) 150º

**11.** El valor de $\frac{\log 80}{\log 5}$ es:

A) $\frac{1+3\log 2}{1-\log 2}$ B) $4\log 2$ C) $\log 75$ D) $-3$ E) $\log 80-\log 5$

**12.** ¿De cuántas maneras podemos sentar a tres chicos y a tres chicas de forma alterna (no puede haber dos personas de igual sexo juntas) y sin dejar huecos en una fila de diez asientos?

A) 180 B) 360 C) 1800 D) 5! · 5! E) 240

**13.** Elegimos al azar un número *a* del conjunto {11, 13, 15, 17, 19} y otro número *b* del conjunto {2016, 2017, 2018, 2019}. ¿Cuál es la probabilidad de que el número $a^b$ termine en 1?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{7}{20}$ E) $\frac{2}{5}$

**14.** En una empresa radical, los sueldos semanales son proporcionales a la raíz cuadrada del número de horas trabajadas. Una empleada ha calculado que si hubiera trabajado *a* horas más, habría ganado *p* euros más; y si hubiese trabajado *b* horas más, habría ganado *q* euros más (*a* y *b* diferentes). ¿Cuál es el sueldo semanal de la trabajadora en términos de *a*, *b*, *p*, *q*?

A) $\frac{p^2-q^2}{2(a-b)}$ B) $\frac{(p-q)^2}{2\sqrt{ab}}$ C) $\frac{ap^2-bq^2}{2(ap-bq)}$ D) $\frac{aq^2-bp^2}{2(bp-aq)}$ E) $\sqrt{(a-b)(b-q)}$

**15.** Dos circunferencias, una interior y otra exterior, comparten el mismo centro. La longitud de una cuerda de la mayor que es tangente a la circunferencia interior mide 16 cm. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, de la corona circular limitada por dichas circunferencias?

A) $36\pi$ B) $46\pi$ C) $49\pi$ D) $64\pi$ E) $25\pi$

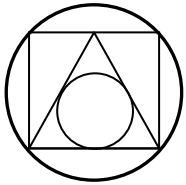
**16.** Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} |x|+x+|y|+y=10 \\ |x|-x+|y|-y=4 \end{cases}$ se obtienen dos soluciones diferentes, $(x,y)=(a,b)$ y $(x,y)=(c,d)$. ¿Cuál es el valor de $a+b+c+d$?

A) 3 B) 2 C) 0 D) 6 E) 10

**17.** Si $a$, $b$ y $c$ son números positivos, el área del triángulo situado en el primer cuadrante y limitado por los ejes y la recta de ecuación $ax+by=c$, es:

A) $\frac{ab}{2}$ B) $\frac{ab}{2c}$ C) $\frac{c^2}{2ab}$ D) $\frac{abc}{2}$ E) $\frac{c^2}{a^2+b^2}$

**18.** Una circunferencia de radio 1 está inscrita en un triángulo equilátero que a su vez está inscrito en un rectángulo que está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia mayor?



A) $\sqrt{21}$ B) 2 C) $2\sqrt{3}$ D) 3

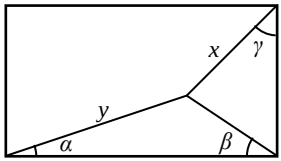
E) $3\sqrt{12}$

**19.** El número $N$ tiene 99 cifras y todas ellas son el 9, $N=\overbrace{99\ldots9}^{99\text{ cifras}}$. ¿Cuánto suman las cifras del número $N\times N$?

A) 9×99 B) 1+9×99 C) 99 D) 990 E) 900

**20.** En el rectángulo de la figura hemos marcado dos segmentos y tres ángulos.

¿Cuál es el valor de $A=\frac{y\cdot \operatorname{sen}\alpha}{x\cdot \operatorname{tg}\beta\cdot \operatorname{sen}\gamma}$?




A) $A=\operatorname{sen}\alpha$ B) $A=y$ C) $A=\frac{y}{x}$

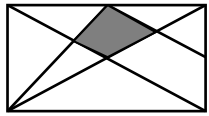
D) $A=\frac{1}{x}$ E) $A=1$

**21.** La función $f$ cumple que $[f(x)]^2+2f(x)=x+1$ para todos los valores $x$ de su dominio. Si sabemos que $f(x)$ es siempre positivo, ¿cuál es el dominio de la función $f$?

A) $D(f)=\Re$ B) $D(f)=(-1,+\infty)$ C) $D(f)=(-1,1)$

D) $D(f)=[0,+\infty)$ E) $D(f)=[-1,+\infty)$

**22.** En el rectángulo de la figura, de dimensiones 3 × 4, hemos trazado algunos segmentos aprovechando vértices y puntos medios de lados. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?



A) 1,2 B) 1,75 C) 1 D) 1,25 E) 1,5

**23.** Solo uno de los siguientes números es un cuadrado perfecto. ¿Cuál?

A) $\frac{27!\,28!}{2}$ B) $\frac{28!\,29!}{2}$ C) $\frac{29!\,30!}{2}$ D) $\frac{30!\,31!}{2}$ E) $\frac{31!\,32!}{2}$

**24.** Si en un triángulo isósceles los ángulos iguales aumentaran un 10%, el ángulo desigual disminuiría un 8%. ¿Cuál es la diferencia entre el ángulo mayor y cualquiera de los menores?

A) 50º B) 48º C) 56º D) 60º E) 45º

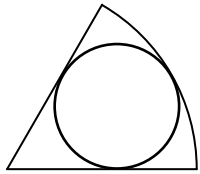
**25.** Don Retorcido no se olvida de vosotros. Él es muy prudente y circula siempre a 40 km/h. ¿Cuántas horas tardará en realizar un recorrido de $k$ km si necesita hacer $p$ paradas de $m$ minutos cada una para escribir problemas?

A) $\frac{3k+2pm}{120}$ B) $3k+2pm$ C) $\frac{3k+2pm}{12}$ D) $\frac{k+pm}{40}$ E) $\frac{k+40pm}{40}$

**26.** Para valores permitidos de $x$ e $y$, la igualdad $\log x - \log y = \log(x-y)$ es cierta si…

A) Siempre B) $x=\frac{y^2}{y-1}$ C) $x\cdot y=1$ D) $x=\frac{y}{y+1}$ E) $x=\frac{y+1}{y-1}$

**27.** ¿Qué radio tiene la circunferencia inscrita en un sector de radio $r$ y 60º grados de amplitud?



A) $\frac{r}{2}$ B) $\frac{r}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}r}{2}$ D) $\frac{r}{3}$ E) $\frac{r}{6}$

**28.** En un triángulo rectángulo de hipotenusa $x$, un cateto es triple que el otro. ¿Cuál es el área de dicho triángulo en función de su hipotenusa?

A) $\frac{3x^2}{20}$ B) $\frac{3x^2}{10}$ C) $\frac{x^2}{9}$ D) $\frac{x^2}{4}$ E) $\frac{x^2}{20}$

**29.** Si $A > B > 0$, completa esta frase: "si $A$ es un $M$ % mayor que $B$, entonces, $B$ es un….. % menor que $A$"

A) $\frac{A}{BM}$ B) $\frac{AB}{M}$ C) $\frac{BM}{A}$ D) $\frac{M}{AB}$ E) $\frac{1}{M}$

**30.** Si formamos todas las palabras (con sentido o no) posibles bailando las letras A-D-D-I-M-R y las ordenamos alfabéticamente, empezaríamos por ADDIMR y terminaríamos por RMIDDA. ¿Qué lugar ocuparía la palabra MADRID en esta lista?

A) 260 B) 246 C) 366 D) 250 E) 226

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE LOCAL:** segunda prueba. 20 de diciembre de 2018
Tiempo: 3h 30 min

**1.** ¿Cuál es el menor entero $N$ de cuatro dígitos, tal que los números $N$ y $N + 2018$ se escriben con 8 cifras, todas ellas diferentes?

**2.** Determinar el número de pares ordenados de enteros positivos $(a, b)$ que verifican

$$a^2 b^3 = 20^{18}$$

**3.** En el cuadrilátero $PQRS$, $PS = 5$, $SR = 6$, $RQ = 4$ y $\hat{P} = \hat{Q} = 60^\circ$. Si la medida del lado $PQ$ puede expresarse como $PQ = \dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$, con $a, b$ enteros positivos únicos, determinar $a + b$.

**4.** Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función que verifica $f(x) = f(x+1) + f(x-1)$ para todo entero $x$. Si $f(20) = 18$ y $f(18) = 20$, determinar $f(20\,182\,018)$.

**5.** Determinar el menor entero positivo $n$ que tiene exactamente tres divisores diferentes $a$, $b$ y $c$, con $1 < a < b < c < n$, cuya suma es $a + b + c = 1001$.

**6.** Dos monedas están trucadas de modo que, al lanzarlas al aire, resulta que la probabilidad de obtener dos caras es la misma que la probabilidad de obtener dos cruces, pero la probabilidad de obtener una cara y una cruz es 5/8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en cada una de las monedas?

**7.** En el triángulo $ABC$, $AB = AC = 10$ y $BC = 12$. El punto $D$ está en el lado $AB$ y el punto $E$ está en el lado $AC$; ambos son distintos de los vértices del triángulo. Sabemos que se verifica $AD = DE = EC$, y resulta que podemos expresar $AD$ en la forma $\dfrac{p}{q}$, con $p$ y $q$ primos entre sí. Determinar el valor de la suma $p + q$.

**8.** ¿Para cuántos enteros positivos $n \le 2018$ es el número $N = 1 + n + \dfrac{n^2}{2!} + \dfrac{n^3}{3!} + \ldots + \dfrac{n^6}{6!}$ un entero?

**9.** Un saltamontes está colocado en el origen de coordenadas. Desde el punto de coordenadas $(x, y)$, el saltamontes puede saltar a cualquiera de los puntos de coordenadas $(x + 1, y)$, $(x + 2, y)$, $(x, y + 1)$ o $(x, y + 2)$. ¿Cuántas sucesiones diferentes de saltos llevarán al saltamontes desde (0, 0) hasta (4, 4)?

**10.** El triángulo $ABC$ es rectángulo. Sea $D$ un punto en la hipotenusa $BC$, y sean $E$ y $F$ puntos en los catetos $AB$ y $AC$, respectivamente, tales que $DE \perp AB$ y $DF \perp AC$.
Si $BC = 4$ y $DE = DF = 1$, determinar el área del triángulo $ABC$.

# LV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

## Prueba de selección
## Comunidad de Madrid

**Primera sesión, viernes tarde 18 de enero de 2019**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

1. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de $p$ para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

2. ¿Existen $m$, $n$ números naturales de forma que $n^2 + 2018\,m\,n + 2019\,m + n - 2019m^2$ es un número primo?

3. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplen
$$P\left(x^k\right) - P(x) = x^k P(x)$$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

**Segunda sesión, Sábado 19 de enero de 2019**
Tiempo: 3 horas y media

4. Considera el conjunto de números enteros positivos $n$ cumpliendo $1 \leq n \leq 1\,000\,000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma $a^3 + mb^2$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

5. Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que
$$\frac{a^2}{b^3 c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}$$
¿En qué caso se cumple la igualdad?
.

6. Consideramos un triángulo $ABC$ y un punto $D$ en el lado $AC$.
Si $AB = DC = 1$, $\angle DBC = 30^\circ$ y $\angle ABD = 90^\circ$, calcula el valor de $AD$.

## XXIVª OLIMPIADA de MAYO
## Mayo de 2018

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 27 de mayo

## Primer Nivel

### PROBLEMA 1

Juan hace una lista de 2018 números. El primero es el 1. Luego, cada número se obtiene de sumarle al anterior alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9.
Sabiendo que ninguno de los números de la lista termina en 0, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el último número de la lista?

### PROBLEMA 2

Se efectúan mil divisiones enteras: se divide 2018 entre cada uno de los números enteros del 1 al 1000. Se obtienen así mil cocientes enteros con sus respectivos restos. ¿Cuál de estos mil restos es el mayor?

### PROBLEMA 3

Sea *ABCDEFGHIJ* un polígono regular de 10 lados que tiene todos sus vértices en una circunferencia de centro *O* y radio 5. Las diagonales *AD* y *BE* se cortan en *P* y las diagonales *AH* y *BI* se cortan en *Q*. Calcular la medida del segmento *PQ*.

### PROBLEMA 4

Ana debe escribir 7 enteros positivos, no necesariamente distintos, alrededor de una circunferencia de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

- La suma de los siete números es igual a 36.
- Si dos números son vecinos la diferencia entre el mayor y el menor es igual a 2 o 3.

Hallar el máximo valor del mayor de los números que puede escribir Ana.

### PROBLEMA 5

En cada casilla de un tablero de 5 × 5 se escribe uno de los números 2, 3, 4 o 5 de manera que la suma de todos los números en cada fila, en cada columna y en cada diagonal siempre sea par. ¿De cuántas formas podemos llenar el tablero?
*Aclaración*. Un tablero de 5 × 5 tiene exactamente 18 diagonales de diferentes tamaños. En particular, las esquinas son diagonales de tamaño 1.

## Segundo Nivel

### PROBLEMA 1

Se tiene un número entero de 4 dígitos que es un cuadrado perfecto. Se construye otro número sumándole 1 al dígito de las unidades, restándole 1 al dígito de las decenas, sumándole 1 al dígito de las centenas y restándole 1 al dígito de las unidades de mil. Si el número que se obtiene es también un cuadrado perfecto, hallar el número original. ¿Es único?

### PROBLEMA 2

En un tablero de $4 \times 4$ están escritos los números del 1 al 16, uno en cada casilla. Andrés y Pablo eligen cuatro números cada uno. Andrés elige el mayor de cada fila y Pablo, el mayor de cada columna. Un mismo número puede ser elegido por ambos. Luego, se eliminan del tablero todos los números elegidos. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener la suma de los números que quedan en el tablero?

### PROBLEMA 3

Los 2018 residentes de un pueblo están estrictamente divididos en dos clases: caballeros, que siempre dicen la verdad, y mentirosos, que siempre mienten. Cierto día todos los residentes se acomodaron alrededor de una circunferencia y cada uno de ellos anunció en voz alta "*Mis dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, son mentirosos*". A continuación uno de los residentes abandonó el pueblo. Los 2017 que quedaron se acomodaron nuevamente en una circunferencia (no necesariamente en el mismo orden que antes) y cada uno de ellos anunció en voz alta "*Ninguno de mis vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, es de mi misma clase*". Determinar, si es posible, de qué clase es el residente que abandonó el pueblo, caballero o mentiroso.

### PROBLEMA 4

En un paralelogramo $ABCD$, sea $M$ el punto del lado $BC$ tal que $MC = 2BM$ y sea $N$ el punto del lado $CD$ tal que $NC = 2DN$. Si la distancia del punto $B$ a la recta $AM$ es 3, calcular la distancia del punto $N$ a la recta $AM$.

### PROBLEMA 5

Cada punto de una circunferencia está coloreado con uno de 10 colores. ¿Es cierto que para cualquier coloración hay 4 puntos del mismo color que son vértices de un cuadrilátero con dos lados paralelos (un trapecio isósceles o un rectángulo)?

## XXIVª OLIMPIADA de MAYO de 2018.
## RESULTADOS DE ESPAÑA

### PRIMER NIVEL

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Álvaro Gamboa Rodríguez | ORO |
| 2 | Diego López Aragón | PLATA |
| 3 | Durán Fernández, Alberto | PLATA |
| 4 | María Cid Crespo | BRONCE |
| 5 | Juan Burgos Pino | BRONCE |
| 6 | Enrique Ortiz Gilarranz | BRONCE |
| 7 | Adrián Álvarez Yance | BRONCE |
| 8 | Yago Irache Fernández | MENCIÓN |
| 9 | Alonso Muñoz Lorente | MENCIÓN |
| 10 | Sara Sandu | MENCIÓN |

### SEGUNDO NIVEL

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Miguel Navarro Muñoz | ORO |
| 2 | Félix García Taboada | PLATA |
| 3 | Felipe Lorenzo Martínez | PLATA |
| 4 | Miguel Valdivieso Valles | BRONCE |
| 5 | Gabriela María García Pérez | BRONCE |
| 6 | Raquel Izquierdo Pato | BRONCE |
| 7 | Alejandro Krum de Vicente | BRONCE |
| 8 | Jorge Merino Esteban | MENCIÓN |
| 9 | Jimena Lozano Simón | MENCIÓN |
| 10 | Miguel de Perosanz Barroso | MENCIÓN |

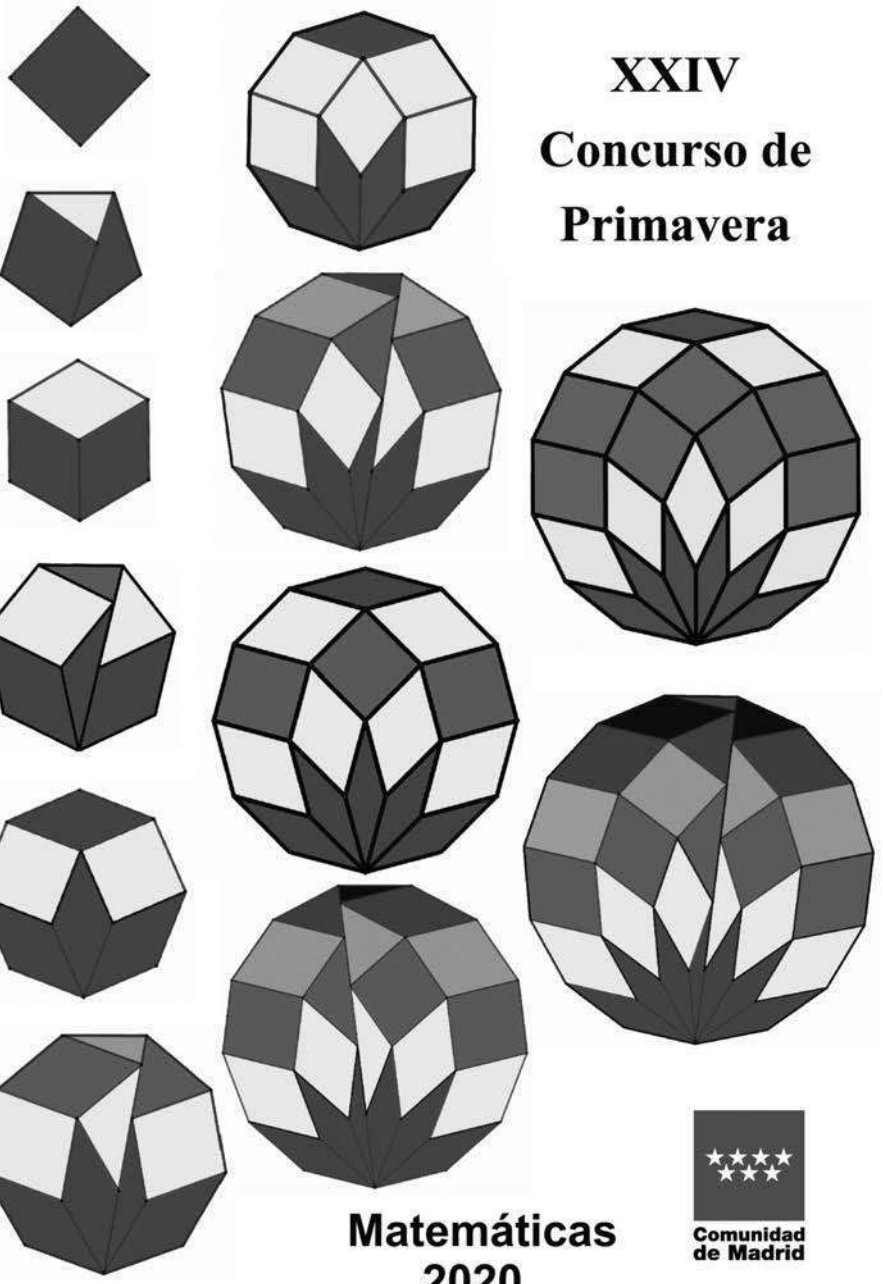
Comunidad
de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

# XXIV Concurso de Primavera

## Matemáticas 2020

Comunidad de Madrid



# XXIV Concurso de Primavera

Matemáticas
2020

Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alzola Bujarrabal, Belén*
*Baeza Alba, Miguel Ángel*
*Benito Miguel, Isabel*
*Castrillón López, Marco*
*Donaire Moreno, Juan Jesús*
*Esteban García, María*
*Ferrero de Pablo, Luis*
*García Gual, Jesús*
*Gaspar Alonso-Vega, María*
*González Ortega, Jorge*
*Martínez Dalmau, Pablo*
*Martínez Sanz, Alfredo*
*Montero Estravís, Xiomara*
*Moreno Warleta, María*
*Ramírez Carrillo, Carlos*
*Sánchez Benito, Merche*
*Sánchez González, Víctor Manuel*
*Serrano Marugán, Esteban*
*Soler Areta, Javier*
*Sordo Juanena, José María*
*Tomé Grasa, Roberto*

**Edita:** Asociación Matemática Concurso de Primavera

**ISBN:** 978-84-608-5881-2

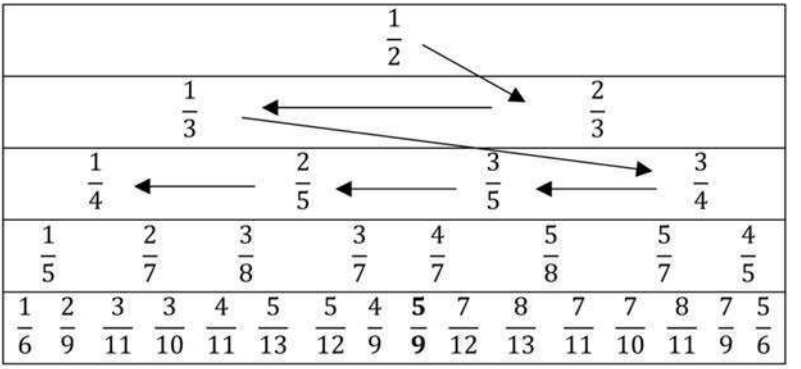
**Deposito Legal:** M-8301-2017

**In memoriam**

A Francisco,
nuestro buen corregidor:
¡Un punto y aparte!

## *El árbol de Farey*

(Una curiosa ordenación de los racionales entre 0 y 1)




Para hallar el que ocupa el lugar vigésimo tercero, escribimos 23 en sistema binario, $10111_2$. Contamos de izquierda a derecha los grupos de unos y ceros seguidos que hay en el número binario obtenido: (1,1,3). Añadimos un 1 al último número de esa lista, (**1**, **1**, **4**) y leemos esta serie final como desarrollo en fracción continua de un racional entre 0 y 1:

$$[0; \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4}] = \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{4}}}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

(El orden va de arriba a abajo por filas y de derecha a izquierda en cada fila)

https://www.sacred-geometry.es › fracciones-continuas

**AGRADECIMIENTOS:**

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

# ÍNDICE

## ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE:


Nivel I (5º y 6º de Primaria) ..... 11
Nivel II (1º y 2º de ESO) ..... 17
Nivel III (3º y 4º de ESO) ..... 23
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato) ..... 29


## ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE:


Nivel I (5º y 6º de Primaria) ..... 34
Nivel II (1º y 2º de ESO) ..... 40
Nivel III (3º y 4º de ESO) ..... 46
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato) ..... 52
Tabla de soluciones 1ª Fase ..... 57
Tabla de soluciones 2ª Fase ..... 58


## SOLUCIONES:


Soluciones 1ª Fase Nivel I ..... 59
Soluciones 1ª Fase Nivel II ..... 63
Soluciones 1ª Fase Nivel III ..... 76
Soluciones 1ª Fase Nivel IV ..... 72
Soluciones 2ª Fase Nivel I ..... 79
Soluciones 2ª Fase Nivel II ..... 85
Soluciones 2ª Fase Nivel III ..... 92
Soluciones 2ª Fase Nivel IV ..... 100
Participantes y relación de ganadores del XXII CONCURSO de Primavera de Matemáticas ..... 108

XXXVIII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas ..... 112
XIX Concurso Intercentros ..... 118
LVI Olimpiada Matemática Española. Comunidad de Madrid. Fase Cero ..... 127
LVI Olimpiada Matemática Comunidad de Madrid. Fase Local ..... 131
LVI Olimpiada Matemática Española. Comunidad de Madrid ..... 132
XXV Olimpiada de Mayo Primer NIVEL ..... 133
XXV Olimpiada de Mayo Segundo NIVEL ..... 134
Relación de ganadores en la "XXIII Olimpiada de Mayo 2019" ..... 135

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 13 de febrero de 2019**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

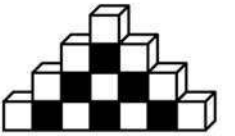
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

## XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

**1** Un cuarto de mandarina son dos gajos y medio. ¿Cuántas mandarinas son 65 gajos?

**A)** Trece **B)** Tres y un cuarto **C)** Seis y media
**D)** Doce y media **E)** Veintiséis

**2** Combinando cubos blancos y negros Miguel hace construcciones como la de la figura, que tiene cuatro pisos. Si en su colección de cubos hay 70 cubos blancos y 50 cubos negros, ¿cuántos pisos tiene la construcción más alta que puede construir siguiendo ese patrón de colores?



**A)** 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

**3** Julián y Lucía juegan a ver quién llega más lejos en el lanzamiento de aviones de papel. El avión de Julián planea un rato y se posa a dos metros y medio del punto de lanzamiento. El de Lucía sale con ímpetu y se estrella a 370 centímetros del punto de lanzamiento. ¿Cuántos decímetros de diferencia hay entre el ganador y el perdedor?

**A)** 12 **B)** 21,3 **C)** 62 **D)** 34,5 **E)** 16,5

**4** Los habitantes del planeta Trescatorce tienen tres manos y catorce pies. En cada mano tienen tres dedos y en cada pie tienen catorce. A mi cumple invité a tres colegas de Trescatorce y a cinco de la Tierra. Contándome a mí, que soy de la Tierra, ¿cuántos dedos tenemos entre todos los que estuvimos en la fiesta?

**A)** 735 **B)** 725 **C)** 222 **D)** 630 **E)** 645

**5** Al concierto de *Los Irracionales* que se celebró en el planeta Trescartorce asistieron 19 987 trescatorcianos. ¿Qué número aproxima mejor la cantidad de dedos que había en el concierto?

**A)** 4 000 000 **B)** 300 000 **C)** 800 000 **D)** 3 000 000 **E)** 400 000

**6** La bruja Piruja lee la receta de su poción contra el dolor de muelas: "Ingredientes: 2 colas de lagartija, 51 patas de araña peluda, 4 lenguas de escorpión, 15 huevos podridos, 39 dientes de ajo y una pizca de polvos de talco". Cuando va a la despensa se da cuenta de que solo tiene 26 dientes de ajo y decide hacer menos cantidad. ¿Cuántas patas de araña peluda tendrá que poner si utiliza los 26 dientes de ajo?

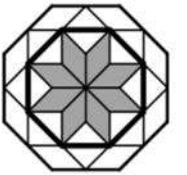
**A)** 38 **B)** 17 **C)** 34 **D)** 25 y media **E)** 32 y media

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)**

**7** Mi reloj de pulsera marca ahora las 11 de la mañana, ¿qué hora marcará dentro de 100 horas?

**A)** Las 3 de la tarde **B)** Las 4 de la mañana **C)** Las 5 de la tarde
**D)** Las 6 de la tarde **E)** Las 7 de la mañana

**8** El octógono que rodea la figura tiene 48 $cm^2$ de área. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, del octógono interior dibujado con trazo grueso?



**A)** 40 **B)** 36 **C)** 32
**D)** 28 **E)** 24

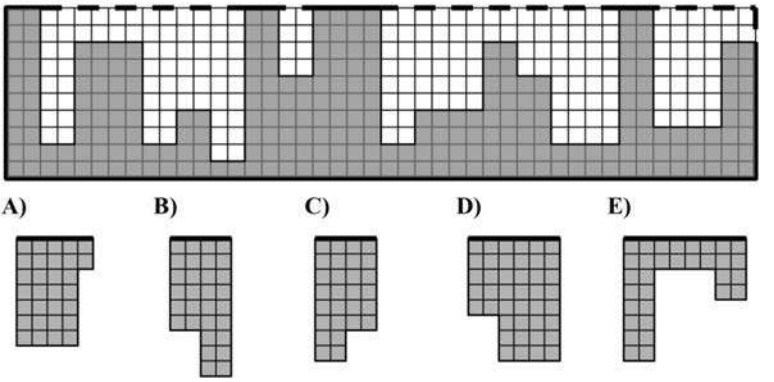
**9** Hoy en casa hemos comido mi menú favorito: de primero brócoli, de segundo caballa y de postre natillas! Mis padres se organizan con las comidas de forma muy sistemática y vengo observando que ponen brócoli cada 6 días, caballa cada 10 días y natillas cada 15 días. ¿Dentro de cuántos días volveré a comer por primera vez mi menú favorito?

**A)** 90 **B)** 60 **C)** 40 **D)** 30 **E)** 20

**10** En la multiplicación ♥♣ × 7 = 4♣♣, ♣ y ♥ representan cifras distintas. ¿Cuánto vale ♣ + ♥?

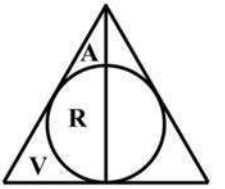
**A)** 8 **B)** 11 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 14

**11** Mariquilla encontró una cartulina gris con borde negro y recortó trozos hasta dejar esta bonita silueta de una ciudad. ¿Qué trozo no puede ser uno de los recortados por Mariquilla?



**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)**

**12** Con tres lápices: rojo (R), azul (A) y verde (V), Harry Potter se entretiene coloreando el símbolo de las *Reliquias de la Muerte*. Ya coloreó la mitad izquierda como ves en la figura, ¿de cuántas formas distintas puede colorear la mitad derecha de manera que dos regiones que comparten frontera no tengan el mismo color?




**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**13** Mulán es más rauda que un río bravo. Para comprobarlo posa su barco en el río y comienza a correr río abajo. Corre 4,5 kilómetros en media hora y se sienta a esperar que llegue el barco. Si el barco aún tarda 15 minutos en llegar, ¿cuántos kilómetros recorre el barco en una hora?

**A)** 2,5 **B)** 4,75 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

**14** Amaia canta en la ducha a voz en grito esta monótona canción : "La felicidad a-a-a-a, la felicidad a-a-a-a, la felicidad a-a-a-a,…". Siempre acaba su ducha completando una frase. Si hoy al terminar su ducha ha pronunciado la letra **i** 348 veces, ¿cuál es la suma de las cifras del número de veces que ha pronunciado la letra **a**?

**A)** 16 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 11 **E)** 9

**15** Jesús *recorre* 4 km en su bicicleta estática en 10 minutos. ¿Cuántos metros *recorrerá* en 4 minutos si mantiene esa velocidad media?

**A)** 1600 **B)** 1500 **C)** 1800 **D)** 1450 **E)** 1480

**16** La ballena jorobada es el mamífero que realiza la migración más larga. Cada año abandona el Polo Sur, se dirige hasta las playas del norte de Costa Rica y después regresa a su lugar de origen. La longitud total del viaje es de unos 17 000 km. Una ballena jorobada vive entre 45 y 50 años. ¿Qué número aproxima mejor los metros que recorre una ballena jorobada en su vida?

**A)** 800 000 **B)** 8 millones **C)** 80 millones **D)** 800 millones **E)** 8000 millones

**17** La niña Centésima tiene 61 euros entre billetes de 5 euros y monedas de 2 euros y piensa: "Si los billetes fueran monedas y las monedas fueran billetes, tendría 79 euros". ¿Cuántas monedas tiene la niña Centésima?

**A)** 15 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 13 **E)** 7

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)**

**18** En San Valentín, por una manzana me dan dos flores y un abrazo. Por una manzana y una flor me dan un abrazo y un bombón. Por un abrazo me dan una flor y un bombón. ¿Cuántas flores equivalen a una manzana?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**19** Ana, Berta y Celia son deportistas. Una es tenista, otra gimnasta y otra nadadora. La gimnasta es la más baja de las tres. Ana es más alta que la tenista. ¿Qué afirmación es cierta?

**A)** Ana es gimnasta **B)** Berta es nadadora **C)** Ana es nadadora
**D)** Ana es tenista **E)** Celia es nadadora

**20** En el costurero de la abuela hay más de 40 botones y menos de 80. Si organizo los botones en montoncitos de 5, me sobran 2 botones. Si los organizo en montoncitos de 7, me faltan 3. Si los organizo de 6 en 6, ¿cuántos sobran?

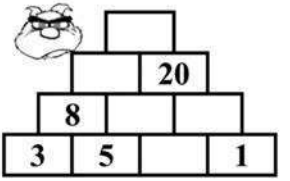
**A)** 5 **B)** 4 **C)** 3
**D)** 2 **E)** 1

**21** Con fichas del *Scrabble* dos amigos escriben sus nombres CUCA y LINO y cada uno comienza a desordenar las letras de su nombre a lo loco formando palabras de 4 letras con o sin sentido: CACU, OLNI, … ¿Cuántas palabras distintas pueden formar entre los dos?

**A)** 36 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 12 **E)** 16

**22** En esta pirámide, el número de cada ladrillo es la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya. ¿Cuál es la suma de los cinco números que se ha comido Comenúmeros?

**A)** 78 **B)** 92 **C)** 72 **D)** 87 **E)** 76



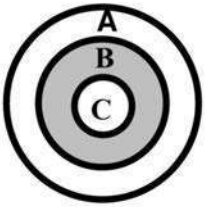
## XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

**23** Cuando Luca llega a la meta en una carrera de 60 m, a Inés le faltan 10 m para llegar y a Guillermo 20 m. Si Inés y Guillermo siguen corriendo a la misma velocidad que antes, ¿cuántos metros le faltarán a Guillermo para llegar a la meta cuando llegue Inés?

**A)** 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

**24** Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?

**A)** 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 54




**25** Ya sabes que por cada respuesta correcta obtienes cinco puntos, por cada respuesta en blanco un punto y por cada respuesta incorrecta cero puntos. De los 25 problemas, Javier contestó bien a 18 y mal a 3, ¿cuántos puntos obtuvo?

**A)** 90 **B)** 91 **C)** 92 **D)** 93 **E)** 94

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 13 de febrero de 2019**

**NIVEL II (1° y 2° de E.S.O.**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

## XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

**1** ¡Examen sorpresa para empezar! ¡¡De números!! ¡¡¡Bien!!!
¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
I. El triple de un número impar más el doble de otro número impar es siempre impar.
II. El producto de tres números consecutivos siempre es múltiplo de seis.
III. Todos los números capicúas de cuatro cifras son múltiplos de once.
IV. Todos los números de diez cifras diferentes son múltiplos de nueve.

**A)** Ninguna **B)** Solo una **C)** Solo dos **D)** Solo tres **E)** Todas

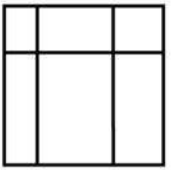
**2** Las cinco cifras del número *abcde* son 1, 2, 3, 4, 5 pero no sabes en qué orden. Sabiendo que *abc* es múltiplo de 4, *bcd* es múltiplo de 5 y *cde* es múltiplo de 3, ¿de quién es múltiplo el número *abcde*?

**A)** 7 **B)** 2 **C)** 11 **D)** 5 **E)** 13

**3** Los números negativos ya han llegado.
Si $R = -(2-3)-4$, $S = 6:(7-8)$ y $T = -3-(5-4)$, ¿cuál de estas igualdades es cierta?

**A)** $R+S=T+5$ **B)** $R-S=T+7$ **C)** $R\cdot T=2\cdot S$
**D)** $R+1=T$ **E)** $R-S+T=1$

**4** Juntando seis rectángulos hemos construido un cuadrado. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 420 cm, ¿cuántos centímetros mide el lado del cuadrado formado?



**A)** 60 **B)** 40 **C)** 20 **D)** 15
**E)** 42

**5** Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

**A)** $\frac{896\,678}{338\,444}=\frac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\frac{59\,976}{139\,944}=\frac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\frac{179\,972}{417\,946}=\frac{2\,856}{6\,664}$

**D)** $\frac{69\,796}{192\,994}=\frac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\frac{59\,976}{139\,944}=\frac{1\,428}{3\,332}$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**6** La niña Centésima está entrenándose y se ha marcado este ambicioso plan: empieza haciendo divisiones y por cada cinco divisiones hará seis multiplicaciones y por cada cuatro multiplicaciones hará tres restas. Si al terminar su entrenamiento ha hecho 124 operaciones, ¿cuántas multiplicaciones realizó la niña Centésima?

**A)** 48 **B)** 40 **C)** 52 **D)** 36 **E)** 80

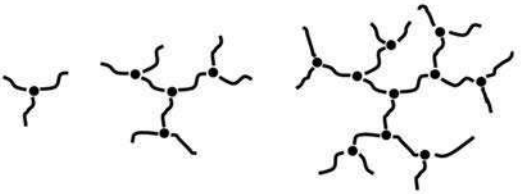
**7** Si $20^{20} \cdot 30^{30} = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, entonces, $a + b + c$ es igual a…

**A)** 132 **B)** 150 **C)** 500 **D)** 50 **E)** 200

**8** Si multiplicamos todos los múltiplos de 5 comprendidos entre 1 y 101, ¿en cuántos ceros termina ese producto?

**A)** 22 **B)** 17 **C)** 11 **D)** 18 **E)** 20

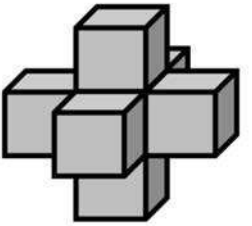
**9** Fíjate bien cómo va creciendo este organismo. En la etapa 1 nació siendo un puntito y tres líneas y, a partir de ahí, en cada etapa le crece un nuevo puntito al final de cada línea y de cada nuevo puntito le nacen dos líneas. Mejor es que mires en el dibujo las tres primeras etapas de su vida. En la etapa 6, ¿cuál será la suma de sus puntitos más sus líneas?



**A)** 283 **B)** 305 **C)** 403 **D)** 188 **E)** 189

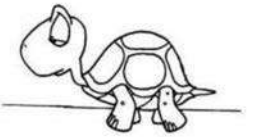
**10** He pegado algunos cubos idénticos para formar esta figura sin huecos que tiene un volumen de 448 $dm^3$. Si ahora quiero forrar con papel plateado el exterior de la figura, ¿cuántos $dm^2$ de papel necesitaré?

**A)** 448 **B)** 320 **C)** 480 **D)** 384 **E)** 300



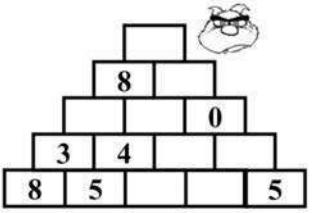
## XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

**11** Doña Tortu ha calculado que saliendo de su casa y caminando a 4 km/h llegará a la fiesta de las tortugas 15 minutos antes de que empiece el baile inaugural. Como está muy cansada decide ir a 3 km/h aunque así llegue 15 minutos más tarde de la hora del baile. ¿A qué distancia, en kilómetros, está la fiesta de la casa de Doña Tortu?



**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**12** Esta pirámide de cifras es algo especial. En cada ladrillo se coloca la cifra de las unidades de la suma de los dos ladrillos sobre los que se apoya. ¿Cuál es la suma de los ocho números que se ha comido Comenúmeros?




**A)** 41 **B)** 48 **C)** 39 **D)** 53 **E)** 45

**13** El número $1+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{1+4}}$ es igual a…

**A)** $\frac{9}{8}$ **B)** $\frac{9}{5}$ **C)** $\frac{8}{5}$ **D)** $\frac{9}{4}$ **E)** $\frac{5}{8}$

**14** Con las cifras 2, 4, 6 y 8 formamos números de cuatro cifras distintas que sean múltiplos de 4. ¿Cuántos números podemos encontrar?

**A)** 24 **B)** 20 **C)** 16 **D)** 12 **E)** 8

**15** Tres aficionadas a la música repasan su discografía. El 15% de los discos de Ana son de Mozart; el 32 % de los de Berta son de Mozart; y el 40% de los de Carlota son de Mozart.
Lo sorprendente es que las tres amigas tienen la misma cantidad de discos de Mozart. Si sabemos que entre las tres niñas tienen menos de 300 discos, ¿cuántos tienen en total?

**A)** 295 **B)** 296 **C)** 280 **D)** 282 **E)** 240

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**16** En este problema hemos asignado cifras distintas a letras distintas sin utilizar el cero.

$$\begin{array}{r} \mathbf{N\ O\ T\ A\ R} \\ \times\ \mathbf{E} \\ \hline \mathbf{R\ A\ T\ O\ N} \end{array}$$

Sabiendo que la **E** vale 4, ¿cuánto vale la suma de unos traviesos

$$\mathbf{R + A + T + O + N + C + I + T + O + S}?$$

**A)** 42 **B)** 44 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 43

**17** Don Retorcido ha diseñado esta bonita rosa formada por rombos de 1 dm de lado. La niña Centésima la construyó usando palitos de 1 dm. Si ponemos todos sus palitos en línea recta, uno detrás de otro, ¿cuántos metros medirá?

**A)** 7,2 **B)** 5,6 **C)** 8,4 **D)** 6,8 **E)** 6

**18** Adriana dibuja un cuadrado y su hijo Diego un triángulo equilátero. Y, ¿será telepatía?, las dos figuras tienen el mismo perímetro. Si dividimos el lado del cuadrado entre el lado del triángulo, obtenemos…

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{3}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**19** Los números $a$ y $b$ con $a > b$ son enteros positivos que no son múltiplos de 10 y su producto es 20 000. ¿Cuál es el valor de $a - b$?

**A)** 593 **B)** 621 **C)** 437 **D)** 529 **E)** 980

**20** El valor de $10^{100} + 100^{10}$ es igual a…

**A)** $10^{120}$ **B)** $10^{20}\cdot\left(1+10^{80}\right)$ **C)** $110^{110}$

**D)** $100\cdot\left(10^{10}+1\right)$ **E)** $2\cdot 10^{100}$

**21** ¿Para cuántos valores enteros positivos, $a$, menores que 100, se consigue que $N=\sqrt{10+a}$ sea un número entero?

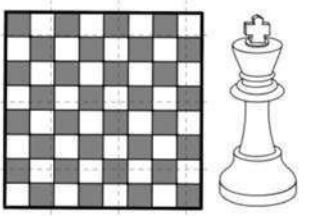
**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**22** Los cromos de don Retorcido son rarísimos. Por 36 bats te dan 9 bets; por 45 bets te dan 6 bits; por 18 bits te dan 15 bots; y por 9 bots te dan 3 buts. ¿Cuántos bats te darán por 4 buts?

**A)** 324 **B)** 520 **C)** 450 **D)** 360 **E)** 432

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**23** En un tablero de ajedrez (8×8), ¿cuál es el menor número de reyes que colocados en el tablero amenazan todas las casillas restantes (es decir, no hay casillas que no tengan contacto con las de los reyes)?



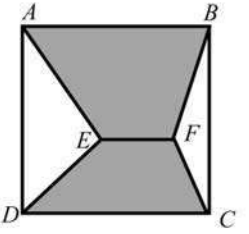
**A)** 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 16

**24** Don Retorcido tiene cinco tarjetas numeradas del 1 al 5 y elige tres sin mirar. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayor tarjeta elegida sea la del número 4?

**A)** $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{3}{10}$ **C)** $\frac{2}{15}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

**25** El lado del cuadrado $ABCD$ mide 3 cm. ¿Qué área, en $cm^2$, ocupa la región sombreada sabiendo que $EF$ mide 1 cm y es paralelo al lado $AB$?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 5,5 **E)** 6,5



XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 13 de febrero de 2019**

**NIVEL III (3° y 4° de E.S.O.**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

## XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

**1** El punto $P$ está en el exterior de una circunferencia $C$ en el plano. ¿Cuál es el número máximo de puntos de $C$ que se encuentran a 3 cm de $P$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 8

**2** Los asistentes al último gran estreno entran en el teatro por cinco puertas distintas. Por la primera entra una persona, dos entran por la segunda, luego tres por la tercera, cuatro por la cuarta y cinco por la quinta. Después vuelve a entrar una sola persona por la primera puerta, y continúa el patrón anterior. Si Jorge es el espectador número 2019, ¿por qué puerta entró?

**A)** Por la primera **B)** Por la segunda **C)** Por la tercera
**D)** Por la cuarta **E)** Por la quinta

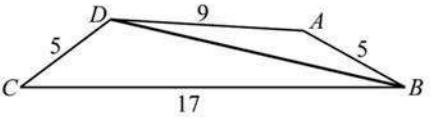
**3** Dos números $a$ y $b$ verifican que $a + b < 0$ y $a \cdot b > 0$. De las siguientes afirmaciones, ¿cuál es necesariamente cierta?

**A)** $a > 0$ y $b > 0$ **B)** $a < 0$ y $b < 0$ **C)** $a > 0$ y $b < 0$
**D)** $a > -b$ **E)** $b > -a$

**4** ¿Cuál de los siguientes números es un cuadrado perfecto? (Ten en cuenta que $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

**A)** $\frac{14! \cdot 15!}{2}$ **B)** $\frac{15! \cdot 16!}{2}$ **C)** $\frac{16! \cdot 17!}{2}$ **D)** $\frac{17! \cdot 18!}{2}$ **E)** $\frac{18! \cdot 19!}{2}$

**5** En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide $BD$ si sabemos que es un entero?




**A)** 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

**6** El número $\boldsymbol{n} = 1\,8\,1\,2\,\boldsymbol{b}\,4\,2\,\boldsymbol{a}$ es múltiplo de 99. El valor del producto $\boldsymbol{a \cdot b}$ es…

**A)** 4 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 20 **E)** 24

**7** Si $a$ es un número tal que $a^2 = a + 1$, entonces $a^6$ es…

**A)** $5a + 3$ **B)** $5a + 6$ **C)** $6a + 5$ **D)** $5a + 8$ **E)** $8a + 5$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

**8** ¿Cuántos enteros positivos menores que 1000 son seis veces la suma de sus dígitos?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 5

**9** Para cada entero positivo $n$, llamamos $s(n)$ a la suma de los dígitos de $n$.
Por ejemplo, $s(2019) = 12$. El valor de la suma $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(99)$ es…

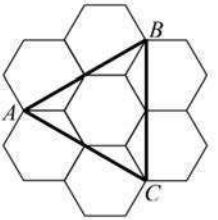
**A)** 746 **B)** 862 **C)** 900 **D)** 924 **E)** 1005

**10** El dígito de las unidades del número $3^{2017} \cdot 7^{2018} \cdot 13^{2019}$ es:

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**11** Seis hexágonos regulares están alrededor de otro hexágono regular de lado 1 cm, como muestra la figura. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área del triángulo $ABC$?

**A)** $\sqrt{3}$ **B)** 3 **C)** $3\sqrt{3}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **E)** 1




**12** Si la función $f(x) = 4^x$, entonces $f(x+1) - f(x)$ valdrá:

**A)** $f(x)$ **B)** $2 \cdot f(x)$ **C)** $3 \cdot f(x)$ **D)** 4 **E)** 1

**13** La suma de las soluciones enteras de $1 < (x-2)^2 < 25$ es:

**A)** 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 19 **E)** 25

**14** En un rectángulo $ABCD$, $AB = 6$, $AD = 30$ y $G$ es el punto medio de $AD$. El punto $E$ está en la prolongación de $AB$ y es tal que $BE = 2$. Si el punto $F$ es la intersección $ED$ y $BC$, el área del cuadrilátero $BFDG$ es…

**A)** $\frac{133}{2}$ **B)** 67 **C)** $\frac{135}{2}$ **D)** 68 **E)** $\frac{137}{2}$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

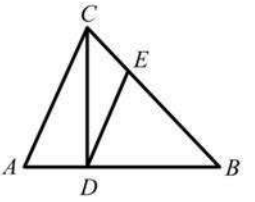
**15** La policía matemática investiga a cinco sospechosos de haber robado las pruebas del Concurso de Primavera. Esto es lo que dicen al ser interrogados:

- El señor Acutángulo: ¡todos somos inocentes!
- Don Retorcido: exactamente uno de nosotros es inocente.
- La niña Centésima: no, exactamente uno de nosotros es culpable.
- El Comenúmeros: al menos dos de nosotros somos inocentes.
- La rana Gustavo: entre nosotros hay por lo menos dos culpables.

Si los inocentes siempre dicen la verdad y los culpables siempre mienten, ¿cuántos de los cinco sospechosos son culpables?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**16** En el triángulo $ABC$ de la figura, $AD$ es la mitad de $BD$ y $CE$ es un cuarto de $CB$. Sabiendo que $CD$ es una de las alturas del triángulo $ABC$ y que el área del triángulo $CDE$ es 9 cm$^2$, ¿cuál es el área, en cm$^2$, del triángulo $ABC$?




**A)** 45 **B)** 54 **C)** 60 **D)** 63 **E)** 72

**17** Esteban se está preparando para hacer un triatlón (500 m nadando, 20 km en bicicleta y 6 km corriendo). En esas distancias consigue hacer una velocidad media de 4 km/h nadando y 12 km/h corriendo. Se ha puesto como objetivo conseguir acabar el triatlón en 2 horas. ¿Cuál tiene que ser, en km/h, su velocidad media con la bicicleta?

**A)** $\frac{160}{11}$ **B)** 15 **C)** $\frac{76}{5}$ **D)** $\frac{61}{4}$ **E)** 16

**18** Consideramos números de tres cifras con dos iguales y una distinta. ¿Cuántos hay que sean múltiplos de 3?

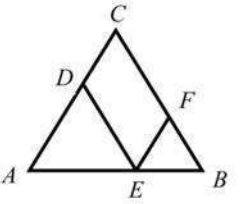
**A)** 63 **B)** 66 **C)** 69 **D)** 72 **E)** 75

**19** Sean $a$ y $b$ números enteros positivos, ¿cuál de los siguientes números no puede escribirse de la forma $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$?

**A)** $\frac{25}{12}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** $\frac{7}{3}$ **D)** $\frac{17}{4}$ **E)** $\frac{29}{10}$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

**20** Sabiendo que el perímetro del paralelogramo $CDEF$ es 4, ¿cuál es el área del triángulo equilátero $ABC$?




**A)** 8 **B)** $\sqrt{3}$ **C)** 4

**D)** 6 **E)** $2\sqrt{3}$

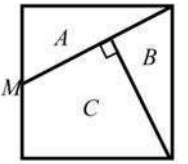
**21** Luis tiene un reloj digital (que marca desde 00:00 a 23:59) que se le ha estropeado. En vez de marcar el 1 marca el 9. Por ejemplo, cuando son las 19:16 marca 99:96. ¿Qué fracción del día el reloj marca la hora incorrecta?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{5}{8}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{5}{6}$ **E)** $\frac{9}{10}$

**22** Para obtener series de números, Samu coge un número y una moneda. Si sale cara, duplica el número y le resta 1; si sale cruz, divide el número entre 2 y le resta 1. Si Samu ha empezado con el número 6 y luego ha tirado la moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número final sea entero?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{5}{8}$

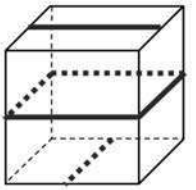
**23** Hugo es un gran cocinero con mucha imaginación. Ha hecho un bizcocho cúbico de 2 dm de lado y ha cubierto sus cinco caras visibles con una capa de chocolate. Lo corta verticalmente en tres partes, como se muestra en esta vista superior, donde $M$ es el punto medio del borde superior. La pieza que hemos llamado $B$ tiene $y$ dm$^2$ de chocolate. ¿Cuánto vale $y$?




**A)** 3 **B)** $\frac{24}{5}$ **C)** $\frac{32}{5}$ **D)** $8+\sqrt{5}$ **E)** $10+\sqrt{5}$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

**24** En cada cara de un cubo dibujamos un segmento que une el punto medio de un lado con el punto medio del lado opuesto de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de esas líneas rodeen el cubo?



**A)** $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{3}{16}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**25** Cuatro chicos y tres chicas van al cine y se sientan juntos en la misma fila. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo si ni dos chicas ni dos chicos pueden estar juntos, pero Pilar tiene que estar necesariamente al lado de Luis?

**A)** 144 **B)** 36 **C)** 24 **D)** 48 **E)** 72

XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 13 de febrero de 2019**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

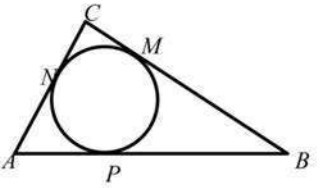
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**1** En el triángulo $ABC$ de la figura hemos dibujado su circunferencia inscrita e indicado los puntos de tangencia $M$, $N$ y $P$. Si $AB = 10$, $BC = 9$ y $AC = 6$, ¿cuál es el valor de $AP$?




**A)** 3 **B)** 4 **C)** 2,5 **D)** 3,5 **E)** 4,5

**2** Si el producto de tres enteros consecutivos es múltiplo de 7, ¿cuál de los siguientes números no es necesariamente un divisor de su producto?

**A)** 6 **B)** 14 **C)** 21 **D)** 28 **E)** 42

**3** La ecuación $x^2 - n^2 x + 2n = 0$ tiene dos soluciones diferentes. Si una de ellas es $x = 2$, calcula la otra.

**A)** –1 **B)** 3 **C)** –2 **D)** 1 **E)** Esta situación no puede darse

**4** Esteban no quiere sentarse junto a Carlos ni junto a Belén. Javier no quiere sentarse junto a María. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse los cinco en fila cumpliendo estas condiciones?

**A)** 12 **B)** 16 **C)** 28 **D)** 32 **E)** 40

**5** La suma de las raíces con parte real positiva de la ecuación $z^{12} - 64 = 0$ es:

**A)** 2 **B)** 4 **C)** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **D)** $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **E)** $2\sqrt{2} + \sqrt{6}$

**6** Se introducen tres bolas en una urna, una tiene el número 1, otra el 2 y la tercera el 3. Se extrae una bola, se anota su número, y luego se devuelve a la urna. Se repite este procedimiento dos veces más. Si la suma de los tres números anotados es 6, ¿cuál es la probabilidad de que se haya extraído la bola marcada con el número 2 en las tres ocasiones?

**A)** $\frac{1}{27}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{6}$ **E)** $\frac{1}{3}$

**7** ¿Cuál de los siguientes números es el positivo más pequeño?

**A)** $10 - 3\sqrt{11}$ **B)** $3\sqrt{11} - 10$ **C)** $18 - 5\sqrt{13}$

**D)** $51 - 10\sqrt{26}$ **E)** $10\sqrt{26} - 51$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**8** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\text{sen}^2x + 3\text{sen}x\cos x + 2\cos^2x = 0$ en el intervalo $[0, \pi)$?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**9** En el triángulo rectángulo $PQR$ de catetos $PR = 6$ cm y $RQ = 8$ cm tienes que marcar un punto $S$ en la hipotenusa de tal manera que los triángulos $PRS$ y $RQS$ tengan igual perímetro. Y ahora viene la pregunta: ¿Qué área, en cm$^2$, tiene el triángulo $RQS$?

**A)** 9,6 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 9,2 **E)** 16

**10** ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide a $13^4 - 11^4$?

**A)** 8 **B)** 16 **C)** 32 **D)** 64 **E)** 128

**11** Si en estas desigualdades de fracciones $0 < \frac{7}{X} < \frac{Y}{12} < \frac{13}{15}$, con $X$ e $Y$ enteros, buscas el menor valor posible de $X$ y el mayor de $Y$, ¿cuánto vale $X + Y$?

**A)** 22 **B)** 21 **C)** 20 **D)** 19 **E)** 18

**12** Sea $N$ el número de 79 cifras que se obtiene al escribir los enteros desde 1 hasta 44, en orden uno tras otro. Al dividir $N$ entre 45, el resto que obtenemos es:

**A)** 1 **B)** 44 **C)** 9 **D)** 18 **E)** 27

**13** El 20% del 30% del 40% de 50 es lo mismo que el 60% de…

**A)** 2 **B)** 70 **C)** 12 **D)** 7 **E)** 15

**14** ¿Cuántos valores reales de $x$, con $0 \le x \le 100$, satisfacen la ecuación $|\text{sen } x| = 1$?

**A)** 15 **B)** 16 **C)** 25 **D)** 30 **E)** 32

**15** La función $f$, definida sobre los naturales, verifica $f(1) = 1$, $f(2n) = 2 \cdot f(n)$ y $f(2n+1) = 4 \cdot f(n)$. El número de soluciones de la ecuación $f(n) = 16$ es…

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**16** Conociendo la fórmula de la suma de los cubos, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{(n \cdot (n+1))^2}{4}$, te será muy sencillo calcular el valor de la suma $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + 19^3$.

**A)** 19 900 **B)** 20 400 **C)** 21 200 **D)** 23 600 **E)** 24 400

**17** En el pentágono $ABCDE$, los ángulos $A$, $C$ y $E$ son rectos. Además, $AB = 15$, $BC = 12$, $CD = 5$ y $DE = 20$. El área del pentágono es:

**A)** 270 **B)** 236 **C)** 240 **D)** 244 **E)** 252

**18** El área de la corona circular comprendida entre dos circunferencias concéntricas es $\frac{9\pi}{2}$. ¿Cuál es la longitud de una cuerda de la circunferencia mayor que sea tangente a la menor?

**A)** $2\sqrt{3}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $3\sqrt{3}$ **E)** $4\sqrt{2}$

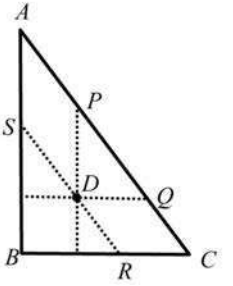
**19** En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

**20** En un torneo de Grand Slam gana el partido el primer jugador que gana 3 sets. Si dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar un set, ¿cuál es la probabilidad de que el partido acabe en el cuarto set?

**A)** $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{5}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{5}{16}$

**21** En el interior del triángulo rectángulo $ABC$ de catetos 3 y 4 se elige un punto $D$ que dista 1 de cada uno de los catetos. Por $D$ se trazan paralelas a los tres lados que cortan a los lados en los puntos señalados en la figura. Entonces la suma de los segmentos $PQ + RS$ es…

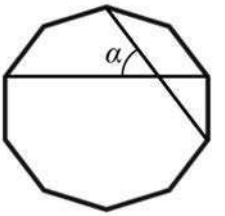



**A)** 5 **B)** 5,2 **C)** 5,4

**D)** $\sqrt{30}$ **E)** 6

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**22** En el decágono regular de la figura, ¿cuánto mide el ángulo $\alpha$?




**A)** 45º **B)** 48º **C)** 54º
**D)** 60º **E)** 72º

**23** En cierto triángulo, una bisectriz de longitud 7 es perpendicular a una mediana de longitud 8. ¿Cuál es el área del triángulo?

**A)** 35 **B)** 36 **C)** 42 **D)** 48 **E)** 28

**24** El número complejo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ es una de las soluciones de la ecuación $x^4 + x^2 + 1 = 0$. ¿Cuánto vale la suma

$$z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1?$$

**A)** 0 **B)** 1 **C)** $-1$ **D)** $i$ **E)** $-i$

**25** Al sumar los valores de los ángulos interiores de un polígono, Don Retorcido ha obtenido el valor 2019. Pero anda algo despistado, y ha sumado dos veces uno de los ángulos. ¿Cuál es la medida del ángulo duplicado?

**A)** 30º **B)** 39º **C)** 63º **D)** 115º **E)** 140º

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 27 de abril de 2019**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 punto*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

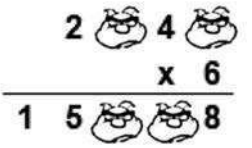
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Eduation
Smartick

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)**

**1** ¡Aquí está Comenúmeros fiel a su cita con nosotros! ¿Cuál es la suma de los cuatro números que se ha comido de esta multiplicación? ¡Ah!, me olvidaba, a Comenúmeros le sientan fatal los ochos y nunca se los come.

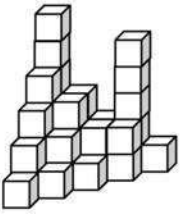



**A)** 27 **B)** 22 **C)** 30 **D)** 15 **E)** 23

**2** Estas cinco piezas pueden colocarse para formar cuatro de las cinco figuras que ves abajo. ¿Cuál de ellas es la que no se puede formar?

**A)** Se pueden todas **B)** Solo se puede la 1ª **C)** No se pueden la 3ª y la 5ª
**D)** Se pueden todas menos la 5ª **E)** No se pueden la 2ª y la 5ª

**3** Miguel ha formado esta construcción apilando cubos iguales uno encima de otro. ¿Cuántos cubos ha utilizado?



**A)** 35 **B)** 36 **C)** 37
**D)**38 **E)** 39

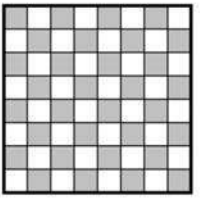
**4** ¿Cuántos números de tres cifras tienen dos iguales y una distinta?

**A)** 201 **B)** 124 **C)** 273 **D)** 243 **E)** 219

**5** En una bolsa hay 100 bolas numeradas del 1 al 100. Saco una al azar y miro el número. ¿Cuál de estos sucesos es más probable?

**A)** Que sea el 5 **B)** Que la suma de sus cifras sea 5 **C)** Que sea menor que 5
**D)** Que sea múltiplo de 5 **E)** Que alguna de sus cifras sea un 5

**6** En un tablero de ajedrez, ¿cuál es el mayor número de reyes que podemos colocar sin que se amenacen, es decir, que estén situados en casillas que no se toquen ni siquiera por las esquinas?



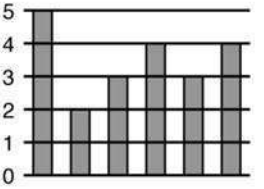
**A)** 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

## XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

**7** Julián está haciendo un bizcocho que tiene que estar una hora y tres cuartos en el horno. Si lo mete en el horno a las 11:55, ¿a qué hora debe sacarlo?

**A)** A las 13:00 **B)** A las 13:40 **C)** A las 13:20
**D)** A las 13:10 **E)** A las 13:30

**8** En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?




**A)** 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5 **D)** 4,2 **E)** 3

**9** Juan hace colgantes. Los que hace con dos cuentas blancas y una negra los vende a 5 euros. Los que hace con dos negras y una blanca, los vende a 6 euros. Si solo le quedan 6 cuentas negras y 8 blancas y quiere ganar la mayor cantidad de dinero posible, ¿cuántos euros, como máximo, puede obtener vendiendo sus colgantes?

**A)** 18 **B)** 20 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 23

**10** La niña Centésima no para de calcular ni en la cama:
1 **x 2** = 2; 2 **x 3** = 6; 6 **x 4** = 24; 24 **x 5** = 120; 120 **x 6** = 720;
720 **x 7** = 5040; 5040 **x 8** = 40320 …

Por fin se quedó dormida cuando multiplicó por 38. ¿En cuántos ceros termina el resultado de esa multiplicación?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**11** – Don Retorcido, ¿cuántos años tiene doña Tortu?
– Cuando se conocieron, hace veinte años, doña Tortu tenía el triple de la edad de Comenúmeros y dentro de 30, cuando cumplan 50 años de amistad, solo tendrá el doble.
¡Dime tú, niña Centésima, cuántos años tiene hoy doña Tortu!

**A)** 170 **B)** 190 **C)** 180 **D)** 140 **E)** 160

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)**

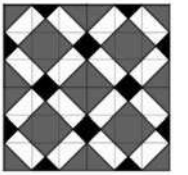
**12** El Lobo Feroz va a 12 km/h mientras que Caperucita va a 4 km/h. Saliendo a la vez desde la entrada del bosque, el Lobo llegó media hora antes a la casa de la abuela y se zampó todo lo que se le puso por delante. ¿Cuántos kilómetros hay desde la entrada del bosque a la casa de la abuela?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 10 **E)** 3

**13** Si vas a hacer paella recuerda esta máxima de las abuelas: "dos puñados de arroz por persona y uno de regalo para la cazuela". He calculado que en medio puñado de arroz hay 7 montoncitos de unos 100 granos cada uno. Según mis cálculos y siguiendo la receta de la abuela, ¿qué número aproxima mejor los granos que tendrá una paella para 8 personas?

**A)** 15 000 **B)** 10 000 **C)** 30 000 **D)** 25 000 **E)** 20 000

**14** Mariquilla ha diseñado este bonito azulejo en blanco, gris y negro. ¿Qué fracción del mosaico es gris?



**A)** $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{4}$

**D)** $\frac{9}{16}$ **E)** $\frac{4}{9}$

**15** En las fiestas de San Isidro 4 viajes en tiovivo cuestan lo mismo que 15 barquillos, y 48 castañas asadas cuestan lo mismo que 10 barquillos. ¿Cuántas castañas asadas puedes comprar por el precio de un viaje en tiovivo?

**A)** 32 **B)** 15 **C)** 21 **D)** 16 **E)** 18

**16** Voy a cambiar 164 euros por monedas de 20 céntimos y de 2 céntimos. Si me dan 725 monedas de 20 céntimos, ¿cuántas me deben dar de 2 céntimos?

**A)** 1025 **B)** 855 **C)** 1900 **D)** 1258 **E)** 950

**17** Este conocido logo está hecho con tres paralelogramos iguales. Si el perímetro del hexágono exterior es 75 cm y el del triángulo interior es 21 cm, ¿cuántos centímetros mide el lado largo del paralelogramo?

**A)** 16 **B)** 14 **C)** 20 **D)** 9

**E)** 12,5

## XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

**18** La cuarta parte de la tercera parte del doble de la quinta parte del producto de 120 por 6 es…

**A)** 384 **B)** 24 **C)** 216 **D)** 12 **E)** 72

**19** Este año en Torrejón van a utilizar motivos geométricos para iluminar las calles en Navidad. El diseñador ha comenzado formando un triángulo con tres luces led en los vértices. De cada vértice del triángulo sale un cuadrado con luces en los vértices y de cada vértice libre de los cuadrados un pentágono. El diseñador quiere ahora continuar poniendo hexágonos en los vértices libres de los pentágonos. ¿Cuántas luces necesita en total para culminar su obra?

**A)** 114 **B)** 325 **C)** 276 **D)** 360 **E)** 257

**20** Mi teléfono está loco. Cuando pulso una tecla con un número par marca uno más. Así, si pulso el 4 marca el 5. Cuando pulso un número impar, lo multiplica por 4 y marca la cifra de las unidades del resultado. Por ejemplo, si pulso el 3 marca el 2. ¿Qué números debo pulsar si quiero que marque el 016?

**A)** 127 **B)** 045 **C)** 509 **D)** 547 **E)** 925

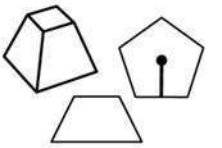
**21** Tengo 45 caracolas, 27 piedras preciosas y 36 monedas de oro y quiero repartir todo en cofres con el mismo contenido. Si hago la mayor cantidad de cofres posibles, ¿cuántos objetos habrá en cada uno?

**A)** 10 **B)** 15 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 3

**22** ¿Sabes por qué a Comenúmeros le sientan mal los ochos? Un día se comió todas las cifras 8 que hay del 1 al 288 como si fueran rosquillas. ¿Cuántos ochos se comió el goloso?

**A)** 58 **B)** 57 **C)** 48 **D)** 60 **E)** 55

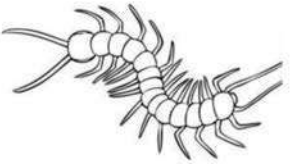
**23** La mitad de los niños de mi clase sabe qué es una pirámide truncada, tres cuartas partes saben qué es un trapecio isósceles y uno de cada tres sabe qué es la apotema de un polígono regular. Si en clase somos 24 y todos sabemos alguna de estas tres cosas, ¿cuántos como máximo saben las tres?



**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel I)**

**24** En el terrario de bichos peligrosos hay escolopendras, arañas y avispas. En total hay 18 bichos que tienen entre todos 196 patas. Si hay el doble de arañas que de escolopendras, ¿cuántas avispas hay? Por si no eres muy de bichos, te diré que una escolopendra tiene 46 patas, las arañas tienen 8 y las avispas 6.



**A)** 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 15

**25** Y para terminar Don Retorcido pregunta: ¿cuál de estos cinco números es múltiplo de 6, pero no lo es de 9, es divisible entre 7 pero no lo es entre 4?

**A)** 696 **B)** 666 **C)** 996 **D)** 966 **E)** 999

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 27 de abril de 2019**

**NIVEL II (1° y 2° de E.S.O.)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

**IMPORTANTE**: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 2.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

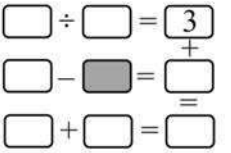
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

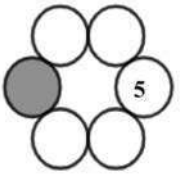
**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**1** Hemos colocado los números del 1 al 9 en los recuadros para que se cumplan las cuatro igualdades que hay. ¿Qué número ocupa la casilla central sombreada?



**A)** 4 **B)** 5 **C)** 1 **D)** 7 **E)** 8

**2** Colocamos los números 5, 6, 7, 8, 9 y 10 en los círculos de forma que la suma de los números de dos círculos que se tocan sea siempre primo. Si colocamos el 5 a la derecha, ¿qué número irá en el círculo gris?




**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

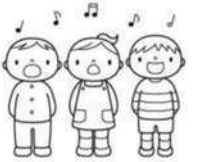
**3** ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen exactamente tres cincos?

**A)** 40 **B)** 36 **C)** 35 **D)** 34 **E)** 32

**4** Don Retorcido y la niña Centésima se han encontrado estos números {2, 3, 4, 15, 28, 35, 50} y los han ido cogiendo alternativamente de uno en uno hasta que ya no han quedado más números. La sorpresa ha sido que al multiplicar los números que han elegido cada uno les ha dado el mismo resultado. Si la niña Centésima fue la primera que eligió número, ¿cuánto suman sus números?

**A)** 72 **B)** 56 **C)** 65 **D)** 81 **E)** 55

**5** Tres amigos van a comprar sus entradas de igual precio para el musical *Don Retorcido y sus problemas*. A Antía, por ser la primera de la cola le rebajan un 15 %, a Roger, el segundo, un 10 % y al tercero, Fernando, un 5 %. Si entre los tres han pagado 351 euros, ¿cuál era el precio original de cada entrada?



**A)** 130 € **B)** 100 € **C)** 120 € **D)** 167 € **E)** 117 €

**6** Si los números $a$, $b$, $c$ son enteros positivos y $\dfrac{33}{29} = a + \dfrac{1}{b + \dfrac{1}{c}}$, ¿cuánto vale la suma $a + b + c$?

**A)** 12 **B)** 4 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 9

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**7** ¿Cuál de los siguientes números es mayor?

**A)** $2^{3^{(2^3)}}$ **B)** $\left(2^3\right)^{\left(2^3\right)}$ **C)** $\left(2^{\left(3^2\right)}\right)^3$ **D)** $2^{\left(3^2\right)^3}$ **E)** Los cuatro son iguales

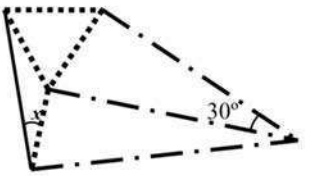
**8** ¡Prepárate para un buen lío! Berta tiene cinco hijas y ningún hijo. Algunas de sus hijas tienen cinco hijas y otras no tienen ninguna. Entre hijas y nietas, Berta tiene un total de veinte y no tiene bisnietas. ¿Cuántas hijas y nietas de Berta no tienen hijas?

**A)** 16 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 20

**9** En un torneo de fútbol participaron seis equipos, jugando todos contra todos un solo partido. Si la puntuación era de 3 puntos por victoria, 1 por empate y 0 por derrota, y entre todos los equipos sumaron 40 puntos, ¿cuántos empates hubo?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**10** En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO-RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?

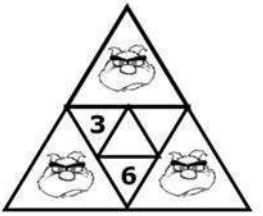



**A)** 18º **B)** 26º **C)** 15º
**D)** 24º **E)** 20º

**11** El alfabeto del lenguaje SISE tiene una sola consonante (la S) y dos vocales (la E y la I). Cualquier sucesión de una o más letras es una palabra, excepto las que tienen dos o más vocales consecutivas. Por ejemplo S, SSSES, ESI y SISESI son palabras, pero SEIS no lo es. ¿Cuántas palabras de cuatro letras tiene este lenguaje?

**A)** 17 **B)** 16 **C)** 21 **D)** 22 **E)** 20

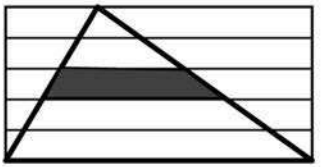
**12** En la figura ves siete regiones triangulares que tenían números enteros según esta regla: cada número de cada región es la suma de los números de sus regiones vecinas. Ten en cuenta que llamamos regiones vecinas a las que comparten más de un punto. Después de todas las explicaciones, llega la pregunta: ¿cuánto suman los números de las tres regiones de Comenúmeros?




**A)** 15 **B)** 0 **C)** –9 **D)** 12 **E)** 6

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**13** El rectángulo que ves está dividido en cinco partes iguales mediante segmentos paralelos a la base. ¿Qué fracción del triángulo ocupa el trapecio sombreado?



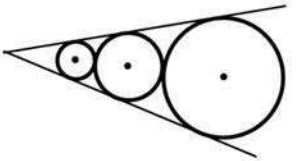
**A)** $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{1}{9}$ **C)** $\frac{3}{10}$

**D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{8}$

**14** Si $x$ son los números que cumplen $-5 \le 2x - 1 \le 7$, ¿cuál es la diferencia entre el mayor valor posible de $x$ y el menor?

**A)** 7 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 12 **E)** 6

**15** En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?



**A)** 10 **B)** 6 **C)** 15

**D)** 20 **E)** 16

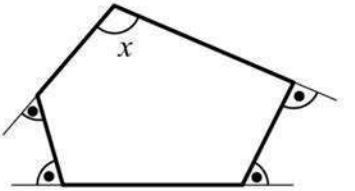
**16** Si parto un rectángulo mediante un segmento paralelo a los lados menores obtengo dos rectángulos cuyos perímetros suman 84 cm. Pero si lo divido mediante un segmento paralelo a los lados mayores, los perímetros de los rectángulos obtenidos suman 96 cm. ¿Cuál es el perímetro, en cm, del rectángulo de partida?

**A)** 60 **B)** 72 **C)** 90 **D)** 82 **E)** 57,5

**17** Si eliges tres vértices de un heptágono regular puedes formar muchos triángulos, pero, ¿cuántos de esos triángulos son isósceles?

**A)** 28 **B)** 12 **C)** 35 **D)** 21 **E)** 14

**18** Si la suma de los cuatro ángulos marcados con un punto es de 336º, ¿cuánto mide el ángulo $x$?




**A)** 96º **B)** 201º **C)** 156º

**D)** 191º **E)** 168º

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**19** Esta tabla nos muestra el resto de dividir cada número de la primera columna (desde el 11 hasta el 60) entre cada número de la primera fila (desde el 1 hasta el 6). ¿Cuánto suman todos los números del rectángulo sombreado?

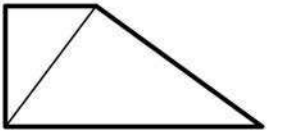
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| 15 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**A)** 400 **B)** 375 **C)** 360 **D)** 520 **E)** 380

**20** En el último partido de baloncesto, Irene lanzó solo dobles (que valen dos puntos) y triples (que valen tres). Solo tuvo éxito en el 20% de los triples y en el 30% de los dobles. Si en total tiró 30 veces, ¿cuántos puntos marcó?

**A)** 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 30 **E)** 36

**21** El trapecio rectángulo de la figura está formado por dos triángulos rectángulos semejantes. Los catetos del pequeño miden 3 cm y 4 cm. ¿Cuál es, en cm, el perímetro del trapecio?



**A)** 22 **B)** 21 **C)** 20 **D)** 23 **E)** 24

**22** La señora Rosalía tiene una colección de 480 rosas. Acaba de comprar 60 rosas blancas y su sobrina Rosalinda le dice "¿Te has fijado?, con estas 60 rosas nuevas el porcentaje de rosas blancas se ha duplicado." ¿Cuántas rosas blancas tiene…? No, cambiamos la pregunta que si no es muy fácil, ¿cuánto suman las cifras del número que indica la cantidad de rosas blancas que tiene ahora Rosalía?

**A)** 12 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 13 **E)** 14

**23** El menor número múltiplo de 19 que acaba en 17 comienza por…

**A)** 4 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 1

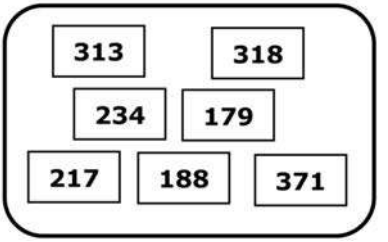
**24** Al sumar el mismo número al numerador y denominador de la fracción $\frac{3}{7}$ obtenemos la fracción $\frac{3}{5}$. ¿Qué número hemos sumado?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 10 **E)** 15

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**25** Don Retorcido tiene una caja con sus siete números favoritos y les dice a sus amigos que se los repartan. Joaquín, sin mirar, coge tres, María coge dos, Merche uno y el que sobra se lo queda don Retorcido. Cuando Joaquín mira sus números le dice a María "estoy seguro de que la suma de tus dos números es par". ¿Cuánto suman los tres números de Joaquín?

**A)** 822 **B)** 685 **C)** 740 **D)** 776 **E)** 764



XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 27 de abril de 2019**

**NIVEL III (3º y 4º de E.S.O.)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

**IMPORTANTE**: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 3.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

**1** Si $a = 1 + b$, ¿cuánto vale $\dfrac{1+2b}{a+b}$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** $\dfrac{2}{3}$ **E)** $\dfrac{1}{2}$

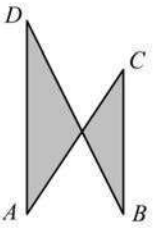
**2** Tres amigas comparan la capacidad de sus piscinas. La de Sara tiene un 15% más que la de Cati y la de Julia tiene un 25% más que la de Cati. ¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?

**A)** La de Julia tiene un 60% más que la de Sara
**B)** La de Sara tiene un 60% menos que la de Julia
**C)** La de Sara tiene un 8% menos que la de Julia
**D)** La de Julia tiene un 10% más que la de Sara
**E)** La de Sara tiene un 12% menos que la de Julia

**3** Sean $-4 \le a \le -2$, $2 \le b \le 4$, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar la expresión $\dfrac{a+b}{a}$?

**A)** $-1$ **B)** $-\dfrac{1}{2}$ **C)** 0 **D)** $\dfrac{1}{2}$ **E)** 1

**4** Para mi disfraz de este año, he querido diseñar una pajarita asimétrica. Teniendo en cuenta que los ángulos $DAB$ y $ABC$ son rectos, y que $AB = 4$, $AD = 8$, $BC = 6$, ¿cuál es la diferencia entre las áreas de las dos partes de la pajarita?




**A)** 2 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

**5** Tres amigos, África, Blanca y Carlos hacen el mismo recorrido en bicicleta. África va todo el rato a 20 km/h, Blanca recorre la primera mitad a 10 km/h y la segunda mitad a 30 km/h. Carlos hace tres cuartos del recorrido a 30 km/h, pero le da un tirón y el cuarto que le queda lo hace a 5 km/h. ¿Cuál de ellos tarda menos tiempo en hacer el recorrido?

**A)** África **B)** Blanca **C)** Carlos
**D)** Los tres tardan lo mismo **E)** Falta saber la distancia recorrida

**6** Si $(x+2)\cdot(y+2) = 60$ y $(x+3)\cdot(y+3) = 40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

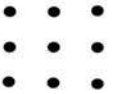
**7** En la papelería se venden ocho gomas de borrar por un euro, un rotulador cuesta un euro y una agenda 10 euros. He comprado en total 100 artículos entre gomas, rotuladores y agendas y he pagado 100 euros. ¿Cuántos rotuladores he comprado?

**A)** 14 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24

**8** En el cajón de mi abuela he encontrado una receta para hacer un bizcocho para 8 personas. Los ingredientes necesarios son: 1 yogur, 3 huevos, 3 tazas de harina, 2 tazas de azúcar, 1/2 taza de aceite y 2 cucharaditas de levadura. Si en casa tengo 4 yogures, 5 huevos, 6 tazas de harina, 3 tazas de azúcar, 3/4 tazas de aceite y 5 cucharaditas de levadura. ¿Cuál es el máximo número de amigos que podemos merendar bizcocho comiendo todos una ración?

**A)** 10 **B)** 11 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 14

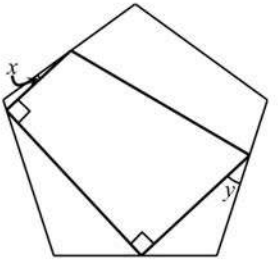
**9** Elegimos tres puntos al azar de esta cuadrícula. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres puntos elegidos estén alineados?



**A)** $\frac{1}{21}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{2}{7}$ **E)** $\frac{1}{14}$

**10** Un trapecio rectángulo tiene sus vértices en cuatro lados de un pentágono regular como ves en la figura, en la que hemos marcado los ángulos $x$ e $y$.
¿Cuánto vale $x + y$?

**A)** 30º **B)** 54º **C)** 36º
**D)** 45º **E)** 27º

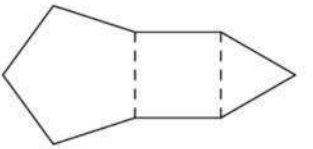



**11** ¿Cuál es el producto de todas las soluciones reales de la ecuación $(x^2-2)^{(3x^2+7x-6)}-1=0$ ?

**A)** – 3 **B)** 2 **C)** –2 **D)** – 6 **E)** $-\frac{27}{2}$

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

**12** Vamos a realizar una construcción con polígonos regulares. Empezamos colocando un cuadrado sobre un lado de un triángulo, luego colocamos un pentágono sobre un lado del cuadrado sin que las figuras se superpongan, así sucesivamente hasta colocar un decágono. ¿Cuántos lados tendrá el polígono resultante?



**A)** 39 **B)** 38 **C)** 41 **D)** 42 **E)** 43

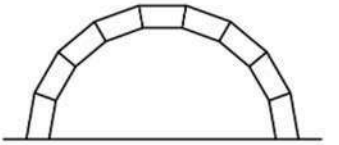
**13** En una liga de fútbol participan 20 equipos. Todos juegan contra todos dos veces (una en casa y otra fuera). Si la suma de las puntuaciones de todos los equipos fue de 1005, ¿cuántos empates hubo? Recuerda: Una victoria son 3 puntos y un empate es 1 punto.

**A)** 113 **B)** 121 **C)** 135 **D)** 141 **E)** 150

**14** Ana dice: "Lo hizo Berto". Berto dice: "Ana miente". Cris dice: "Lo hizo Dani". Dani dice: "Lo hizo Ana". Eva dice: "Cris miente". Sabemos que exactamente dos de las afirmaciones son falsas y que solo una de esas cinco personas lo hizo. ¿Quién lo hizo?

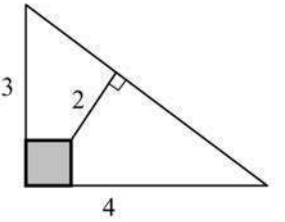
**A)** Ana **B)** Berto **C)** Cris **D)** Dani **E)** Eva

**15** A Lucía le gustan mucho las manualidades y se propone construir un arco con trapecios isósceles iguales como muestra la figura. Si quiere construir el arco con nueve de estos trapecios, ¿cuántos grados ha de medir el ángulo interior más grande del trapecio?



**A)** 100º **B)** 102º **C)** 104º **D)** 108º **E)** 110º

**16** En la esquina de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 hemos colocado un pequeño cuadrado coloreado de gris. Con los datos que aporta el dibujo, ¿qué área ocupa el cuadradito gris?




**A)** $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{9}{16}$ **C)** $\frac{1}{9}$

**D)** 1 **E)** $\frac{4}{49}$

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

**17** Julián lanza al aire una moneda dos veces y Lucía la lanza tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

**A)** $\frac{7}{32}$ **B)** $\frac{5}{16}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{3}{16}$ **E)** $\frac{5}{32}$

**18** En una convención de mellizos y trillizos hay 9 parejas de mellizos y 6 tríos de trillizos. Cada mellizo le da la mano a todos los mellizos menos a su mellizo y a la mitad de los trillizos. Cada trillizo le da la mano a todos los trillizos menos a sus trillizos y a la mitad de los mellizos. ¿Cuántos apretones de manos se dieron en total?

**A)** 324 **B)** 441 **C)** 630 **D)** 648 **E)** 882

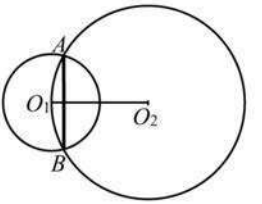
**19** Si $a$ y $b$ son números enteros positivos, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de $a$ que son solución de la ecuación $5a - 9b^2 = ab$?

**A)** 12 **B)** 16 **C)** 20 **D)** 144 **E)** 156

**20** Tenemos dos circunferencias de radios 2 y 1, de modo que la circunferencia de radio 2 pasa por el centro de la circunferencia de radio 1. ¿Cuál es la distancia entre los dos puntos en los cuales se cortan las dos circunferencias?

**A)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\sqrt{3}$ **C)** $\frac{\sqrt{15}}{2}$

**D)** $2\sqrt{3}$ **E)** 2




**21** ¿Cuánto vale la suma de todos los enteros $n$ para los que $n^2 + 6n + 24$ es un cuadrado perfecto?

**A)** –12 **B)** –6 **C)** 6 **D)** – 8 **E)** 8

**22** ¿Cuál es el menor número factorial que es divisible por $2^{100}$?

Recuerda: el factorial de $n$ es $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

**A)** 99! **B)** 100! **C)** 101! **D)** 102! **E)** 104!

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

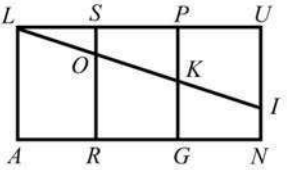
**23** El frutero de mi barrio apila las naranjas de la siguiente forma: Sobre una base rectangular de 5 x 8 naranjas va colocando naranjas de manera que las naranjas del piso superior se apoyan en el hueco que queda entre las cuatro naranjas de abajo hasta coronar con un piso que tiene una única fila de naranjas. ¿Cuántas naranjas tienen las pirámides del frutero?

**A)** 100 **B)**134 **C)** 98 **D)**101 **E)** 96

**24** Un número de seis cifras contiene los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 5?

**A)** $\frac{9}{50}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{12}{25}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{9}{25}$

**25** Dividimos el rectángulo *LUNA* en tres rectángulos idénticos. Sabiendo que el área de *PUIK* es el doble del área de *KING*, ¿cuál es el cociente entre el área de *SOL* y el área de *LUNA*?




**A)** $\frac{2}{45}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{27}$ **D)** $\frac{1}{30}$ **E)** $\frac{4}{81}$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

**XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 27 de abril de 2019**

**NIVEL IV (1° y 2° de Bachillerato)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

**IMPORTANTE**: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 4.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**1** Si $3^a = 81^{b+2}$ y $125^b = 5^{a-3}$, ¿cuánto vale $a \cdot b$?

**A)** 60 **B)** 15 **C)** $-30$ **D)** 24 **E)** 48

**2** El área que encierra la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 7)$ y $C(9, 1)$ mide:

**A)** $10\pi$ **B)** $25\pi$ **C)** $16\pi$ **D)** $27\pi$ **E)** $9\pi$

**3** En una circunferencia repartimos $n$ puntos de forma que siempre haya la misma distancia entre dos consecutivos. Dibujamos un polígono regular con vértices en algunos de estos puntos y comprobamos que tenemos tres vértices consecutivos en las posiciones 26, 2 y 8. La suma de $n$ y el número de lados de nuestro polígono dibujado es:

**A)** 32 **B)** 34 **C)** 35 **D)** 36 **E)** 38

**4** Agustina, Bea y César eligen cada uno un número entero, $a$, $b$ y $c$. Agustina calcula $a + \frac{b}{c}$ y obtiene 197. Bea calcula $\frac{a}{c} + b$ y obtiene 92. César calcula $\frac{a+b}{c}$ y obtiene $x$.
¿Cuánto vale $x$?

**A)** 16 **B)** 17 **C)** 256 **D)** 270 **E)** 289

**5** Si $f(x)$ es una función polinómica que cumple que $f\left(x^2+1\right) = x^4 + 5x^2 + 3$ para todo número real $x$, entonces, para todo número real $x$, se cumple que $f\left(x^2-1\right)$ es igual a:

**A)** $x^4 + 5x^2 + 1$ **B)** $x^4 + x^2 - 3$ **C)** $x^4 - 5x^2 + 1$
**D)** $x^4 + x^2 + 3$ **E)** $x^4 + 3x^2$

**6** ¿Cuál es el valor más pequeño de $x$ ($x > 1$) si tiene que cumplir que $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \leq \frac{1}{x^2}$ ?

**A)** $e^{\sqrt{e}}$ **B)** $e^{(e^2)}$ **C)** $e^{2e}$ **D)** $(1+e)^e$ **E)** $e^{-2e}$

**7** Sean $a$ y $b$ dos números enteros que cumplen $a + \sqrt{b} = \sqrt{14 + \sqrt{180}}$ .
Calcula $a^2 + b^2$ .

**A)** 40 **B)** 17 **C)** 29 **D)** 37 **E)** 34

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**8** En la sucesión $a_1$, $a_2$, $a_3$ ... se cumple que $a_1 = a$, $a_3 = b$ y que cada término después del primero es la suma del anterior y del posterior menos uno, es decir, $a_{n+1} = a_n + a_{n+2} - 1$ si $n > 1$. Calcula la suma de los 2019 primeros términos.

**A)** $2a+2b+2015$ **B)** $2a+2b+2016$ **C)** $2a+b+2015$

**D)** $a+2b+2016$ **E)** $2a+b+2016$

**9** Con 300 cubos de 1 centímetro de lado construimos un prisma rectangular sólido y lo apoyamos sobre una mesa. Si sabemos que el perímetro de la base es de 14 centímetros, ¿cuál es la suma de todas las diferentes alturas posibles del prisma?

**A)** 80 **B)** 55 **C)** 210 **D)** 105 **E)** 75

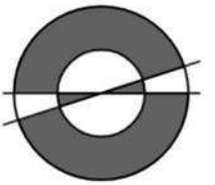
**10** ¿Cuál es el resto de dividir la suma $3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{2019}$ entre 8?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 4 **E)** 6

**11** Tres amigos juegan con sus piedras. Jorge empieza con 15, Miguel con 14 y Santiago con 13. El juego consiste en que el que tiene más piedras da una piedra a cada uno de los otros amigos y deja otra piedra en un bote. El juego termina cuando uno de los tres se queda sin piedras. En ese momento, ¿cuántas piedras hay en el bote?

**A)** 36 **B)** 37 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

**12** Dos rectas pasan por el centro de dos círculos concéntricos de radios 1 y 2. Si el cociente entre el área sombreada y el área no sombreada es 7/3, ¿cuánto mide el ángulo agudo que forman las rectas?



**A)** 7º **B)** 14º **C)** 15º

**D)** 18º **E)** 21º

**13** ¿Cuántos números naturales $n$ menores que 100 hacen que $\sqrt{1+2+3+...+n}$ sea un número natural?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**14** Los cuatro vértices de un cuadrado son los puntos $A(p, q)$, $B(r, s)$, $C(t, 0)$, $D(0, u)$, siendo $p, q, r, s, t, u$ todos positivos. Sabiendo que $p + q + r + s = 36$, ¿cuál es el valor de la suma $t + u$ ?

**A)** 9 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 24

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**15** ¿Cuál es el menor número factorial que es divisible por $2^{1000}$?
$[\, n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\,]$

**A)** 1000! **B)** 1001! **C)** 1004! **D)** 1008! **E)** 1010!

**16** Si $a$ y $b$ son números positivos distintos de 1, ¿cuánto es

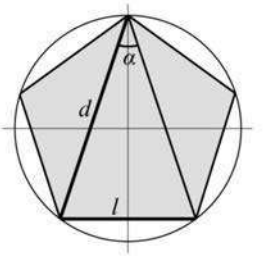
$$\frac{\log_a\left(\sqrt[3]{b^5}\right)^2 - 4\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{b}}}\right)} \,?$$

**A)** 173 **B)** 174 **C)** 175 **D)** 176 **E)** 177

**17** La relación entre la diagonal del pentágono regular de la figura y su lado es $\frac{d}{l} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por eso sabemos que el $\cos\alpha$ es igual a:

**A)** $\phi - 1$ **B)** $\frac{1}{\phi}$ **C)** $\frac{\phi}{2}$

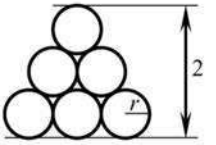
**D)** $\frac{\phi}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{5}}{4}$




**18** Tres rectas paralelas cortan al eje de ordenadas en los puntos $A(0,-1)$, $B(0,2)$, $C(0,4)$ y al eje de abscisas en los puntos $D(d,0)$, $E(e,0)$, $F(f,0)$.
Si sabemos que $d+e+f=40$, ¿cuál es la pendiente de las rectas?

**A)** $-8$ **B)** $-\frac{1}{8}$ **C)** $-4$ **D)** $-\frac{1}{4}$ **E)** $-1$

**19** Don Retorcido ha situado seis circunferencias iguales tangentes de manera triangular, tal y como se indica en la figura. Una vez hecho esto, la altura de la figura resultante mide 2. ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias?



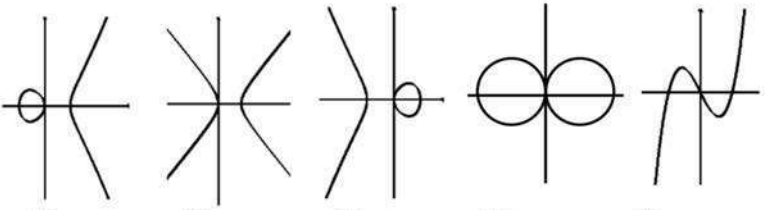

**A)** $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ **B)** $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ **C)** $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**20** Marta está en un punto intermedio entre su casa y el gimnasio. Puede ir andando al gimnasio o volver a casa y coger su bici para ir al gimnasio. Sabiendo que en bici va 7 veces más rápido que andando y que haga lo que haga tardará lo mismo, ¿cuál es el cociente entre la distancia a la que está de casa y la distancia a la que está del gimnasio?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{4}{5}$ **E)** $\frac{5}{6}$

**21** ¿Qué dibujo representa mejor la gráfica de la ecuación $y^2 = x(x^2 - 1)$?



**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**22** ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen exactamente tres cifras iguales?

**A)** 400 **B)** 360 **C)** 351 **D)** 324 **E)** 320

**23** Si $z$ es un número complejo y $z^2 = 2z - 2$, entonces $z^4$ es…

**A)** $-4$ **B)** 4 **C)** 8 **D)** $-8$ **E)** 16

**24** En la urna A tenemos una bola blanca y otra negra, en la urna B tenemos una bola blanca y dos negras y en la urna C tenemos una bola blanca y tres negras. Extraemos al azar una bola de la urna A y la introducimos en la B; a continuación, extraemos al azar una bola de la urna B y la introducimos en la urna C. Y por último, extraemos al azar una bola de la urna C. ¿Qué probabilidad hay de que esta última bola sea negra?

**A)** $\frac{13}{20}$ **B)** $\frac{27}{40}$ **C)** $\frac{7}{10}$ **D)** $\frac{29}{40}$ **E)** $\frac{3}{4}$

**25** Sean $a$, $b$, $c$, $f$, $g$ y $h$ los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo $ABC$, su circuncentro $F$, su baricentro $G$ y su ortocentro $H$, respectivamente. Entonces:

**A)** $a + b + c = 3h$ **B)** $2(a + b + c) = 3(f + h)$ **C)** $a + b + c = 2f + h$

**D)** $2(a + b + c) = 3$ **E)** $f + h = 2g$

# XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **C** | 1 | **E** | 1 | **B** | 1 | **D** |
| 2 | **B** | 2 | **A** | 2 | **D** | 2 | **D** |
| 3 | **A** | 3 | **B** | 3 | **B** | 3 | **A** |
| 4 | **A** | 4 | **E** | 4 | **D** | 4 | **C** |
| 5 | **A** | 5 | **E** | 5 | **C** | 5 | **E** |
| 6 | **C** | 6 | **A** | 6 | **D** | 6 | **C** |
| 7 | **A** | 7 | **B** | 7 | **E** | 7 | **D** |
| 8 | **E** | 8 | **D** | 8 | **B** | 8 | **C** |
| 9 | **D** | 9 | **A** | 9 | **C** | 9 | **A** |
| 10 | **B** | 10 | **C** | 10 | **E** | 10 | **C** |
| 11 | **D** | 11 | **D** | 11 | **C** | 11 | **D** |
| 12 | **D** | 12 | **E** | 12 | **C** | 12 | **C** |
| 13 | **D** | 13 | **D** | 13 | **B** | 13 | **A** |
| 14 | **E** | 14 | **D** | 14 | **C** | 14 | **E** |
| 15 | **A** | 15 | **A** | 15 | **C** | 15 | **D** |
| 16 | **D** | 16 | **D** | 16 | **B** | 16 | **A** |
| 17 | **D** | 17 | **B** | 17 | **A** | 17 | **C** |
| 18 | **D** | 18 | **C** | 18 | **A** | 18 | **C** |
| 19 | **C** | 19 | **A** | 19 | **C** | 19 | **B** |
| 20 | **E** | 20 | **B** | 20 | **B** | 20 | **A** |
| 21 | **A** | 21 | **B** | 21 | **B** | 21 | **A** |
| 22 | **D** | 22 | **E** | 22 | **E** | 22 | **C** |
| 23 | **D** | 23 | **A** | 23 | **B** | 23 | **C** |
| 24 | **D** | 24 | **B** | 24 | **B** | 24 | **B** |
| 25 | **E** | 25 | **B** | 25 | **E** | 25 | **B** |

XXIII Concurso 2ª Fase

# XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
# TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **D** | 1 | **A** | 1 | **A** | 1 | **A** |
| 2 | **C** | 2 | **E** | 2 | **C** | 2 | **B** |
| 3 | **D** | 3 | **C** | 3 | **D** | 3 | **C** |
| 4 | **D** | 4 | **B** | 4 | **B** | 4 | **B** |
| 5 | **D** | 5 | **A** | 5 | **A** | 5 | **B** |
| 6 | **C** | 6 | **A** | 6 | **A** | 6 | **B** |
| 7 | **B** | 7 | **A** | 7 | **D** | 7 | **E** |
| 8 | **C** | 8 | **B** | 8 | **C** | 8 | **A** |
| 9 | **D** | 9 | **D** | 9 | **B** | 9 | **D** |
| 10 | **C** | 10 | **C** | 10 | **C** | 10 | **A** |
| 11 | **A** | 11 | **C** | 11 | **D** | 11 | **B** |
| 12 | **E** | 12 | **B** | 12 | **B** | 12 | **D** |
| 13 | **D** | 13 | **D** | 13 | **C** | 13 | **C** |
| 14 | **E** | 14 | **E** | 14 | **A** | 14 | **B** |
| 15 | **E** | 15 | **E** | 15 | **A** | 15 | **D** |
| 16 | **E** | 16 | **A** | 16 | **E** | 16 | **D** |
| 17 | **A** | 17 | **D** | 17 | **B** | 17 | **C** |
| 18 | **B** | 18 | **C** | 18 | **B** | 18 | **B** |
| 19 | **C** | 19 | **B** | 19 | **E** | 19 | **A** |
| 20 | **C** | 20 | **B** | 20 | **C** | 20 | **C** |
| 21 | **D** | 21 | **A** | 21 | **A** | 21 | **A** |
| 22 | **A** | 22 | **C** | 22 | **E** | 22 | **D** |
| 23 | **D** | 23 | **D** | 23 | **A** | 23 | **A** |
| 24 | **D** | 24 | **B** | 24 | **E** | 24 | **D** |
| 25 | **D** | 25 | **C** | 25 | **A** | 25 | **C** |

# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 1ª Fase Nivel I

**1. (C)** Si un cuarto de mandarina tiene 2,5 gajos, una mandarina tendrá $2,5 \times 4 = 10$ gajos. De modo que 65 gajos serán $65 : 10 = 6,5$ mandarinas.

**2. (B)** Construiremos los pisos empezando por el de arriba. Es evidente que cuando terminemos nos sobrarán muchos cubos blancos, así que solo es necesario considerar los cubos negros. En el primer piso hay 0 cubos negros, en el segundo 1, en el tercero 2, en el cuarto 3 y así sucesivamente. Tenemos pues que sumar la sucesión de números naturales, de modo que la suma sea 50 o lo más próximo posible a 50 sin sobrepasarlo.
Tanteando un poco vemos que: $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 9 = 45$.
Por tanto, al completar 10 pisos solo quedan 5 cubos negros y no se puede terminar el piso decimoprimero. La construcción más alta es de 10 pisos.

**3. (A)** El de Julián alcanza 2,50 m = 25 dm y el de Lucía 370 cm = 37 dm.
En consecuencia, la diferencia de distancias es $37 - 25 = 12$ dm.

**4. (A)** Cada habitante de Trescatorce tiene $3 \times 3 = 9$ dedos en las manos y $14 \times 14 = 196$ dedos en los pies, luego un habitante de Trescatorce tiene $9 + 196 = 205$ dedos. Tres habitantes de Trescatorce tendrán pues $3 \times 205 = 615$ dedos. Por su parte, los 6 terrícolas tenemos $6 \times 20 = 120$ dedos.
Luego, en la fiesta hay $615 + 120 = 735$ dedos.

**5. (A)** En el concierto hay $19\,987 \times 205 = 4\,097\,335$ dedos. Claramente, el número que mejor los aproxima es 4 000 000.

**6. (C)** Puesto que las cantidades deben ser proporcionales empleamos la regla de tres. Si a 39 dientes de ajo le corresponden 51 patas de araña a 26 dientes de ajo le corresponderán $x$ patas de araña de donde $x = \dfrac{26 \times 51}{39} = 34$.

**7. (A)** Dado que $100 = 24 \times 4 + 4$, tenemos que 100 h son igual a 4 días más cuatro horas. Luego el reloj tiene que darnos las $11 + 4 = 15$ h, esto es, las 3 de la tarde.

**8. (E)** El octógono interior se compone de 8 triángulos y 8 rombos. El área que falta para completar el octógono exterior se compone también de 8 triángulos y 8 rombos. Por tanto, el área del octógono interior es de $48 : 2 = 24$ cm$^2$.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**9. (D)** El mínimo común múltiplo de 6, 10 y 15 es 30. Por lo tanto dentro de 30 días volveré a comer mi menú favorito.

**10.(B)**

$$\begin{array}{rr} \heartsuit & \clubsuit \\ \times & 7 \\ \hline 4 & \clubsuit \quad \clubsuit \end{array}$$

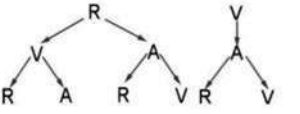
Como la cifra de las unidades del producto $\clubsuit \times 7$ es $\clubsuit$, Necesariamente $\clubsuit$ es 0 o 5. Descartamos cero pues implica que $\heartsuit$ sea igual a cero. Tenemos pues:

$$\begin{array}{rrr} \heartsuit & 5 & \\ \times & 7 & \\ \hline 4 & 5 & 5 \end{array}$$

De donde $\heartsuit = 6$ ´ya que $7 \times 6 + 3 = 45$. Por tanto, $\clubsuit + \heartsuit = 5 + 6 = 11$.

**11.(D)** Se puede ver que A), B), C) y E) caben en alguno de los huecos recortados. Por lo tanto, admitiendo que uno de los trozos no cabe en ningún hueco, D) es la solución. No obstante, podemos comprobar que no se puede encajar D) en ninguno de los huecos.

**12.(D)** Una forma segura de contar todas las formas de colorear, es hacerlo, por ejemplo, de arriba abajo y representar las posibilidades en forma de árbol. Si comenzamos por los dos colores posibles en el vértice superior y continuamos de esa manera hasta llegar a la base del triángulo, tendremos representadas todas las posibilidades de colorear. En la figura quedan claras las 6 posibles formas.



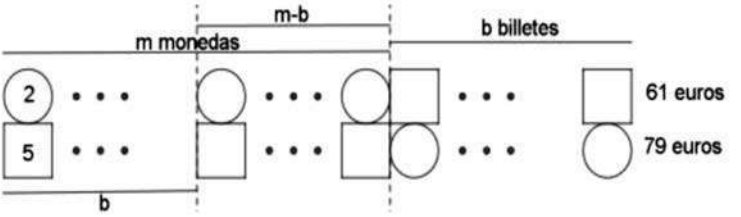

**13.(D)** El barco recorre los 4,5 km en media hora más 15 minutos, es decir en tres cuartos de hora. En un cuarto de hora recorre $4{,}5 : 3 = 1{,}5$ km y en una hora, que son cuatro cuartos, recorrerá $1{,}5 \times 4 = 6$ km.

**14.(E)** Como en la estrofa se repite 2 veces la letra i, ha cantado dicha estrofa $348 : 2 = 174$ veces. Dado que en la estrofa se repite 6 veces la letra a, ha pronunciado $174 \times 6 = 1044$ veces la letra a. La suma de sus cifras es 9.

**15.(A)** Jesús va a una velocidad de $\frac{4000}{10} = 400$m/minuto. Por lo que en 4 minutos recorrerá $400 \times 4 = 1600$ m.

**16.(D)** La ballena jorobada, en 50 años recorre aproximadamente $50 \times 17000 = 850000$ km que son 850 000 000 m. Esto descarta inmediatamente todas las soluciones a excepción de la "D) 800 millones".

**17.(D)** El hecho de que haya más euros después del intercambio indica que hay más monedas que billetes. Esto nos permite hacer un esquema como el de la figura.




La figura habla por sí misma y nos dice que el número de monedas, $m$ , más el número de billetes, $b$ , multiplicado por (5 + 2) es igual a (61 + 79), lo que lleva a: $m+b=\frac{140}{7}=20$. Igualmente es fácil de comprender que la diferencia del número de monedas menos el número de billetes multiplicada por (5 – 2) es igual a (79 – 61), lo que implica: $m-b=\frac{18}{3}=6$. Conocida la suma y la diferencia de $m$ y $b$, es inmediato que $2 \times m = 20 + 6 = 26$ y de aquí: $m = 13$.

**18.(D)** Representando Manzana, Flor, Abrazo y Bombón por sus iniciales respectivas, el enunciado dice:

M = A + 2F (1)
M + F = A + B (2)
A = F + B (3)

Restando de la igualdad (2) la igualdad (3) se obtiene M + F – A = A – F que equivale a M + 2F = 2A que indica que una manzana más dos flores equivalen a dos abrazos. Pero de la igualdad (1) se deduce que 2M = 2A + 4F que quiere decir que dos manzanas equivalen a dos abrazos y y cuatro flores.
Pero como 2A = M + 2F resulta que 2M = M + 2F + 4F, es decir M = 6F. Por tanto, una Manzana equivale a 6 Flores.

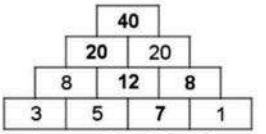
**19.(C)** La frase determinante es "Ana es más alta que la tenista".Que Ana sea más alta que la tenista implica que Ana no es tenista y como tampoco es la más baja, no puede ser la gimnasta. En consecuencia, Ana es nadadora.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**20.(E)** El mínimo número de montones de 5 botones es 8, lo que supone $5 \times 8 + 2 = 42$ botones. Aumentando de uno en uno el número de montones tendríamos sucesivamente: 42, 47, 52, 57, 62, 67, 72 y 77 botones.
Haciendo lo mismo con montones de 7 botones tendremos sucesivamente:
46 ($7 \times 7 - 3$), 53, 60, 67, y 74 botones. Por tanto, en el costurero hay 67 botones y si los organizo en 11 montones de 6 botones cada uno, sobrará un botón.

**21.(A)** En CUCA, la U se puede poner de 4 formas distintas. Una vez hecho esto, para cada posición de la U, quedan 3 posibles formas de colocar la A, y una vez colocada la A, solo queda una posibilidad para las dos letras C. Por lo tanto CUCA origina $6 \times 2 \times 1 = 12$ palabras. Por otra parte, con LINO, como las cuatro letras son distintas, se pueden formar $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ palabras. Entre las dos tendremos $12 + 24 = 36$ palabras distintas.

**22.(D)** La suma de los dos números a la derecha del8 tiene que ser 20, por lo que llamando $x$ al número situado entre el 5 y el 1 tendremos: $20 = (5 + x) + (x + 1)$ de donde $14 = 2 \times x$, es decir, $x = 7$. Sabiendo esto rellenamos hacia arriba "en cascada" todos los número que faltan.




La suma de los cinco números es: $40 + 20 + 12 + 8 + 7 = 87$.

**23.(D)** Mientras Inés corre 50 m Guillermo corre 40. Cuando Inés corra 60 m Guillermo habrá corrido $x$ m, por lo tanto $x = \frac{60 \times 40}{50} = 48$ m. De donde, a Guillermo, le faltarán $60 - 48 = 12$ m para llegar a la meta.

**24.(D)** Si nos fijamos bien, entre los 3 han clavado 3 dardos en cada zona y han sumado $36 + 56 + 58 = 150$ puntos. Dado que Inés ha clavado uno en cada zona, sumará $150 : 3 = 50$ puntos.

**25.(E)** Como contestó bien a 18 y mal a 3, dejó $25 - (18 + 3) = 4$ respuestas en blanco, de modo que obtuvo $18 \times 5 + 3 \times 0 + 4 \times 1 = 94$ puntos.

# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

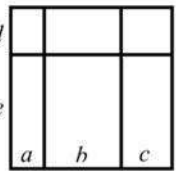
## Soluciones 1ª Fase Nivel II

**1. (E)** I. es verdadera. La suma de un número par con un número impar es impar. El triple de un número impar es impar y el doble de cualquier número es siempre par, así que esa suma la suma es impar. Para verlo se más rigor se pueden escribir los números impares como $2m + 1$ y $2n + 1$ y sumar el triple del primero más el doble del segundo: $3(2m + 1) + 2(2n + 1) = 6m + 3 + 4n + 2 = 2\,(3m + 1 + 2n + 1) + 1$.
II. es verdadera. Entre tres números consecutivos siempre hay un múltiplo de 3 y al menos un múltiplo de 2 y por lo que el producto será múltiplo de 6.
III. es verdadera. Basta aplicar el criterio de divisibilidad del 11: la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan posiciones pares y los que ocupan posiciones impares es siempre 0.
IV. es verdadera. Basta aplicar el criterio de divisibilidad de 0: la suma de las cifras de todos esos números es 45 que es múltiplo de 9.

**2. (A)** Como *bcd* es múltiplo de 5, $d = 5$.
Para que *cde* sea múltiplo de 3 debe serlo $c + d + e = c + e + 5$. Así que $c + e$ puede valer 4 o 7 y como $c$ solo puede ser 2 o 4, ya que *abc* es múltiplo de 4 la única posibilidad es que $c$ sea 4 y $e$ sea 3. El número *ab*4 debe ser múltiplo de 4 con $a$ y $b$ que solo pueden tomar los valores 1 o 2. De las dos posibilidades 124 y 214 sólo es múltiplo de 4 el 124. El número en cuestión es 12453, que es múltiplo de 7 pero no de 3, ni de 5 ni de 11 ni de 13.

3. **(B)** Calculemos cada número con cuidado:
$R = -(2 - 3) - 4 = -(-1) - 4 = 1 - 4 = -3$.
$S = 6 : (7 - 8) = 6 : (-1) = -6$.
$T = -3 - (5 - 4) = -3 - 1 = -4$.
Vamos probando:
**A**) es falta: $R + S = -3 + (-6) = -9$ y $T + 5 = -4 + 5 = 1$
**B**) es verdadera: $R - S = -3 - (-6) = -3 + 6 = 3$ y $T + 7 = -4 + 7 = 3$
Aunque no es necesario seguir, vemos rápidamente que las demás son falsas porque **C**) $R \cdot T = 12$ y $2S = -12$, **D**) $R + 1 = -2$ y **E**) $R - S + T = -1$

**4. (E)** Ponemos nombres a los lados de los rectángulos como ves en la figura.
Tenemos que calcular $(a + b + c)$ que es igual a $(d + e)$.
Sabemos que $2(a + d) + 2(b + d) + 2(c + d) + 2(a + e) + 2(b + e) + 2(c + e) = 420$.
Operando tenemos que
$4(a + b + c) + 6(d + e) = 4(d + e) + 6(d + e) = 10(d + e) = 420$.
Así pues, $d + e = 42$.



## XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**5. (E)** Para saberlo debemos hacer el producto en cruz y ver si son iguales. Miremos solo las cifras de las unidades de esos productos: en **A**) un producto acaba en 2 y el otro en 4, en **B**) uno en 4 y el otro en 2, en **C**) las terminaciones son 8 y 6 mientras que en **D**) son 2 y 4. Por último, en **E**) la cifra de las unidades de ambos productos es 2 y guiándonos de la pista, ya no tenemos que hacer nada más.

**6. (A)** Por cada 10 divisiones hacer 12 multiplicaciones y 9 restas, es decir $10 + 12 + 9 = 31$ operaciones. Como ha hecho $124 = 31 \cdot 4$ hizo cuatro bloques de 31 operaciones, de las cuales 12 son multiplicaciones. Así pues, la niña Centésima hizo $4 \cdot 12 = 48$ multiplicaciones.

**7. (B)** Toca repasar las propiedades de potencias:
$20^{20} \cdot 30^{30} = (2^2 \cdot 5)^{20} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^{30} = 2^{40} \cdot 5^{20} \cdot 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 5^{30} = 2^{70} \cdot 3^{30} \cdot 5^{50}$.
Entonces $a + b + c = 70 + 30 + 50 = 150$.

**8. (D)** Contemos cuántos doses y cuántos cincos habrá en ese producto:
Todos los múltiplos de 5 aportan un 5, salvo los que también son múltiplos de 25, que aportan 2. Como $100 = 5 \cdot 20$, hay 20 múltiplos de 5 y tres de ellos lo son también de 25, así que el producto tendrá en total $20 + 3 = 23$ cincos.
Los doses viene de $2 \cdot 5$, $4 \cdot 5$, $6 \cdot 5$, … hasta $20 \cdot 5$. En total hay 10 múltiplos de 2, de los cuáles 5 son múltiplos de 4, dos lo son 8 y uno de 16: $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ doses habrá en el producto. Así pues, el número acabará en 18 ceros.

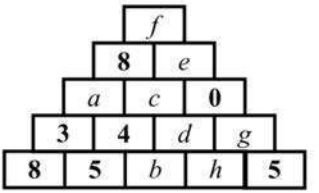
**9. (A)** En la etapa 1 hay un puntito y 3 líneas.
En la etapa 2 hay $1 + 3 = 4$ puntitos y $3 + 2 \cdot 3 = 9$ líneas.
En la etapa 3 hay $4 + 2 \cdot 3 = 10$ puntitos y $9 + 2^2 \cdot 3 = 21$ líneas.
En la etapa 4 habrá $10 + 2^2 \cdot 3 = 22$ puntitos y $21 + 2^3 \cdot 3 = 45$ líneas.
En la etapa 5 añadiremos $2^3 \cdot 3$ puntitos y $2^4 \cdot 3$ líneas más, así que tendremos $22 + 24 = 46$ puntitos y $45 + 48 = 93$ líneas.
Para saber cuántos habrá en la etapa 6 debemos sumar $2^4 \cdot 3$ puntitos y $2^5 \cdot 3$ líneas lo que da $46 + 48 = 94$ puntitos y $93 + 96 = 189$ líneas. En número total de puntitos y líneas es $94 + 189 = 283$.

**10.(C)** El volumen de cada cubo es $448 : 7 = 64$ dm$^3$, así el lado de cada cubo mide 4. Cada cubo de fuera tiene 5 caras visibles, así que hay que forrar $6 \cdot 5 = 30$ caras, así que necesito $30 \cdot 4^2 = 480$ dm$^2$ de papel.

**11.(D)** Si yendo a 4 km/h tarda $t$ horas, yendo a 3 km/h tarda $t + 1/2$ horas. Como la distancia recorrida en ambos casos es la misma, debe ser $4t = 3(t + 1/2)$.
Luego $t = 3/2$. Es decir, a 4 km/h tarda una hora y media, luego recorre 6 km.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**12.(E)** De entrada vemos que $a = 7$ y $b = 9$. Ahora es fácil ver que $c = 1$. Y si $c = 1$, debe ser $d = 7$ y $e = 1$. Ahora es fácil ver que $f = 9$ y $g = 3$. Por último, $h = 8$.
La suma es $7 + 9 + 1 + 7 + 1 + 9 + 3 + 8 = 45$.




**13.(D)** Vamos poco a poco de abajo arriba:

$$1+\frac{2}{1+\frac{3}{1+4}}=1+\frac{2}{1+\frac{3}{5}}=1+\frac{2}{\frac{8}{5}}=1+\frac{10}{8}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}$$

**14.(D)** Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras lo es. Los números de dos cifras múltiplos de cuatro que podemos formar son: 24, 28, 48, 64 y 84. Por cada uno de ellos podemos formar dos números de cuatro cifras múltiplo de 4: 68**24** y 86**24**, 46**28** y 64**28**, etc. En total podemos formar $2 \cdot 6 = 12$ múltiplos de 4.

**15.(A)** Buscamos tres números $A$, $B$ y $C$ que cumplan que los siguientes porcentajes sean números enteros e iguales: 15% de $A$, 32% de $B$, 40% de $C$ y $A + B + C$ menor que 300. Como calcular el 15% es lo mismo que calcular 3/20, A tiene que ser divisible entre 20 y el resultado será múltiplo de 3. Calcular el 32% es como calcular 8/25 así que B debe ser múltiplo de 25 y el resultado será múltiplo de 8 y de 3, por lo dicho sobre A. Probemos con $B = 25 \cdot 3 = 75$, que es el valor menor para $B$. 32% de $B$ = 32% 75 = 24. $A$ tendría que ser $24 \cdot 20/3 = 160$ y $C$ será $24 \cdot 5/2 = 60$. En total tienen $160 + 75 + 60 = 295$ discos.

**16.(D)** N debe ser par y al multiplicarlo por 4 debe ser menor que 10, así que N = 2.
R podría ser 3 o 8, pero como N · E = R, debe ser 8. O es impar, y al multiplicarlo por 4 da un número menor que 10, así que solo puede ser 1 y A será 7. La cifra de las decenas al multiplicar T por 4 es 3 y la de las unidades es T – 3, así que T es 9. Las cifras 3, 5 y 6 serán las letras C, I y S, que suman 14, por lo que la suma buscada es: $8 + 7 + 9 + 1 + 2 + C + I + 9 + 1 + S = 37 + 14 = 51$

**17.(B)** En el exterior hay 8 rombos blancos y para cada uno de ellos hacen falta 4 palillos, que suman 32 palillos. En el interior hay 8 rombos, pero como comparten lados, para cada uno de ellos hacen falta 3 palillos que suman 24 palillos. En total hay $32 + 24 = 56$ palillos que colocados uno detrás de otro miden 5,6 metros.

## XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**18.(C)** Si el lado del cuadrado mide $C$ y el lado triángulo mide $T$, sabemos que $4C = 3T$ y por tanto $C/T = 3/4$.

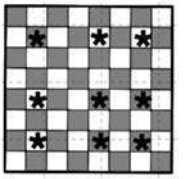
**19.(A)** Como $20\,000 = 2^5 \cdot 5^4$, si los números no son múltiplos de 10, el menor debe ser $2^5 = 32$ y el mayor $5^4 = 625$. La diferencia es 593.

**20. (B)** $10^{100} + 100^{10} = 10^{100} + (10^2)^{10} = 10^{100} + 10^{20} = 10^{20} \cdot 10^{80} + 10^{20} = 10^{20}(10^{80} + 1)$.

**21.(B)** Tenemos que ver cuántos cuadrados perfectos hay entre 11 y 109: $4^2$, $5^2$, … hasta $10^2$. En total $a$ puede tomar 7 valores.

**22.(E)** Primero simplifiquemos:
4 bats = 1 bet; 15 bets = 2 bits, 6 bits = 5 bots, 3 bots = 1 but.
Ahora vamos hacia atrás: 4 buts = 12 bots = 14,4 bits =108 bets = 432 bats.

**23.(A)** En el ejemplo se ve que con 9 es suficiente.



**24.(B)** Todas las posibilidades son (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5) (2, 4, 5) y (3, 4, 5) y las únicas en que 4 es la carta mayor son (1, 2, 4), (1, 3, 4) y (2, 3, 4). Como todas las combinaciones son igualmente probables, la probabilidad es casos favorables/casos posibles, es decir 3/ 10.

**25.(B)** La suma de las áreas de los triángulos blancos $ADE$ y $BFC$ es 3 pues, si llamamos $h$ a la altura de uno de ellos, la altura del otro será $3 - 1 - h = 2 - h$ y la suma de sus áreas $3h/2 + 3(2 - h)/2 = 3$. El área de la zona sombreada es el área del cuadrado menos el área de los triángulos, es decir, $3^2 - 3 = 6$.

# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 1ª Fase Nivel III

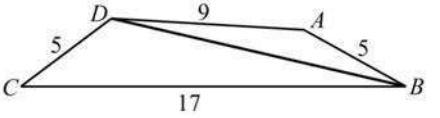
**1. (B)** Los puntos que distan 3 cm de P están en una circunferencia $C'$, luego si además están en $C$ deben ser puntos de intersección de dos circunferencias distintas y que por tanto a lo más se cortan en dos puntos.

**2. (D)** En cada ciclo de entradas por las cinco puertas entran 1+ 2+ 3+ 4+ 5 personas. Así que dividimos 2019 entre 15, y tenemos que después de 134 ciclos han entrado 2010 personas. La persona 2019 será la persona 9 del siguiente ciclo y entrará por la puerta cuarta.

**3. (B)** Si $a \cdot b > 0$, entonces $a$ y $b$ tienen igual signo y por tanto, como $a + b < 0$, ambos deben ser negativos.

**4. (D)** El producto $\frac{n!\cdot(n+1)!}{2}$ se puede escribir como $\frac{(n!)^2\cdot(n+1)}{2}$, y así, para que la expresión sea un cuadrado perfecto lo debe ser $\frac{n+1}{2}$. Es decir, $n + 1$ debe ser el doble de un cuadrado. Eso ocurre con 18.

**5. (C)** Por ser lado de $DBA$, $DB$ debe estar estrictamente entre $9 - 5$ y $9 + 5$. Por ser lado de $CBD$, $DB$ debe estar (también estrictamente) entre $17 - 5$ y $17 + 5$, así que $DB = 13$.




**6. (D)** $1812b42a = 18 \cdot 999999 + 12 \cdot 9999 + b4 \cdot 99 + 18 + 12 + 2a$.

Así que $n$ será múltiplo de 99 si lo es $18 + 12 + b4 + 2a = 30 + b4 + 2a$; es decir si esta última suma es 99 o 198.
Lo último por tamaño no es posible así que $b4 + 2a = 69$, y por ello $a = 5$ y $b = 4$.

**7. (E)** Como $a^2 = a + 1$, entonces $a^4 = (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 = a + 1\ 2a + 1 = 3a + 2$, y

$$a^6 = a^4 \cdot a^2 = (3a+2)\cdot(a+1) = 3a^2 + 3a + 2a + 2 = 3(a+1) + 5a + 2 = 8a + 5 .$$

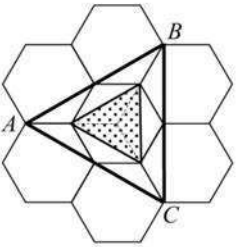
XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

**8. (B)** La suma de sus dígitos es como mucho 27 y seis veces la suma de sus dígitos es como mucho 162. Luego habrá que buscar entre los números múltiplos de 6 menores que 162. Los candidatos son:
6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, 102,… De aquí en adelante hasta el 162 no hay ningún número que verifique que seis veces la suma de sus cifras sea superior a 100.
De todos ellos el único que verifica la condición exigida es $54 = 6\cdot(5 + 4)$

**9. (C)** $z(1) + z(2) +\ldots+ z(9) = 45$; $z(10) + z(11) +\ldots+ z(19) = 45 + 10$
$z(20) + z(21) +\ldots+ z(29) = 45 + 20$ $z(30) + z(31) +\ldots+ z(39) = 45 + 30$
…… ……..
$z(80) + z(81) +\ldots+ z(89) = 45 + 80$ $z(90) + z(91) +\ldots+ z(99) = 45 + 90$
Luego $z(1) + z(2) +\ldots+ z(99) = 450 + 10 + 20 +\ldots+ 90 = 450 + 450 = 900$.

**10. (E)** Las sucesivas terminaciones de las potencias de 3 son 3, 9, 7, 1, 3, 9,…, es decir se repiten cada cuatro pasos, y así $3^{2017} = 3^{2016 + 1}$ acaba en 3, y $13^{2019} = 13^{2016 + 3}$ acaba en 7.
Las sucesivas terminaciones de las potencias de 7 son 7, 9, 3, 1, 7, 9, …, y por tanto $7^{2018} = 7^{2016 + 2}$ acaba en 9. De esta manera $3^{2017} \cdot 7^{2018} \cdot 13^{2019}$ termina igual que $3\cdot9\cdot7$, es decir en 9.

**11.(C)** Basta con dibujar un triángulo equilátero inscrito en el hexágono central paralelo al triángulo $ABC$ para darse cuenta de que el área de $ABC$ es dos veces el área del hexágono de lado 1. Así el área pedida es $2\cdot6\cdot\dfrac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$

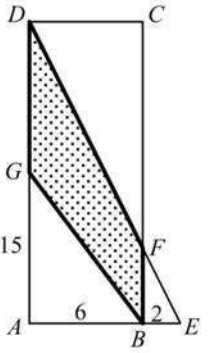



**12.(C)** $f(x+1) - f(x) = 4^{x+1} - 4^x = 4^x(4-1) = 3\cdot4^x$.

**13.(B)** Como $1 < (x - 2)^2 < 25$ equivale a $1 < |x-2| < 5$ se tiene que $x$ debe distar de 2 más de 1 y menos de 5. Las soluciones positivas son: 4, 5 y 6; y el resto son los números simétricos respecto a 2: 0, –1, –2. Luego la suma de las soluciones es 12.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

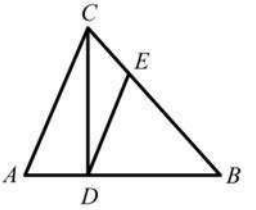
**14.(C)** El dibujo (no a escala) es parecido al de la derecha. Denominemos por $S(Q)$ al área de un polígono Q. Entonces $S(GBFD) = (S(AED) - S(BEF)) - S(ABG)$. Pero $AED$ y $BEF$ son semejantes en razón de 8 a 2, y por tanto el área de $BEF$ es 1/16 del área de $AED$, de donde:




$$S(GBFD) = \frac{15}{16}S(AED) - S(ABG) = \frac{15}{16}\cdot\frac{8\cdot 30}{2} - \frac{6\cdot 15}{2} = \frac{135}{2}$$

**15.(C)** Como hay declaraciones contradictorias Acutángulo es culpable. De las declaraciones de Centésima y Don Retorcido se deduce que al menos uno de ellos es culpable, y ya llevaríamos al menos dos culpables, luego Centésima es culpable y Gustavo es inocente. De esta forma Don Retorcido es culpable. Queda solo en duda la calificación de Comenúmeros, pero su declaración sería cierta si él fuera inocente y en cambio si él fuera culpable haría que la declaración de Don Retorcido fuera cierta. Luego hay tres culpables y dos inocentes.

**16.(B)** El área de $ADC$ es la mitad de la de $DBC$. El área de $BDC$ es cuatro veces el área de $DEC$. Por tanto el área de $ABC$ es:




$$4\cdot 9 + \frac{4\cdot 9}{2} = 36 + 18 = 54.$$

**17.(A)** Si en 500 m nadando ha hecho una media de 4 km/h ha tardado en hacerlo 0,5 : 4 h, es decir 7,5 minutos. Si ha hecho una media corriendo de 12 km/h en 6 km, ha tardado en hacerlo 30 minutos.

Le quedan 82,5 minutos para completar las 2 horas y en ese tiempo debe recorrer 20 km en bicicleta.

La velocidad media pedaleando debe ser

$$\frac{20km}{82{,}5\min} = \frac{20km}{\frac{82{,}5}{60}h} = \frac{20\cdot 60km}{82{,}5h} = \frac{1200}{82{,}5}km/h = \frac{2400}{165}km/h = \frac{160}{11}km/h$$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**18.(A)** Contaremos primero los números en los que no aparece el 0. Así, con dos unos, para que el número sea múltiplo de tres, tenemos dos cifras (4 y 7) a colocar como centenas, decenas o unidades ($2\cdot 3 = 6$), con dos doses podemos coger como tercera cifra 5 u 8 (otros seis números), y así (al no entrar el 0) lo mismo pasa con dos treses, dos cuatros, … Luego ya tenemos $9\cdot 6 = 54$ números. Ahora entra el 0. Con dos ceros hay tres números (300, 600 y 900). Con un cero (que no puede estar en primera posición) y otras dos cifras iguales tenemos 330, 660, 990, 303, 606, 909. En total tenemos $54 + 3 + 6 = 63$ números.

**19.(C)** Como $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$ probamos esta descomposición con cada una de las fracciones.

$\frac{25}{12}=\frac{3^2+4^2}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}$; $\frac{10}{3}=\frac{3^2+1^2}{3\cdot 1}=\frac{3}{1}+\frac{1}{3}$ $\frac{17}{4}=\frac{1^2+4^2}{1\cdot 4}=\frac{1}{4}+\frac{4}{1}$;

$\frac{29}{10}=\frac{5^2+2^2}{2\cdot 5}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}$

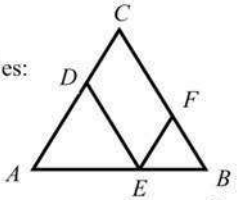
El único que parece resistirse es $\frac{7}{3}$ y ello le hace candidato a la respuesta. Justifiquemos sin embargo que es así:

Si $\frac{7}{3}=\frac{a^2+b^2}{ab}\Leftrightarrow 7ab=3a^2+3b^2\Leftrightarrow 3a^2-7ab+3b^2=0$.

Entonces $a=\frac{7b\pm\sqrt{49b^2-36b^2}}{6}$, pero si b es entero, $\frac{b\pm b\sqrt{13}}{6}=b\left(\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}\right)$ no es racional.

**20.(B)** $CD + DE = CA = 4/2 = 2$. Luego el área del triángulo ABC es:

$\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$




**21.(B)** El reloj marcará mal cualquier hora : minuto cuya escritura_ _ : _ _ contenga un 1. Contemos las lecturas horarias que no tienen 1.

En la primera posición hay 2 posibles cifras (0 y 2); para la segunda posición hay 9 cifras cuando en la primera está el 0 y 3 cifras si en la primera está el 2; para la tercera posición hay cinco cifras; y para la cuarta hay 9. En total $(9 + 3)\cdot 5\cdot 9 = 540$ lecturas horarias correctas sobre un total de $24\cdot 60 = 1440$ lecturas diarias. La proporción de lecturas incorrectas sobre el total de lecturas es: $1-\frac{540}{1440}=\frac{5}{8}$

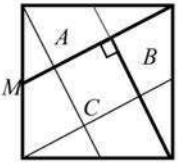
**XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**22.(E)** Escribamos el árbol de resultados

<table>
<tr><td colspan="8">6</td></tr>
<tr><td colspan="4">11</td><td colspan="4">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">21</td><td colspan="2">4,5</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td>41</td><td>9,5</td><td>8</td><td>1,25</td><td>5</td><td>0,5</td><td>-1</td><td>-1</td></tr>
</table>

En la fila cuarta hay cinco enteros (cinco sobre ocho).

**23.(B)** Nuestro trozo de tarta tiene forma de prisma triangular. Si en la cara superior de la tarta-cubo dibujamos algunas líneas auxiliares, podemos darnos cuenta que el triángulo B equivale a una quinta parte de la cara cuadrada, y por tanto su área es $\frac{1}{5}\cdot 2^2\ dm^2$ . La superficie chocolateada de nuestro trozo es $\left(\frac{4}{5}+2^2\right)dm^2$ .




**24.(B)** Fijada la posición del cubo colocado sobre una mesa y con una cara frontal a nosotros, veamos cuál es la probabilidad de que se forme un cuadrado paralelo a las bases. Para ello en cada una de las cuatro caras del cubo perpendiculares a la mesa se tiene que elegir el segmento que une puntos medios que es paralelo a la base, y eso se puede hacer de una entre 16 posibilidades. Lo mismo ocurre para formar un cuadrado paralelo a la frontal o un cuadrado paralelo a los laterales.

**25.(A)** Las formas de sentarse deben ser alternadas chico-chica (empezando por chico al haber uno más). Si suponemos que Luis está a la izquierda de Pilar, y sentamos a Luis en la primera butaca, después va Pilar y luego los demás chicos se pueden colocar de 3! formas y las otras chicas de 2!formas. Lo mismo ocurrirá si colocamos a Luis en la segunda butaca, en la tercera, …, en la sexta. Luego yahay $6 \cdot 3! \cdot 2!$ formas de sentarse los siete. Otras tantas se tendrán si Luis se sienta a la derecha de Pilar. Así el número de formas de sentarse es $2 \cdot 72 = 144$.

XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 1ª Fase Nivel IV

**1. (D)** Llamando $AP = AN = x$; $BP = BM = y$; $CN = CM = z$, podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ x+z=6 \\ y+z=9 \end{array}\right\} E_1+E_2+E_3 \Rightarrow 2x+2y+2z=25 \Rightarrow x+y+z=12{,}5$$

$$\text{Como } \left.\begin{array}{l} y+z=9 \\ x+y+z=12{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3{,}5$$

**2. (D)** Entre tres números consecutivos hay, necesariamente un número par y un múltiplo de 3. Si además sabemos que el producto de los tres es múltiplo de 7, dicho producto debe ser necesariamente múltiplo de 6 (2 · 3), de 14 (2 · 7), de 21 (3 · 7) y de 42 (2 · 3 · 7). El único de la lista del que no tiene que ser necesariamente múltiplo es 28.

**3. (A)** Si la ecuación $x^2 - n^2 x + 2n = 0$ tiene como solución $x = 2$, se cumple que

$$4 - 2n^2 + 2n = 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -1 \end{cases}$$

Si $n = 2$, la ecuación tiene dos soluciones iguales, en contra de lo que dice el enunciado. Por tanto, $n = -1$.

**4. (C)** Hay dos posibilidades para Esteban. Que se coloque en un extremo o que lo haga en una posición intermedia.

Si se coloca en un extremo, a su lado pueden colocarse sólo Javier o María, y en cada caso hay 4 posibles colocaciones de los otros 3, ya que Javier y María no pueden ir juntos. Así pues, 4 posibilidades con Esteban en un extremo por 4 posibilidades de los otros 3 en cada caso, en total hacen 16 posibilidades.

Si se coloca en una posición intermedia, a sus lados deben ir Javier y María, lo que da dos posibilidades en cada caso. Los otros dos personajes se pueden colocar de dos formas distintas en cada caso, de modo que hay 4 posibilidades con Esteban en cada uno de los lugares intermedios. Como hay tres lugares intermedios, en este caso hay 12 posibilidades.

Sumando las posibilidades de los dos casos, hay un total de 28 posibles colocaciones con las condiciones de incompatibilidad entre los personajes.

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**5. (E)** $z^{12}-64=0 \Rightarrow z_k=\sqrt[12]{64}=\sqrt[12]{64_0}=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{0+360k}{12}}=\left(\sqrt{12}\right)_{30k} \quad k=0,1,2,3,...,11$

$z_k$ tiene su parte real positiva para los argumentos del primer y cuarto cuadrantes. Es decir, para $k$ = 0, 1, 2, 10 y 11. Por tanto tenemos que calcular la suma:

$S=z_0+z_1+z_2+z_{10}+z_{11}=\left(\sqrt{2}\right)_0+\left(\sqrt{2}\right)_{30}+\left(\sqrt{2}\right)_{60}+\left(\sqrt{2}\right)_{300}+\left(\sqrt{2}\right)_{330}$

El primer sumando tiene parte imaginaria 0, y de los otros cuatro las partes imaginarias se anulan dos a dos, de modo que la suma resulta:

$$S=\sqrt{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

**6. (C)** El número de posibilidades de obtener suma de puntos igual a 6 es 7. Seis de ellas con las bolitas numeradas 1, 2 y 3 y una de ellas con las bolitas numeradas 2, 2 y 2.

La probabilidad de haber obtenido 6 con las tres bolitas iguales, por tanto, es $\frac{1}{7}$

**7. (D)** Los números de la lista se pueden escribir:

$10-3\sqrt{11}$ $\quad 3\sqrt{11}-10$ $\quad 18-5\sqrt{13}$ $\quad 51-10\sqrt{26}$ $\quad 10\sqrt{26}-51$

$\sqrt{100}-\sqrt{99}$ $\quad \sqrt{99}-\sqrt{100}$ $\quad \sqrt{324}-\sqrt{325}$ $\quad \sqrt{2601}-\sqrt{2600}$ $\quad \sqrt{2600}-\sqrt{2601}$

De esta lista, los dos únicos números positivos son $10-3\sqrt{11}=\sqrt{100}-\sqrt{99}$ y $51-10\sqrt{26}=\sqrt{2601}-\sqrt{2600}$.

La función $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ es decreciente puesto que

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}<0 \quad \forall x\in D_f$ puesto que $\sqrt{x}>\sqrt{x-1}$ y por lo tanto

$\frac{1}{2\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. En consecuencia $f(100)>f(2601)$ es decir,

$\sqrt{100}-\sqrt{99}=10-3\sqrt{11}>\sqrt{2601}-\sqrt{2600}=51-10\sqrt{26}$ t.

**8. (C)** Manipulamos un poco la ecuación:

$\text{sen}^2x+3\text{sen}x\cos x+2\cos^2x=0 \Leftrightarrow (\text{sen}x+\cos x)^2+(\text{sen}x+\cos x)\cos x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\text{sen}x+\cos x)(\text{sen}x+2\cos x)=0 \Rightarrow (\text{sen}x+\cos x)=0$ o que $(\text{sen}x+2\cos x)=0$

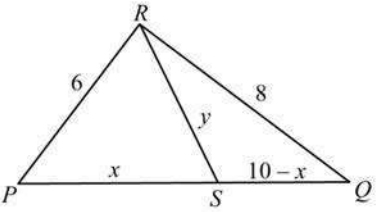
De la primera opción $\text{sen}x=-\cos x$ se deduce que $\text{tg}x=-1$.

De la segunda opción $\text{sen}x=-2\cos x$ se deduce que $\text{tg}x=-2$.

En el intervalo $[0, \pi)$ cada una de las ecuaciones anteriores tiene solución única, ambas en el segundo cuadrante. Por tanto, la ecuación original tiene dos soluciones en dicho intervalo.

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**9. (A)** La hipotenusa del triángulo es $PQ = \sqrt{36+64} = 10$. Como $PRS$ y $RQS$ tienen el mismo perímetro, se cumple que, $6 + x + y = 8 + y + 10 - x \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$. El triángulo $RQS$ tiene base $SQ = 10 - 6 = 4$. Y como tiene la misma altura que el triángulo $PQR$, su área es $A_{SQR} = \frac{4}{10} A_{PQR} = \frac{2}{5}\left(\frac{6 \cdot 8}{2}\right) = 9{,}6$.




**10.(C)** Factorizamos la resta aplicando el binomio de Newton:

$13^4 - 11^4 = (12 + 1)^4 - (12 - 1)^4 =$
$= (12^4 + 4 \cdot 12^3 + 6 \cdot 12^2 + 4 \cdot 12 + 1) - (12^4 - 4 \cdot 12^3 + 6 \cdot 12^2 - 4 \cdot 12 + 1) =$
$= 8 \cdot 12^3 + 8 \cdot 12 = 8 \cdot 12 \cdot (144 + 1) = 8 \cdot 12 \cdot 145 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29.$
La máxima potencia de 2 que divide a $13^4 - 11^4$ es $2^5 = 32$.

**11.(D)** Para que $\frac{y}{12} < \frac{13}{15}$ el máximo valor posible para $y$ es 10.

Para que $\frac{7}{x} < \frac{y}{12}$, con el máximo valor posible para $y$, el mínimo valor entero posible para $x$ es 9. Así pues, el valor de $x + y$ con el mínimo posible de $x$ y el máximo posible de $y$ es 19.

**12.(C)** El número N = 12345….4344, está formado por 15 unos, 15 doses, 15 treses, 10 cuatros, 4 cincos, 4 seises, 4 sietes, 4 ochos, 4 nueves y 4 ceros. En total, 79 cifras. La suma de todas ellas es $S = 15 \cdot (1 + 2 + 3) + 10 \cdot 4 + 4 \cdot (5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 270$. Entonces N es múltiplo de 9, pero es obvio que no lo es de 5. Descontemos del número cantidades de 9 en 9 hasta encontrar un múltiplo de 5, que será también múltiplo de 45. Como N – 9 ya termina en 5, y es múltiplo de 9, también lo es de 45, y el resto al dividir N entre 45 es 9.

**13.(A)** Para hallar el $t$ % de un número hay que multiplicar el número por $\frac{t}{100}$. Por tanto,

$$0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 50 = 0{,}6x \Rightarrow x = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 50}{0{,}6} = 0{,}04 \cdot 50 = 2$$

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**14.(E)** La ecuación $|sen\, x| = 1$ tiene las soluciones $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Nos piden las positivas que son menores que 100.

Como $\frac{100}{\pi} = 31{,}8...$ y $\frac{\pi}{2} < 0{,}8\pi$, valen todos los valores de $k$ desde 0 hasta 31, que hacen un total de 32 soluciones

**15.(D)** Construimos una tabla con los valores de $f(n)$ para los primeros valores de $n$:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | 1 | 2 | 4 | 4 | 8 | 8 | 16 | 8 | 16 | 16 | 32 | 16 | 32 | 32 | 64 | 16 | 32 |

A partir de $n = 16$, los valores de $f(n)$ aumentan, de modo que no hay más naturales cuya imagen mediante $f$ sea 16. En total hay 5 valores.

**16.(A)** Con el dato $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{(n \cdot (n+1))^2}{4}$, podemos calcular

$$1^3 + 2^3 + ... + 19^3 = \frac{(19 \cdot 20)^2}{4} = 36\,100$$

Pero de esta suma tenemos que descontar

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 18^3 = 2^3\left(1^3 + 2^3 + ... + 9^3\right) = 8 \cdot \frac{(9 \cdot 10)^2}{4} = 2 \cdot 8100 = 16\,200$$

De modo que la suma pedida es: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 19^3 = 36100 - 16200 = 19900$

**17.(C)** Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos que la diagonal

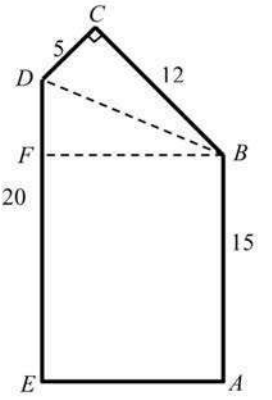
$$DB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Trazamos la perpendicular a $DE$ desde $B$ y obtenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13, y uno de los catetos 20 – 15 = 5. Por tanto, el otro cateto, que coincide con la base $AE$, mide $FB = AE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

El área del pentágono es:

$$A_{ABCDE} = A_{BCD} + A_{BDF} + A_{ABFE}$$

$$A_{ABCDE} = \frac{5 \cdot 12}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} + 15 \cdot 12 = 240$$



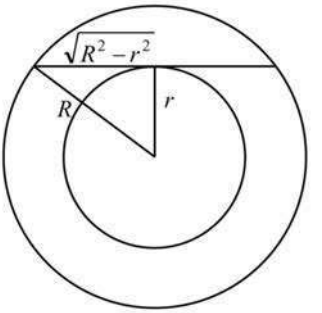
**XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**18.(C)** El área de la corona circular es

$$\pi\left(R^2-r^2\right)=\frac{9}{2}\pi \Rightarrow R^2-r^2=\frac{9}{2}$$

En la figura se puede apreciar que aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud de la cuerda del círculo mayor que es tangente al círculo menor vale

$$l=2\sqrt{R^2-r^2}=2\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{2}.$$




**19.(B)** Considerando las clases módulo 3 de los números que colocamos en cada vértice, estos solo pueden ser 0, 1 o 2. Las condiciones son que no sea múltiplo de 3 la suma de dos contiguos ni la suma de tres consecutivos. Por tanto, no pueden ir contiguos ni 1 y 2 ni dos 0. Además, tampoco pueden ir consecutivos tres 1, tres 2 ni 0, 1 y 2. Según esto, entonces:

- ❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 0, a sus lados pueden ir:
  - Dos 1, y entonces los otro dos deben ser un 1 y un 0.
  - Un 1 y un 2, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0 respectivamente o un 0 y un 2.
  - Dos 2, y entonces los otros dos deben ser un 2 y un 0.

En todos los casos es necesario colocar exactamente dos 0

- ❖ Si en un vértice cualquiera colocamos un 1, a sus lados deben ir un 1y un 0, y al lado del segundo 1 necesariamente un 0. El quinto debe ser un 1 o un 2. De modo que necesitamos colocar exactamente dos 0.
- ❖ Si colocamos un 2, a sus lados pueden ir:
  - Un 2 y un 0, y entonces, al lado del segundo 2 necesariamente debemos colocar un 0, y el 5º puede ser un 1 o un 2, pero no un 0.
  - O también podemos colocar dos 0, pero entonces los otros dos vértices deben contener sendos 2.

En cualquier caso, hay que colocar exactamente dos múltiplos de 3.

**20.(A)** Los resultados posibles para cuatro sets son $2^4 = 16$. Pero hay 4 de ellos que no corresponden a haber llegado al cuarto set, porque se habría terminado el partido en el tercero (AAA_) y (BBB_). De los 12 resultados posibles restantes hay 6 en los que no se ha terminado el partido todavía (AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA) y otros 6 en los que se ha terminado el partido, justo en el cuarto set. Por tanto, la probabilidad es $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.

**XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**21.(A)** El triángulo $PXC$ es semejante al triángulo $ABC$.

Por tanto, $\frac{PX}{4}=\frac{XC}{3}\Rightarrow\frac{PX}{4}=\frac{2}{3}\Rightarrow PX=\frac{8}{3}$ y $PD=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$

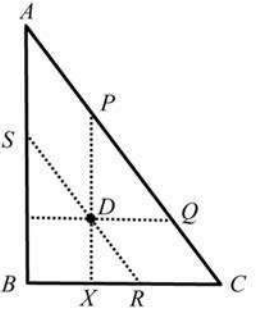
El triángulo $PDQ$ es también semejante al $ABC$.

Por tanto, $\frac{PD}{4}=\frac{PQ}{5}\Rightarrow\frac{\frac{5}{3}}{4}=\frac{PQ}{5}\Rightarrow PQ=\frac{25}{12}$

El triángulo $BSR$ es semejante al $ABC$, y $BS=AB-PD=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$.

Por tanto, $\frac{BS}{4}=\frac{SR}{5}\Rightarrow\frac{\frac{7}{3}}{4}=\frac{SR}{5}\Rightarrow SR=\frac{35}{12}$.

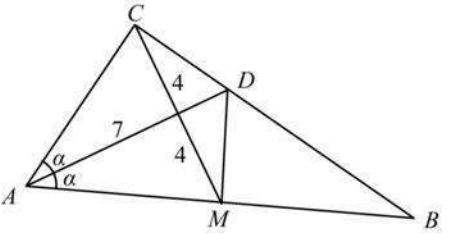
Y la suma es $PQ+SR=\frac{25}{12}+\frac{35}{12}=5$




**22.(C)** El ángulo que nos piden es un ángulo interior de una circunferencia, que vale la semisuma de los arcos que abarca. Cada arco comprendido por un lado del decágono mide 36°. Por tanto, $\alpha=\frac{36^\circ+72^\circ}{2}=54^\circ$

**23.(C)** Llamamos $D$ al punto de intersección de la bisectriz con el lado $BC$ y $M$ al punto medio del lado $AC$. Trazando el segmento $DM$ se forman tres triángulos con la misma área, $ACD$, $ADM$ y $MBD$. $ACD$ y $ADM$ son iguales, pues tienen sus tres ángulos iguales y sus tres lados iguales, al ser la bisectriz $ADM$ perpendicular a la mediana. El tercer triángulo, $MBD$, tiene la misma base que, puesto que $AM = MB$ al ser $M$ el punto medio, y la misma altura.

Como el área del triángulo $ACD$ es $\frac{7\cdot 4}{2}=14$, el área del triángulo $ABC$ es 42.



## XXIII Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

**24.(B)** Usando el dato de que $z^4 + z^2 + 1 = 0$, podemos escribir:

$$z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z^1 + 1 =$$
$$= z^{12} + z^{10} + z^8 + z^{11} + z^9 + z^7 + z^6 + z^4 + z^2 + z^5 + z^3 + z^1 + 1 =$$
$$= z^8(z^4 + z^2 + 1) + z^7(z^4 + z^2 + 1) + z^2(z^4 + z^2 + 1) + z(z^4 + z^2 + 1) + 1 =$$
$$= z^8 \cdot 0 + z^7 \cdot 0 + z^2 \cdot 0 + z \cdot 0 + 1 = 1$$

**25.(B)** Sabemos que la suma de los ángulos de un polígono de $n$ lados es

$$\sum \alpha_i = (n-2)180^\circ .$$

Al dividir 2019° entre 180° no obtenemos un resultado exacto, siendo el resto 39°, ya que $2019° = 11 \cdot 180° + 39°$. Por consiguiente, el ángulo que se ha duplicado medía 39°.

# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 2ª Fase Nivel I

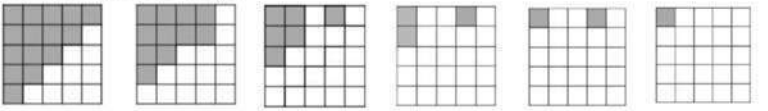
**1. (D)** Mediante tanteos obtenemos las cifras que faltan en la multiplicación; así: Para obtener un 8 en la cifra de las unidades del producto, la cifra que falta en el multiplicando es 3, (producto de 6 por 3 es el único que tiene la cifra 8 en las unidades). La cifra de las decenas del producto es 5 (6 por 4, 24; más 1, 25). Ahora tenemos que la cifra de las centenas del multiplicando puede ser 5 o 6, pero desechamos el 6 porque conduce a un 8 en el producto. Tenemos pues que nuestro producto es:

$$\begin{array}{cccc} 2 & \mathbf{5} & 4 & \mathbf{3} \\ & & \times & 6 \\ \hline 1 & 5 & \mathbf{2} & \mathbf{5} & 8 \end{array}$$

Calculamos la suma de las cifras comidas: $5 + 3 + 2 + 5 = 15$.

**2.(C)** Salta a la vista que el triángulo de cartulina no se puede desplazar en las figuras 3ª y la 5ª.

**3. (D)** El conteo se facilita dibujando las distintas plantas de la construcción tal y como se ve en las figuras de abajo.



Tenemos entonces: $15 + 11 + 6 + 3 + 2 + 1 = 38$ cubos.

**4. (D)** Existen tres posibilidades disjuntas: a)La cifra distinta es la primera, b) la cifra distinta es la segunda y c) la cifra distinta es la tercera.
En el caso a) la primera cifra puede elegirse de 9 formas distintas (el cero no sirve). Una vez hecho esto las otras dos cifras (iguales) pueden elegirse de 9 formas, lo que da $9 \times 9 = 81$ números. En el caso b) la primera y tercera cifra puede elegirse también de 9 formas (el cero no sirve) y, una vez hecho esto, para la cifra central quedan otras 9 posibilidades, por lo que para este caso tendremos también $9 \times 9 = 81$ números. Finalmente para el caso c), la primera cifra y, por tanto, la segunda puede elegirse puede elegirse de 9 formas y, para la tercera quedan otras 9, con lo que tenemos otros 81 números.
En consecuencia, habrá $3 \times 81 = 243$ números.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**5. (D)** Es inmediato ver que las opciones D) y E) son más probables que las demás, y muy fácil contar los casos favorables de E): 19 casos y de D): 20 casos. Por lo tanto, el suceso más probable es que sea múltiplo de 5, la respuesta D.

**6. (C)** Si el tablero fuese de 7 × 7 casillas es evidente que el máximo número de reyes que podrá colocar es 4 × 4 = 16, tal como se muestra en la figura.En ella se exhibe también una de las cuatro posibles formas de completar el tablero (manteniendo siempre la máxima densidad de reyes) y tener uno de ajedrez. Vemos así que de ninguna forma podemos añadir un Rey que no amenace a ningún otro. Por tanto el mayor número de reyes que podemos colocar es 16.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| R | | R | | R | | R |
| | | | | | | |
| R | | R | | R | | R |
| | | | | | | |
| R | | R | | R | | R |
| | | | | | | |
| R | | R | | R | | R |

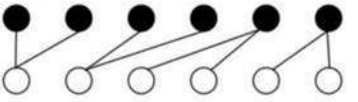
En general, en un tablero de $n \times n$ se pueden colocar $2n$ fichas que no estén alineadas. En un tablero de 8 × 8 se pueden colocar 16 reyes.

**7. (B)** La hora de sacar el bizcocho se calcula sumando a las 11:45 h, una hora y tres cuartos (1:45)
11 h 55 min + 1 h 45 min = 12 h 100 min = 13 h 40 min = 13:40

**8. (C)** Basta leer en la gráfica la puntuación de cada partido y hacer la media aritmética de los seis partidos:

$$\frac{5+2+3+4+3+4}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5\,.$$

**9. (D)** Como dos cuentas negras más una blanca valen más que dos blancas más una negra, sabemos que una cuenta negra vale más que una blanca.
Por otra parte tenemos 6 + 8 = 14 cuentas, con las que como máximo podemos hacer 4 collares (14 = 3 × 4 + 2) y sobrarán 2 cuentas, que deben ser blancas si queremos obtener el máximo beneficio. Tenemos, pues, que intentar formar collares con 6 negras y 6 blancas sin que sobre ninguna cuenta.
La figura muestra cómo hacerlo.
Tendremos entonces 2 collares de 6 euros y 2 collares de 5 euros que, en total, valen:
2 × 6 + 2 × 5 = 22 €.

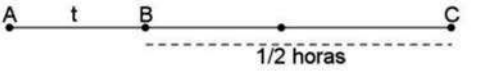


XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**10.(C)** Centésima calculó la multiplicación siguiente: $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 37 \times 38$. Este producto terminará en un número de ceros igual al número de veces que aparezca el producto $2 \times 5$ en su descomposición en factores primos.
Dado que, evidentemente, el factor 2 aparece en nuestro producto más veces que el factor 5, bastará contar el número de veces que aparece el 5.
El factor 5 aparecerá en:
$5 = 1 \times 5$; $10 = 2 \times 5$; $15 = 3 \times 5$; $20 = 4 \times 5$; $25 = 5 \times 5$; $30 = 6 \times 5$ y $35 = 7 \times 5$.
El 5 aparece 8 veces en la multiplicación.
Por tanto, el resultado de la multiplicación terminará en 8 ceros.

**11.(A)** El problema es sencillo si representamos el enunciado en un esquema temporal como el de la figura. Dado que dentro de 30 años *la mitad izquierda* es igual a *la mitad derecha,* deducimos que *x* es igual a 50 años. Por consiguiente, hoy, la edad de doña Tortu es el triple de 50 más 20, es decir, 170 años.

**12.(E)** Cómo el Lobo Feroz va tres veces más rápido que Caperucita, esta tardará en llegar a la casa el triple del tiempo, **t**, que invierte el Lobo.




Entonces, si el segmento AC representa el tiempo de Caperucita en llegar a la casa, el segmento AB representará el tiempo que tarda el lobo en hacer el mismo recorrido y, el BC el tiempo (1/2 h) que le falta a Caperucita para llegar a la casa en el instante en el que llega el Lobo. De lo que se deduce:

$\frac{1}{2} = 2 \times t$ de donde $t = \frac{1}{4}$ de hora, y dado que el Lobo va a12 km/h, la distancia a la casa es igual a $\frac{12\ km}{h} \times \frac{1}{4} h = 3\ km.$.

**13.(D)** En un puñado de arroz habrá $2 \times 7 \times 100 = 1400$ granos de arroz. Puesto que para 8 personas se necesitan $2 \times 8 + 1 = 17$ puñados de arroz y, para la paella se necesitarán $17 \times 1400 = 23\,800$ granos. El número que mejor aproxima los granos de la paella es 25 000.

## XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**14.(E)** Las cuatro esquinas equivalen a un cuadrado gris. Los cuatro triángulos laterales tienen la misma área que 2 cuadrados grises.
En el azulejo tendremos en total 5 + 2 + 1 = 8 cuadrados grises. Dado que el azulejo está teselado en 36 cuadraditos y cada cuadrado gris equivale a 2 cuadraditos de la tesela, los 8 cuadrados grises equivalen 8 × 2 = 16 cuadraditos. Entonces la fracción gris del mosaico es $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ .

**15.(E)** Si 48 castañas cuestan lo mismo que 10 barquillos, 24 castañas costarán lo mismo que 5 barquillos y 48 + 24 = 72 castañas costarán igual que 10 + 5 = 15 barquillos. Por otra parte, como 4 viajes de tiovivo cuestan también 15 barquillos, tenemos que 4 viajes valen lo mismo que 72 castañas.
Por lo tanto un viaje de tiovivo cuesta 72 ÷ 4 = 18castañas.

**16.(E)** Cómo 5 monedas de 20 céntimos valen 1€, 725 monedas de 20 céntimos valdrán 725 ÷ 5 = 145 €. Por lo que me tendrán que dar 164 – 145 = 19 € en monedas de 2 céntimos. Dado que 1€ es igual 100 céntimos, 1€ vale lo mismo que 50 monedas de 2 céntimos y, por tanto, me darán 19 × 50 = 950 monedas de 2 céntimos.

**17.(A)** Al obtener el perímetro del hexágono exterior hemos sumado 3 veces el lado largo y 3 veces el corto. Por otra parte, para obtener el perímetro del triángulo sumamos 3 veces el lado largo y restamos 3 veces el lado corto. En consecuencia, la suma de los dos perímetros es igual a 6 veces el lado largo.Tendremos entonces: 75 + 21 = 6 veces el lado largo, lo que implica que el lado largo mide $\frac{75+21}{6}=\frac{96}{6}=16$ cm.

**18.(B)** Basta expresar matemáticamente el enunciado del problema:
$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{5}\times(120\times 6)=\frac{2\times 120\times 6}{4\times 3\times 5}=24$ .
O empezando por el final: $\{[(120\times 6\div 5)\times 2]\div 3\}\div 4=24$ .

**19.(C)** En la figura contamos 13 polígonos de los que 9 son pentágonos. Dado que a cada pentágono deberemos unir cuatro hexágonos, habrá que añadir 4 × 9 = 36 hexágonos, lo que permite construir la tabla siguiente:

| | Nº de polígonos | Nº de vértices |
|---|---|---|
| Triángulos | 1 | 3 |
| Cuadrados | 3 | 12 |
| Pentágonos | 9 | 45 |
| Hexágonos | 36 | 216 |

Lo que nos lleva a 3 + 12 + 45 + 216 = 276 luces.

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)**

**20.(C)** Si construimos una tabla con las pulsaciones y las marcaciones, la solución es inmediata:

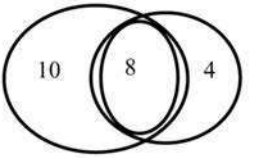
| Pulso | **0** | 1 | 2 | 3 | 4 | **5** | 6 | 7 | 8 | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Marca | **1** | 4 | 3 | 2 | 5 | **0** | 7 | 8 | 9 | **6** |

Por lo tanto, si quiero marcar el 016 debo pulsar el 509.

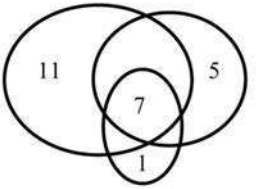
**21.(D)** Cómo mcd(45, 27,36) = 9, la cantidad mayor posible de cofres con el mismo contenido es 9, teniendo en cada uno de ellos:
45 ÷ 9 = 5 caracolas, 27 ÷ 9 = 3 perlas y 36 ÷ 9  4 monedas de oro.
Por lo que en cada cofre habrá 5 + 3 + 4 = 12  objetos.

**22.(A)** Entre los primeros 100 números encontramos un 8 en cada decena excepto en la de los 80, en la que hay 11ochos, es decir, del 1 al 100 se comió 9 + 11 = 20 ochos. El esquema se repite para los números que van del 101 al 200 y se come otros 20 ochos. Del 201 al 300 se comería otros 20, pero como solo llegamos al 288, deja de comerse los ochos del 289 y del 298. Concluimos que Comenúmeros se comió 20 + 20 + 8 = 48 ochos.

**23.(D)** 24 ÷ 2 = 12 alumnos saben qué es una pirámide truncada, $\frac{3}{4}\times 24 = 18$ saben qué es un trapecio isósceles y 24 ÷ 3 = 8 conocen la apotema. Parece ser que 8 es el máximo número posible de los que saben las tres cosas.
Pero como (18 – 8) + 8 + (12 – 8) = 10 + 8 + 4 = 22 y en la clase hay 24 alumnos eso no es posible.




En cambio 7 sí es posible ya que (18 – 7) + (7 + 1) + (12 – 7) = 11 + 8 + 5 = 24



## XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**24.(D)** Teniendo en cuenta que al menos hay una araña y una avispa, deducimos que el máximo número posible de patas de escolopendra es $196 - (8 + 6) = 182$.
Luego el máximo número posible de escolopendras es 3, ya que $182 \div 46 \cong 3{,}95$.
Además, como hay el doble de arañas que escolopendras y tenemos en total 18 bichos, las posibilidades se limitan a las tres mostradas en la siguiente tabla:

| Escolopendras | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Arañas | 2 | 4 | 6 |
| Avispas | 15 | **12** | 9 |
| Total de bichos | 18 | 18 | 18 |
| Total de patas | 152 | **196** | 240 |

Sumando ahora el número de patas, vemos enseguida que:
$2 \times 46 + 4 \times 8 + 12 \times 6 = 196$. Por tanto hay 12 avispas.

**25.(D)** Descartamos 696 y 996 por ser ambos divisibles por 4 ($96 \div 4 = 24$).
El 666 se descarta por ser múltiplo de 9 ($6 + 6 + 6 = 18 = 9 \times 2$).
Rechazamos el 999 por ser múltiplo de 9 ($111 \times 9 = 999$).
Por lo tanto 996 es el número buscado.
No obstante, para quedarnos tranquilos podemos comprobar que cumple las condiciones de Don retorcido:
Es múltiplo de 6 (es par y $9 + 6 + 6 = 21$ múltiplo de 3 pero no de 9) y es divisible entre 7 ($966 \div 7 = 138$) pero no lo es entre 4 ($66 \div 4 = 16{,}5$).

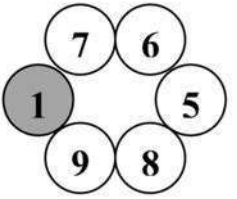
# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

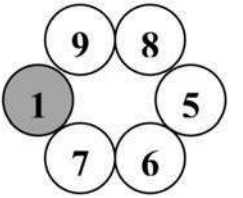
## Soluciones 2ª Fase Nivel II

**1. (A)** La fila superior no tiene otra manera de rellenarse que con un 6 y un 2: $6 \div 2 = 3$.
De esta manera nos quedan por colocar el 1, 4, 5, 7, 8 y 9. Al observar la última columna y la última fila, como ambas operaciones son sumas, debemos buscar, entre los números que quedan por colocar, cuatro números tal que uno de ellos más 3 nos dé lo mismo que la suma de los otros dos: $3 + 5 = 1 + 7 = 8$.
Así que bajo el 3 va un 5 y la fila de en medio es: $9 - 4 = 5$.
El número que ocupa la casulla sombreada es el 4.

$$\begin{array}{ccccc} 6 & \div & 2 & = & 3 \\ + & & & & + \\ 9 & - & 4 & = & 5 \\ = & & & & = \\ 1 & + & 7 & = & 8 \end{array}$$

**2. (E)** Alrededor de 5 solo podemos colocar el 6 y el 8. ($5 + 6 = 11$ y $5 + 8 = 13$)
Al lado de 6 solo podemos colocar el 7 y al lado de 7 el 10.
Al lado del 8 solo podemos colocar el 9 y al lado del 9 el 10.
En el círculo gris va el 10.




**3. (C)** 555? NUEVE posibles cifras en las unidades: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
55?5 NUEVE posibles cifras en las decenas: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
5?55 NUEVE posibles cifras en las centenas: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
?555 OCHO posibles cifras (el 0 no está permitido) en las unidades de mil: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9.
Tenemos $9 + 9 + 9 + 8 = 35$ números.

**4. (B)** Descomponemos en factores primos cada número:
**2**, **3**, $4 = \mathbf{2 \cdot 2}$, $15 = \mathbf{3 \cdot 5}$, $28 = \mathbf{2 \cdot 2 \cdot 7}$, $35 = \mathbf{5 \cdot 7}$, $50 = \mathbf{2 \cdot 5 \cdot 5}$.
Observamos que hay 6 doses, 2 treses, 4 cincos y 2 sietes. Así que cada uno tiene 3 doses, 1 tres, 2 cincos y 1 siete y el reparto de números tiene que ser [2, 4, 15, 35] y [3, 28, 50].
Como se han encontrado 7 números, el que elige primero se lleva 4, así que la niña Centésima se llevo el 2, el 4, el 15 y el 35.
Sus números suman $2 + 4 + 15 + 35 = 56$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**5. (A)** Si llamamos $E$ al precio original de cada entrada podemos asegurar que lo que paga cada amigo por una entrada es:
Antía paga $0{,}85\cdot E$ (al descontarle el 15%, paga el 85% de una entrada).
Roger paga $0{,}90\cdot E$ (al descontarle el 10%, paga el 90% de una entrada).
Fernando paga $0{,}95\cdot E$ (al descontarle el 5%, paga el 95% de una entrada).
Gracias a los descuentos, en lugar de pagar $3\cdot E$, entre los tres, pagan
$0{,}85\cdot E + 0{,}90\cdot E + 0{,}95\cdot E = 2{,}70\cdot E$.
Como han pagado 351€, vemos que $2{,}70\cdot E = 351$, y ya podemos calcular el precio de la entrada original, $E = 351:2{,}70 = 130$ euros.

**6. (A)** Como $\frac{33}{29} = 33:29$ cabe a 1, entonces $a = 1$. $\frac{33}{29} - 1 = \frac{4}{29} \Rightarrow \frac{1}{b+\frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{29}{4} = b + \frac{1}{c}$

Análogamente, como 29 entre 4 cabe a 7, entonces $b = 7$. $\frac{29}{4} - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow c = 4$

Así que $a + b + c = 12$.
Otra forma de hacerlo.

$$\frac{33}{29} = a + \frac{1}{b+\frac{1}{c}} = a + \frac{c}{bc+1} = \frac{a(bc+1)+c}{bc+1} \Rightarrow \begin{cases} bc+1 = 29 \\ 29a + c = 33 \end{cases}$$

Como los números $a$, $b$, $c$, son enteros positivos, entonces de $29a + c = 33$ se deduce que $a = 1$ y $c = 4$. Y de $bc + 1 = 29$, es decir, de $4b + 1 = 29$ se deduce que $b = 7$.

**7. (A)** Escribimos cada apartado en base 2:

**A)** $2^{3^8} = 2^{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = 2^{9\cdot9\cdot9\cdot9}$

**B)** $\left(2^3\right)^8 = 2^{3\cdot8}$

**C)** $\left(2^9\right)^3 = 2^{9\cdot3}$

**D)** $2^{9^3} = 2^{9\cdot9\cdot9}\ 2^{9^3} = 2^{9\cdot9\cdot9}$

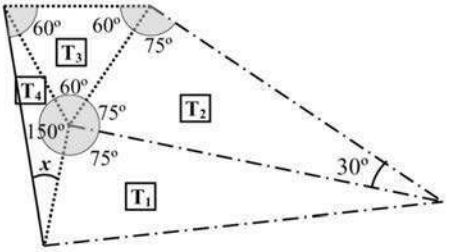
Observamos que el mayor exponente es el del apartado A), por lo que el mayor número es $2^{3^{(2^3)}}$.

**8. (B)** $20 - 5 = 15$, por lo que Berta tiene 5 hijas y 15 nietas.
$15 \div 5 = 3$, por lo que 3 hijas tienen hijas y 2 hijas no tienen hijas.
Como no tiene bisnietas, ninguna nieta tiene hijas, por lo que el número de hijas y nietas sin hijas es $2 + 15 = 17$.

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**9. (D)** Cada equipo se enfrenta a 5 equipos, $6 \cdot 5 = 30$, pero como solo juegan un partido entre equipos iguales, el número de partidos disputados es $30 \div 2 = 15$.
Si todos los partidos hubieran acabado con victoria (3 puntos) se habrían conseguido 45 puntos. Fíjate que por cada partido empatado se reparten 2 puntos (1 punto para cada equipo), es decir, se pierde 1 punto (2 puntos frente a 3).
Como en total se consiguieron 40 puntos de los 45 máximos posible, se perdieron 5 puntos, es decir hubo 5 empates y 40 victorias.

**10.(C)** El triángulo T1 es isósceles, sus ángulos iguales miden $(180º - 30º) \div 2 = 75º$.
Los triángulos T1 y T2 son iguales.
El triángulo T3 es equilátero, por lo que sus ángulos miden 60º cada uno.
El triángulo T4 es isósceles y el ángulo desigual mide $360º - (60º + 75º + 75º) = 150º$.
Por ello, el ángulo $x$ mide $(180º - 150º) \div 2 = 15º$.




**11.(C)** Las 21 combinaciones posibles son (¡no pierdas ninguna!, ¡lleva un orden!):

| Empezando con S: | Empezando con E: | Empezando con I: |
|---|---|---|
| SSSS SESS SISS | ESSS | ISSS |
| SSSE SESE SISE | ESSE | ISSE |
| SSSI SESI SISI | ESSI | ISSI |
| SSES | ESES | ISES |
| SSIS | ESIS | ISIS |

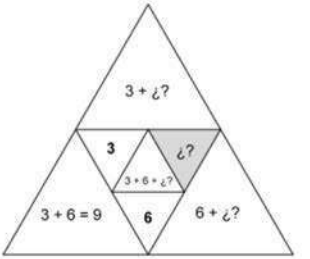
**12.(B)** Como el triángulo coloreado (¿?) es suma de sus triángulos vecinos, tenemos que:

$¿? = (3 + 6 + ¿?) + (6 + ¿?) + (3 + ¿?)$

$¿? = 18 + ¿? + ¿? + ¿?$

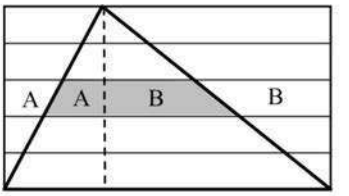
$¿? = -9$

Las regiones de Comenúmeros, las tres más grandes, son, por tanto, –6, 9 y –3.
Su suma es 0.



**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**13.(D)** Dividimos el trapecio sombreado en dos partes y . Observamos que las partes A y B aparecen dos veces en su franja, por lo que el área del trapecio sombreado es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{5}$ del área del rectángulo, es decir, $\frac{1}{10}$ del área del rectángulo.




Como el área del rectángulo es el doble de la del triángulo: $S_R = 2 \cdot S_T$. Así que:

Trapecio Sombreado = $\frac{1}{10}$ del Rectángulo = $\frac{1}{10} \cdot 2 \cdot$Triángulo = $\frac{1}{5}$ del Triángulo.

**14.(E)** Los números $x$ cumplen que $-5 \le 2x - 1 \le 7$.

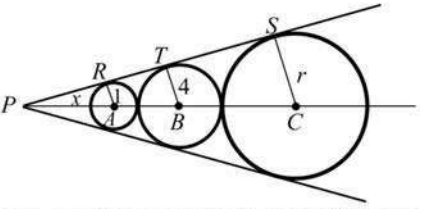
Si sumamos 1 a cada término, las desigualdades se mantienen y vemos que:

$$-5 + 1 \le 2x - 1 + 1 \le 7 + 1 \Leftrightarrow -4 \le 2x \le 8$$

Si dividimos los términos entre 2 (¡¡positivo!!), las desigualdades siguen conservándose y obtenemos: $-2 \le x \le 4$.

El mayor valor posible de $x$ es 4, el menor es –2, y su diferencia es $4 - (-2) = 6$.

**15.(E)** Como en tantísimos problemas de geometría, añadiendo algunas líneas vemos la estructura escondida que nos ayuda a resolverlo. Sabemos que las tangentes a las circunferencias son perpendiculares a los radios que llegan a los puntos de tangencia, por tanto, los triángulos *PAR*, *PBT* y *PCS* son semejantes. Jugando con esta propiedad, calcularemos primero la longitud $x$ de *PA* y luego el radio $r$ del sombrero mayor.



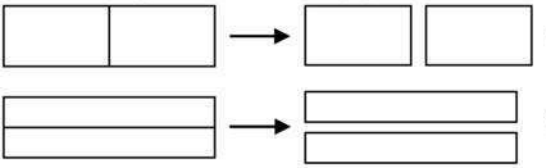

*PAR* y *PBT* semejantes: $\frac{AR}{BT} = \frac{PA}{PB} \to \frac{1}{4} = \frac{1+x}{6+x} \to x = \frac{2}{3}$

*PAR* y *PCS* semejantes: $\frac{AR}{CS} = \frac{PA}{PC} \to \frac{1}{r} = \frac{1+\frac{2}{3}}{r+10+\frac{2}{3}} \to r = 16$

El radio del sombrero grande mide 16 cm.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

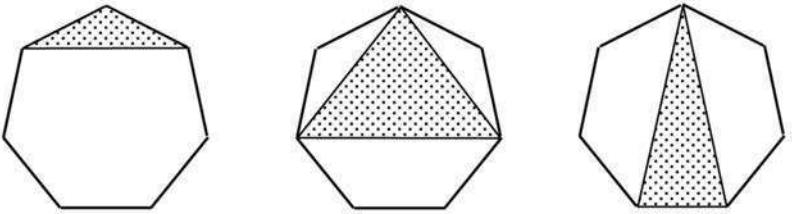
**16.(A)** Si llamamos $L$ a la longitud, en cm, del lado largo y $C$ a la del corto del rectángulo de partida, nos encontramos con estas dos situaciones del dibujo. Hay que tener mucho cuidado al calcular los perímetros de los dos rectángulos que se forman en cada caso porque el lado común hay que sumarlo dos veces.




Si no tocamos la primera igualdad y dividimos entre dos la segunda igualdad tenemos:
$2L + 4C = 96$
$2L + C = 42$
Si las restamos vemos que $3C = 54$, es decir $C = 18$ cm.
Y el otro lado cumpliría que $2L + 18 = 42$, es decir, $L = 12$ cm.
El perímetro del rectángulo de partida es $2\cdot(18 + 12) = 60$ cm.

NOTA: como muy bien observaron algunos estudiantes, hay algo equivocado en el enunciado porque la longitud del lado corto no puede ser mayor que la del lado largo. **En el enunciado hay que intercambiar el 84 por el 96**. Aunque el perímetro sigue siendo 60 cm hay un evidente error en el enunciado.
Desde aquí, ofrecemos disculpas por el lapsus y agradecimientos por el aviso.

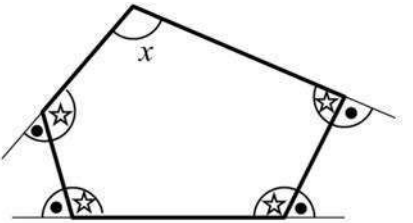
**17.(D)** Si fijamos el vértice superior, por ejemplo, vemos que podemos formar tres triángulos isósceles. Esta misma operación la hacemos en cada uno de los 7 vértices del heptágono y vemos que podemos formar $7\cdot 3 = 21$ triángulos isósceles.



En este tipo de problemas es importante no caer en el error de contar dos veces la misma configuración, en este caso, no contar dos veces el mismo triángulo.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**18.(C)** Como los ángulos marcados con un puntito suman 336º, entonces, los ángulos de la estrellita (los suplementarios de los puntitos) suman $4\cdot180º - 336º = 384º$.
Los ángulos de un pentágono suman 540º, por lo que nuestro ángulo buscado mide $x = 540º - 384º = 156º$.




**19.(B)** Los restos se repiten por ciclos en las columnas: en la columna del 1 son todo 0–0–0 etc; en la columna del 2 el ciclo es 10–10–etc; en la del 3 es 201–201–etc; en la del 4 es 3012–3012–etc; en la del 5 es 12340 y en la del 6 es 501234. El problema se reduce a saber cuántos ciclos completos hay en cada columna y luego sumar.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| 13 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 |
| 14 | 0 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 |
| 15 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 60 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Observa que la tabla tiene 50 filas.

Columna del 2 ($50 = 25\cdot2$): 25 ciclos completos de 01. La suma es 25.

Columna del 3 ($50 = 16\cdot3+2$): 16 ciclos completos de 201, más un 2 y un 0. La suma es $16\cdot(2+0+1)+2+0 = 50$.

Columna del 4 ($50 = 12\cdot4+2$): 12 ciclos completos de 3012, más un 3 y un 0. La suma es $12\cdot(3+0+1+2)+3+0 = 75$.

Columna del 5 ($50 = 10\cdot5$): 10 ciclos completos de 12340. La suma es $10\cdot(1+2+3+4+0) = 100$.

Columna del 6 ($50 = 8\cdot6+2$): 8 ciclos completos de 501234, más un 5 y un 0. La suma es $8\cdot(5+0+1+2+3+4)+5+0 = 125$.

La suma total es $25+50+75+100+125 = 375$.

**20.(B)** Vamos a llamar $x$ a los triples que intentó Irene y entonces $30–x$ son los dobles que lanzó. Según los datos del problema, los puntos conseguidos por Irene fueron el $3\cdot$[20% de $x$] más $2\cdot$[30% de $(30–x)$], es decir:

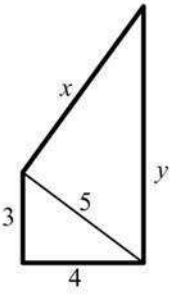
$$3\cdot\frac{20}{100}\cdot x + 2\cdot\frac{30}{100}\cdot(30-x) = \frac{60x+1800-60x}{100} = 18$$

Irene consiguió 18 puntos en ese partido.

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**21.(A)** La hipotenusa del triángulo pequeño mide… ¡5cm! (que es también el cateto pequeño del triángulo grande)

La razón de semejanza del triángulo grande y el pequeño es la razón entre dos lados homólogos, por ejemplo, la razón entre sus catetos pequeños: $\frac{5}{3}$.




Por tanto, el perímetro del triángulo grande será la del pequeño multiplicada por la razón de semejanza, $PG = \frac{5}{3}(3+4+5) = 20$, por lo que $x + y = 20 - 5 = 15$

El perímetro del trapecio mide 3 + 4 + 15 = 22 cm.

**22.(C)** Al principio Rosalía tenía $B$ rosas blancas lo que supone un porcentaje de $\frac{100 \cdot B}{480}$.

Si añadimos 60 nuevas rosas blancas, el porcentaje es ahora $\frac{100 \cdot (B+60)}{540}$ y como este nuevo porcentaje es doble que el inicial podemos escribir que:

$$\frac{100 \cdot (B+60)}{540} = \frac{2 \cdot 100 \cdot B}{480} \rightarrow \frac{B+60}{540} = \frac{2 \cdot B}{480} \rightarrow 480 \cdot (B+60) = 2 \cdot 540 \cdot B$$

Podemos calcular $B$ muy fácilmente, dividiendo la última igualdad entre 120: $4 \cdot (B+60) = 9 \cdot B \rightarrow 4B + 240 = 9B \rightarrow B = 48$.

Rosalía tiene ahora 48 + 60 = 108 rosas blancas (sus cifras suman 9).

**23.(D)** Para que un múltiplo de 19, $19 \cdot n$, acabe en 7, $n$ tiene que terminar en 3. Así que vamos a multiplicar 19 por 3, por 13, por 23,… hasta que el resultado acabe en 17:

$19 \cdot 3 = 57$ no vale $\quad 19 \cdot 13 = 247$ no vale $\quad 19 \cdot 23 = 437$ no vale

$19 \cdot 33 = 627$ no vale $\quad 19 \cdot 43 = 817$ sí vale

El menor múltiplo de 19 que acaba en 17 empieza por 8.

**24.(B)** Debemos encontrar un número $n$ que cumpla que $\frac{3+n}{7+n} = \frac{3}{5}$, es decir, que

$5 \cdot (3+n) = 3 \cdot (7+n) \rightarrow 15 + 5n = 21 + 3n \rightarrow 2n = 6 \rightarrow n = 3$.

Nunca está de más comprobar si lo hemos hecho bien: $\frac{3+3}{7+3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

**25.(C)** La única manera de que Joaquín esté seguro de que los números de María suman par es que Joaquín haya cogido los tres números pares que hay. De esta manera, en la caja solo quedan números impares y Joaquín sabe muy bien que si sumas dos números impares, a la fuerza, el resultado te dará par.

Por esto, Joaquín ha cogido el 188, el 234 y el 318, cuya suma es 740.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 2ª Fase Nivel III

**1. (A)** Si $a = 1 + b$, entonces $a + b = 1 + b + b = 1 + 2b$. Por tanto, el cociente vale 1.

**2. (C)** Si llamamos $x$ a la capacidad de la piscina de Cati, la capacidad de la piscina de Sara se puede expresar como $1{,}15x$, y la capacidad de la piscina de Julia es $1{,}25x$. Por tanto, el cociente entre las capacidades de las piscinas de Sara y de Julia es $\frac{1{,}15x}{1{,}25x} = 0{,}92$, lo cual indica que la de Sara tiene un 8% menos que la de Julia.

**3. (D)** Podemos simplificar la expresión para la cual buscamos el valor máximo: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$; dado que $a < 0$ y $b > 0$, el cociente $\frac{b}{a} < 0$, y el valor máximo de la expresión dada se obtendrá cuando el cociente esté más cerca del 0. Para ello tendremos que coger $b = 2$, y $a = -4$ y obtendremos $\frac{a+b}{a} = 1 + \frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$.

**4. (B)** La diferencia que nos piden entre las áreas de las dos partes de la pajarita coincide con la diferencia entre las áreas de los triángulos $ABC$ y $ABD$, que podremos calcular con los datos que nos piden. El área del triángulo $ABC$ es $\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$, y el área del triángulo $ABD$ es $\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ . Por tanto, la diferencia buscada es igual a 4.

**5. (A)** Llamamos $x$ a la longitud, en kilómetros, del recorrido total. África tarda $\frac{x}{20}$ horas en recorrerlo completo. Blanca tarda $\frac{\frac{x}{2}}{10} = \frac{x}{20}$ horas en recorrer la primera mitad, y $\frac{\frac{x}{2}}{30} = \frac{x}{60}$ horas en recorrer la segunda mitad, con lo que en total tarda $\frac{x}{20} + \frac{x}{60} = \frac{4x}{60} = \frac{x}{15}$ horas, que es más de lo que tarda África. Carlos, por su parte, tarda $\frac{\frac{3x}{4}}{30} = \frac{x}{40}$ horas en hacer tres cuartas partes del recorrido, y $\frac{\frac{x}{4}}{5} = \frac{x}{20}$ en

hacer el resto, es decir, en total tarda $\frac{x}{40}+\frac{x}{20}=\frac{3x}{40}$ horas, que es más de lo que tardan Blanca y África. Por tanto, África es quien menos tiempo tarda en hacer el recorrido.

**6. (A)** Operando en las dos igualdades se obtiene:
$xy + 2x + 2y + 4 = 60$ y $xy + 3x + 3y + 9 = 40$ .
Restando la segunda ecuación menos la primera, llegamos a que $x + y + 5 = -20$ , es decir $x + y = -25$.
Por último, manipulando la expresión que nos piden, obtenemos:
$(x + 5) \cdot (y + 5) = xy + 5x + 5y + 25 = xy + 2x + 2y + 4 + 3(x + y) + 21 =$

$= 60 + 3(-25) + 21 = 6.$

**7. (D)** Si llamamos $x$ al número de rotuladores que he comprado, $y$ al número de agendas, y $z$ al número de gomas, tendremos que $\begin{cases} x+y+z=100 \\ x+10y+\frac{1}{8}z=100 \end{cases}$

Vemos que tenemos 3 incógnitas pero solo dos ecuaciones. Si las manipulamos hábilmente podremos quedarnos con una sola ecuación con dos incógnitas. Lo que tenemos que hacer es, por ejemplo, multiplicar por 8 la segunda ecuación, y al resultado restarle la primera ecuación. Así obtenemos $7x + 79y = 700$. Y ahora, despejando $x$, que es la incógnita que me interesa sacar, obtenemos $x=100-\frac{79}{7}y$ .

Tenemos que darnos cuenta de que, como cada agenda cuesta 10 euros, sabemos que he comprado un número entero $y$ de agendas menor que 10, por tanto, la única solución para que $x$ sea un número entero es tener $y = 7$, en cuyo caso me queda $x = 100 - 79 = 21$..

**8. (C)** Examinando ingrediente a ingrediente, dividiendo la cantidad que tengo entre la que necesito, vemos que 4 yogures me darían para 4 bizcochos, 5 huevos me darían para $\frac{5}{3}$ de bizcocho, 6 tazas de harina me daría para 2 bizcochos, 3 tazas de azúcar me daría para $\frac{3}{2}$ de bizcocho, $\frac{3}{4}$ de tazas de aceite me daría para $\frac{3}{2}$ de bizcocho y 5 cucharaditas de levadura me daría para $\frac{5}{2}$ de bizcocho. La menor de estas cantidades es $\frac{3}{2}$ de bizcocho, y con eso podré invitar a 12 amigos, ya que cada bizcocho se lo comen 8 personas.

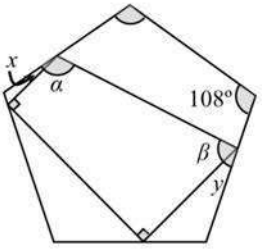
**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**9. (B)** Contemos primero los casos posibles. Como no importa el orden en el que elija los puntos, tengo que contar los grupos de 3 elementos que puedo hacer con un total de 9 elementos.

Esto me lo da el número combinatorio $\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = 84.$

De entre todos los casos posibles, hay 3 rectas horizontales que contienen 3 puntos cada una, 3 rectas verticales y 2 diagonales, es decir, tenemos 8 casos favorables. Por tanto, la probabilidad de que los tres puntos elegidos estén alineados es $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$ .

**10.(C)** Recordemos primero que el ángulo central de un pentágono regular es 360º : 5 = 72º, por tanto, el ángulo interno es 180º – 72º = 108º. Recordemos también que todos los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360º. Llamemos $\alpha$ al ángulo interno del trapecio adyacente a $x$, y sea $\beta$ el ángulo interno del trapecio adyacente a $y$. Como el trapecio es rectángulo, sabemos que $\alpha + \beta = 180º$.




Fijémonos ahora en el cuadrilátero de la esquina superior derecha. Dos de sus ángulos miden 108º, y los otros dos son los suplementarios de $x + \alpha$ y de $y + \beta$ respectivamente, así pues, como sus ángulos suman 360º, tenemos:
$180º - \alpha - x + 180º - \beta - y + 2\cdot 180º = 360º$, de donde podemos despejar $x + y$.
$x + y = 2\cdot 180º - (\alpha + \beta) = 36º$.

**11.(D)** Tenemos que darnos cuenta de que la potencia será igual a 1 cuando ocurra alguna de las tres posibilidades siguientes:

a) Cuando el exponente sea igual a 0. En este caso buscamos las soluciones de la ecuación $3x^2 + 7x - 6 = 0$ y obtenemos que y las soluciones son $\frac{2}{3}$ y $(-3)$.

b) Cuando la base sea igual a 1. En este caso buscamos las soluciones de la ecuación $x^2 - 2 = 1$ y obtenemos que $\sqrt{3}$ y $(-\sqrt{3})$ también son soluciones.

c) Cuando la base sea igual a $(-1)$ y el exponente sea un múltiplo de 2. Por un lado, resolvemos la ecuación $x^2 - 2 = -1$, cuyas soluciones son 1 y $(-1)$.

Cuando $x = 1$, el polinomio $3x^2 + 7x - 6$ vale 4 y cuando $x = -1$, el polinomio $3x^2 + 7x - 6$ vale $-10$. En los dos casos obtenemos soluciones.

Así pues, el producto de todas las soluciones es $\frac{2}{3}\cdot(-3)\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot 1\cdot(-1) = -6$

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

**12.(B)** Al colocar un cuadrado sobre uno de los lados de un triángulo, obtenemos un polígono con 5 lados. Al añadir un pentágono, conseguimos un polígono de 8 lados. Así, vemos que cuando añadimos un polígono de $n$ lados al anterior con $k$ lados, el resultado es un polígono de $n + k - 2$ lados. La sucesión que tenemos es:
$3 + 4 - 2 = 5$, $5 + 5 - 2 = 8$, $8 + 6 - 2 = 12$, $12 + 7 - 2 = 17$
$17 + 8 - 2 = 23$ $23 + 9 - 2 = 30$ $30 + 10 - 2 = 38$

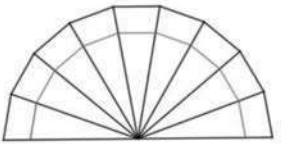
O de otra forma, lo que tenemos que calcular es:

$$3+\sum_{4}^{10}(n-2)=3+2+3+4+5+6+7+8=38$$

**13.(C)** Lo primero que necesitamos hacer es contar cuántos partidos hubo. Hay 20 posibles equipos que juegan en casa, y para cada uno de ellos habrá 19 posibles contrincantes a los que les tocará jugar fuera. Esto hace un total de $20 \cdot 19 = 380$ partidos. Si ninguno de estos partidos hubiese acabado en empate, habrían sumado $380 \cdot 3 = 1140$ puntos, ya que por cada victoria, un equipo suma 3 puntos. Pero como han sumado 1005 puntos, esto quiere decir que $1140 - 1005 = 135$ puntos son los que han dejado de sumar por las victorias, y ya que por cada empate, se suman 2 puntos en total (uno para cada equipo), esto implica que ha habido 135 empates (y 245 victorias).

**14.(A)** Solo hay dos afirmaciones falsas y un único culpable. Puesto que hay tres acusaciones directas, una de ellas ha de ser verdadera y las otras dos falsas. Además, el resto de afirmaciones también serán verdaderas, por tanto sabemos que Ana y Cris mienten. Esto implica que no lo hicieron ni Berto ni Dani, por tanto la culpable es Ana.

**15.(A)** Si prolongamos los lados no paralelos de los trapecios hacia dentro del arco, tendremos 9 triángulos isósceles iguales y todos ellos comparten un vértice que está en el centro del arco. Habremos dividido así media circunferencia en 9 partes iguales, por tanto, el ángulo desigual de estos triángulos vale $180º : 9 = 20º$. A partir de aquí llegamos a que los ángulos iguales de dichos triángulos, que coinciden con los ángulos interiores más pequeños de cada trapecio, valen $\frac{180º-20º}{2}=80º$. Y por consiguiente, los ángulos interiores más grandes del trapecio, que son sus suplementarios, valen $180º - 80º = 100º$.



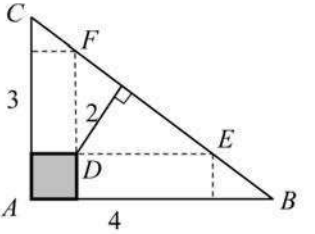
**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**16.(E)** Si prolongamos los lados del cuadrado según se muestra en la figura, y trazamos una perpendicular al lado *AB* que pase por *E*, obtenemos dos triángulos semejantes al original, el triángulo *DEF* y el triángulo *GBE*.

En el triángulo original *ABC*, usando el teorema de Pitágoras y el teorema de la altura, como conocemos los catetos, que miden 3 y 4, podemos obtener que la hipotenusa mide 5 y que la altura mide $\frac{12}{5}$.

En el triángulo *DEF*, sabemos que la altura mide 2, y por semejanza con *ABC*, podemos obtener que el cateto mayor, *DE*, mide $\frac{10}{3}$.

Si llamamos $x$ al lado del cuadrado, éste coincide con *EG*, el cateto menor del triángulo *GBE*. Usando nuevamente la semejanza podemos obtener que el cateto mayor de este triángulo es $\frac{4}{3}x$. Así obtenemos que la base *AB*, que mide 4, tiene que ser igual a $x+\frac{10}{3}+\frac{4}{3}x$, y despejando $x$ en esta ecuación obtenemos que el lado del cuadrado mide $\frac{2}{7}$, por tanto el área total que ocupa el cuadrado es $\frac{4}{49}$.




**17.(B)** La probabilidad que nos piden se calculará sumando la probabilidad de que ambos obtengan 0 caras, más la probabilidad de que ambos obtengan 1 cara, más la probabilidad de que ambos obtengan 2 caras. Como el lanzamiento de Julián es independiente del lanzamiento de Lucía, cada una de estas probabilidades se calcula multiplicando. Si $L$ es el número de caras de Lucía y $J$ el número de caras de Julián, $p(L=0)\cdot p(J=0)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$; $p(L=1)\cdot p(J=1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{4}=\frac{6}{32}$

$p(L=2)\cdot p(J=2)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

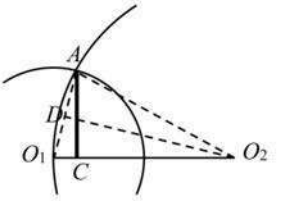
Así pues, la probabilidad que nos piden es $\frac{1}{32}+\frac{6}{32}+\frac{3}{32}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

**18.(B)** El número de apretones de manos que se dieron los mellizos entre sí fue $\frac{18\cdot 16}{2}=144$. El número de apretones de manos que se dieron los trillizos entre sí fue $\frac{18\cdot 15}{2}=135$. Y finalmente, el número de apretones de manos que se dieron los mellizos con los trillizos fue $\frac{18\cdot 18}{2}=162$. Si sumamos obtenemos un total de 144 + 135 + 162 = 441 apretones de manos.

**19.(E)** En la ecuación que nos dan, despejando $a$ obtenemos que $a=\frac{9b^2}{5-b}$ y de aquí podemos extraer dos conclusiones.
Por una parte, ya que $a$ es un número entero positivo, y el numerador es siempre positivo, también ha de serlo el denominador $0 < 5 - b$, por tanto $b < 5$. Y como $b$ también es un entero positivo solo puede tomar los valores 1, 2, 3, o 4.
Por otra parte, $(5 - b)$ tiene que ser un divisor de $9b^2$. Como hemos reducido a cuatro los posibles valores de $b$, podemos probar y vemos que los únicos que cumplen esta última propiedad son $b = 2$ y $b = 4$, que me dan, respectivamente, $a = 12$ y $a = 144$. En conclusión, la suma de todos los valores posibles de $a$ es 156.

**20.(C)** Si llamamos $C$ al punto donde el segmento $AB$ corta a la recta que une los centros de la circunferencia, vemos que lo que necesito es saber cuánto mide AC, que es la altura del triángulo $O_1O_2A$. Si supiésemos el área de este triángulo, podríamos calcular fácilmente dicha altura, ya que la distancia entre los centros sabemos que es 2.




Para calcular el área del triángulo $O_1O_2A$, tomaremos el lado $AO_1$ como base y buscaremos la longitud de la altura $DO_2$. Puesto que el triángulo es isósceles, la altura $DO_2$ corta en el punto medio al lado $AO_1$, por tanto tenemos un triángulo rectángulo $ADO_2$ del cual conocemos la hipotenusa, que mide 2, y el cateto menor que mide $\frac{1}{2}$, y por tanto el otro cateto $DO_2=\sqrt{2^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Llegamos así a que el área del triángulo $O_1O_2A$ es $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot AC$, y de ahí obtenemos que $AC=\frac{\sqrt{15}}{4}$ y por tanto la distancia que se pedía es el doble.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

**21.(A)** Buscamos las soluciones enteras de la ecuación $n^2+6n+24-q^2=0$ , donde $q$ es un número entero. El discriminante es $\Delta=36-4\left(24-q^2\right)=4q^2-60=4\left(q^2-15\right)$, y para que las soluciones sean enteras, $\Delta$ tiene que ser un cuadrado perfecto, de donde llegamos a que $q^2 - 15 = r^2$ , con $r$ un número entero. Es decir, tenemos $q^2-r^2=\left(q+r\right)\cdot\left(q-r\right)=15$.

Pero el número 15 solo podemos descomponerlo de dos formas distintas, $15\cdot1$ y $5\cdot3$, y de aquí llegamos a los posibles valores de $q$ y $r$. O bien $q = 4$ y $r = \pm1$, o bien $q = 8$ y $r = \pm7$.. De aquí obtenemos que los valores de $n$ posibles son –2, –4, 4 y 10, y su suma vale –12.

**22.(E)** Teniendo en cuenta que las respuestas posibles están entre el 99! y el 104! vamos a contar, por ejemplo, cuántas veces aparece el factor 2 en el número factorial 100! Por una parte tenemos 50 múltiplos de 2 menores o iguales que 100. De ellos, 25 son además múltiplos de 4, y por tanto, aportan dos veces el factor 2 al factorial. Necesitamos contar también cuántos múltiplos hay de cada potencia de 2 menor que100. Tenemos 12 múltiplos de 8, 6 múltiplos de 16, 3 múltiplos de 32 y 1 múltiplo de 64.

En total el factor 2 en el factorial 100! aparece $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ veces. Si consideramos el 102! tendremos que añadir los doses que aporta $102 = 2\cdot51$, y llegamos a que el factor 2 aparece 98 veces en 102!. No es suficiente. La respuesta es 104! ya que aquí habremos añadido el factor $104 = 2^2\cdot13$, y por tanto será divisible entre $2^{100}$.

**23.(A)** Según el enunciado del problema, cada piso tendrá una naranja menos tanto a lo largo como a lo ancho. Es decir, si el primer piso es $5 \times 8$, el siguiente piso es $4 \times 7$, así el tercer piso es $3 \times 6$, el cuarto piso es $2 \times 5$ y llegamos al último piso que es $1 \times 4$, una única fila.

Por tanto, cada pirámide del frutero tiene: $40 + 28 + 18 + 10 + 4 = 100$ naranjas.

**24.(E)** Contemos primero cuántos números de seis cifras hay que contienen los dígitos dados. Como el dígito más a la izquierda no puede ser 0, tenemos para dicho dígito cinco posibilidades. Una vez fijado dicho dígito, no tenemos restricciones sobre los demás, así que tendremos que contar las permutaciones de cinco elementos. Al final obtenemos $5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 600$ posibilidades.

Contemos ahora cuántos de esos números acaban en 0. Si la última posición la tenemos ocupada por el 0, en los demás dígitos no tenemos restricciones, así que tendremos que contar solo las permutaciones de cinco elementos, que son $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ .

Contemos para terminar cuántos de esos números acaban en 5. Si la última posición la tenemos ocupada por el 5, para la cifra de la izquierda del todo, que no puede ser 0,

tenemos cuatro posibilidades. Una vez fijada, no tenemos restricciones sobre las cifras restantes, así que nos basta con contar las permutaciones de cuatro elementos, y al final obtenemos $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$. Así pues, la probabilidad pedida queda, $\frac{120+96}{600} = \frac{216}{600} = \frac{9}{25}$

**25.(A)** Llamemos $x$ al área de *SOL*. Los triángulos *SOL* y *LPK* son semejantes, y los lados del segundo miden el doble que los del primero, así pues, la razón entre sus áreas será 4, es decir, el área de *LPK* es $4x$. Tenemos también semejanza entre los triángulos *SOL* y *LUI*, pero en este caso la razón de semejanza entre sus lados es 3, por lo que la razón entre sus áreas será 9. Así llegamos a que el área del triángulo *LUI* es $9x$ y entonces el cuadrilátero *PUIK* tiene de área $5x$.

Llamemos $z$ al área de *LUNA*. Ya que el área de *LUNA* es 3 veces el de *PUNG*, el área de *PUNG* es $\frac{1}{3}z$. Además, sabemos por el enunciado que el área de *PUIK* es el doble que el área de *KING*, y como entre los dos tienen de área $\frac{1}{3}z$, llegamos a que el área de *PUIK* es $\frac{2}{9}z$.

En conclusión, el área de *PUIK* es $5x = \frac{2}{9}z$, así pues, el cociente entre $x$, el área de *SOL*, y $z$, el área de *LUNA*, es $\frac{x}{z} = \frac{2}{9 \cdot 5} = \frac{2}{45}$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

# XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 2ª Fase Nivel IV

**1. (A)** Escribimos cada igualdad en potencias de la misma base, obteniendo $3^a = 3^{4b+8}$ y $5^{3b} = 5^{a-3}$. De esta forma los exponentes tienen que ser iguales y solo nos queda resolver el sistema $\begin{cases} a = 4b+8 \\ 3b = a-3 \end{cases}$ obteniendo los valores $a = 12$ y $b = 5$. Por lo tanto, $a \cdot b = 60$.

**2. (B)** El centro de la circunferencia se encuentra en el corte de las mediatrices. La mediatriz del segmento $AB$ es la recta $y = 4$ y la del segmento $AC$ es la recta $x = 5$. Por tanto, el centro de la circunferencia será $O$ (5, 4) y el radio es la distancia $AO = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$ . Así que el área del círculo es $25\pi$.

**3. (C)** Como los vértices consecutivos son 26, 2 y 8, solo tenemos que ver que hay 6 puntos entre el 2 y el 8 y como el polígono es regular también tiene que haber 6 puntos entre el 26 y el 2. Por tanto, la circunferencia está dividida en 30 puntos. Los vértices del polígono estarán en las posiciones 2, 8, 14, 20 y 26, por tanto será un pentágono y la suma pedida será 35.

**4. (B)** Como $a$, $b$ y $c$ son enteros y $a + \frac{b}{c} = 197$ y $b + \frac{a}{c} = 92$, entonces, tanto $a$ como $b$ han de ser múltiplos de $c$ y podemos escribir $a = mc$ y $b = nc$.

Los datos del problema son, por tanto:

$\begin{cases} mc + n = 197 \\ nc + m = 92 \end{cases}$ y tenemos que calcular el valor de $\frac{a+b}{c} = \frac{mc+nc}{c} = m+n$

Sumando nuestras dos ecuaciones tenemos que:

$c(m+n) + m + n = 289 \rightarrow (c+1)(m+n) = 289$

Y ahora viene lo bueno, resulta que $289 = 17^2$ y tenemos solo tres casos posibles:

$\begin{cases} c+1 = 1 \\ m+n = 289 \end{cases}$ es imposible porque $c$ no puede ser cero.

$\begin{cases} c+1 = 289 \\ m+n = 1 \end{cases}$ es imposible porque $c = 288$ no da soluciones enteras (¿te animas a comprobarlo?)

$\begin{cases} c+1 = 17 \\ m+n = 17 \end{cases}$ ésta es la única solución posible, $\frac{a+b}{c} = m+n = 17$

La solución es $a = 192$, $b = 80$, $c = 16$.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

**5. (B)** Vamos a intentar conseguir al función $f(a)$. Si al sustituir $a$ por $x^2+1$ obtengo un polinomio de grado 4 es porque $f(a)$ es de grado 2 y así $\left(x^2+1\right)^2$ dará $x^4+2x^2+1$ pero tenía que conseguir un $5x^2$, así que ajusto $f(a)=a^2+3a$, de esta forma $f\left(x^2+1\right)=x^4+5x^2+4$. Aún no lo hemos conseguido porque tenía que dar +3. Solo nos queda un pequeño ajuste. La función será $f(a)=a^2+3a-1$. En este caso ya es fácil averiguar que $f\left(x^2-1\right)=x^4-2x^2+1+3x^2-3-1=x^4+x^2-3$

OTRA FORMA

$f\left(x^2+1\right)=x^4+5x^2+3=x^4+2x^2+1+3x^2+3-1=\left(x^2+1\right)^2+3\left(x^2+1\right)-1$.

Luego la función $f$ es, $f(a)=a^2+3a-1$ y por lo tanto $f(x^2-1)=\left(x^2-1\right)^2+3\left(x^2-1\right)-1=x^4-2x^2+1+3x^2-3-1=x^4+x^2-3$

**6. (B)** Si $x>1$ cumple que $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\le\frac{1}{x^2}$, entonces:

$x^2\le(\ln x)^{\ln x}\to\ln x^2\le\ln(\ln x)^{\ln x}\to 2\ln x\le\ln x\cdot\ln(\ln x)\to 2\le\ln(\ln x)\to$

$\to e^2\le e^{\ln(\ln x)}\to e^2\le\ln x\to e^{(e^2)}\le e^{\ln x}\to e^{(e^2)}\le x$

**7. (E)** Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad, obtenemos $a^2+b+2a\sqrt{b}=14+6\sqrt{5}$, comparando vemos que $a=3$ y $b=5$. Por tanto, $a^2+b^2$ es 34.

**8. (A)** Con las instrucciones del enunciado, la sucesión quedará así: $a, a+b-1, b, -a+2, -a-b+3, -b+2, a, a+b-1, b, \ldots$ Como podemos observar, cada 6 términos se repite la sucesión, así que sumamos esos 6 términos de la sucesión y obtenemos un 6. Como 2019 = 6·336+3, la suma de los 2019 términos será $6\cdot 336+a+a+b-1+b=2015+2a+2b$

**9. (D)** Para que la base tenga un perímetro de 14 solo hay tres posibilidades 1 × 6, 2 × 5 y 3 × 4. En cada uno de estos casos, y usando los 300 cubos indicados, la altura del prisma será 50, 30 y 25 respectivamente. Por tanto, la suma será 105.

**10.(A)** Si observamos la suma $1+3+9+27$ es múltiplo de 8, la suma de los siguientes cuatro términos $3^4+3^5+3^6+3^7$ también es múltiplo de 8 y así sucesivamente. Así que solo tenemos que ver cuántos de los 2020 términos no están agrupados, para ello vemos que 2020 = 4·505, no hay ninguno desagrupado, por tanto la suma es múltiplo de 8 y por tanto el resto de la división es 0.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

**11.(B)** Representamos los primeros pasos del juego para entenderlo.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jorge | 15 | 12 | 13 | 14 | 11 | 12 | 13 | … | 12 | … | 3 | 0 |
| Miguel | 14 | 15 | 12 | 13 | 14 | 11 | 12 | … | 11 | … | 2 | |
| Santiago | 13 | 14 | 15 | 12 | 13 | 14 | 11 | … | 10 | … | 1 | |
| Bote | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … | 9 | … | 36 | 37 (fin) |

Vemos que cuando el bote tiene un múltiplo de 3 de piedras es cuando Jorge va perdiendo una piedra: 15, 14, 13… Cuando Jorge tenga 3 piedras, ha perdido 12, así que el bote en ese momento tiene 12·3=36 piedras y en el siguiente paso es cuando acaba el juego, con 37 piedras.

**12.(D)** Planteamos el área sombreada como la suma de 4 trozos, dos sectores de corona circular y dos sectores circulares. $A_S = 2\cdot\frac{\pi\left(2^2-1^2\right)\cdot\left(180º-\alpha\right)}{360º}+2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2\cdot\alpha}{360º}$

$\Rightarrow A_S = \frac{3\pi\cdot\left(180º-\alpha\right)}{180º}+\frac{\pi\cdot\alpha}{180º}=3\pi-\frac{2\pi\alpha}{180º}$.

Planteamos el área de la zona blanca como la suma de dos sectores de corona circular y dos sectores circulares $A_b = 2\cdot\frac{\pi\left(2^2-1^2\right)\cdot\alpha}{360º}+2\cdot\frac{\pi\cdot 1^2\cdot\left(180º-\alpha\right)}{360º}$

$\Rightarrow A_b = \frac{3\pi\alpha}{180º}+\frac{180º\pi-\pi\alpha}{180º}=\pi+\frac{2\pi\alpha}{180º}$.

Utilizamos la condición del enunciado $\frac{A_s}{A_b}=\frac{7}{3}=\frac{3\pi-\frac{\pi\alpha}{90º}}{\pi+\frac{\pi\alpha}{90º}}$, operando conseguimos

$\alpha\ 9\pi-\frac{3\pi\alpha}{90º}=7\pi+\frac{7\pi\alpha}{90º}\Rightarrow 2\pi=\frac{10\pi\alpha}{90}\Rightarrow\alpha=18º$

**13.(C)** Escribimos la suma de los $n$ naturales como la suma de una sucesión aritmética, quedaría así: $\sqrt{1+2+3+...+n}=\sqrt{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$. Solo tenemos que ver cuando $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ es un cuadrado perfecto. Eso solo ocurre si $n$ es un cuadrado perfecto o uno menos, así que vamos probando con 1, 3, 4, 8, 9, 15, 16, 24, 25, 35, 36, 48, 49, 63, 64, 80, 81 y 99. Vemos que solo lo cumple $n = 1$, $n = 8$ y $n = 49$. Por tanto la solución es 3.

XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

**14.(B)** Los puntos $ABCD$ forman un cuadrado, $A$ y $B$ están en el primer cuadrante. Por eso podemos definir $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DA}$ donde $\overrightarrow{DA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CD}=(-t,\,u)$ y tienen el mismo módulo, así que podemos asegurar que $\overrightarrow{DA}=(u,\,t)$, por tanto, $(p,\,q)=(0,\,u)+(u,\,t)$. Del mismo modo $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DA}$, $(r,\,s)=(t,\,0)+(u,\,t)$. Con esta información tenemos que $p=u$, $q=u+t$, $r=u+t$, $s=t$. Utilizamos la información del enunciado que $p+q+r+s=36$, y sustituimos $p$, $q$, $r$, $s$ por los valores obtenidos y tenemos $u+u+t+u+t+t=36$, por tanto $3u+3t=36$, así que $u+t=12$.

**15.(D)** $2^{1000}$ tiene 1000 doses. Vamos a ver cuántos doses hay en 1000!=1·2·…·999·1000. Todos los pares aportan un dos, los múltiplos de 4 aportan otro dos extra, los múltiplos de 8 otro más y así los vamos contando. Quedaría así:

- Múltiplos de 2 → 500
- Múltiplos de 4 → 250
- Múltiplos de 8 → 125
- Múltiplos de 16 → 62
- Múltiplos de 32 → 31
- Múltiplos de 64 → 15
- Múltiplos de 128 → 7
- Múltiplos de 256 → 3
- Múltiplos de 512 → 1

Hay 994 doses en 1000! Aún nos faltan seis. 1002 aporta un dos más, 1004 aporta otros dos, 1006 aporta otro más. Llevamos 998, aún nos faltan dos. 1008 aporta cuatro, así que ya hemos llegado a los 1000 doses. Por tanto, la solución es 1008!

**16.(D)** Aplicamos las propiedades de los logaritmos para operar la expresión dada

$$\frac{\log_a\left(\sqrt[3]{b^5}\right)^2-4\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{b}}}\right)}=\frac{\log_a b^{\frac{10}{3}}-4\log_a b^{-1}}{\log_a b^{\frac{1}{24}}}=$$

$$=\frac{\frac{10}{3}\log_a b+4\log_a b}{\frac{1}{24}\log_a b}=\frac{\frac{10}{3}+4}{\frac{1}{24}}=176$$

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**17.(C)** Utilizamos la figura para definir $sen\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{l}{2}}{d}=\frac{1}{2\phi}$ , por tanto $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{4\phi^2}}$ .

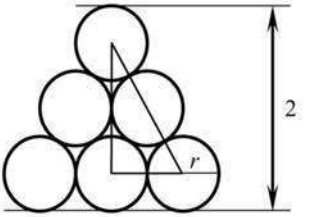
$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1-\frac{1}{4\phi^2}-\frac{1}{4\phi^2}=1-\frac{1}{2\phi^2}$ , donde

$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\cos\alpha=1-\frac{4}{2\left(1+\sqrt{5}\right)^2}=1-\frac{2}{1+5+2\sqrt{5}}=\frac{4+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$,

racionalizamos y obtenemos la solución $\cos\alpha=\frac{6+\sqrt{5}-5}{9-5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\phi}{2}$

**18.(B)** Las pendientes de las rectas son: $m_{AD}=-\frac{-1}{d}$, $m_{BE}=-\frac{2}{e}$, $m_{CF}=-\frac{4}{f}$. Como las rectas son paralelas todas las pendientes tienen que ser iguales, por tanto $f=2e$ y $-f=4d$, utilizando el dato del enunciado $d+e+f=40$, tenemos que $-\frac{f}{4}+\frac{f}{2}+f=40\Rightarrow\frac{5f}{4}=40\Rightarrow f=\frac{160}{5}$, por tanto la pendiente será $-\frac{4}{\frac{160}{5}}=-\frac{1}{8}$

**19. (A)** Nos apoyamos en el triángulo rectángulo dibujado en la figura, donde la hipotenusa mide $4r$, el cateto horizontal $2r$ y el cateto vertical lo llamamos $x$. Aplicando Pitágoras tenemos que $x=\sqrt{16r^2-4r^2}=2\sqrt{3}r$ . Por otro lado, nos dicen que la altura de la figura resultante es 2, así que $2=2r+x=2r+2\sqrt{3}r$ $\Rightarrow r=\frac{2}{2+2\sqrt{3}}$ que racionalizando y simplificando queda $r=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$



**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**20.(C)** Primero vamos a definir todas las variables que vamos a utilizar: la distancia de Marta al gimnasio, $d_{MG}$, la distancia de Marta a casa, $d_{MC}$, la velocidad que lleva andando, $v_a$, la velocidad que lleva en bici, $v_b$, el tiempo que tarda Marta en llegar al gimnasio, $t$,el tiempo que tarda Marta en llegar a casa, $t'$.

Aplicando que en un movimiento uniforme la distancia es igual a la velocidad por el tiempo, tenemos $d_{MG} = v_a \cdot t$, $d_{MC} = v_a \cdot t'$. Utilizamos el movimiento de Marta cuando vuelve a casa a por la bici para ir al gimnasio, esto quedaría $d_{MC} + d_{MC} + d_{MG} = v_a \cdot t' + v_b \cdot (t - t')$, sustituyendo $d_{MC}$ y $d_{MG}$ y teniendo en cuenta que $v_b = 7v_a$, obtenemos $v_a \cdot t' + v_a \cdot t' + v_a \cdot t = v_a \cdot t' + 7v_a \cdot (t - t')$, operando $8v_a \cdot t' = 6v_a \cdot t \Rightarrow \frac{t'}{t} = \frac{3}{4}$.

Por otro lado la relación que piden en el enunciado es $\frac{d_{MC}}{d_{MG}} = \frac{v_a \cdot t'}{v_a \cdot t} = \frac{t'}{t} = \frac{3}{4}$

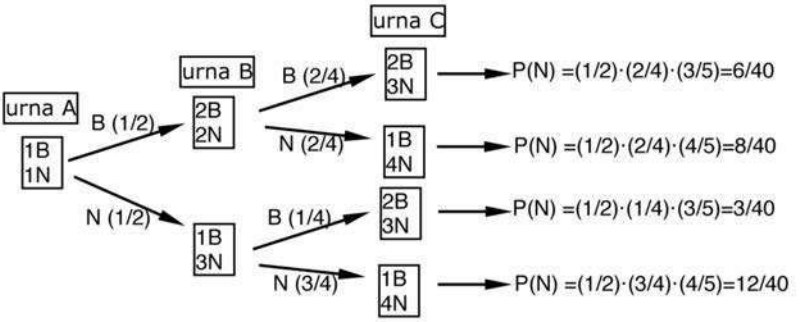
**21.(A)** Observamos que si $x < -1$, entonces, $x(x^2 - 1)$ es a la fuerza negtaivo y, por tanto, como $y^2 = x(x^2 - 1)$, deducimos que $y$ no existe. Así que ya podemos descartar las respuestas B, C y E. ¿Cómo nos decidimos entre la A y la D? Podemos ver que si $x$ toma valores muy grandes, $y$ también los toma muy grandes (en valor absoluto). La respuesta es A.

**22.(D)** Empezamos contando cuántos números hay con tres cifras 1 iguales:
111*a* hay 9 (*a* puede ser 0, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
11*a*1 hay 9
1*a*11 hay 9
*a*111 hay 8 (*a* puede ser 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
En total hay 35 números con tres unos. Igual razonamiento vale si las tres cifras iguales son 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Así pues, llevamos contabilizados ya 9·35 = 315.
Números con tres cifras 0 iguales hay solo 9, del tipo:
*a*000 (*a* puede ser 1, 2, 3, 4, 5 ,6 ,7, 8, 9)
En total hay 315 + 9 = 324 números con, exactamente, tres cifras iguales

**23.(A)** Como $z^2 = 2z - 2$, entonces $z^4 = (2z - 2)^2$. Desarrollamos:
$z^4 = 4z^2 - 8z + 4 = 4z^2 - 8z + 8 - 4 = 4z^2 - 4(2z - 2) - 4 = 4z^2 - 4z^2 - 4 = -4$.

**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**24.(D)** Hagamos un diagrama de árbol:




La probabilidad de obtener bola negra en la última extracción es:

$$P(N)=\frac{6}{40}+\frac{8}{40}+\frac{3}{40}+\frac{12}{40}=\frac{29}{40}.$$

**25.(C)** PRIMER MÉTODO

Si desconocemos la recta de Euler o simplemente queremos contestar cuál es la opción correcta, elegimos unos números complejos cuyos afijos determinan un triángulo fácil de manejar.

$a = 0 + 2i$, $b = 0 + 0i$ y $c = 2 + 0i$ cuyos afijos son $A(0, 2)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$.

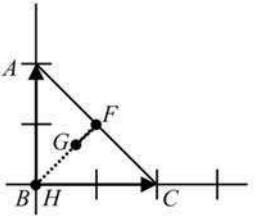
Su circuncentro, por tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, es el punto medio de su hipotenusa, $F(1,1)$, su baricentro $G\left(\frac{0+0+2}{3},\frac{2+0+0}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ y su ortocentro $H(0, 0)$, como muestra la figura.

Calculamos la suma $a + b + c$ que aparece en todas las respuestas.

$a+b+c=(0+2i)+(0+0i)+(2+0i)=2+2i$

$f=1+i\Rightarrow 2f=2+2i$ y como $h = 0 + 0i$, entonces $2f + h = 2 + 2i = a + b + c$.

Ninguna de las otras opciones se verifica.

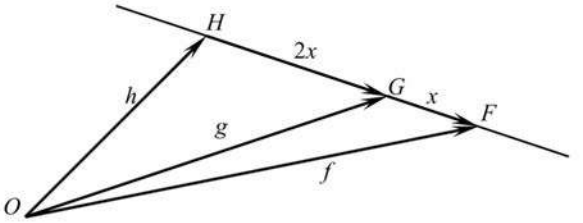


**XXIII Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

SEGUNDO MÉTODO

Si se conoce la recta de Euler que es la que pasa por: circuncentro, baricentro y ortocentro, con la particularidad de que $HG = 2GF$, entonces, se verifica como muestra la figura, que $\vec{g} = \vec{h} + 2\vec{x}$ y $\vec{f} = \vec{g} + \vec{x}$. Eliminando el vector $\vec{x}$ entre las dos igualdades se concluye que $3\vec{g} = 2\vec{f} + \vec{h}$, es decir, que $3g = 2f + h$.

Y como el baricentro es el afijo de $\frac{a+b+c}{3}$ tenemos que $3\frac{a+b+c}{3} = 2f + h$ y por lo tanto $a + b + c = 2f + h$.



Participantes y relación de ganadores

# Participantes y relación de ganadores del XXIII Concurso de Primavera de Matemáticas

El número de participantes en la primera fase celebrada en los propios centros sigue aumentando. En este año se superó la cifra de 50 000 estudiantes de 520 centros participantes.

Aunque se inscribieron 3898 concursantes a la segunda fase, el número de participantes fue de 3454. La estadística de participación por niveles y puntuaciones obtenidas puede consultarse en la página (https://www.concursoprimavera.es) de la Sociedad Puig Adam así como la relación de todos los ganadores del concurso y la relación de los centros con mayor puntuación en cada uno de los niveles.

La distribución por niveles de los participantes en la segunda fase, que como siempre tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, fue la siguiente:

| | NIVEL 1 | | | | NIVEL 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P | | 6º P | | 1º ESO | | 2º ESO | |
| nº de participantes (inscritos) | 145 (150) | 76 (85) | 386 (406) | 196 (208) | 301 (327) | 157 (173) | 400 (440) | 266 (290) |
| Totales por curso | 221 (235) | | 582 (614) | | 458 (500) | | 666 (730) | |
| Totales por nivel | 803 (849) | | | | 1124 (1230) | | | |

| | NIVEL 3 | | | | NIVEL 4 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3º ESO | | 4º ESO | | 1º Bach. | | 2º Bach. | |
| nº de participantes (inscritos) | 316 (372) | 150 (181) | 347 (401) | 173 (199) | 248 (294) | 119 (152) | 130 (163) | 44 (57) |
| Totales por curso | 466 (553) | | 520 (600) | | 367 (446) | | 174 (220) | |
| Totales por nivel | 986 (1153) | | | | 541 (666) | | | |

Llama la atención la participación según las edades, siendo los niveles 3 y el 2, sobre todo, los que más participan y los mayores, de nivel 4, los que menos.

También queda palpable que las chicas participan en menor número, solo el 34 % de los participantes en esta última fase son chicas y que en los niveles de mayor edad este porcentaje es aún menor, en 2º de bachillerato solo el 25 %.

Los tres, y en un caso cinco, ganadores en cada uno de los niveles fueron:

**NIVEL I**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Alessandro Mateos Avallone | (6º Primaria) CPR El Valle |
| 2. | Nuria Martín Jiménez | (5º Primaria) CPR Edith Stein |
| 3. | Fernando Coloma Regadera | (6º Primaria) CPR San Agustín |
| 3 | Carlos Jiménez Bañón | (6º Primaria) CP Lorenzo Luzuriaga |
| 3 | Pablo Laguna Escobar | (6º Primaria) Colegio Alemán de Madrid |

**NIVEL II**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Diego López Aragón | (1º ESO) IES María Guerrero |
| 2. | Miguel Barquero Draper | (2º ESO) CPR San Agustín |
| 3. | David Morilla Iglesias | (2º ESO) IES La Estrella |

**NIVEL III**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Jimena Lozano Simón | (4º ESO) Colegio Alemán de Madrid |
| 2. | Álvaro Gamboa Rodríguez | (3º ESO) IES Ciudad de los Poetas |
| 3. | Santiago Arce Carpio | (4º ESO) Aquinas American School (Pozuelo… |

**NIVEL IV**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Gabriel Valery Salov | (1º Bchto) IES Juan de Herrera |
| 2. | Alejandro Meléndez Reyes | (1º Bchto) CPR La Salle |
| 3. | Jorge Maceín Sanz | (1º Bchto) IES San Juan Bautista |

Participantes y relación de ganadores

# RELACIÓN DE LOS 10 CENTROS CON MEJOR PUNTUACIÓN POR NIVEL

(Elaborada con las tres mejores puntuaciones de cada centro en cada nivel)

# XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA Mayo 2019

| NIVEL I | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| CPR SAN AGUSTÍN | Madrid | 300 |
| CPR ALKOR | Madrid | 280 |
| CP LORENZO LUZURIAGA | Madrid | 279 |
| CP CIUDAD NEJAPA | Tres Cantos (Madrid) | 274 |
| CP FRAY PEDRO DE AGUADO | Valdemoro (Madrid) | 274 |
| CPR FUNDACIÓN CALDEIRO | Madrid | 270 |
| CPR SAGRADOS CORAZONES | Madrid | 266 |
| CEX COGNITA HASTING HOLDINGS | Madrid | 265 |
| CEX RUNNYMEDE COLLEGE | Alcobendas (Madrid) | 265 |
| CPR NTRA. SRA. SANTA MARÍA | Madrid | 262 |

| NIVEL II | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| CPR SAN AGUSTÍN | Madrid | 293 |
| IES LA ESTRELLA | Madrid | 242 |
| COLEGIO ALEMÁN | Madrid | 233 |
| CPR AGUSTINIANO | Madrid | 229 |
| IES AVENIDA DE LOS TOREROS | Madrid | 229 |
| CPR NTRA SRA DEL BUEN CONSEJO | Madrid | 221 |
| IES LÁZARO CARDENAS | Collado Villalba(Madrid) | 207 |
| IES DOCTOR MARAÑÓN | Alcalá de Henares(Madrid) | 207 |
| CPR ÁBACO | Madrid | 205 |
| CPR INTERNACIONAL NUEVO CENTRO | Madrid | 202 |
| CPR OBISPO PERELLÓ | Madrid | 202 |

**Participantes y relación de ganadores**

| NIVEL III | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| CPR JOYFE | Madrid | 243 |
| CPR LAUDE FONTENEBRO SCHOOL | Moralzarzal (Madrid) | 206 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 200 |
| CPR MONTE TABOR | Pozuelo Alarcón (Madrid) | 189 |
| CEX KINGS COLLEGE | Tres Cantos (Madrid) | 188 |
| CPR AMOR DE DIOS | Madrid | 188 |
| IES CIUDAD DE LOS POETAS | Madrid | 184 |
| CPR ASUNCIÓN CUESTABLANCA | Madrid | 183 |
| IES EL BURGO DE LAS ROZAS | Las Rozas (Madrid) | 183 |
| CPR MIRABAL | Boadilla del Monte(Madrid) | 179 |
| IES BEATRIZ GALINDO | Madrid | 179 |

| NIVEL IV | | |
|---|---|---|
| NOMBREDEL CENTRO | MUNICIPIO | SUMA DE PUNTOS |
| IES SAN MATEO | Madrid | 228 |
| IES RAMIRO DE MAEZTU | Madrid | 224 |
| COLEGIO ALEMÁN | Madrid | 213 |
| KING´S COLLEGE | Tres Cantos (Madrid) | 207 |
| IES SAN JUAN BAUTISTA | Madrid | 199 |
| IES JUANA DE CASTILLA | Madrid | 176 |
| CPR COLEGIO JOYFE | Madrid | 168 |
| IES ÁNGEL CORELLA | Colmenar Viejo(Madrid) | 163 |
| CPR INTERNACIONAL NUEVO CENTRO | Madrid | 161 |
| CPR LA SALLE | Madrid | 159 |

XXXVII Concurso Puig Adam

# XXXVII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 18 de mayo de 2019

## NIVEL I (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

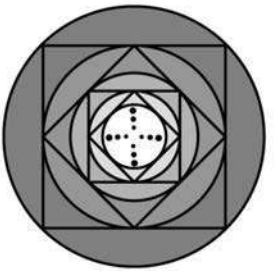
**Problema 1.** (7 puntos)

Determina todos los valores reales de $x \neq 0$ para los cuales resulta que la $y$ no es real en la ecuación $y = \dfrac{x}{x + \dfrac{x}{x+y+1}}$

**Problema 2.** (7 puntos)

En una circunferencia de radio $r = 1$ inscribimos un cuadrado. En este cuadrado inscribimos otra circunferencia y así sucesivamente vamos inscribiendo, de forma alternativa, cuadrados y circunferencias como muestra la figura.
Determina:

a) La suma de las áreas de los infinitos círculos que determinan las circunferencias.
b) La suma de las áreas de los infinitos cuadrados.
c) El cociente entre las áreas de los infinitos círculos y las áreas de los infinitos cuadrados.
d) Comprueba que ese cociente es igual al cociente del área del primer círculo y el primer cuadrado.



XXXVII Concurso Puig Adam

## NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto) Justifica por qué no existe un polígono regular en el que dos lados consecutivos formen un ángulo de 130º y calcula el número de lados del polígono regular en el que dos lados consecutivos forman un ángulo de 175º.

**Problema 2A.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.

Si $x$ e $y$ son enteros positivos que verifican la igualdad $Tx^2 = y^3$, ¿cuál es el menor valor posible para la suma $x + y$?

**Problema 3A.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.

Aplicamos al punto $A$, de coordenadas ($T$, 5), un giro de centro el punto $O(16, -6)$ y 90º de amplitud (en sentido antihorario) para obtener otro punto $B$. A continuación aplicamos a este punto una traslación con vector de traslación $\vec{u} = (7, 4)$ (7 unidades a la derecha y 4 hacia arriba) para obtener otro punto $C$.

Calcula el área del triángulo $ABC$.

**Problema 1B.** (1 punto) Tenemos tres números enteros consecutivos $a$, $b$, $c$ tales que verifican que al sumar 10 al del medio y un número primo $k$ al mayor se obtiene una progresión geométrica $a$, $b + 10$, $c + k$. ¿Qué número tiene que ser el primo $k$?

**Problema 2B.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.

Dadas las funciones $g(x) = 7x + 3$ y $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x+3) = x^2 - 5x + 8$ calcula el valor de $f(T)$.

**Problema 3B.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.

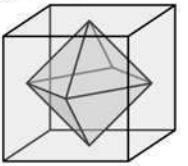
Completa el "cuadrado mágico" de la figura. ¿Cuál es el mayor número que aparece?

Nota. En un cuadrado mágico la suma de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es la misma

| | | |
|---|---|---|
| | | **14** |
| | | |
| **10** | | ***T*** |

**Problema 4.** (5 puntos) Sea $a$ la respuesta del problema 3A y $b$ la respuesta del problema 3B.

La arista del cubo de la figura es $\frac{a}{b}$. Los centros de las caras del cubo son los vértices de un octaedro regular. Determina el volumen del octaedro.



XXXVII Concurso Puig Adam

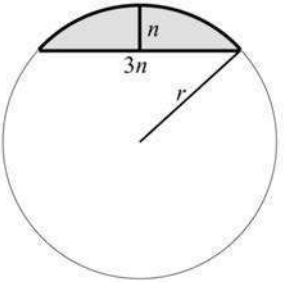
## NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

Encuentra todos los números $n$, comprendidos entre 2000 y 3000, tales que los restos que se obtienen al dividirlos entre 4, 5 y 7 son, respectivamente, 3, 1 y 6.
Es decir: $n = 4a + 3 = 5b + 1 = 7c + 6$.

**Problema 2.** (7 puntos)

Sea $n$ un entero positivo. En el segmento circular de la figura la longitud de la cuerda es $3n$ y la de la flecha $n$. Determina el menor valor de $n$ para el cual la longitud del radio de la circunferencia es un número entero. Calcula también la longitud del radio.

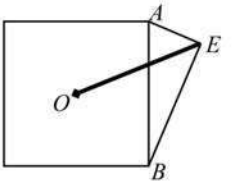


XXXVII Concurso Puig Adam

## NIVEL II (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)
¿Cuántos números de 6 cifras de la forma 2019AB son múltiplos de 21?

**Problema 2A.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.
La hipotenusa de un triángulo rectángulo coincide con el lado de un cuadrado de centro $O$, como muestra la figura.

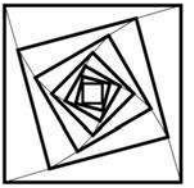



Si la longitud del cateto $AE$ es $T$ y la del segmento $OE$ es $\frac{17}{\sqrt{2}}$,

¿cuál es la longitud del lado $AB$ del cuadrado?

**Problema 3A.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.
La suma de las longitudes de las 12 aristas de una caja, con tapa, con forma de ortoedro (caras rectangulares) es 56 cm y la distancia entre uno de los vértices de la caja y el más lejano es $T$ cm. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área total de la caja?

**Problema 1B.** (1 punto) En la portada del Boletín de la Sociedad Puig Adam de Matemáticas aparece esta figura, formada por cuadrados y triángulos rectángulos, todos semejantes entre sí. Los lados del cuadrado más pequeño son paralelos a los del cuadrado mayor.
¿Cuántos grados mide el ángulo menor de los triángulos rectángulos?



**Problema 2B.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.
La suma de los $T$ primeros términos de una progresión aritmética, de diferencia 5, es 570. ¿Cuál es el primer término de la progresión?

**Problema 3B.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior..
En un dado defectuoso se sabe que, al lanzarlo, la probabilidad de obtener un 6 es doble de la probabilidad de obtener un 1 y que las demás caras tienen la misma probabilidad de obtenerse que las de un dado perfecto. Se ha lanzado el dado $T$ veces y en ninguno de los lanzamientos se ha obtenido el 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de puntos obtenidos sea 10?

**Problema 4.** (5 puntos) Sea $a$ la respuesta del problema 3A y $b$ la respuesta del problema 3B.
Un cubo de arista $a \cdot b$ está inscrito en una superficie esférica. Determina el área de dicha superficie esférica.

XXXVII Concurso Puig Adam

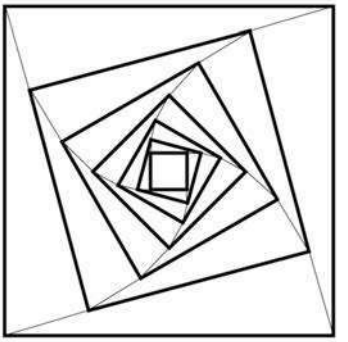
## NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1.** (7 puntos)

Determina todos los enteros positivos $m$ y $n$ para los que $m^2 + 8 = 3^n$.

**Problema 2.** (7 puntos)

En la portada del Boletín de la Sociedad Puig Adam de Matemáticas aparece esta figura formada por cuadrados y triángulos rectángulos, todos semejantes entre sí y los lados del cuadrado más pequeño son paralelos a los del cuadrado mayor.
Si el lado del cuadrado mayor es de 8 cm, ¿cuál es el área del cuadrado menor?



XXXVII Concurso Puig Adam

## NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

**Problema 1A.** (1 punto)

Encontrar el valor de $x$ que verifica la ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{x+80}=10\sqrt{2}$.

**Problema 2A.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior y.

Se consideran los enteros positivos $a$, $b$, $c$, tales que $a+2bc=T+2$ y $a+b=T+1$.

¿Cuál es el valor de $a+b+c$?

**Problema 3A.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior.

Calcula el valor de la suma $\log_4 2+\log_4 2^2+\log_4 2^3+\log_4 2^4+...+\log_4 2^T$.

**Problema 1B.** (1 punto)

Sea $k$ un número dado, $a$ y $b$ las soluciones de la ecuación $x^2+2x-k=0$ y $c$ y $d$ las soluciones de la ecuación $x^2-4x+k-4=0$. Calcula $a^2+b^2+c^2+d^2$.

**Problema 2B.** (1,5 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior y $b=\dfrac{T}{7}$.

Calcula el valor máximo de la función $f(x)=-x^2+bx+c$ sabiendo que $f(20)=19$.

**Problema 3B.** (2 puntos) Sea $T$ la respuesta del problema anterior..

Se considera la progresión aritmética $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ de diferencia $d=4$, $a_1=T$ y $a_n=2019$. Determina el valor de $n$.

**Problema 4.** (5 puntos)

Sean $a$ y $b$ las respuestas de los problemas 3A y 3B, respectivamente.

Una pista circular tiene un perímetro de $a$ metros. Alex y Bea empiezan a correr en esa pista, desde el mismo punto y simultáneamente. Alex corre a velocidad constante y tarda 15 segundos en recorrer toda la pista. Bea, que también corre a velocidad constante, tarda 160 segundos en recorrer $b$ metros. Cuando vuelven a coincidir, por primera vez, en el punto de salida, Alex ha dado $m$ vueltas y Bea ha dado $n$ vueltas. Calcula $20m+19n$.

XIX Concurso Intercentros

# XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"* Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

**PRUEBA POR EQUIPOS** 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** Como seguro que ya sabéis, la media aritmética de dos números positivos $x$ e $y$ es la mitad de su suma: $\frac{x+y}{2}$. Lo que tal vez no sepáis es que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto: $\sqrt{x \cdot y}$.
Encontrad un par de números tales que su media aritmética sea 13 y su media geométrica sea 12. Explicad cómo los habéis encontrado.

**2.** Cuando en *B* son las 14:00 en *A* son las 18:00. Un avión partió un viernes de *A* hacia *B* haciendo una escala intermedia en *C*. Durante la escala en *C* estuvieron detenidos 2 horas y 10 minutos. El vuelo llegó a *B* el sábado a las 12:15 (hora de *B*). El avión estuvo volando en total 14 horas y 10 minutos. ¿Qué hora era en *A* cuando despegó el avión?

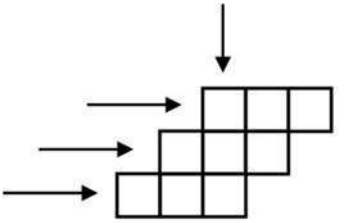
**3.** El cuadrado *ABCD* tienen 36 cm de lado. El punto *E* está sobre el lado *AB* a 12 cm de *B*, *F* es el punto medio del lado *BC* y el punto *G* está sobre *CD* a 12 cm de *C*.
¿Cuál es el área de la región que está dentro del triángulo *EFG* y fuera del triángulo *AFD*?

XIX Concurso Intercentros

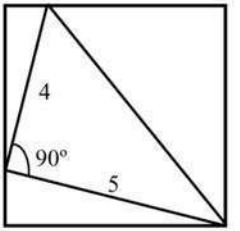
**PRUEBA POR EQUIPOS** 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

**1.** Un juego consiste en elegir varios enteros positivos diferentes que sumen 17 y hallar su producto. ¿Cuál es el producto máximo que puede conseguirse?

**2.** Tenéis que rellenar esta cuadrícula con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de tal manera que los números de tres cifras que señalan las flechas sean cuadrados perfectos.



**3.** Hemos encajado un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5 en un cuadrado como puedes ver en el dibujo. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

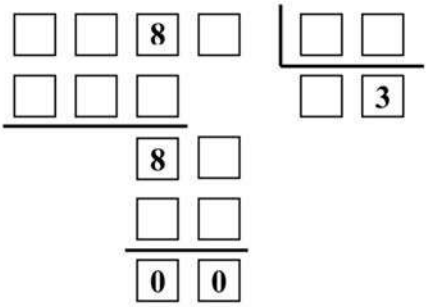


## XIX Concurso Intercentros

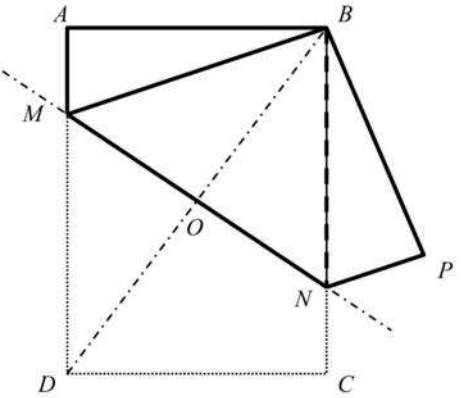
**PRUEBA POR EQUIPOS** Bachillerato. (45 minutos)

**1.** Tenemos dos números naturales tales que la suma de: su producto, su suma, el cociente del mayor entre el menor y la diferencia del mayor menos el menor es igual a 3125. ¿Cuáles son esos dos números?

**2.** Completa la división




**3.** Disponemos de una hoja de papel rectangular, $ABCD$, de lados $AB = 8$ cm y $AD = 16$ cm. La plegamos de manera que el vértice $D$ coincida con el $B$, como muestra la figura. Calcula la longitud del segmento $MN$.



## XIX Concurso Intercentros

**1.** En un tablero de ajedrez de $8 \times 8$ colocamos números siguiendo las siguientes reglas:

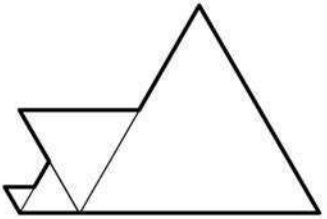
- En las casillas blancas se escribe un 0 o un 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con ceros que con unos.
- En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.

Una vez relleno hacemos la suma de todos los números que hay escritos en el tablero. ¿Cuál es la diferencia entre el menor y el mayor valor que podemos obtener para esa suma?

**2.** A un concierto benéfico acudieron 2 000 personas. Cada una pagó por su entrada una cantidad entera entre 1 y 500 euros (ambos inclusive).
Al hacer caja se observó que se habían vendido entradas de todos los precios posibles, que ningún precio se repitió más de 10 veces y que, con esas condiciones, la recaudación fue la mínima posible.
¿Cuántas entradas de cada precio se vendieron?

**3.** Si $20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^9 \cdot 2^n$, ¿cuánto vale $n$?

**4.** Partiendo de un triangulito equilátero de 1 cm de lado, y añadiendo otros cuatro triángulos equiláteros tales que los lados de uno miden el doble que los del anterior hemos formado esta figura. Si continuamos hasta poner 10 triángulos, ¿cuál será el perímetro de la figura resultante? Encuentra una fórmula que te permita calcular el perímetro para $n$ triángulos.

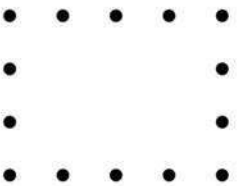


## XIX Concurso Intercentros

**PRUEBA INDIVIDUAL** **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

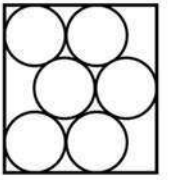
**1.** Dentro de un año la edad de Alberto será el doble que la edad de Bea. Dentro de unos años, cuando yo tenga 66 años, la suma de las edades de Alberto y Bea también será 66. Dentro de 6 años mi edad será un múltiplo de la suma de las edades de Alberto y Bea. ¿Cuántos años tengo hoy?

**2.** Estás viendo algunos puntos formando un rectángulo. Usando esos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos podemos formar?



**3.** Hemos metido en una caja 100 tarjetas numeradas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puedo elegir para asegurarme de que entre las que elijo no hay ninguna que sea el doble de otra?

**4.** Los seis círculos de la figura tienen un radio de 5 cm y, como ves, son tangentes entre sí y también a los lados de un rectángulo.
¿Cuánto miden los lados del rectángulo?



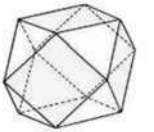
XIX Concurso Intercentros

**PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato** (90 minutos)

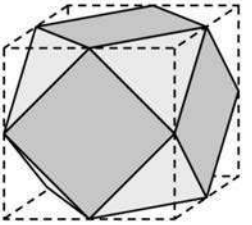
**1.** Tres amigos tienen que sembrar un huerto y atacan juntos esta tarea. Primero empiezan Don Retorcido y la niña Centésima y entre los dos plantan la mitad del huerto. Después Don Retorcido se pone a descansar y continúan con la tarea la niña Centésima y Comenúmeros. Al terminar Don Retorcido apunta "es curioso, de esta manera hemos tardado el doble de tiempo que si hubiéramos trabajado los tres juntos desde el principio". Si en plantar una semilla Don Retorcido emplea 2 segundos y Comenúmeros emplea 5 segundos, ¿cuántos segundos emplea la niña Centésima en plantar una semilla?

**2.** Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y $g(x) = 2x - 3$ calcula el valor de $\left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(2)$.

**3.** El *cuboctaedro* es un poliedro arquimediano o poliedro semirregular cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados. Se obtiene truncando un cubo por los vértices.



Calcula la superficie del cuboctaedro que se obtiene truncando un cubo de volumen de 64 $cm^3$.



**4.** En una bolsa hay bolas blancas y negras. Si quitamos 15 bolas blancas el porcentaje de bolas blancas disminuye un 3 % y si aumentamos 10 bolas negras el porcentaje de bolas blancas disminuye un 5 %. ¿Cuántas bolas de cada clase hay en la bolsa?

XIX Concurso Intercentros

## PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

**1º y 2º de ESO.-**

Empieza aquí

**1A.-** En un curso de inglés se inscribieron 30 personas.
La media de edad de todos los inscritos es 21. La media de edad de los chicos es 25 y la de las chicas es 20.
¿Cuántos de los inscritos son hombres?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1B.-** Sea "$T$" la respuesta del problema 2B

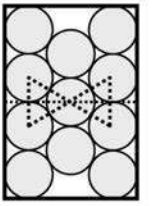
A la fiesta de la geometría acudieron $2 \cdot T$ invitados entre puntos y rectas. El primer punto bailó con 8 rectas; el siguiente punto bailó con 10 rectas; el siguiente con 12; y así sucesivamente hasta que el último punto bailó con todas las rectas.
¿Cuántas rectas fueron a la fiesta de la geometría?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)**

**1C.-** Sea "$T$" la respuesta del problema 2C.

Disponemos de 11 balones de minibasket de $\frac{T}{2}$ cm de diámetro que queremos guardar en una caja de $\frac{T}{2}$ cm de alta y $2T$ cm de larga.

Calcula el ancho de la caja más pequeña en la que caben los 11 balones.



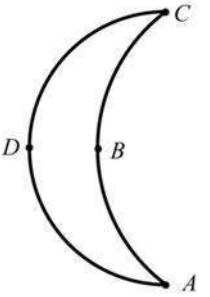
**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**3º y 4º de ESO.-**

.

**2A.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 3A.

En la luna de la figura *ADC* es una semicircunferencia de radio *T* y *ABC* es un cuarto de circunferencia. ¿Cuál es el área de la luna?




**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

**➲2B.-** Empieza aquí ¿Cuánto suman las cifras del número A?

$$A = 7665667^2 - 7665662^2$$

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

**2C.-** Sea "*T*" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del cuadrilátero limitado por las gráficas de estas cuatro funciones

$$y = x - 7\,, \quad y = -x - 1\,, \quad y = T + 2(6 - x)\,, \quad y = 2x - 4$$

Nota. Es aconsejable representar gráficamente las funciones.

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)**

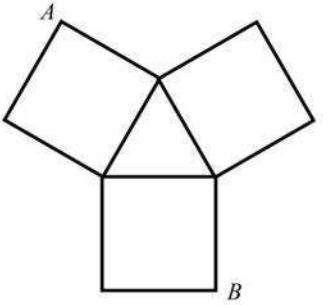
## XIX Concurso Intercentros

**Bachillerato.-**

**3A.-** Sea "$T$" la respuesta del problema 1A.

En la figura ves un triángulo equilátero de lado $T$ con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Expresa la longitud del segmento $AB$ en la forma $a+b\sqrt{c}$ con $a$, $b$, $c$ enteros y $c$ el menor posible.

¿Cuánto vale $\dfrac{a+b+c}{3}$ ?




**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

**3B.-** Sea "$T$" la respuesta del problema 1B

Cuando todos partieron por la mañana al gran picnic anual, cada minibús llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad de camino se rompieron $T-52$ minibuses, de modo que cada minibús debió llevar una persona más. Cuando volvían a casa se estropearon $T-47$ minibuses más, así que en el camino de regreso había en cada minibús 3 personas más que al salir por la mañana.
¿Cuántas personas asistieron al gran picnic anual?

**(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**

Empieza aquí ➲ **3C.-** Un cuadrado y un octógono regular tienen la misma apotema. Si el perímetro del cuadrado es $4+4\sqrt{2}$ , ¿cuál es el perímetro del octógono?

**(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)**

LVI Olimpiada Matemática

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE CERO: viernes 26 de octubre de 2019**

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos; cada respuesta en blanco 1 punto, y cada respuesta errónea, 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

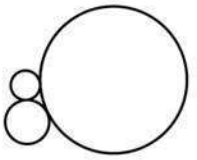
1. Un grupo de 25 estudiantes se presenta a una prueba en la que pueden obtener una nota entera desde 0 hasta 100. ¿Cuál puede ser la máxima diferencia entre la nota media y la mediana de este grupo de estudiantes?

   A) 48 B) 50 C) 40 D) 52 E) 60

2. Los números enteros positivos 30, 72, y $N$ tienen la propiedad de que el producto de dos cualesquiera de ellos es divisible entre el tercero. ¿Cuál es el menor valor posible de $N$?

   A) 120 B) 180 C) 30 D) 60 E)10

3. He dibujado tres circunferencias (de radios 2, 3 y 10 cm) tangentes entre sí como ves en el dibujo. ¿Cuál es elárea, en $cm^2$, del triángulo cuyos vértices son los centros de las circunferencias?



   A) 28 B) 20,5 C) 10 D) 15
   E) 30

4. Un número $n$ de cuatro cifras es capicúa. También es capicúa el número $n + 312$, que tiene cinco cifras. ¿Cuál es la suma de las cifras de $n$?

   A) 18 B) 14 C) 32 D) 33 E) 34

5. En la sucesión $a_1$, 6, $a_3$, …, la suma de cuatro términos consecutivos es constante, y también es constante la diferencia –el mayor menos el menor– de dos términos consecutivos cualesquiera. Sabiendo además que $a_1 < a_2 = 6 < a_3$, ¿cuánto vale la suma de los 2019 primeros términos de la sucesión?

   A) 2019 B) 2020 C) 4038 D) 12 114 E) 12 120

6. ¿Para qué valores del número real $k$ la ecuación $x^2 + k\,x + k = 0$ tiene dos soluciones reales de distinto signo?

   A) $0 < k < 1$ B) $k > 4$ C) $k > 0$ D) $k < 0$ E) $k > 1$

## LVI Olimpiada Matemática

7. En un pentágono regular *ABCDE* de lado 1, las diagonales *AC* y *BE* se cortan en *P*. ¿Cuánto mide el segmento *PC*?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\sqrt{5}-1$ D) $4\left(\sqrt{5}-2\right)$ E) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

8. ¿Cuántos subconjuntos *A* del conjunto *B* = {1, 2, 3, …, 19, 20} cumplen que:

[número de elementos de *A*] × [máximo elemento de *A*] = 18?

A) 380 B) 20 C) 3 D) 190 E) 19

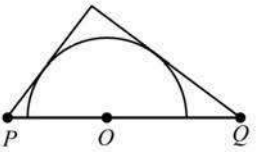
9. Los dos lados opuestos de un cuadrado aumentan su longitud en un 25%. ¿En qué porcentaje deben disminuir los otros dos lados para que el área del rectángulo resultante sea la misma que la del cuadrado inicial?

A) 20% B) 22,5% C) 25% D) 40% E) 42%

10. Un polinomio $P(x)$ cumple que $P(x^2+1)=x^4-2x^2+1$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es igual a $P(x^2+2)$?

A) $x^4-4x^2+2$ B) $x^4-2x^2$ C) $x^4-4x^2+1$ D) $x^4$
E) $x^4-2x^2+2$

11. En el dibujo mostramos un triángulo rectángulo de hipotenusa *PQ* en el que hay inscrita una semicircunferencia de radio 12 cm y centro *O*. Si *PO* mide 15 cm, ¿cuántos cm mide *OQ*?




A) 24 B) 20 C) 25 D) 22,5 E) 18

12. Si el número $N=99\ldots99$ está formado exclusivamente por 99 nueves, ¿cuánto suman las cifras del número $N^2$?

A) 1782 B) 900 C) 891 D) 899 E) 990

13. La suma de un número más su inverso es 7. ¿Cuánto vale la suma del cubo de dicho número más el inverso de su cubo?

A) 322 B) 700 C) 343 D) 294 E) 336

14. De cierta función *f* sabemos que $f(1)=4$ y que $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ para todos los reales *x*, *y*. ¿Cuál es el valor de $f(3)$?

A) 194 B) 160 C) 52 D) 48 E) 62

15. En el cuadrilátero *ABCD*, *AB* = 24, *BC* = 20, *CD* = 15, *DA* = 7 y la diagonal *BD* mide 25. ¿Cuánto mide la diagonal *AC*?

A) 18 B) $14\sqrt{2}$ C) 20 D) 21 E) 24

16. Si $n=\sqrt{120-\sqrt{x}}$ es entero, ¿cuántos valores puede tomar $x$?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 10 E) 11

17. Si los términos 5º y 8º de una progresión geométrica son 7! y 8!, ¿cuál es el primer término de esa progresión?

A) 60 B) 75 C) 120 D) 225 E) 315

18. El lado del cuadrado *LUCA* es 20. En el interior de *LUCA* tomamos un punto *P* de modo que el triángulo *PUC* sea equilátero. Si $LP^2=a-b\sqrt{3}$ con $a$ y $b$ enteros, ¿Cuál es el valor de $b$?

A) 350 B) 400 C) 450 D) 500 E) 625

19. Los números *retorcidos* son enteros positivos múltiplos de 4, y tales que al sumarles 1, el nuevo número es múltiplo de 5, y al sumarles 2 lo es de 6. ¿Cuántos números *retorcidos* son menores que 2019?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 33 E) 34

20. En la celda central de un tablero 5 × 5 colocamos una ficha. Un movimiento de la ficha consiste en desplazarla a una celda con la que comparta un vértice. Tras realizar al azar 12 movimientos, ¿cuál es la probabilidad de llegar a una de las esquinas del tablero?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{25}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{13}$ E) $\frac{1}{4}$

21. Para cuántos enteros $n$ positivos se consigue que $n^2+18n$ sea un cuadrado perfecto?

A) Uno B) Dos C) Tres D) Cuatro E) Ninguno

22. Pensemos ahora en números naturales con la siguiente propiedad: la suma de sus cuatro divisores es 42. ¿Cuántos números cumplen esta propiedad?

A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

23. Tengo una bolsa llena de canicas idénticas. La suma de los pesos de todas las parejas posibles es 630 gramos. La suma de los pesos de todas las ternas posibles es 4095 gramos. ¿Cuántos gramos pesa cada canica?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24. El triángulo *ABC* es isósceles, con $AB = AC$. La bisectriz interior del ángulo *ABC* corta al lado *AC* en el punto *P*. Si la circunferencia circunscrita al triángulo *BPC* pasa por el punto medio de *AB*, el ángulo *BAC* mide…

A) 30º B) 45º C) 60º D) 90º E) 105º

## LVI Olimpiada Matemática

25. En una urna hay tres bolas numeradas con los números 1, 2 y 3. Sacamos una al azar, anotamos el número y la devolvemos a la urna. Volvemos a realizar este proceso dos veces más y al finalizar sumamos los tres números obtenidos, que resulta ser 6. ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido la bola del número 2 en las tres ocasiones?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{27}$

26. Si $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ y $x^2 \neq 1$, entonces $f(-x)$ es igual a:

A) $\frac{1}{f(x)}$ B) $-f(x)$ C) $f(x)$ D) $-\frac{1}{f(x)}$ E) $1-\frac{1}{f(x)}$

27. Dos rectas con pendientes $\frac{1}{2}$ y 2 se cortan se cortan en el punto $P(2,2)$. El área del triángulo determinado por estas dos rectas y la que tiene de ecuación $x+y=10$ es:

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 6 D) 8 E) $6\sqrt{2}$

28. Si $n$ es un entero positivo tal que $(n+1)!+(n+2)!=n!\cdot 440$, la suma de las cifras de $n$ es:

A) 3 B) 5 C) 6 D) 10 E) 11

29. Del triángulo $ABC$ sabemos que $AB = AC$ y que el ángulo desigual mide 40º. Si la altura trazada desde $C$ corta a su base $AB$ en el punto $D$ con $BD \cdot BA = 32$ cm, ¿qué longitud, en cm, tiene el lado $BC$?

A) 8 B) $4\sqrt{2}$ C) 4 D) 6 E) 10

30. Don Retorcido ha dibujado veinte puntos en una circunferencia, todos ellos igualmente espaciados. Y se despide con esta pregunta: ¿cuántos puntos como mínimo tienes que elegir al azar para asegurarte de que cuatro de ellos serán vértices de un rectángulo?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 11 E) 16

LVI Olimpiada Matemática

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**Comunidad de Madrid**

**FASE LOCAL:** segunda prueba. 14 de diciembre de 2019
Tiempo: 3h 30 min

**1.** El paralelogramo $ABCD$ tiene área 192. Llamamos $M$ y $N$ a los puntos medios de los lados $AD$ y $BC$, respectivamente. La recta $DN$ corta a la prolongación de $AB$ en el punto $P$. La recta $DN$ corta a la prolongación de $AB$ en el punto $Q$. Si $CP$ y $DQ$ se cortan en $O$, calcula el área del triángulo $OPQ$.

**2.** Consideramos la sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y para $n \geq 1$, $a_{n+2} = a_n^2 + a_{n+1}^2$.

¿Cuál es la cifra de las unidades de $a_{2019}$?

**3.** Si $\frac{2}{35} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ con $x \neq y$ enteros positivos, encuentra el menor valor posible de $x + y$.

**4.** Tenemos 20 tarjetas, numeradas desde el 1 hasta el 20. Jimena elige al azar una de ellas, con el número $j$. A continuación, Álvaro *el.ige* al azar otra tarjeta, que tiene el número $a$. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia $a - j$ sea al menos 2?
(Expresa el resultado en forma de fracción irreducible).

**5.** Si $a$ y $b$ son números reales diferentes, con $a \geq 0$, $b \geq 0$ y verificando $a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a}$, ¿Cuál es el valor mayor que puede tomar la suma $a + b$?

**6.** ¿Cuál es el menor entero $n > 1$ tal que el producto de todos sus divisores positivos es $n^4$?

**7.** Las medidas de los lados del triángulo escaleno $ABC$ son números enteros y su perímetro es 2019. La bisectriz de $\angle C$ corta a $AB$ en $D$, con $AD = 229$. Si las medidas de $AC$ y $AD$ son enteros primos entre sí, calcula $BC$.

**8.** Gabriel ha olvidado el código de seguridad de su teléfono, aunque recuerda que sus cuatro cifras sumaban por lo menos 8, que la primera estaba entre 0 y 6, la segunda entre 0 y 3, la tercera entre 0 y 4 y la cuarta entre 0 y 2, siempre con los extremos incluidos. ¿Cuántos son los posibles códigos del teléfono de Gabriel?

**9.** Diremos que un entero positivo $n$ es *genial* si cumple simultáneamente las condiciones siguientes: ninguna de sus cifras es 0; $n$ es múltiplo de 11; $n$ es múltiplo de 12 y cualquiera de los números que obtenemos al permutar las cifras de $n$ sigue siendo múltiplo de 12. ¿Cuántos números *geniales* de diez cifras hay?

**10.** El área del triángulo $ABC$ es 300. Sea $Q$ el punto medio de $BC$, $P$ un punto de AC con $CP = 3PA$, y $R$ un punto en $AB$ tal que el área de $\Delta PQR$ es el doble del área de $\Delta RBQ$. Determina el área de $\Delta PQR$.

## LVI Olimpiada Matemática

# LVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

### Prueba de selección
### Comunidad de Madrid

**Primera sesión, viernes tarde 17 de enero de 2020**

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas.

1. Consideramos el polinomio $p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$. Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solamente .si $a = b = c$.

2. El triángulo $ABC$ es acutángulo. La altura correspondiente al vértice $C$ corta al lado opuesto $AB$ en el punto $D$. Sea $\Gamma$ la circunferencia circunscrita a $\Delta ABC$, y sean $t_A$ y $t_B$ las tangentes a $\Gamma$ en los puntos $A$ y $B$ respectivamente. Los puntos $E$ y $F$ están en las rectas $t_A$ y $t_B$, respectivamente, y son tales que $CE$ es perpendicular a $t_A$ y $CF$ es perpendicular a $t_B$. Demostrar que $\dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CF}{CD}$.

3. En cierta olimpiada de matemáticas, consistente en la resolución de cinco problemas, participaron varios estudiantes. Ninguno de ellos resolvió los cinco problemas, pero cada estudiante resolvió al menos dos. Se sabe además que cada par de problemas propuestos fue resuelto por dos estudiantes exactamente. Determinar el mínimo número de estudiantes que participaron en esa olimpiada.

**Segunda sesión, Sábado 18 de enero de 2020**
Tiempo: 3 horas

4. Ana y Bernardo juegan al siguiente juego. Se empieza con una bolsa que contiene $n \geq 1$ piedras. En turnos sucesivos y empezando por Ana, cada jugador puede hacer los siguientes movimientos: si el número de piedras en la bolsa es par, el jugador puede coger una sola piedra o la mitad de las piedras. Si el número de piedras en la bolsa es impar, tiene que coger una sola piedra. El objetivo del juego es coger la última piedra. Determinar para qué valores de n Ana tiene una estrategia ganadora.

5. Determinar para qué valores de $n$ existe un polígono convexo de $n$ lados cuyos ángulos internos, expresados en grados, son todos enteros, están en progresión aritmética y no son todos iguales

.

6. Sea O un punto interior del triángulo $ABC$ y sean $M$, $N$ y $P$ las intersecciones de $AO$ con $BC$, $BO$ con $CA$ y $CO$ con $AB$, respectivamente. Demostrar que entre los seis triángulos que se forman, hay al menos dos cuya área es menor o igual que $[ABC] = 6$.
Observación: $[ABC]$ denota el área del triángulo $ABC$.

# XXVª OLIMPIADA de MAYO
## Mayo de 2019

Olimpíada de Mayo
*Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática*

Duración de la prueba: 3 horas
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo

## Primer Nivel

### PROBLEMA 1

Hallar todos los números de dos dígitos $\overline{ab}$ que elevados al cuadrado dan un resultado donde los dos últimos dígitos son $\overline{ab}$

### PROBLEMA 2

En un torneo de ajedrez participaron más de cinco competidores. Cada competidor jugó exactamente una vez contra cada uno de los otros competidores. Cinco de los competidores perdieron cada uno exactamente dos juegos. Todos los demás competidores ganaron, cada uno, exactamente tres juegos. No hubo empates en el torneo. Determinar cuantos competidores hubo y mostrar un torneo que verifique todas las condiciones.

### PROBLEMA 3

Gus tiene que hacer una lista de 250 números enteros positivos, no necesariamente distintos, tal que cada número sea igual a la cantidad de números de la lista que son distintos de él. Por ejemplo, si 15 es un número de la lista entonces la lista contiene 15números distintos de 15.
Determinar la máxima cantidad de números distintos que puede contener la lista de Gus.

### PROBLEMA 4

Hay que dividir un papel cuadrado en tres partes mediante dos cortes rectos, de modo que al ubicar estas partes de forma adecuada, sin huecos ni superposiciones, se forme un triángulo obtusángulo. Indicar cómo cortar el cuadrado y cómo armar el triángulo con las tres partes.
**Nota.** Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos mide más de 90º.

### PROBLEMA 5

Se tiene un tablero de tres filas y 2019 columnas. En la primera fila están escritos los números enteros de 1 a 2019 inclusive, ordenados de menor a mayor. En la segunda fila, Ana escribe esos mismos números pero ordenados a su elección. En cada casilla de la tercera fila se escribe la diferencia entre los dos números ya escritos en su misma columna

XXV Olimpiada Mayo

(el mayor menos el menor). Beto tiene que pintar algunos números de la tercera fila de manera que la suma de los números pintados sea igual a la suma de los números de esa fila que quedaron sin pintar. ¿Puede Ana completar la segunda fila de manera que Beto no logre su objetivo?

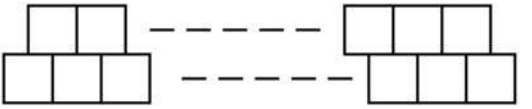
# Segundo Nivel

## PROBLEMA 1

Un entero positivo es *piola* si los 9 restos que se obtienen al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 son todos diferentes y distintos de cero.
¿Cuántos enteros piolas hay entre 1 y 100 000?

## PROBLEMA 2

Se tiene un tablero con 2020 casillas en la fila inferior y 2019 en la superior, ubicadas como se muestra en la figura.



En la fila inferior se colocan los números enteros del 1 al 2020 en algún orden. Luego en cada casilla de la fila superior se anota la multiplicación de los dos números que tiene debajo. ¿Cómo se pueden colocar los números en la fila inferior para que la suma de los números de la fila superior sea la menor posible?

## PROBLEMA 3

En los lados $AB$, $BC$ y $CA$ de un triángulo $ABC$ se ubican los puntos $P$, $Q$ y $R$ respectivamente, tales que $BQ = 2QC$, $CR = 2RA$ y $P\hat{R}Q = 90^\circ$. Demostrar que $A\hat{P}R = R\hat{P}Q$

## PROBLEMA 4

Encontrar el menor número entero positivo $N$ de dos o más dígitos que tiene la siguiente propiedad: Si insertamos cualquier dígito no nulo $d$ entre cualesquiera dos dígitos adyacentes de $N$ obtenemos un número que es múltiplo de $d$.

## PROBLEMA 5

Consideramos los $n$ vértices de un polígono regular de $n$ lados. Se tiene un conjunto de triángulos con vértices en estos $n$ puntos con la propiedad que para cada triángulo del conjunto, al menos uno de sus lados no es lado de ningún otro triángulo del conjunto. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos que puede tener el conjunto?

# XXVª OLIMPIADA DE MAYO 2019
# RESULTADOS DE ESPAÑA

**PRIMER NIVEL**

| | Apellidos y nombre | Premio |
|---|---|---|
| 1 | Diego López Aragón | ORO |
| 2 | Jesús Gil Arce | PLATA |
| 3 | Carlos Leather Galera | PLATA |
| 4 | Isis Lurueña Barbero | BRONCE |
| 5 | Carla Balonga Villate | BRONCE |
| 6 | Enrique Ortiz Gilarranz | BRONCE |
| 7 | Gonzalo Pajares Sánchez | BRONCE |
| 8 | Luis Blázquez Nuño | MENCIÓN |
| 9 | David Tarí Ferreiro | MENCIÓN |
| 10 | Juan Burgos Pino | MENCIÓN |

**SEGUNDO NIVEL**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Niko González Vilaró | PLATA |
| 2 | Clemente Contreras | PLATA |
| 3 | Nicolás Merenciano Esteve | PLATA |
| 4 | Luis Noguera Caro | BRONCE |
| 5 | Nicolás Iserte Tarazón | BRONCE |
| 6 | Félix García Taboada | BRONCE |
| 7 | Miguel Díez Navarro | BRONCE |
| 8 | Héctor Cintado Peiró | MENCIÓN |
| 9 | Pedro Alejandro López Octavio | MENCIÓN |
| 10 | Álvaro Gamboa Rodríguez | MENCIÓN |

# XXIV Concurso de Primavera de Matemáticas

# 2020

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

Comunidad de Madrid

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

sm

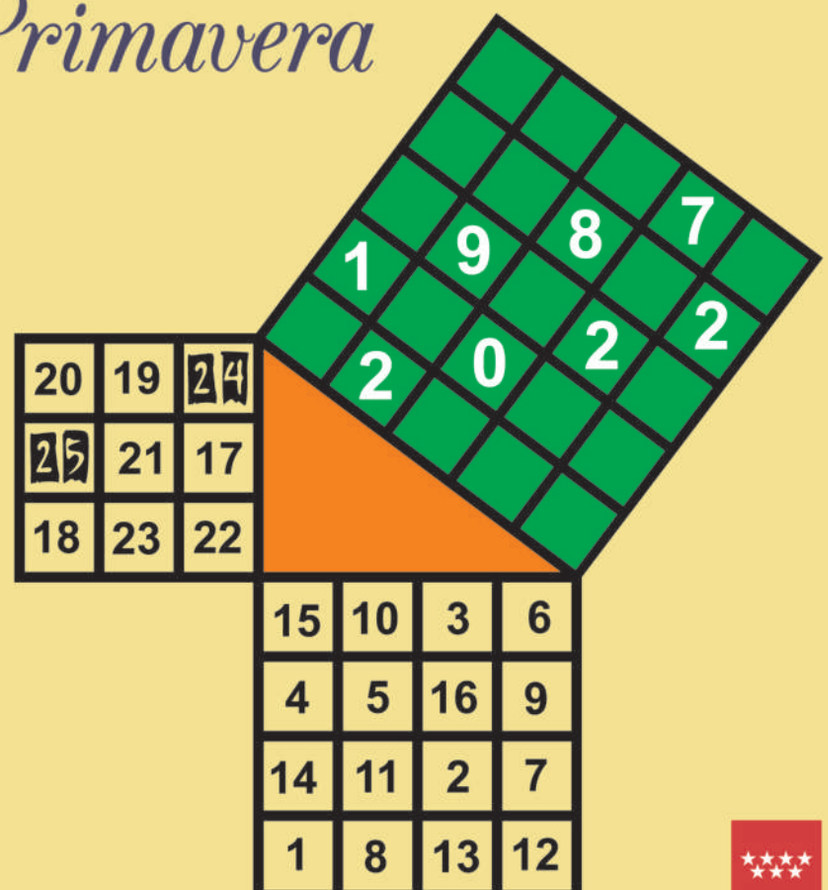
ANAYA

Smartick

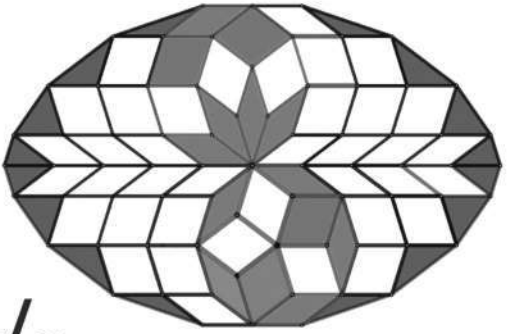
Mc Graw Hill Education

25 años Concurso de Primavera

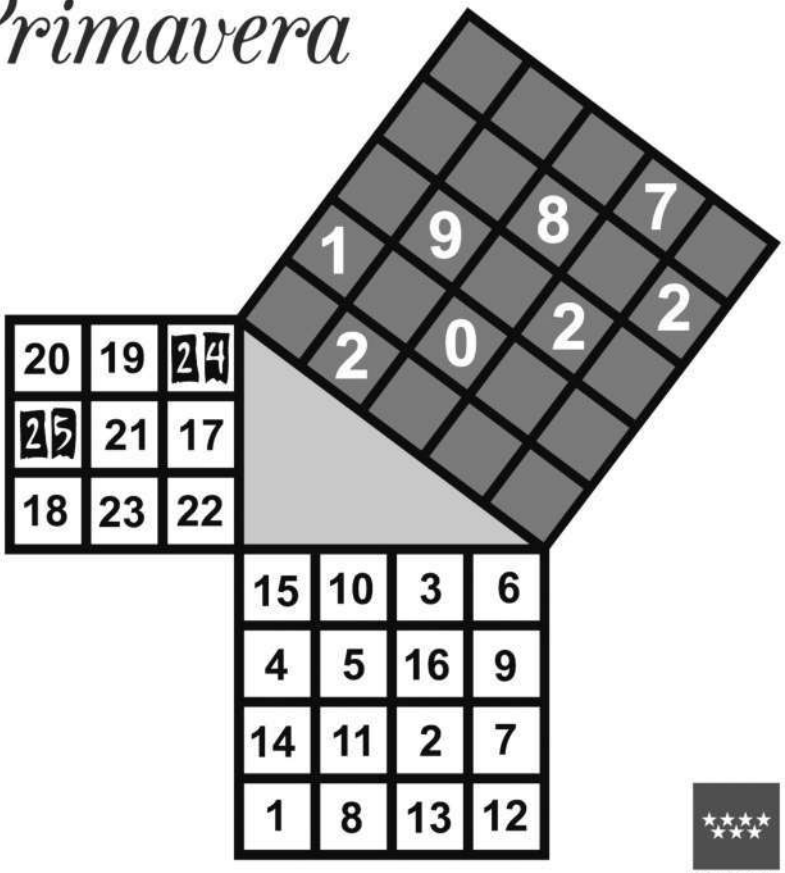
# 25 años Concurso de Primavera




Comunidad de Madrid



# 25 años Concurso de Primavera




Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

*Alzola Bujarrabal, Belén*
*Baeza Alba, Miguel Ángel*
*Benito Miguel, Isabel*
*Castrillón López, Marco*
*Donaire Moreno, Juan Jesús*
*Esteban García, María*
*Ferrero de Pablo, Luis*
*García Gual, Jesús*
*Gaspar Alonso-Vega, María*
*González Ortega, Jorge*
*Hernández Gómez, Joaquín* ♥
♥ *López Álvarez, Francisco*
*Martínez Dalmau, Pablo*
*Martínez Sanz, Alfredo*
*Montero Estravís, Xiomara*
*Moreno Warleta, María*
*Ramírez Carrillo, Carlos*
*Sánchez Benito, Merche*
*Sánchez González, Víctor Manuel*
*Serrano Marugán, Esteban*
*Soler Areta, Javier*
*Tomé Grasa, Roberto*

**Edita:**
Asociación Matemática Concurso de Primavera

**ISBN:**
978-84-606-5943-3

**Deposito Legal:**
M-9975-2022

[espejismo matemático]

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

## Así que han pasado veinticinco años ...

En 2021 se cumplieron 25 años desde el inicio en 1987 del I Concurso de Primavera. La pandemia hizo que la edición de 2020 se quedara a medias y nos ha dejado sin la del 2021 (si bien es cierto que en ese tiempo hemos celebrado pruebas online, que se han ofrecido a los centros escolares para su uso y disfrute).

Hemos recobrado el pulso en este año 2022, que debería nominarse XXVI Concurso de Primavera y que acabará siendo el XXV (lo mismo pasó con Luis XVII de Francia, que se terminó llamando XVIII). Así son los números, a veces caprichosos, pero siempre eficaces.

Era nuestra intención, ya hace tiempo, sacar un libro recopilando los mejores problemas (según nuestro juicio) de cada edición y nivel. Hemos puesto más cuidado en la redacción de enunciados, soluciones y también en sus ilustraciones.

Esperamos que el libro sea lanza de escuderos y espejo de caminantes para todos aquellos que un día salieron en busca de la aventura matemática.

El Comité Organizador

**AGRADECMIENTOS a**

Los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores

Los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase

La Facultad de Matemáticas de la UCM

El vicerrectorado de alumnos de la UCM

La Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

Grupo **ANAYA**
Ediciones **SM**
**Mc GRAW- HILL** Education
**Smartick**

# ÍNDICE

## ENUNCIADOS

Nivel I ..... 9
Nivel II ..... 21
Nivel III ..... 33
Nivel IV ..... 44

## SOLUCIONES

Nivel I ..... 55
Nivel II ..... 89
Nivel III ..... 114
Nivel IV ..... 143

# Enunciados - Nivel I

**1** **Nivel I** **CP I**

Dos gatos *Mu* y *Mi* cazaron entre los dos sesenta ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

**A)** 2 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 40 **E)** 36

**2** **Nivel I** **CP I**

Antonio, Beatriz, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. Emilio los ve y dice:

– Beatriz está al lado de Carlos.

– Antonio está entre Beatriz y Carlos.

Si las dos afirmaciones son falsas y Beatriz está sentada en la silla nº 3, ¿quién ocupa la silla nº 2?

**A)** Antonio **B)** Beatriz **C)** Carlos **D)** Diana

**E)** No hay información suficiente

**3** **Nivel I** **CP II**

Si el número de primos menores de 50 es exactamente 15, ¿cuántos hay menores que 60?

**A)** 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

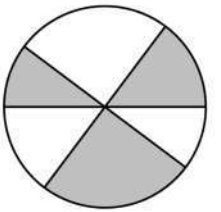
**4** **Nivel I** **CP II**

En un cajón hay tres calcetines blancos, dos negros y cinco rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro de que podemos ponernos dos calcetines del mismo color?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 7

**5** **Nivel I** **CP III**

Si el radio del círculo es 6, el área de la región sombreada es:



**A)** $6\pi$ **B)** $12\pi$ **C)** $18\pi$

**D)** $24\pi$ **E)** $36\pi$

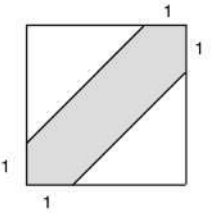
**6** **Nivel I** **CP IV**

Para fabricar un kilo de miel, las abejas hacen 500 000 viajes entre la colmena y las flores. En cada viaje una abeja transporta por término medio 8 mg de néctar. ¿Cuántos kilos de néctar son necesarios para obtener un kilo de miel?

**A)** 4 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 10 **E)** 8

**7** **Nivel I** **CP IV**

¿Cuál es el área de la franja sombreada dentro del cuadrado de lado 4 m?

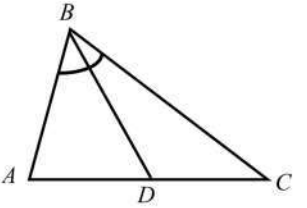



**A)** 6 $m^2$ **B)** 7 $m^2$ **C)** 7,5 $m^2$

**D)** 8 $m^2$ **E)** 8,5 $m^2$

**8** **Nivel I** **CP V**

En el triángulo de la figura, los segmentos $AD$, $BD$ y $DC$ son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$? (Con vértice en $B$).




**A)** 75º **B)** 86º **C)** 90º

**D)** 92º **E)** Falta información

**9** **Nivel I** **CP V**

Si veinte gatos comen veinte ratones en veinte días, ¿cuántos ratones comen diez gatos en diez días?

**A)** 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 4 **E)** Nada de lo anterior

**10** **Nivel I** **CP VI**

Un arquitecto tiene dos planos de un mismo edificio: Uno a escala 1:20 y otro a escala 1:50. ¿Cuál es la longitud de la fachada de un edificio en el plano de escala 1:50 si en el de escala 1:20 es de 20 cm?

**A)** 16 **B)** 8 **C)** 50 **D)** 4 **E)** 12

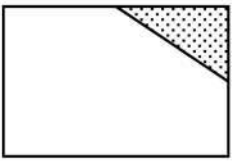
**11** **Nivel I** **CP VI**

Mi reloj se atrasa veinte segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en hora. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

**A)** 2 días **B)** 3 días y 18 horas **C)** 60 horas **D)** 75 horas **E)** 4800 minutos

**12** **Nivel I** **CP VII**

El área de un rectángulo es 1. Quitamos una esquina del rectángulo uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos. ¿Cuál es el área del triángulo que le quitamos?



**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{5}$

**D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{8}$

**13** **Nivel I** **CP VII**

Alba, Benito, Carolina y Diana tienen cada uno un animal; uno de ellos tiene un gato, otro un perro, otro un pez y otro un canario. Benito tiene un animal con pelo, Diana uno de cuatro patas, Carolina tiene un pájaro y a Alba y a Benito no les gustan los gatos. ¿Cuál es la frase falsa?

**A)** Alba tiene un pez **B)** Benito tiene un perro **C)** Carolina tiene un canario

**D)** Diana tiene un gato **E)** Diana tiene un perro

**14** **Nivel I** **CP VIII**

La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es:

**A)** 420 **B)** 610 **C)** 820 **D)** 840 **E)** 4200

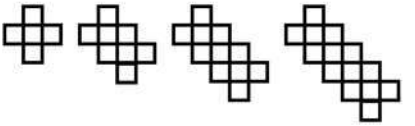
**15** **Nivel I** **CP VIII**

Pedro tiene veinte bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. Diecisiete no son verdes, cinco son rojas y doce no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

## 16 Nivel I — CP IX

En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el décimo lugar?



**A)** 50 **B)** 38 **C)** 32 **D)** 30 **E)** 29

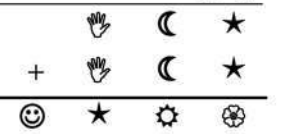
## 17 Nivel I — CP X

El 1 de septiembre de 2005 fue jueves. ¿Qué día de la semana será el 1 de septiembre de 2025?

**A)** domingo **B)** lunes **C)** martes **D)** miércoles **E)** jueves

## 18 Nivel I — CP X

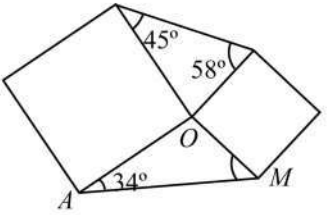
En la siguiente suma cada símbolo representa un dígito diferente.
Si ✋ = 7 y ★ un número par, ¿cuál es el único valor posible para ☾?



**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

## 19 Nivel I — CP XI

La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:




**A)** 43° **B)** 39° **C)** 38° **D)** 36° **E)** 35°

## 20 Nivel I — CP XI

Inicialmente hay un "1" en la pantalla. Al apretar la tecla A se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al apretar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando solo las teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 53. ¿Cuántas veces, como mínimo, debes pulsar las teclas?

**A)** 4 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 53

## 21 Nivel I — CP XII

María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

**A)** 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

## 22 Nivel I — CP XII

Sobre una línea recta hemos marcado cuatro puntos *A, B, C, D*, como indica el dibujo:

La distancia entre *A* y *C* son 12 m; y entre *B* y *D*, 18 m. ¿Qué distancia, en metros, separa los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*?

**A)** 15 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)** 9

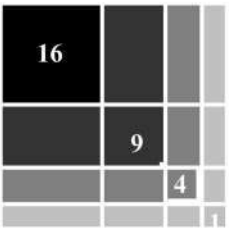
## 23 Nivel I — CP XII

Con sesenta y cuatro cubitos blancos formamos un gran cubo y coloreamos sus caras de rojo. Después volvemos a deshacer el cubo en cubitos. ¿Cuántos cubitos pequeños seguirán teniendo todas sus caras blancas?

**A)** 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** Ninguno

## 24 Nivel I — CP XIII

El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si las áreas de los cuadrados son 16, 9, 4 y 1 $cm^2$, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del cuadrado total?

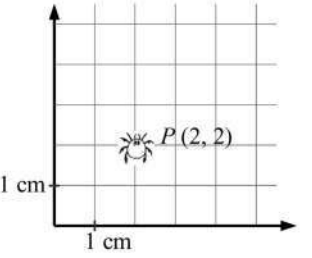



**A)** 100 **B)** 75 **C)** 64 **D)** 36 **E)** 25

.

## 25 Nivel I — CPXIII

Un bichito está en el punto $P(2, 2)$ de unos ejes de coordenadas y comienza a dar saltitos horizontales y verticales de medio centímetro de longitud. Primero da 7 saltos hacia arriba, después 25 hacia la derecha, 5 hacia abajo y 3 hacia la izquierda. ¿En qué punto acaba su recorrido?




**A)** $A(13, 3)$ **B)** $B(3, 13)$ **C)** $C(4, 24)$
**D)** $D(24, 4)$ **E)** $E(3, 12)$

## 26 Nivel I — CP XIV

Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?

**A)** Una **B)** Dos **C)** Tres
**D)** Cuatro **E)** Cinco

## 27 Nivel I — CP XIV

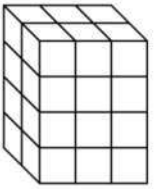
En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con la letra $x$?

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | | |
| | 15 | 3 |
| 12 | | 24 |

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5
**D)** 6 **E)** 7

## 28 Nivel I — CP XV

Con veinticuatro cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura, cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando cuarenta y dos cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del bloque de Santiago?



**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

**29** **Nivel I** **CP XV**

Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.

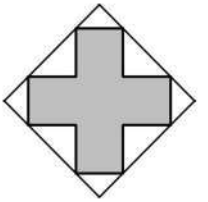
– El Sr. A habla solo español e italiano. – La Sra. B habla solo español e inglés.
– El Sr. C habla solo inglés e italiano. – La Sra. D habla solo francés y español.
– El Sr. E habla solo italiano y francés. – La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos, de manera que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24

**30** **Nivel I** **CP XVI**

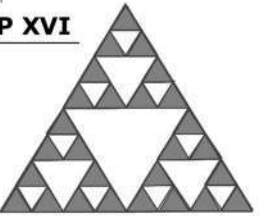
Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del cuadrado?



**A)** 24 **B)** 32 **C)** 36
**D)** 40 **E)** 48

**31** **Nivel I** **CP XVI**

¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?



**A)** $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$
**D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

**32** **Nivel I** **CP XVII**

Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras, pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números, pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?

**A)** 7 **B)** 12 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

## 33 Nivel I — CP XVII

Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

## 34 Nivel I — CP XVIII

Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:

- Adrián y el profesor van discutiendo.
- Javier vive muy cerca del actor.
- Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
- El tenista es más alto que Juan y que el actor.
- Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.

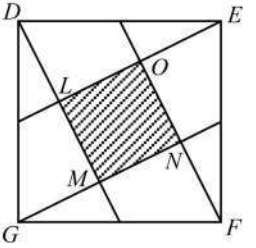
¿Cuál de los amigos es el actor?

**A)** Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan

**E)** No se sabe con certeza

## 35 Nivel I — CP XVIII

En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en $cm^2$?




**A)** 20 **B)** 25 **C)** 35

**D)** 40 **E)** 50

## 36 Nivel I — CP XVIII

Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213…¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

## 37 Nivel I — CP XIX

En una bolsa hay sesenta bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

**A)** 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

## 38 Nivel I — CP XIX

Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos, pero estos son muy astutos y deciden que solo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli." ☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente." ☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve."

**A)** Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

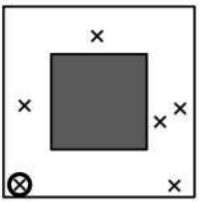
## 39 Nivel I — CP XX

Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

**A)** 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

## 40 Nivel I — CP XX

Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?



**A)** Bea **B)** Carla **C)** Dani
**D)** Emilio **E)** Fani

## 41 Nivel I — CP XX

Hansel y Gretel salieron de casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

**A)** 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

## 42 Nivel I — CP XXI

Este es Osodrilo. La parte Oso duerme de 18:00 a 6:00 y la parte Drilo duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si Drilo duerme, Oso camina hacia el norte a 10 km/h, y si Oso duerme, Drilo camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque.
¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

**A)** 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

## 43 Nivel I — CP XXII

En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

**A)** $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

## 44 Nivel I — CP XXII

Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 777 | 495 | 1000 | 888 |
| 301 | 238 | 658 | 735 |
| 357 | 26 | 764 | 336 |
| 154 | 343 | 922 | 989 |

**A)** ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?
**C)** ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?
**E)** ¿La cifra de las unidades es 8?

## 45 Nivel I — CP XXII

Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N + I + D + O**?

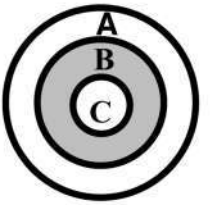
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **A** | **M** | **O** | |
| | **+** | | **A** | |
| **A** | **D** | **A** | **N** | |
| **O** | **N** | **D** | **A** | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **A** | **M** | **O** | |
| | **+** | | **A** | |
| **H** | **A** | **D** | **A** | |
| **M** | **I** | **M** | **O** | |

**A)** 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

## 46 Nivel I — CP XXIII

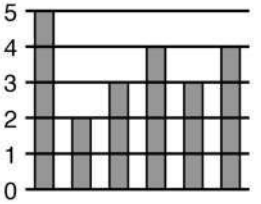
Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?




**A)** 42 **B)** 46 **C)** 48 **D)** 50 **E)** 54

## 47 Nivel I — CP XXIII

En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?




**A)** 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5 **D)** 4,2 **E)** 3

## 48 Nivel I — CP XXIV

Tengo seis monedas. Escogiendo cinco de ellas puedo sumar como máximo 1,50 euros y como mínimo 1,10 euros. ¿Cuánto dinero tengo en total?

**A)** 2,60 € **B)** 1,70 € **C)** 2,20 € **D)** 1,60 € **E)** 1,90 €

## 49 Nivel I — CP XXIV

Estás viendo una tabla de multiplicaciones de números de una cifra {**C**, **A**, **T**, **D**, **O**, **G**}. Si el número 28 está entre las multiplicaciones resultantes, ¿cuánto suman los tres productos que hay en la columna de la **T**?

| | *C* | *A* | *T* |
|---|---|---|---|
| *D* | 3 | | |
| *O* | 18 | | |
| *G* | | 14 | |

**A)** 38 **B)** 52 **C)** 40 **D)** 56 **E)** 36

## 50 Nivel I — CP XXIV

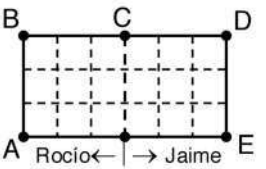
Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene el rectángulo gris?

**A)** 16 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

# Enunciados - Nivel II

**1** **Nivel II** **CP I**

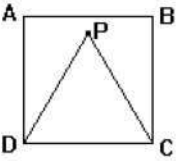
Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, cuando se encuentren por primera vez, el punto más próximo de los indicados será:




**A)** A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

**2** **Nivel II** **CP II**

*ABCD* es un cuadrado y *P* un punto dentro del cuadrado tal que *CDP* es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{B}C$ ?




**A)** 75º **B)** 70º **C)** 60º **D)** 45º

**E)** No hay suficiente información

**3** **Nivel II** **CP III**

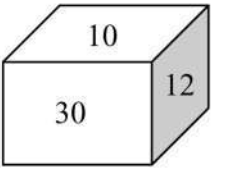
Las catorce cifras de una tarjeta de crédito están escritas en los cuadrados de abajo. Si la suma de tres cifras consecutivas cualesquiera es 20, ¿cuál es el valor de $x$?

| | | | 9 | | | | $x$ | | | | 7 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**4** **Nivel II** **CP III**

Las áreas de tres de las caras de esta caja en forma de paralelepípedo son 10, 12 y 30 $cm^2$. ¿Cuál es, en $cm^3$, el volumen de la caja?

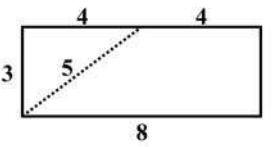



**A)** 60 **B)** 52 **C)** 3600

**D)** 300 **E)** 120

**5** **Nivel II** **CP IV**

Cortamos un rectángulo de 3 × 8 en dos piezas, como se indica en la figura, y las recolocamos para formar un triángulo rectángulo con los dos trozos. Uno de los lados de este triángulo resultante mide:




**A)** 9 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 5

**6** **Nivel II** **CP IV**

¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

**A)** 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

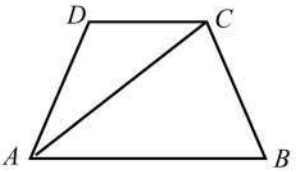
**7** **Nivel II** **CP V**

¿Para cuántos enteros positivos $n$ es verdadero que $\frac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**8** **Nivel II** **CP V**

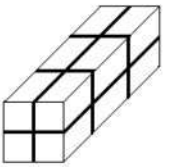
En el trapecio de la figura nos dicen que $AD = DC = CB$ y que $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{D}$?




**A)** 108º **B)** 120º **C)** 130º
**D)** 150º **E)** Faltan datos

**9** **Nivel II** **CP VI**

Una caja está cerrada con una cinta adhesiva como indica la figura. Si las dimensiones de la caja son 10 × 10 × 30 cm, ¿cuántos cm de cinta adhesiva hemos gastado?



**A)** 200 **B)** 240 **C)** 250
**D)** 260 **E)** 300

**10 Nivel II** **CP VI**

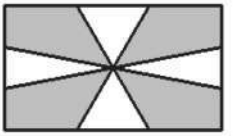
Tenemos tres cajas, una blanca, una amarilla y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y una peonza. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la amarilla a la derecha de la canica. Si la peonza está en la caja que está a la derecha de la amarilla, ¿en qué caja está la moneda?

**A)** En la amarilla **B)** En la verde **C)** En la blanca

**D)** Faltan datos **E)** Los datos son contradictorios

**11 Nivel II** **CP VI**

La bandera de la figura se usa en los barcos. Los lados del rectángulo están divididos en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre la parte blanca y la parte sombreada?



**A)** 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$

**D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**12 Nivel II** **CP VII**

Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en14789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

**A)** 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

**13 Nivel II** **CP VII**

Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

**A)** $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{11}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

**14 Nivel II** **CP VIII**

En una tienda nos venden discos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 discos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 discos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

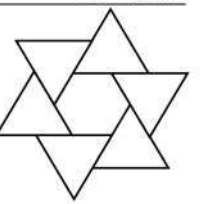
**A)** Cuestan más los discos **B)** Cuestan más los comics

**C)** Un disco cuesta menos de 3 euros **D)** Un comic y un disco cuestan 4 euros

**E)** Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

## 15 Nivel II — CP VIII

El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?



**A)** $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

## 16 Nivel II — CP IX

En una encuesta, cuatro de cada cinco personas responden que les gusta el cine, una de cada cuatro que les gusta el teatro, y sólo al 10% les gusta el cine y el teatro. ¿A qué proporción no les gusta ninguno de los dos espectáculos?

**A)** $\frac{1}{15}$ **B)** $\frac{4}{75}$ **C)** 1 % **D)** 5 % **E)** $\frac{1}{12}$

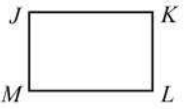
## 17 Nivel II — CP IX

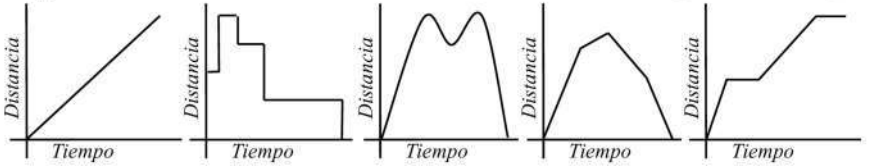
El camino desde la casa de Alicia a la de su amiga Sara tiene 57 árboles. Un día que Alicia va a ver a Sara, marca con un lazo rojo (empezando por el primero) un árbol sí y uno no. A la vuelta, marca (empezando también por el primero) uno sí y dos no. Como es lógico, en algún árbol quedarán dos lazos, pero, ¿cuántos no tendrán ninguno?

**A)** 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

## 18 Nivel II — CP X

María sale a correr desde la esquina $J$ del campo rectangular $JKLM$ yendo en este sentido: $J$ - $K$ - $L$ - $M$ - $J$ -... ¿Qué gráfica de las siguientes representa la distancia en cada instante al punto de partida?




**A)** **B)** **C)** **D)** **E)**

**19** **Nivel II** **CP XI**

Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: "Ayer me tocó mentir" dijo Zipi. "Pues a mí también me tocó mentir" dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?

**A)** Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

**20** **Nivel II** **CP XII**

El número $m$ verifica que cada pareja de los números 24, 42 y $m$ tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y $m$ tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Qué número es $m$?

**A)** 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30

**21** **Nivel II** **CP XII**

En esta multiplicación PQRS es un número de cuatro cifras diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

**A)** P = 1 **B)** Q = 0 **C)** R = 7
**D)** S = 9 **E)** PQRS es divisible por 9

$$\begin{array}{cccc} P & Q & R & S \\ & & \times & 9 \\ \hline S & R & Q & P \end{array}$$

**22** **Nivel II** **CP XIII**

A la fiesta de los amigos del tres han acudido los primeros catorce múltiplos de tres: 3, 6, 9,… Juegan a formar parejas que sumen un cuadrado perfecto y consiguen emparejarse todos los asistentes menos dos. ¿Cuánto suman esos dos números que no pudieron emparejarse?

**A)** 75 **B)** 54 **C)** 33 **D)** 30 **E)** 27

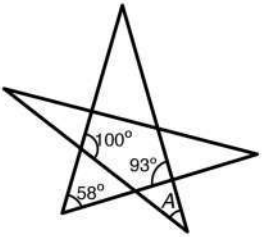
**23** **Nivel II** **CP XIII**

Don Retorcido nos ha pedido que averigüemos en qué cifra termina el producto de estas potencias: $2^{?} \cdot 6^{?} \cdot 9^{?} \cdot 11^{?}$. Nos ha dicho que el exponente del 2 es 2009; el exponente del 6 es el número de pie que calza; el exponente del 9 es un número grandísimo que acaba en 5; y el exponente del 11 es igual al año de su nacimiento. ¿En qué cifra acaba dicho producto?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

## 24 Nivel II — CP XIV

Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo $A$?




**A)** 35° **B)** 42° **C)** 51° **D)** 65° **E)** 109°

## 25 Nivel II — CP XIV

Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

**A)** 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

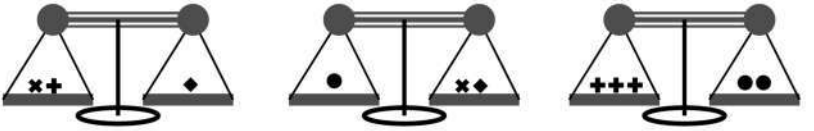
## 26 Nivel II — CP XIV

En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

**A)** 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

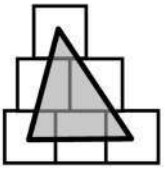
## 27 Nivel II — CP XV

Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

## 28 Nivel II — CP XV



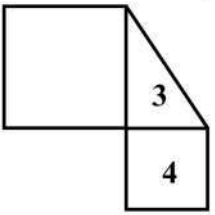
Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

**UNA:** Vaqueros y corbata
**DOS:** Vaqueros sin corbata
**TRES:** Sin vaqueros y con corbata
**CUATRO:** Sin vaqueros y sin corbata

**A)** La UNA y la DOS **B)** Solo la DOS **C)** Solo la TRES
**D)** La TRES y la CUATRO **E)** La DOS y la TRES

## 29 Nivel II — CP XVI

En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?




**A)** 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6
**E)** 5

## 30 Nivel II — CP XVI

María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

## 31 Nivel II — CP XVII

Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

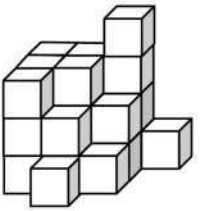
**A)** 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

## 32 Nivel II — CP XVII

Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 $cm^2$, ¿cuántos $cm^2$ mide el área de un cuadrado?

**A)** 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

## 33 Nivel II — CP XVII



Sara había construido un gran cubo de $4 \times 4 \times 4$ con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?

**A)** 28 **B)** 38 **C)** 26
**D)** 40 **E)** 37

## 34 Nivel II — CP XVIII

En mi jardín con forma de hexágono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?

**A)** 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65

## 35 Nivel II — CP XVIII

El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

**A)** 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

## 36 Nivel II — CP XIX

*¿Qué me pongo?, ¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

**A)** 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

## 37 Nivel II — CP XIX

Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?

**A)** 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

## 38 Nivel II — CP XIX

Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

**A)** 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

## 39 Nivel II — CP XX

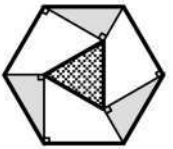
Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo sólo recuerdo que el mayor número era 21. Cuando ya iba a reventar, se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta. ¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

| + | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 12 | |
| | 10 | | |
| | 13 | | |

**A)** 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

## 40 Nivel II — CP XX

Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 $cm^2$, ¿cuál es el área, en $cm^2$, del triángulo central?



**A)** 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 24

## 41 Nivel II — CP XXI

Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: $12 \cdot 12 = 1156$, $3 \cdot 3 = 81$, $45 \cdot 45 = 144$, $67 \cdot 67 = 5625$. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

## 42 Nivel II — CP XXI

Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

**A)** 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

## 43 Nivel II — CP XXII

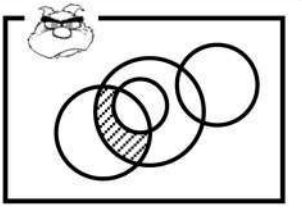
¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:

*Mi número favorito es el* 5 *y por eso he pensado en el número* A *que está formado por* 55 *cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. *¿Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

**A)** 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

## 44 Nivel II — CP XXII

Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?



**A)** 5 **B)** 4 **C)** 3

**D)** 2 **E)** 1

## 45 Nivel II — CP XXIII

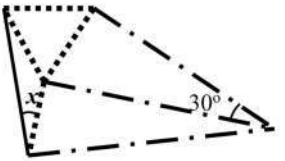
Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

**A)** $\frac{896\,678}{338\,444}=\frac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\frac{59\,976}{139\,944}=\frac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\frac{179\,972}{417\,946}=\frac{2\,856}{6\,664}$

**D)** $\frac{69\,796}{192\,994}=\frac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\frac{59\,976}{139\,944}=\frac{1\,428}{3\,332}$

## 46 Nivel II — CP XXIII

En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO–RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?

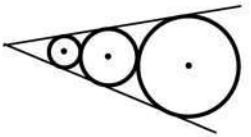



**A)** 18° **B)** 26° **C)** 15°

**D)** 24° **E)** 20°

## 47 Nivel II — CP XXIII

En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?

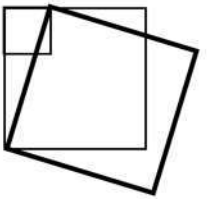


**A)** 10 **B)** 6 **C)** 15

**D)** 20 **E)** 16

## 48 Nivel II — CP XXIV

Si el cuadrado menor tiene área $A$ y el cuadrado mediano tiene área $B$, ¿qué área tiene el cuadrado mayor, dibujado con línea gruesa?



**A)** $(A+B)^2$ **B)** $A^2+B^2$ **C)** $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$

**D)** $A+2B$ **E)** $A+B$

## 49 Nivel II — CP XXIV

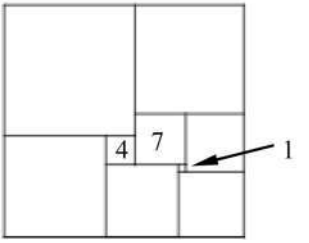
Si $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, son enteros positivos y $2^a \cdot 3^b \cdot 4^c \cdot 6^d = 6^e$ entonces, tiene que cumplirse, a la fuerza que:

**A)** $a + 2c = b$ **B)** $a + b + c + d = e$ **C)** $a + c = b + d$

**D)** $a \cdot c = b \cdot d$ **E)** $b = d - e$

## 50 Nivel II — CP XXV

Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en $m^2$, tiene la sala?




**A)** 1024 **B)** 1122 **C)** 1023

**D)** 1088 **E)** 1056

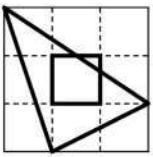
# Enunciados - Nivel III

**1** **Nivel III** **CP I**

Escritos en fila todos los números del 1 al 500, ¿qué dígito ocupará el lugar 1000?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)**7

**2** **Nivel III** **CP I**



Los lados de la cuadrícula miden 1 cm. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área de la región común al triángulo y al cuadrado?

**A)** $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{6}{7}$ **C)** $\frac{11}{12}$

**D)** $\frac{9}{10}$ **E)** $\frac{10}{11}$

**3** **Nivel III** **CP III**

El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden será primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

**A)** 279 643 **B)** 117 649 **C)** 262 147 **D)** 531 469 **E)** 998 001

**4** **Nivel III** **CP III**

Los vértices de un cubo los numeramos del 1 al 8, de manera que los conjuntos de números correspondientes a los vértices de cada cara son: {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} y {3, 4, 5, 8}. ¿Cuál es el número asignado al vértice más lejano al 6?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

**5** **Nivel III** **CP IV**

Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, este aumenta en 14789. ¿Cuál era la suma de las cifras del número original?

**A)** 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

**6** **Nivel III** **CP IV**

Si $n=1+3+5+...+999$ y $m=2+4+6+...+1000$, $m-n$ es igual a:

**A)** 500 **B)** 1000 **C)** –499 **D)** 499 **E)** 501

**7** **Nivel III** **CP V**

Llenamos una cuadrícula de $p$ filas y $q$ columnas con todos los enteros desde 1 a $pq$. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la tercera fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p+q$.

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

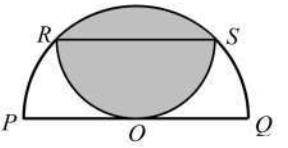
**8** **Nivel III** **CP V**

El resultado de $2001^2-2000^2+1999^2-1998^2+...+3^2-2^2+1^2-0^2$ es:

**A)** $1001^2$ **B)** $2002^2$ **C)** $2002\cdot1001$ **D)** $1001\cdot2001$ **E)** Nada de lo anterior

**9** **Nivel III** **CP V**

En la figura adjunta, las curvas $PRSQ$ y $ROS$ son semicircunferencias y $RS$ es paralela a $PQ$. Si el radio de la semicircunferencia grande es 1 metro, ¿cuál es el área, en $m^2$, de la región sombreada?

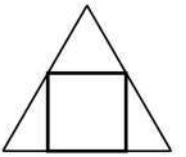



**A)** $\frac{\pi-1}{2}$ **B)** $\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{4}$

**D)** 1 **E)** $\frac{\pi}{2}-1$

**10** **Nivel III** **CP V**

Si un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura, la longitud del lado del triángulo es:



**A)** 2 **B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

**D)** $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

## 11 Nivel III — CP VI

En cada una de las cinco jarras de la figura hay café, chocolate o leche (en ninguna hay mezcla) en las cantidades que se indican. No sabemos qué contiene cada jarra pero sí sabemos que hay en total el doble de café que de chocolate, que el chocolate está en una única jarra y que no hay tres jarras con el mismo líquido. ¿En qué jarra está el chocolate?

**A)**

**B)**

**C)**

**D)**

**E)**


## 12 Nivel III — CP VI

En el cuadrado mágico de la figura, la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es la misma. ¿Cuánto vale $y + z$?

| | | |
|---|---|---|
| $v$ | 24 | $w$ |
| 18 | $x$ | $y$ |
| 25 | $z$ | 21 |

**A)** 43 **B)** 44 **C)** 45
**D)** 46 **E)** 47

## 13 Nivel III — CP VII

Lanzamos tres dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

**A)** $\frac{5}{36}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{5}{24}$

## 14 Nivel III — CP VII

Si el producto de tres números enteros consecutivos, ninguno nulo, es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?

**A)** 50 **B)** 77 **C)** 110 **D)** 149 **E)** 194

## 15 Nivel III — CP VIII

¿De cuántas formas puedo repartir doce caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?

**A)** 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

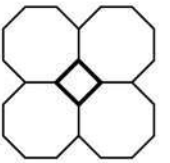
**16** **Nivel III** **CP VIII**

El número de dos cifras $[ab]$ es divisible por 7. Representamos por $[ba]$ el número obtenido al permutar las cifras.
De los siguientes números, I: $5b + a$ II: $3a + b$ III: $[ba] + a$, ¿cuáles son también divisibles por 7?

**A)** Solamente I y II **B)** Solamente II **C)** Solamente III
**D)** Los tres **E)** Solamente I y III

**17** **Nivel III** **CP IX**

Rodeamos un polígono regular de $m$ lados por $m$ polígonos regulares de $n$ lados cada uno, sin que haya huecos ni superposiciones. (En la figura que te mostramos, $m = 4$ y $n = 8$). ¿Cuánto vale $n$ si $m = 10$?



**A)** 5 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 20 **E)** 26

**18** **Nivel III** **CP IX**

¿Cuántos capicúas de tres cifras son cuadrados perfectos?

**A)** Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

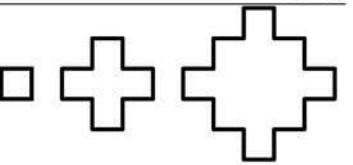
**19** **Nivel III** **CP X**

En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

**A)** $\frac{1}{15}$ **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{10}$

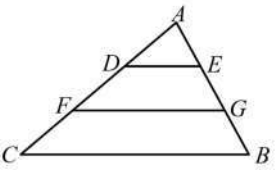
**20** **Nivel III** **CP X**

En esta serie de polígonos *crucigrama* de lado 1 cm, ¿cuál es el perímetro del que tiene 61 cm$^2$ de área?



**A)** 30 cm **B)** 32 cm **C)** 34 cm
**D)** 40 cm **E)** 44 cm

## 21 Nivel III CP X

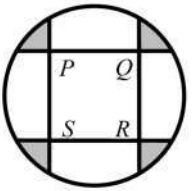



En el triángulo $ABC$ de la figura, de área 90 cm$^2$, los puntos $E$ y $G$ dividen al lado $AB$ en tres partes iguales y las rectas $DE$ y $FG$ son paralelas a $BC$. ¿Cuál es, en cm$^2$, el área del trapecio $DEGF$?

**A)** 20 **B)** 25 **C)** 30

**D)** 36 **E)** 45

## 22 Nivel III CP XI

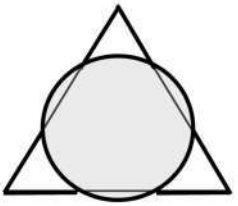



El cuadrado $PQRS$ de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en m$^2$, el área de la región sombreada?

**A)** $\frac{\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\sqrt{3}-1$

**D)** $\frac{\pi-1}{3}$ **E)** $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

## 23 Nivel III CP XI



Encima de un triángulo equilátero de lado 3 cm, colocamos un círculo de 1 cm de radio, haciendo coincidir los centros de ambas figuras. ¿Cuánto mide, en cm, el perímetro o borde de la figura resultante?

**A)** $2\pi$ **B)** $6+\pi$ **C)** 9

**D)** $3\pi$ **E)** $9+2\pi$

## 24 Nivel III CP XII

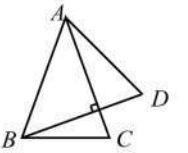
Con 10! (diez factorial) representamos al producto $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (multiplicar diez por todos los enteros anteriores hasta el uno) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cubo perfecto?

**A)** 490 **B)** 630 **C)** 1470 **D)** 4410 **E)** 8820

## 25 Nivel III — CP XII

Los triángulos $ABC$ y $ABD$ son isósceles con $AB = AC = BD$.

Si $BD$ es perpendicular a $AC$, la suma de los ángulos $\hat{C} + \hat{D}$ es igual a:

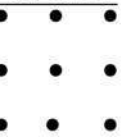



**A)** 115º **B)** 120º **C)** 130º **D)** 135º

**E)** No tenemos datos suficientes para determinarla

## 26 Nivel III — CP XIII

Elegimos al azar tres puntos de los nueve del siguiente diagrama. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?



**A)** $\frac{8}{27}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{8}{81}$ **D)** $\frac{4}{21}$ **E)** $\frac{8}{9}$

## 27 Nivel III — CP XIII

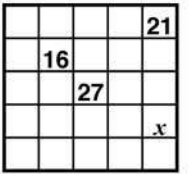
Ayer por la tarde, Alicia condujo una hora más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 5 km/hora. Luisa condujo dos horas más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 10 km/hora. Si Alicia condujo 70 km más que Pedro, ¿cuántos km condujo Luisa más que Pedro?

**A)** 120 **B)** 130 **C)** 140 **D)** 150 **E)** 160

## 28 Nivel III — CP XIV

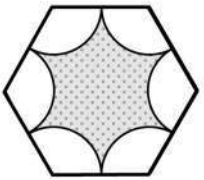
En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es $x$?

[Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.]




**A)** 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

## 29 Nivel III — CP XIV



Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la estrella central?

**A)** $3\sqrt{3}-\pi$ **B)** $6\sqrt{3}-2\pi$ **C)** $2\sqrt{6}-\pi$

**D)** $3(\sqrt{18}-\pi)$ **E)** $6(2\sqrt{3}-\pi)$

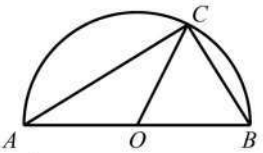
## 30 Nivel III — CP XV

Si $n$ es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que $n$?

**A)** $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** $n^2+1$ **D)** $n^2+n$ **E)** $n^2+2n+1$

## 31 Nivel III — CP XV

El dibujo muestra una semicircunferencia de centro $O$ y radio 1 cm. Si $C$ es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?




**A)** El ángulo $A\hat{C}B$ es recto.
**B)** El triángulo $AOC$ es isósceles.
**C)** El área del triángulo $ABC$ es menor o igual que 1 $cm^2$.
**D)** El área del triángulo $AOC$ es igual a la del triángulo $OBC$.
**E)** $AO^2+OB^2=AC^2+BC^2$.

## 32 Nivel III — CP XVI

Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

(a) La que toca el clarinete tiene pecas.
(b) Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
(c) Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
(d) Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

**A)** Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
**D)** Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

## 33 Nivel III — CP XVI

El resto de dividir $7^{25}$ entre 9 es:

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

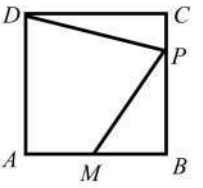
## 34 Nivel III — CP XVII

Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

## 35 Nivel III — CP XVII

En el cuadrado $ABCD$ de lado 2 cm, $M$ es el punto medio del lado $AB$ y $P$ es un punto variable del lado $BC$. ¿Cuál es el mínimo valor, en cm, de $DP + PM$?

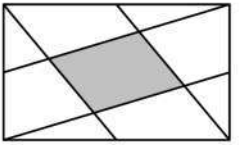



**A)** $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$

**D)** $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

## 36 Nivel III — CP XVIII

En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos formado un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 $cm^2$, la del romboide, en $cm^2$, es:



**A)** 25 **B)** 20 **C)** 15

**D)** 12 **E)** 10

## 37 Nivel III — CP XVIII

¿Cuántos enteros $n$, con $1 \le n \le 100$, verifican que $n^n$ es un cuadrado perfecto?

**A)** 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

**38** **Nivel III** **CP XVIII**

En una sucesión, el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y, a partir del tercero, cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

**A)** –1007 **B)** –1005 **C)** –670 **D)** 0 **E)** 1008

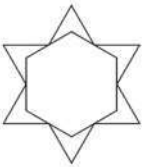
**39** **Nivel III** **CP XIX**

Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali. ¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

**40** **Nivel III** **CP XIX**

El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 cm$^2$. El área, en cm$^2$, de la estrella es:

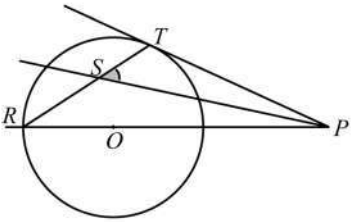


**A)** 15 **B)** 18 **C)** 20

**D)** 21 **E)** 24

**41** **Nivel III** **CP XX**

Desde un punto $P$ exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro $O$ y otra tangente en $T$, como muestra la figura. La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento $RT$ en $S$. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$ ?




**A)** 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º

**D)** 45º **E)** 52,5º

## 42 Nivel III — CP XX

Si los cuatro enteros $C$, $D$, $C + D$ y $C - D$ son números primos, su suma tiene que ser:

**A)** Múltiplo de 2 **B)** Múltiplo de 3 **C)** Múltiplo de 5
**D)** Múltiplo de 7 **E)** Un número primo

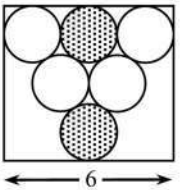
## 43 Nivel III — CP XXI

Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras $PQRST$. Si el número de tres cifras $PQR$ es divisible por 4, el $QRS$ es divisible por 5 y el $RST$ es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra $P$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

## 44 Nivel III — CP XXI

En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es, en cm, la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?




**A)** $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2(\sqrt{3}-1)$ **D)** $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

## 45 Nivel III — CP XXII

María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

**A)** 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

## 46 Nivel III — CP XXII

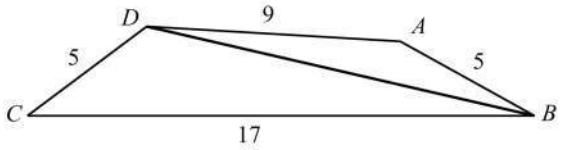
Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

**A)** 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505 **E)** Falta información

## 47 Nivel III — CP XXIII

En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide $BD$ si sabemos que es un entero?

**A)** 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15



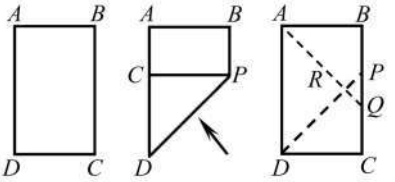

## 48 Nivel III — CP XXIII

Si $(x+2)\cdot(y+2)=60$ y $(x+3)\cdot(y+3)=40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

## 49 Nivel III — CP XXIV

Una hoja rectangular $ABCD$ con $AB$ = 5 cm y $AD$ = 8 cm, se dobla para que el borde $CD$ caiga sobre el borde $AD$, formándose así el doblez $PD$. Se desdobla y a continuación vuelve a doblarse de tal manera que $AB$ caiga sobre $AD$, formándose ahora el doblez $AQ$. Si la intersección de estos dos dobleces es el punto $R$, calcula el área, en cm$^2$, del cuadrilátero $DRQC$.




**A)** 10 **B)** 10,5 **C)** 11 **D)** 11,5 **E)** 12

## 50 Nivel III — CP XXV

¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

# Enunciados - Nivel IV

## 1 Nivel IV — CP I

En una mesa hay cinco cartas como se muestra en la figura.

Cada carta tiene una letra por una cara y un número positivo por la otra. Pedro dice: "Cualquier carta que tenga una vocal por un lado, tiene un número par por el otro". Alicia descubre que esta afirmación es falsa dando la vuelta a una de las cinco cartas. ¿A cuál?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** P **E)** Q

## 2 Nivel IV — CP I

En una caja metemos una tarjeta etiquetada con un 1, dos con un 2 cada una, tres con un 3 cada una, y así hasta 50 tarjetas con un 50.
En total hemos, pues, metido 1 + 2 + 3 +.....+ 50 = 1275 tarjetas. Cogemos un montón de ellas. El mínimo número de tarjetas que debemos coger para garantizar que al menos haya diez tarjetas en las que está escrita la misma etiqueta es:

**A)** 10 **B)** 51 **C)** 415 **D)** 451 **E)** 521

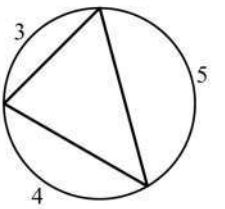
## 3 Nivel IV — CP II

Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en tres días de trabajo y uno de descanso mientras que Beatriz trabaja siete días seguidos y luego descansa tres días seguidos. En los 1000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

**A)** 48 **B)** 50 **C)** 72 **D)** 75 **E)** 100

## 4 Nivel IV — CP II

Los arcos que determinan los vértices del triángulo de la figura tienen longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área del triángulo?




**A)** 6 **B)** $\frac{18}{\pi^2}$ **C)** $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

**D)** $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$ **E)** Falta información.

## 5 Nivel IV — CP III

Dos velas son de diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 horas ardiendo y la más corta 10 horas. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

**A)** $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{2}{3}$

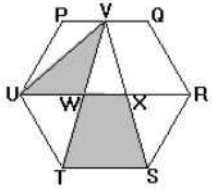
## 6 Nivel IV — CP III

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

**A)** 12,5 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

## 7 Nivel IV — CP IV

En el hexágono regular $PQRSTU$ de la figura, $V$ es el punto medio de $PQ$, y $W$ y $X$ son los puntos que se señalan.




¿Cuánto vale $\frac{\text{Área } WXST}{\text{Área } UVW}$ ?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$

**D)** $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2}$

## 8 Nivel IV — CP IV

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ verifica que $a_1 = 19$, $a_{2000} = 99$ y para $n \geq 3$, $a_n$ es la media aritmética de los $n-1$ primeros términos. ¿Cuál es el valor de $a_2$ ?

**A)** 29 **B)** 59 **C)** 79 **D)** 99 **E)** 179

**9** **Nivel IV** **CP V**

¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son menores que el producto de sus cifras?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 45

**10** **Nivel IV** **CP V**

Si $\text{tg}\,x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ con $a > b > 0$ y $0° < x < 90°$, sen $x$ es igual a:

**A)** $\dfrac{a}{b}$ **B)** $\dfrac{b}{a}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ **E)** $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

**11** **Nivel IV** **CP VI**

Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto $P$. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto $P$. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

**A)** $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{14}$ **C)** $\sqrt{15}$ **D)** 4 **E)** $\sqrt{17}$

**12** **Nivel IV** **CP VI**

En una caja hay 1001 bolas blancas y 1001 bolas negras. Si $P_1$ es la probabilidad de que al coger dos bolas al azar sean del mismo color y $P_2$ la probabilidad de que sean de diferente color, entonces $P_2 - P_1$ es igual a:

**A)** 0 **B)** $\dfrac{1}{2002}$ **C)** $\dfrac{1}{2001}$ **D)** $\dfrac{2}{2001}$ **E)** $\dfrac{1}{1000}$

**13** **Nivel IV** **CP VII**

Cada una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera o falsa.

1. Las afirmaciones 3 y 4 son ambas verdaderas.
2. Las afirmaciones 4 y 5 no son ambas falsas.
3. La afirmación 1 es verdadera.
4. La afirmación 3 es falsa.
5. Las afirmaciones 1 y 3 son ambas falsas.

¿Cuántas afirmaciones de estas cinco son verdaderas?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**14** **Nivel IV** **CP VII**

Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

**A)** $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{11}$ **C)** $\frac{5}{22}$ **D)** $\frac{4}{23}$ **E)** $\frac{7}{30}$

**15** **Nivel IV** **CP VIII**

El menor entero positivo $n$ para el que $10^n - 1$ es múltiplo de 63 es:

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**16** **Nivel IV** **CP VIII**

Elegimos al azar un punto $(x, y)$ del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ y $(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que $x$ sea menor que $y$?

**A)** $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

**17** **Nivel IV** **CP IX**

Si $x$ e $y$ son los números complejos dados por $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

**A)** $x^5 + y^5 = -1$ **B)** $x^7 + y^7 = -1$ **C)** $x^9 + y^9 = -1$ **D)** $x^{11} + y^{11} = -1$ **E)** $x^{13} + y^{13} = -1$

**18** **Nivel IV** **CP IX**

Sea $f(x) = x^2 + 6x + 1$ y $T$ el conjunto de los puntos $(x, y)$ tales que $f(x) + f(y) \le 0$ y $f(x) - f(y) \le 0$. El entero más próximo al valor del área del recinto determinado por el conjunto $T$, es:

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

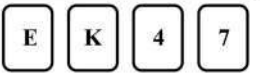
**19** **Nivel IV** **CP X**

La suma de 49 números enteros consecutivos es $7^5$. ¿Cuál es su mediana?

**A)** 7 **B)** $7^2$ **C)** $7^3$ **D)** $7^4$ **E)** $7^5$

**20** **Nivel IV** **CP X**

Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: *"En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra"*. ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?




**A)** Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

**21** **Nivel IV** **CP XI**

¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**22** **Nivel IV** **CP XI**

Nadal y Federer juegan en tierra batida un partido a 3 sets, es decir, vence quien gana 2 sets. Si la probabilidad que tiene Nadal de ganar cada set es un 60 %, ¿qué probabilidad tiene Nadal de salir victorioso en el partido?

**A)** 0,6 **B)** 0,648 **C)** 0,504 **D)** 0,36 **E)** 0,75

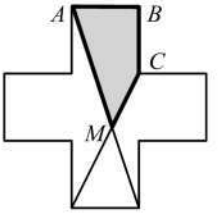
**23** **Nivel IV** **CP XII**

¿Cuáles son las dos últimas cifras de $51^{48}$?

**A)** 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

**24** **Nivel IV** **CP XII**

Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABCM$?




**A)** $\frac{44}{3}$ **B)** 16 **C)** $\frac{88}{5}$

**D)** 20 **E)** $\frac{62}{3}$

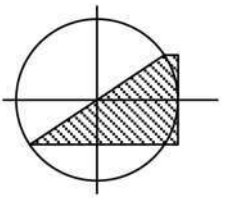
**25** **Nivel IV** **CP XIII**

¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo de lado $c$, si $c$ es media geométrica de las diagonales?

**A)** 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 75º

**26** **Nivel IV** **CP XIII**

La figura muestra una circunferencia de radio 1 y un trapecio rectángulo cuyas bases son paralelas al eje horizontal, un lado es tangente a la circunferencia y el otro es un diámetro de la misma. Si el ángulo que forma este lado con la base mayor es $\alpha$, el área de dicho trapecio es:



**A)** $2 \operatorname{sen} \alpha$ **B)** $2 \operatorname{sen}^2 \alpha$ **C)** $2 \operatorname{tg} \alpha$

**D)** $2\operatorname{sen}\alpha(2+\cos\alpha)$ **E)** $\operatorname{sen} 2\alpha$

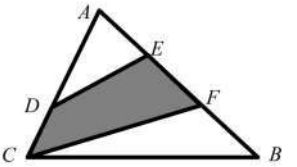
**27** **Nivel IV** **CP XIV**

Uno de los números complejos $z$ que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

**A)** $2+2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3}-2i$ **C)** $3+3\,i$ **D)** $2+2\,i$ **E)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

**28** **Nivel IV** **CP XIV**

En la figura que te mostramos, el área del triángulo $ABC$ es 9, $DC$ es un tercio de $AC$ y los puntos $E$ y $F$ dividen a $AB$ en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?




**A)** 3 **B)** 4 **C)** 4,5

**D)** 5 **E)** 6

**29** **Nivel IV** **CP XV**

¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

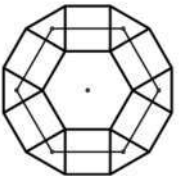
**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

## 30 Nivel IV — CP XV

Si $f(11)=11$ y $f(n+3)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

**A)** 11 **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $-\dfrac{6}{5}$ **D)** $-\dfrac{1}{11}$ **E)** 2011

## 31 Nivel IV — CP XVI

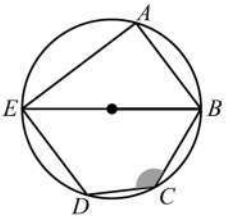


Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en $cm^2$, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?

**A)** $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

**D)** 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

## 32 Nivel IV — CP XVI




En la circunferencia de diámetro $EB$ las cuerdas $AB$ y $ED$ son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\dfrac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?

**A)** 120º **B)** 125º **C)** 130º

**D)** 135º **E)** 140º

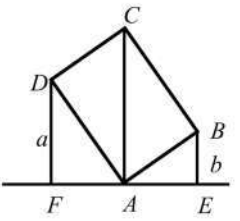
## 33 Nivel IV — CP XVII

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x=10\cdot\cos x$?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

**34** **Nivel IV** **CP XVII**

En la figura que observas, *ABCD* es un rectángulo y los segmentos *DF, BE* y *CA* son perpendiculares a la recta *FE*. Si $DF = a$ y $BE = b$, la longitud *FE* es:




**A)** $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

**D)** $\frac{2a + 4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

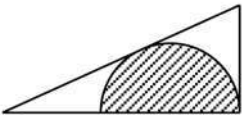
**35** **Nivel IV** **CP XVIII**

La suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, de los $n$ primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

**36** **Nivel IV** **CP XVIII**

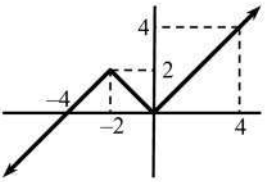
Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?



**A)** $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$

**37** **Nivel IV** **CP XIX**

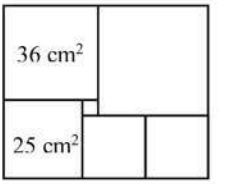
Si $y = f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(f(x))] = 0$ ?




**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2

**D)** 1 **E)** 0

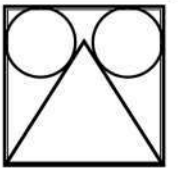
## 38 Nivel IV — CP XIX




Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?

**A)** 50 **B)** 44 **C)** 46
**D)** 52 **E)** 48

## 39 Nivel IV — CP XX



La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?

**A)** 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ **D)** $3-\sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

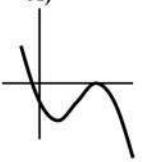
## 40 Nivel IV — CP XX

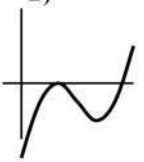
Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

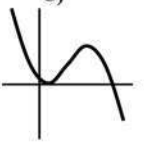
**A)** 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

## 41 Nivel IV — CP XXI

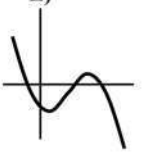
Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x)=(a-x)(b-x)^2$ ?

**A)** 

**B)** 

**C)** 

**D)**

**E)** 

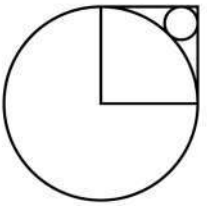
## 42 Nivel IV — CP XXI

¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101}-10$?

**A)** $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{22}$ **E)** $\frac{1}{24}$

## 43 Nivel IV — CP XXII

La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $a-b\sqrt{2}$ cm, el valor de $a+b$ es:



**A)** 30 **B)** 40 **C)** 50
**D)** 60 **E)** 70

## 44 Nivel IV — CP XXII

Dos semirrectas que parten de un punto $O$ forman un ángulo de 30º. Los puntos $A$ y $B$ están uno en cada una y $AB = 1$. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento $OB$?

**A)** 1 **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$

## 45 Nivel IV — CP XXIII

En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

## 46 Nivel IV — CP XXIII

Sean $a$, $b$, $c$, $f$, $g$ y $h$ los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo $ABC$, su circuncentro $F$, su baricentro $G$ y su ortocentro $H$, respectivamente. Entonces:

**A)** $a+b+c=3h$ **B)** $2(a+b+c)=3(f+h)$ **C)** $a+b+c=2f+h$

**D)** $2(a+b+c)=3$ **E)** $f+h=2g$

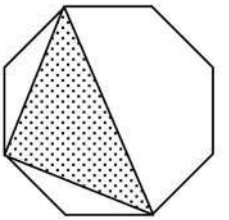
## 47 Nivel IV — CP XXIV

Sea una función $f$ tal que $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$, para cualesquiera enteros $a$ y $b$. Si $f(1)=3$, entonces el valor de $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ es:

**A)** 40 **B)** 81 **C)** 0 **D)** –81 **E)** –40

## 48 Nivel IV — CP XXIV

En un octógono regular he formado un triángulo uniendo tres vértices al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un lado del triángulo sea también un lado del octógono?



**A)** $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$

**D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{11}{14}$

## 49 Nivel IV — CP XXV

Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

**A)** 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

## 50 Nivel IV — CP XXV

En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

**A)** 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

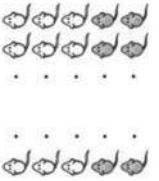
# Soluciones - Nivel I

## 1 Nivel I — CP I

Dos gatos *Mu* y *Mi* cazaron entre los dos sesenta ratones. Si *Mu* caza tres ratones por cada dos ratones que caza *Mi*, ¿cuántos ratones cazó *Mi*?

**A)** 2 **B)** 30 **C)** 24 **D)** 40 **E)** 36

**(C)** Por cada 5 ratones, *Mu* caza 3 y *Mi* 2. Si organizamos los ratones en un esquema como el de la figura, donde los ratones blancos son los cazados por *Mu* y los grises los cazados por *Mi*, vemos claramente que tendremos $\frac{60}{5}=12$ grupos de 5 ratones.



Así pues, *Mi* cazó $12\times 2=24$ ratones.

## 2 Nivel I — CP I

Antonio, Beatriz, Carlos y Diana están sentados en una fila de cuatro sillas numeradas del 1 al 4. Emilio los ve y dice:

– Beatriz está al lado de Carlos.

– Antonio está entre Beatriz y Carlos.

Si las dos afirmaciones son falsas y Beatriz está sentada en la silla nº 3, ¿quién ocupa la silla nº 2?

**A)** Antonio **B)** Beatriz **C)** Carlos **D)** Diana

**E)** No hay información suficiente

**(D)** Si comenzamos con una tabla como la de abajo es muy sencillo resolver el problema.

| Silla 1 | Silla 2 | Silla 3 | Silla 4 |
|---|---|---|---|
| | | Beatriz | |

Sabemos que Beatriz está sentada en la silla 3, por lo que Carlos no está ni en la 2 ni en la 4 ya que Beatriz **no** está al lado de Carlos, así que estará en la 1.

| Silla 1 | Silla 2 | Silla 3 | Silla 4 |
|---|---|---|---|
| Carlos | | Beatriz | |

Por otra parte, Antonio **no** está entre Beatriz y Carlos y, en consecuencia estará en la 4, quedando la 2 para Diana.

| Silla 1 | Silla 2 | Silla 3 | Silla 4 |
|---|---|---|---|
| Carlos | Diana | Beatriz | Antonio |

## 3 Nivel I — CP II

Si el número de primos menores de 50 es exactamente 15, ¿cuántos hay menores que 60?

**A)** 19 **B)** 18 **C)** 17 **D)** 16 **E)** 15

**(C)** Como nos dicen que hasta 50 hay 15 primos, solo nos falta estudiar los números del 51 al 59.
Los pares: 52, 54, 56 y 58 son múltiplos de 2.
Los múltiplos de 3 son el 51 (5 + 1 = 6) y el 57 (5 + 7 = 12).
El 55 es múltiplo de 5, porque termina en 5.
Solo quedan el 53 y el 59. Solo tenemos que estudiar si son divisibles entre los primos menores o iguales que 7 (2, 3, 5, 7). ¡Piensa por qué!
53 es primo porque no es divisible ni entre 2, ni entre 3, ni entre 5, ni entre 7.
59 es primo porque no es divisible ni entre 2, ni entre 3, ni entre 5, ni entre 7.
Por lo tanto, entre 50 y 60 hay dos primos. Así pues, hay 17 primos menores que 60.

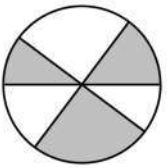
## 4 Nivel I — CP II

En un cajón hay tres calcetines blancos, dos negros y cinco rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el mínimo número de calcetines que hay que sacar para estar seguro de que podemos ponernos dos calcetines del mismo color?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 7

**(D)** Si saco tres calcetines es posible que haya uno de cada color, pero si saco cuatro, aunque los tres primeros sean de distinto color, el cuarto, dado que solo hay tres colores, es seguro que será de uno de esos colores. Por lo tanto, la respuesta es cuatro calcetines.
Notemos que el punto esencial es que tenemos tres y solo tres colores, importando poco el número de calcetines con tal de tener cuatro o más.

**5** **Nivel I** **CP III**



Si el radio del círculo es 6, el área de la región sombreada es:

**A)** $6\pi$ **B)** $12\pi$ **C)** $18\pi$

**D)** $24\pi$ **E)** $36\pi$

**(C)** Cada sector circular sombreado se corresponde con su sector blanco simétrico con respecto al centro del círculo. Así, el área de la región sombreada es la mitad del área del círculo, $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$. Luego el área pedida es $18\pi$.

**6** **Nivel I** **CP IV**

Para fabricar un kilo de miel, las abejas hacen 500 000 viajes entre la colmena y las flores. En cada viaje una abeja transporta por término medio 8 mg de néctar. ¿Cuántos kilos de néctar son necesarios para obtener un kilo de miel?

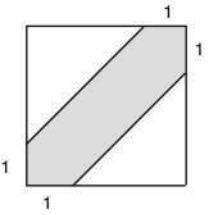
**A)** 4 **B)** 20 **C)** 40 **D)** 10 **E)** 8

**(A)** Si en cada viaje se transportan 8 mg de néctar, en 500 000 viajes se transportarán $500\,000 \times 8 = 4\,000\,000$ mg de néctar y, con ellos, las abejas, fabricarán un kilo de miel. Ahora solo falta saber cuántos kilos son 4 000 000 mg. Dado que 1000 mg son un gramo, $4\,000\,000 \text{ mg} = 4\,000\,000 : 1000 = 4000$ g y como 1000 g son un kilo, 4000 g = 4 kg.
Así que, para obtener un kilo de miel, son necesarios 4 kilos de néctar.

## 7 Nivel I — CP IV

¿Cuál es el área de la franja sombreada dentro del cuadrado de lado 4 m?

**A)** 6 m$^2$ **B)** 7 m$^2$ **C)** 7,5 m$^2$
**D)** 8 m$^2$ **E)** 8,5 m$^2$

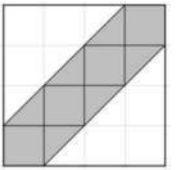



PRIMERA SOLUCIÓN

**(C)** Observa que los dos triángulos blancos forman un cuadrado de lado 3, por lo que lo más cómodo es obtener el área del cuadrado, 16 m$^2$, y restarle el área del cuadrado blanco, 9 m$^2$.
El área de la zona sombreada es $16 - 9 = 7$ m$^2$.

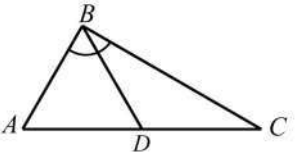
SEGUNDA SOLUCIÓN

**(C)** Muchos problemas de este tipo se resuelven fácilmente dividiendo la figura en partes de igual área. En nuestro caso dividiremos el cuadrado en 16 cuadraditos de 1 m$^2$. Observamos que la franja sombreada se secciona en 4 cuadraditos más 6 medios cuadraditos. Por lo que su área es igual a la de $4 + 3 = 7$ cuadraditos, esto es, 7 m$^2$.



**8 Nivel I CP V**

En el triángulo de la figura, los segmentos $AD$, $BD$ y $DC$ son iguales. ¿Cuánto mide el ángulo $A\hat{B}C$ ? (Con vértice en $B$).

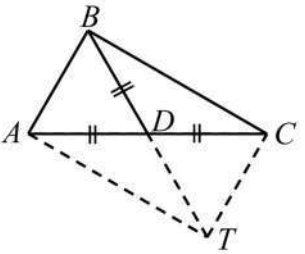



**A)** 75º **B)** 86º **C)** 90º

**D)** 92º **E)** Falta información

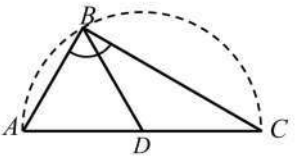
PRIMERA SOLUCIÓN

**(C)** Si dibujamos el triángulo $ACT$, igual al dado, resulta un paralelogramo $ABCD$ en el que sus diagonales $AC = 2AD$, ya que $AD = DC$, y $BT = 2BD$ ya que $BD = DT$ son iguales pues $AD = BD$. Así pues, dicho paralelogramo es un rectángulo y el ángulo pedido es de 90º.




SEGUNDA SOLUCIÓN

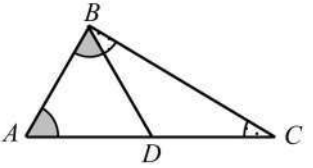
**(C)** Si nos fijamos bien, vemos que los segmentos iguales $AD$, $BD$ y $DC$, pueden ser radios de una circunferencia de centro $D$, como se muestra en la figura. Queda claro que el ángulo $A\hat{B}C$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, con ángulo central de 180º. En consecuencia, el ángulo $A\hat{B}C$ mide $\dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ .




TERCERA SOLUCIÓN

**(C)** Si nos fijamos en el triángulo $ADB$, como $AD = BD$, deducimos que los ángulos marcados en gris son iguales.

De la misma forma, mirando el triángulo $BDC$, como $BD = DC$, los ángulos punteados son iguales. La suma de los ángulos del triángulo $ACB$ está formada por dos ángulos grises y dos punteados, luego un ángulo gris y uno punteado suman 180º : 2 = 90º.



## 9 Nivel I — CP V

Si veinte gatos comen veinte ratones en veinte días, ¿cuántos ratones comen diez gatos en diez días?

**A)** 5 **B)** 10 **C)** 20 **D)** 4 **E)** Nada de lo anterior

**(A)** 10 gatos en 20 días comerán la mitad de ratones que 20 gatos, o sea, comerán 10, por lo que en 10 días comerán la mitad de 10, es decir, 5 ratones.

## 10 Nivel I — CP VI

Un arquitecto tiene dos planos de un mismo edificio: Uno a escala 1:20 y otro a escala 1:50. ¿Cuál es la longitud de la fachada de un edificio en el plano de escala 1:50 si en el de escala 1:20 es de 20 cm?

**A)** 16 **B)** 8 **C)** 50 **D)** 4 **E)** 12

**(B)** Una escala es la razón entre la medida del plano y la medida en el mundo real. Para el plano a escala 1:20 significa que un centímetro del plano representa 20 centímetros en la realidad, de donde se deduce que para una medida en el plano de 20 cm son $20 \times 20 = 400$ cm de la realidad.
Ahora veamos cómo representar 400 cm de la realidad en un plano 1:50. Como la escala 1:50 significa que 50 cm de la realidad los vamos a representar con 1 cm, 400 cm de la realidad los representaremos con $400 : 50 = 8$ cm.

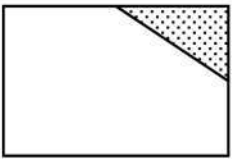
## 11 Nivel I — CP VI

Mi reloj se atrasa veinte segundos cada hora. Ahora mismo lo he puesto en hora. ¿Dentro de cuánto tiempo llevará media hora de retraso?

**A)** 2 días **B)** 3 días y 18 horas **C)** 60 horas **D)** 75 horas **E)** 4800 minutos

**(B)** Si cada hora atrasa 20 segundos, en 3 horas atrasará un minuto y para acumular 30 minutos necesitará $3 \times 30 = 90$ horas, es decir, 3 días y 18 horas.

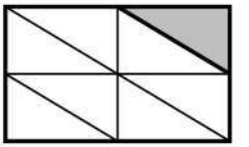
## 12 Nivel I CP VII



El área de un rectángulo es 1. Quitamos una esquina del rectángulo uniendo los puntos medios de dos lados consecutivos. ¿Cuál es el área del triángulo que le quitamos?

**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{2}{5}$

**D)** $\frac{3}{8}$ **E)** $\frac{1}{8}$



**(E)** Una división de la figura, en partes más pequeñas de igual área, facilita enormemente la solución de problemas de este tipo.
Aunque no se sabe la medida de los lados del triángulo, puede determinarse su área teniendo en cuenta la partición de la figura, en la que se observa que el triángulo es la octava parte del rectángulo.

## 13 Nivel I CP VII

Alba, Benito, Carolina y Diana tienen cada uno un animal; uno de ellos tiene un gato, otro un perro, otro un pez y otro un canario. Benito tiene un animal con pelo, Diana uno de cuatro patas, Carolina tiene un pájaro y a Alba y a Benito no les gustan los gatos. ¿Cuál es la frase falsa?

**A)** Alba tiene un pez **B)** Benito tiene un perro **C)** Carolina tiene un canario
**D)** Diana tiene un gato **E)** Diana tiene un perro

PRIMERA SOLUCIÓN

**(E)** Dado que cada uno tiene un animal y solo uno, es sencillo ir directamente a por la solución, que seguro que será D o E pues ambas no pueden ser ciertas.
Como Benito tiene un animal con pelo y no le gustan los gatos, Benito tiene un perro y, por tanto, Diana no puede tener un perro. En consecuencia, la frase falsa es "Diana tiene un perro".

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(E)** También podemos deducir qué animal tiene cada uno y así buscar la frase falsa.
Benito tiene un animal con pelo (perro o gato) y no le gustan los gatos, así que tiene un perro. Diana tiene un animal con cuatro patas (perro o gato), pero como Benito tiene un perro, Diana tiene un gato. Carolina tiene un canario y, por tanto, Alba tiene un pez.

## 14 Nivel I — CP VIII

La suma de los veinte primeros números enteros positivos consecutivos es 210. Entonces la suma de los primeros cuarenta números enteros positivos es:

**A)** 420 **B)** 610 **C)** 820 **D)** 840 **E)** 4200

**(C)** Sabemos que $1 + 2 + \ldots + 19 + 20 = 210$. En consecuencia, para sumar los primeros cuarenta enteros positivos debemos sumar a 210 los restantes enteros hasta 40.

Para ellos vamos a escribir esos 20 números que nos faltan por sumar de una manera ingeniosa y volveremos a usar que la suma de los 20 primeros es 210:

$21 = 20 + 1$
$22 = 20 + 2$
$23 = 20 + 3$
$\ldots$
$39 = 20 + 19$
$40 = 20 + 20$

Ahora sumamos así:

$21 + 22 + 23 + \ldots + 39 + 40 = 20 \times 20 + (1 + 2 + 3 + \ldots + 19 + 20) = 400 + 210 = 610.$

A este resultado le sumamos la suma de los 20 primeros números y obtenemos: $210 + 610 = 820$.

## 15 Nivel I — CP VIII

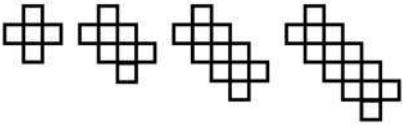
Pedro tiene veinte bolas de distintos colores: amarillas, verdes, azules y rojas. Diecisiete no son verdes, cinco son rojas y doce no son amarillas. ¿Cuántas bolas azules tiene Pedro?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 15

**(B)** El punto clave es tener presente algo tan básico como esto: *toda bola es de cierto color o no es de ese color*. En nuestro problema esto nos lleva a que si 17 no son verdes, las otras 3 son necesariamente verdes y a que si 12 no son amarillas, las otras 8 son amarillas. Como además hay 5 rojas, tenemos: 3 (verdes) + 8 (amarillas) + 5 (rojas) = 16 bolas (no azules). Por tanto, el resto de las bolas son azules: $20 - 16 = 4$ bolas azules.

## 16 Nivel I — CP IX

En esta serie de tableros, ¿cuántos cuadraditos tiene el tablero que ocupa el décimo lugar?



**A)** 50 **B)** 38 **C)** 32 **D)** 30 **E)** 29

PRIMERA SOLUCIÓN

**(C)** Basta continuar con la sucesión que se obtiene con el número de cuadraditos de cada tablero. Es fácil observar que este número de cuadraditos va aumentando de 3 en 3 y, como el tablero que ocupa el primer lugar tiene 5 cuadraditos, es inmediato formar la siguiente tabla:

| Lugar | 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º | 7º | 8º | 9º | 10º |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de cuadraditos | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 |

El décimo tablero tendría 32 cuadraditos.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(C)** Si no queremos formar toda la sucesión de números hasta llegar al deseado, podemos razonar así:
Para llegar al término 10º de la sucesión, tenemos que sumar a 5, 9 veces 3 cuadraditos, por lo tanto, el décimo sería: $5 + 9 \times 3 = 5 + 27 = 32$.
Y además hemos resuelto el problema general.
El tablero que ocupa el lugar $n$ tiene $C_n = 5 + (n - 1) \times 3$ cuadraditos.

## 17 Nivel I — CP X

El 1 de septiembre de 2005 fue jueves. ¿Qué día de la semana será el 1 de septiembre de 2025?

**A)** domingo **B)** lunes **C)** martes **D)** miércoles **E)** jueves

**(B)** Los años no bisiestos tienen 365 días, es decir, 52 semanas y un día $(365 = 52 \times 7 + 1)$. Por tanto si estamos en un año no bisiesto y hoy fuera lunes, el próximo año, tal día como hoy sería martes. En los años bisiestos $(366 = 52 \times 7 + 2)$ habría que avanzar dos días.
Entre 2005 y 2025 hay 20 años, de los cuales son bisiestos: 2008, 2012, 2016, 2020 y 2024. Es decir, hay 15 años no bisiestos y 5 bisiestos. Por tanto, el 1 de septiembre (jueves) se desplazará $15 + 5 \times 2 = 25$ días de la semana, o sea, 3 semanas y 4 días, esto es, pasará de ser jueves a ser lunes.

## 18 Nivel I — CP X

En la siguiente suma cada símbolo representa un dígito diferente.
Si ✋ = 7 y ★ un número par, ¿cuál es el único valor posible para ☾?

| | ✋ | ☾ | ★ |
|---|---|---|---|
| + | ✋ | ☾ | ★ |
| ☺ | ★ | ☼ | ❀ |

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

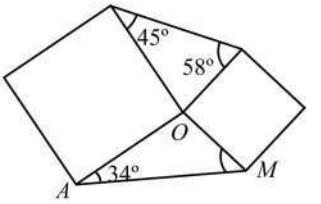
**(D)** Como ✋ = 7 y 7 + 7 = 14, entonces ★ puede ser 4 o 5 (si me llevara una), pero como nos dicen que es par, tenemos que ★ = 4, ☺ = 1 y ❀ = 8.
La luna ☾ tiene que ser menor que 5 porque si no, al hacer ☾ + ☾, me llevaría una y ★ sería impar. Probemos con cada caso. Si ☾ = 0 entonces ☼ también sería 0, pero cada letra debe ser un dígito diferente. ☾ = 1 no puede ser pues ☺ = 1. ☾ = 2 tampoco, pues sería ☼ = 4, pero ★ = 4, por esa misma razón no puede ser ☾ = 4. Así que sólo nos queda ☾ = 3. Si ☾ = 3 entonces ☼ = 6 que sí es posible. Conclusión: ☾ = 3.

| | 7 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| + | 7 | 3 | 4 |
| 1 | 4 | 6 | 8 |

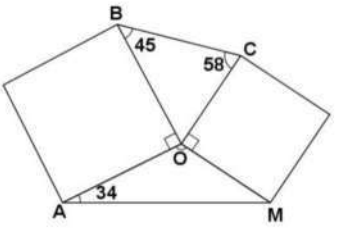
## 19 Nivel I — CP XI

La figura está formada por dos cuadrados y dos triángulos. El ángulo $A\hat{M}O$ mide:

**A)** 43º **B)** 39º **C)** 38º
**D)** 36º **E)** 35º




**(A)** Si supiéramos la medida del ángulo $A\hat{O}M$ el problema estaría resuelto. Para ello calculamos primero el ángulo $B\hat{O}C = 180 - (45 + 58) = 77º$.
Con este resultado es inmediato calcular el ángulo $A\hat{O}M$:
$A\hat{O}M = 360 - (90 + 90 + 77) = 103º$.
Y finalmente: $A\hat{M}O = 180 - (34 + 103) = 43º$.



## 20 Nivel I — CP XI

Inicialmente hay un "1" en la pantalla. Al apretar la tecla A se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al apretar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando solo las teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 53. ¿Cuántas veces, como mínimo, debes pulsar las teclas?

**A)** 4 **B)** 6 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 53

**(B)** Al pulsar la tecla A, el valor del número aumenta multiplicándose por 3 y al pulsar B disminuye en una unidad. Está claro que pulsando A sólo conseguimos múltiplos de 3. Pero como 53 no es múltiplo de 3, necesariamente tendremos que pasar por el 54 antes de alcanzar nuestro objetivo. Como $54 = 2 \times 3^3$, es posible obtener este número, a partir del 2, pulsando AAA, que es el mínimo número de pulsaciones para ir del 2 al 54. Solo falta obtener el 2 y el 53. El 2 se obtiene, a partir del 1 inicial, pulsando AB y el 53 se logra restando 1 al 54 mediante una pulsación de la tecla B. En ambos casos es obvio que hemos obtenido los números con las mínimas pulsaciones posibles. Conclusión: ABAAAB es la secuencia que lleva del 1 al 53 con el mínimo número de pulsaciones. No obstante, podría pensarse que es posible alcanzar el 54 por algún otro camino, sin pasar por el 2. Pero es inmediato comprobar que cualquier alteración en ese sentido conlleva un aumento del número de pulsaciones.

También podemos ver que ninguna de las $2^4 = 16$ opciones que se obtiene pulsando 4 teclas (AAAA, AAAB, AABA, …) nos llevará al 53. Por tanto, la solución es 6.

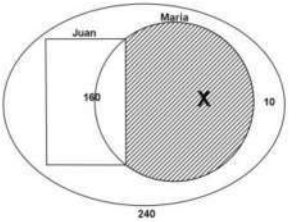
## 21 Nivel I — CP XII

María y Juan hacen la misma colección de cromos que consta de 240 cromos. María tiene 192 diferentes y Juan 160. Juntando sus cromos les faltarían aún 10 cromos para acabarla. ¿Cuántos cromos tiene María que no tiene Juan?

**A)** 32 **B)** 36 **C)** 38 **D)** 48 **E)** 70

PRIMERA SOLUCIÓN

**(E)** Para resolver este tipo de problemas suele ser muy útil ayudarse de diagramas como el de la figura, donde cada región plana representa un conjunto determinado de objetos.

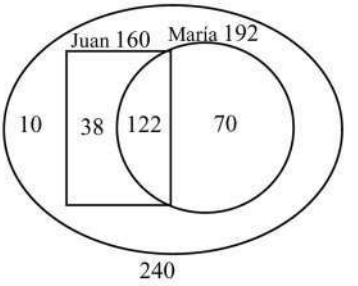



En nuestro caso:
La elipse representa la colección de 240 cromos.
El rectángulo representa los 160 cromos de Juan.
El círculo, los cromos de María.
La superficie de la elipse no ocupada por el rectángulo y el círculo, los 10 cromos que les faltan a Juan y María para completar la colección.
Y, finalmente, la zona rayada representa los $X$ cromos de María que no tiene Juan.
De la figura se deduce inmediatamente que: $X = 240 - (160 + 10) = 70$ cromos.

Conviene resaltar que no hemos necesitado conocer el número de cromos que tiene María.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(E)** Entre María y Juan tienen 352 cromos.
La colección consta de 240 cromos, pero a María y a Juan les faltan 10 cromos para terminarla, lo que quiere decir que cada uno tiene 122 cromos repetidos:
$(192 + 160) - (240 - 10) = 352 - 230 = 122$.
Conociendo el número de cromos repetidos se rellena fácilmente el diagrama y podemos contestar: María tiene 70 cromos que no tiene Juan.



## 22 Nivel I — CP XII

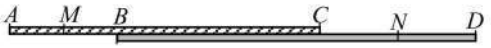
Sobre una línea recta hemos marcado cuatro puntos *A, B, C, D*, como indica el dibujo:

La distancia entre *A* y *C* son 12 m; y entre *B* y *D*, 18 m. ¿Qué distancia, en metros, separa los puntos medios de los segmentos *AB* y *CD*?

**A)** 15 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 6 **E)**

PRIMERA SOLUCIÓN

**(A)** A veces, para resolver un problema matemático, puede ser interesante pensar en algún artilugio mecánico que se adapte a él. Imaginemos los segmentos *AB* y *CD* como dos regletas articuladas en los puntos medios, *M* y *N,* de los segmentos *AB* y *CD*, según se muestra en la figura.




Hagamos ahora girar 180º las secciones de regleta *AM* y *ND* alrededor de los puntos *M* y *N*, como se muestra en la figura de abajo.

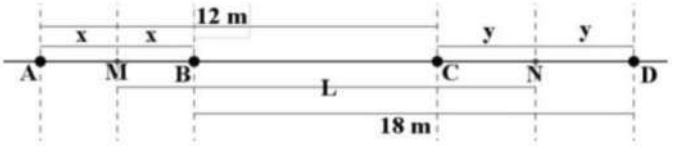
Dado que la longitud total de las regletas es 18 + 12 = 30 m, y esta no ha variado, es obvio que la distancia que separa los puntos medios *M* y *N* es 30 : 2 = 15 m.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(A)** Y, por supuesto, podemos resolver el problema de forma algebraica.
Basta observar atentamente la figura para plantear las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} L = 12 - x + y \\ L = 18 - y + x \end{cases}$$

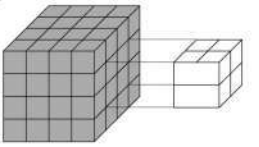
Sumando miembro a miembro tenemos que $2L = 12 + 18$ y, por tanto, $L = 15$ m.



## 23 Nivel I — CP XII

Con sesenta y cuatro cubitos blancos formamos un gran cubo y coloreamos sus caras de rojo. Después volvemos a deshacer el cubo en cubitos. ¿Cuántos cubitos pequeños seguirán teniendo todas sus caras blancas?

**A)** 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 4 **E)** Ninguno

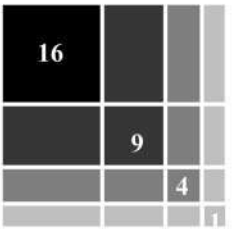


**(C)** Con 64 cubitos se forma un cubo de cuatro cubitos de lado. Si quitamos la *cáscara* pintada de rojo queda un cubo central de dos cubitos de lado, como muestra la figura.
Conclusión: solo quedan ocho cubitos completamente blancos.

## 24 Nivel I — CP XIII

El logo del Concurso de Primavera es un cuadrado formado por cuadrados y rectángulos. Si las áreas de los cuadrados son 16, 9, 4 y 1 $cm^2$, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del cuadrado total?

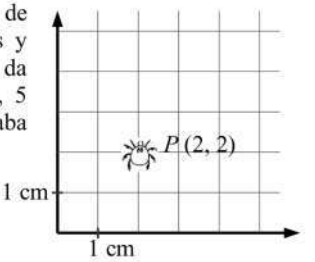
**A)** 100 **B)** 75 **C)** 64
**D)** 36 **E)** 25




**(A)** Nuestro logo no ofrece dificultad. Los lados de cada uno de los cuadrados miden respectivamente: $\sqrt{16} = 4\,\text{cm}$, $\sqrt{9} = 3\,\text{cm}$, $\sqrt{4} = 2\,\text{cm}$, $\sqrt{1} = 1\,\text{cm}$.
Por lo tanto, el lado del cuadrado total mide $4+3+2+1=10$ cm y su área será $10^2 = 100\,\text{cm}^2$.

## 25 Nivel I CP XIII

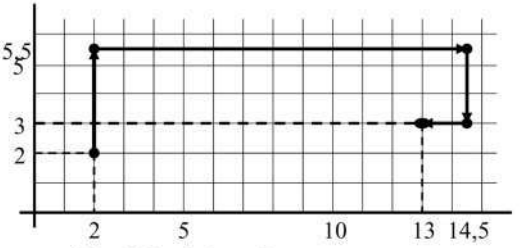
Un bichito está en el punto $P(2, 2)$ de unos ejes de coordenadas y comienza a dar saltitos horizontales y verticales de medio centímetro de longitud. Primero da 7 saltos hacia arriba, después 25 hacia la derecha, 5 hacia abajo y 3 hacia la izquierda. ¿En qué punto acaba su recorrido?




**A)** $A(13, 3)$ **B)** $B(3, 13)$ **C)** $C(4, 24)$
**D)** $D(24, 4)$ **E)** $E(3, 12)$

**(A)** PRIMERA SOLUCIÓN

Si no manejamos bien las coordenadas cartesianas podemos abordar el problema siguiendo uno a uno los pasos descritos en el enunciado.




[1º] 7 saltos hacia arriba: como cada salto es de 0,5 cm, recorrerá $7 \times 0{,}5 = 3{,}5$ cm. Lo representaremos por la primera flecha (vector) vertical y hacia arriba, de 3,5 cm de longitud.

[2º] 25 saltos hacia la derecha: lo representamos por el segundo vector (hacia la derecha) de longitud $25 \times 0{,}5 = 12{,}5$ cm.

[3º] 5 saltos hacia abajo: lo representamos por el siguiente vector (hacia abajo) de longitud $5 \times 0{,}5 = 2{,}5$ cm.

[4º] 3 saltos hacia la izquierda: lo representamos por el siguiente vector (hacia la izquierda) de $3 \times 0{,}5 = 1{,}5$ cm de longitud.

Finalmente queda a una distancia del eje vertical, de 13 cm y, a una distancia del eje horizontal de 3 cm. Decimos entonces que está en el punto $A(13, 3)$.

**(A)** SEGUNDA SOLUCIÓN

Si sabemos trabajar con las coordenadas el problema se resuelve más rápido.

En la dirección horizontal, el bichito, da 25 saltos hacia la derecha y 3 hacia la izquierda, de modo que se ha movido $25 - 3 = 22$ saltos hacia la derecha. De la misma forma, en sentido vertical se ha movido $7 - 5 = 2$ saltos hacia arriba.

Como cada salto es de 0,5 cm la posición final será:

Eje horizontal: $2 + 22 \times 0{,}5 = 13$. Eje vertical: $2 + 2 \times 0{,}5 = 3$.

Por lo tanto acaba en el punto $A(13, 3)$.

## 26 Nivel I — CP XIV

Merche quiere que la probabilidad de sacar una bola blanca de este saco sea 2/5 y para ello añade bolitas grises y blancas. ¿Cuántas bolitas grises como mínimo tiene que añadir?

**A)** Una **B)** Dos **C)** Tres
**D)** Cuatro **E)** Cinco

**(B)** En este caso es conveniente empezar por considerar fracciones numéricas, olvidando de momento, las bolas que representan. Debemos centrarnos en obtener 2/5 a partir de números mayores que 2 y 5. Es inmediato ver que la fracción, con números más pequeños, que se simplifica a 2/5 es 4/10, lo que significa que para que la probabilidad de sacar una bola blanca sea 2/5, el saco debe contener cuatro bolas blancas y seis grises como mínimo.
Dado que inicialmente había cuatro bolas grises, Merche tiene que añadir dos bolas grises como mínimo.

## 27 Nivel I — CP XIV

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | | 15 |
| | 15 | 3 |
| 12 | | 24 |

En cada una de las casillas del cuadrado hay un número entero. Si la suma de las tres horizontales, las tres verticales y las dos diagonales es la misma, ¿qué número hay en la casilla marcada con la letra $x$?

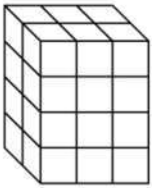
**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**(D)** Como $x$ pertenece a la vez a una columna y una diagonal, la suma de los dos elementos restantes, tanto de la columna como de la diagonal, deberá sumar lo mismo. En nuestro caso tendremos $z + 12 = 15 + 24$, es decir, $z = 27$, y ya con la segunda fila completa podemos calcular la suma común (que llamaremos $M$): $M = 27 + 15 + 3 = 45$, de donde $x = 45 - 15 - 24 = 6$.

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | | 15 |
| $z$ | 15 | 3 |
| 12 | | 24 |

Observa que en todo cuadrado mágico la constante mágica $M$, es decir, el valor de la suma de los números de cada fila, columna y diagonal es siempre igual al triple del valor de la casilla central. Esto es así porque si sumamos las dos diagonales más la fila y la columna centrales tendremos $4M$, pero como hemos sumado todos los números del cuadrado una vez, excepto el número de la casilla central (en nuestro caso, 15) que lo hemos sumado 4 veces y la suma de los 9 números es $3M$, tenemos que $4M - 3 \cdot 15 = 3M$, luego $M = 45$. Sabiendo esto, era fácil resolver el problema y, en realidad, nos hubieran sobrado datos.

**28** **Nivel I** **CP XV**



Con veinticuatro cubos de un centímetro de lado, Sofía ha construido un bloque como el de la figura, cuya base tiene un perímetro de 10 cm y su altura mide 4 cm. Santiago ha formado otro bloque usando cuarenta y dos cubos. Si el perímetro de la base es 18 cm, ¿cuántos centímetros mide la altura del bloque de Santiago?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

**(B)** Si el perímetro de la base mide 18 cm, la suma de los dos lados de la base (largo + ancho) será $18 \times 2 = 9$ cm.
Por otra parte, sabemos que 42 = largo × ancho × alto. Y, además, descomponiendo 42 en factores primos tenemos que $42 = 7 \times 2 \times 3$. Lo que obliga a que los lados de la base sean 7 y 2, debido a que su suma es 9.
Por tanto, la altura necesariamente mide 3 cm.

## 29 Nivel I — CP XV

Seis ejecutivos de una corporación europea se reúnen en Madrid para una conferencia.

– El Sr. A habla solo español e italiano. – La Sra. B habla solo español e inglés.
– El Sr. C habla solo inglés e italiano. – La Sra. D habla solo francés y español.
– El Sr. E habla solo italiano y francés. – La Sra. F habla solo inglés y francés.

¿De cuántas formas se pueden separar en tres grupos de dos, de manera que en todas las parejas las dos personas que las forman puedan hablar entre sí?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 24

**(B)** Para empezar construimos una tabla con los datos del enunciado; ponemos SÍ cuando ambos hablan un idioma común y NO en caso contrario.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | SÍ | SÍ | SÍ | SÍ | NO |
| B | SÍ | | SÍ | SÍ | NO | SÍ |
| C | SÍ | SÍ | | NO | SÍ | SÍ |
| D | SÍ | SÍ | NO | | SÍ | SÍ |
| E | SÍ | NO | SÍ | SÍ | | SÍ |
| F | NO | SÍ | SÍ | SÍ | SÍ | |

Si elegimos uno cualquiera de los ejecutivos vemos que solo puede estar con otros cuatro posibles. Tomemos, por ejemplo, el A. En este caso puede estar con B, C, D y E. Supongamos que está con B. Entonces quedan por agrupar los cuatro restantes: C, D, E y F que en principio se pueden agrupar, por parejas, de tres formas distintas.

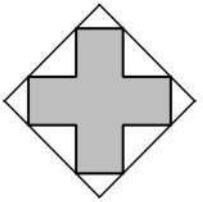
| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | SÍ | SÍ | SÍ | SÍ | NO |
| B | SÍ | | SÍ | SÍ | NO | SÍ |
| C | SÍ | SÍ | | NO | SÍ | SÍ |
| D | SÍ | SÍ | NO | | SÍ | SÍ |
| E | SÍ | NO | SÍ | SÍ | | SÍ |
| F | NO | SÍ | SÍ | SÍ | SÍ | |

La segunda tabla muestra claramente que una y solo una de las parejas no puede agruparse, lo que invalida una de esas tres formas. Con lo que para la agrupación (A, B) tenemos dos formas de agrupar los cuatro restantes, y lo mismo puede decirse de las otras tres posibles agrupaciones de A: (A, C), (A, D) y (A, E). En consecuencia, para cada una de las cuatro formas de agrupar A tendremos dos formas de agrupar los cuatro restantes. En total $4 \times 2 = 8$ formas.

Con ayuda de las tablas es bastante fácil determinar las ocho maneras de emparejarse:

[(A, B), (C, E), (D, F)] [(A, B), (C, F), (D, E)]
[(A, C), (B, D), (E, F)] [(A, C), (B, F), (D, E)]
[(A, D), (B, C), (E, F)] [(A, D), (B, F), (C, E)]
[(A, E), (B, C), (D, F)] [(A, E), (B, D), (C, F)]

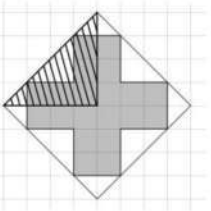
## 30 Nivel I — CP XVI



Una cruz compuesta por cinco cuadrados iguales está inscrita (como se ve en la figura) en un cuadrado. Si el perímetro de la cruz es de 24 cm, ¿cuál es, en $cm^2$, el área del cuadrado?

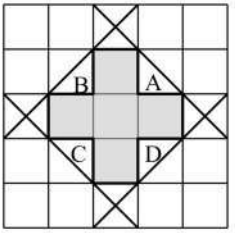
**A)** 24 **B)** 32 **C)** 36
**D)** 40 **E)** 48

PRIMERA SOLUCIÓN



**(B)** Dado que el perímetro de la cruz mide 24 cm y que tiene 12 lados iguales, la longitud del lado es 24 : 12 = 2 cm, con lo que el lado de cada cuadradito del teselado mide 1 cm.
Si nos fijamos ahora en el triángulo rectángulo equilátero (rayado) de la figura, vemos que sus dos catetos miden cada uno 4 cm y, además, su hipotenusa al cuadrado es justamente el área del cuadrado, pedida. Por consiguiente, el área del cuadrado es igual a: $4^2 + 4^2 = 32$ $cm^2$.

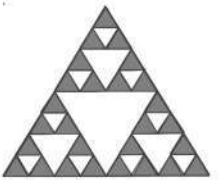
SEGUNDA SOLUCIÓN




**(B)** Para este tipo de problemas suele ser buena estrategia comenzar por sumergir la figura en un teselado sobre el que dibujar la figura original.
Si dibujamos la cruz sobre un teselado de cuadraditos de 2 cm de lado, como se muestra en la figura, es obvio que los triángulos A, B, C y D equivalen, en área, a 2 cuadraditos, y los 4 pequeños triángulos de los vértices a 1 cuadradito de la tesela. Por lo tanto, el área del cuadrado es: $(5 + 2 + 1) \times 4 = 32$ $cm^2$.

## 31 Nivel I — CP XVI

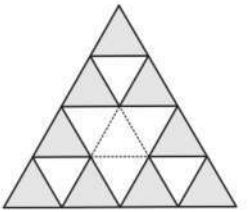
¿Qué fracción del triángulo está pintada de blanco?



**A)** $\frac{10}{37}$ **B)** $\frac{37}{64}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{23}{32}$

PRIMERA SOLUCIÓN

**(B)** El triángulo original está dividido en cuatro triángulos de igual área y, cada uno de ellos puede ser dividido en 16 pequeños triangulitos iguales. Así mismo vemos que el central tiene sus 16 triangulitos pintados de blanco, mientras que los otros tres, que son como el de esta figura, solo tienen 7 blancos cada uno. Tenemos pues $4 \times 16 = 64$ triangulitos, de los que $16 + 7 \times 3 = 37$ son blancos.



En consecuencia, la fracción pintada de blanco es $\frac{37}{64}$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(B)** Podemos enfocar el problema desde un punto de vista aritmético.

En el triángulo original tenemos triángulos blancos de tres tamaños distintos y, como ya hemos visto, el grande es la cuarta parte, en área, del original; cada uno de los tres triángulos intermedios es la cuarta parte del grande y, los nueve pequeños tienen la cuarta parte de superficie que los intermedios. En consecuencia, la fracción del triángulo que está pintada de blanco es:

$$\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{64}.$$

## 32 Nivel I — CP XVII

Juanito ha colocado seis tarjetas con números de dos cifras, pero una se ha quedado boca abajo. Solo recuerda que el número que había en ella no es ni el mayor ni el menor de los seis; que sus cifras coinciden con las cifras de otro de los números, pero en distinto orden y que es múltiplo de 3. ¿Cuál es la suma de las cifras del número de la tarjeta que está boca abajo?

**A)** 7 **B)** 12 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

**(D)** Si bailamos las cifras de los números visibles y eliminamos los que son de una cifra (04 y 06) y los que no son múltiplos de 3 (43), nos quedan el 75 y el 54. Pero como no puede ser ni el mayor ni el menor de la lista original, descartamos el 75 y nos queda necesariamente el 54. Sus cifras suman 9.
Puede observarse que, aun considerando válidas las tarjetas 04 y 06, también habría que desecharlas ya que 04 no es múltiplo de 3 y 06 sería la menor.

## 33 Nivel I — CP XVII

Don Retorcido está triste porque no os verá hasta el próximo año. Os deja este último reto: ¿Quién de vosotros será capaz de adivinar en qué año nací? Nací en el siglo XVII; si al año de mi nacimiento le suprimís la cifra de las unidades queda un número cuya raíz cuadrada no tiene decimales; ¡ah!, y la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas. Pero para chinchar aún más, cambio la pregunta: ¿cuánto suman las cifras de mi año de nacimiento?

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

**(D)** Don Retorcido nació entre los años 1600 y el 1699.
Para que quede un número cuadrado perfecto al eliminar la cifra de las unidades, la cifra de las decenas tiene que ser un 9, ya que 169 es el único cuadrado perfecto comprendido entre 160 y 169.
Por tanto, Don Retorcido habrá nacido entre los años 1690 y 1699.
Como la cifra de las unidades es una unidad menor que la de las decenas entonces su año de nacimiento es 1698. La suma de las cifras de 1698 es: $1 + 6 + 9 + 8 = 24$.

## 34 Nivel I — CP XVIII

Por allí vienen cuatro amigos, cada uno con un oficio diferente:

- Adrián y el profesor van discutiendo.
- Javier vive muy cerca del actor.
- Álvaro es el primo del pintor, que a su vez es vecino de Juan.
- El tenista es más alto que Juan y que el actor.
- Adrián y Álvaro jamás han jugado al tenis.

¿Cuál de los amigos es el actor?

**A)** Adrián **B)** Álvaro **C)** Javier **D)** Juan

**E)** No se sabe con certeza

**(B)** Veamos en primer lugar qué dice cada proposición sobre los oficios de los amigos: La 1ª dice que Adrián NO es profesor. La 2ª dice que Javier NO es actor. La 3ª dice que Álvaro y Juan NO son pintores. La 4ª dice que Juan NO es tenista NI actor. La 5ª dice que Adrián y Álvaro NO son tenistas.

Una forma de abordar el problema es construir una tabla de doble entrada. Pondremos SÍ o NO en cada casilla según corresponda.

| | Profesor | Actor | Pintor | Tenista |
|---|---|---|---|---|
| Adrián | **NO** | | | **NO** |
| Javier | | **NO** | | |
| Álvaro | | | **NO** | **NO** |
| Juan | | **NO** | **NO** | **NO** |

Teniendo en cuenta que cada amigo tiene uno y solo uno de los cuatro oficios, deducimos que en cada fila y en cada columna habrá un solo SÍ y tres NO. Rellenamos con este criterio y terminamos:

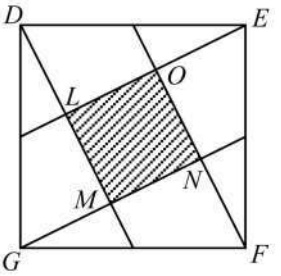
| | Profesor | Actor | Pintor | Tenista |
|---|---|---|---|---|
| Adrián | **NO** | **NO** | **SÍ** | **NO** |
| Javier | **NO** | **NO** | **NO** | **SÍ** |
| Álvaro | **NO** | **SÍ** | **NO** | **NO** |
| Juan | **SÍ** | **NO** | **NO** | **NO** |

Concluimos que Álvaro es el actor.

## 35 Nivel I CP XVIII

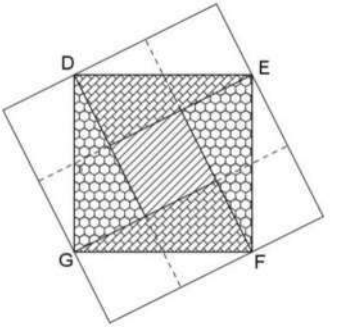
En el cuadrado *DEFG* de lado 10 cm hemos dibujado algunos segmentos uniendo vértices con puntos medios de los lados, y así hemos obtenido el cuadrado rayado *LMNO*. ¿Cuál es su área en $cm^2$?

**A)** 20 **B)** 25 **C)** 35
**D)** 40 **E)** 50



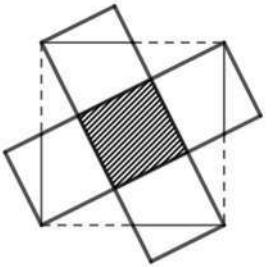

PRIMERA SOLUCIÓN

**(A)** En este tipo de problemas suele ser muy útil completar la figura de forma que quede dividida en partes iguales más pequeñas.
Completando el cuadrado, mediante el trazado de paralelas equidistantes como se muestra en la figura, se hace evidente que nuestro cuadrado original puede seccionarse en cinco polígonos de igual área que el cuadrado rayado: cuatro triángulos rectángulos y el cuadrado original *LMNO*.
Por tanto, el área del cuadrado mide la quinta parte de $10^2$, es decir, 20 $cm^2$.




SEGUNDA SOLUCIÓN

**(A)** Otra forma de resolverlo es girando los triangulitos blancos y recolocarlos para formar una cruz de cinco cuadrados iguales.
Como el área total mide $10^2 = 100$ $cm^2$, el área de cada cuadradito mide $100 : 5 = 20$ $cm^2$.



## 36 Nivel I — CP XVIII

Escribimos los números seguidos del 1 al 100: 12345678910111213…¿Qué cifra nos encontraremos en la posición cien?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 9

PRIMERA SOLUCIÓN

**(C)** Para números de dos cifras, a partir del 10, encontramos que la primera de sus cifras está en posición par, así que, en la posición cien, se hallará la primera cifra de cierto número $n$ de dos cifras. No es difícil ver que, al escribir desde el 1 hasta el 49, ocupamos $9 + 20 \times 4 = 89$ posiciones y como la decena de los *cincuenta* ocupa 20 posiciones, concluimos que en la posición 100 encontraremos la cifra 5.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(C)** Vamos a separar el número en bloques:
El primer bloque lo forman 123456789 y son en total 9 cifras.
El segundo bloque lo forman **10 11 12 13 14 15 16 17 18 19** y son 20 cifras (10 números de dos cifras, $10 \times 2$)
El tercer bloque lo forman los **20 21 22**....**29**.
El cuarto bloque lo forman los **30 31 32**....**39**.
El quinto bloque lo forman los **40 41 42**....**49**.
De esta manera, como $100 = 9 + 20 + 20 + 20 + 20 + 11$, la cifra que ocupa la posición 100 se encuentra en los CINCUENTA: **50 51 52 53 54 5,** entonces la cifra es 5.

## 37 Nivel I — CP XIX

En una bolsa hay sesenta bolas, unas son rojas, otras verdes y otras azules. Si saco una bola sin mirar, la probabilidad de que sea roja es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que sea azul es $\frac{3}{10}$. ¿Cuántas bolas verdes hay en la bolsa?

**A)** 6 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

**(B)** Las probabilidades que se dan en el enunciado permiten calcular de inmediato el número de bolas rojas y el número de bolas azules.
Como la probabilidad de sacar una bola roja es 1/2, la mitad de las bolas de la bolsa serán rojas y como en total hay 60 bolas, 30 son rojas.
Como la probabilidad de sacar una azul es 3/10, por cada 10 bolas debe haber 3 azules y como en total hay 60 (6 veces 10) bolas, 6 x 3 = 18 son azules.
El resto de las bolas son verdes, es decir $60 - (30 + 18) = 12$ bolas.

## 38 Nivel I CP XIX

Don Retorcido está que trina porque alguien ha desordenado sus números. Ha conseguido encontrar a cinco sospechosos, pero estos son muy astutos y deciden que solo uno de ellos contestará la verdad. ¡¿Quién ha sido el culpable?!, gritó don Retorcido.

☺ Arquímedes dijo: "ha sido Bernoulli." ☺ Bernoulli dijo: "ha sido Cantor."
☺ Cantor dijo: "Bernoulli miente." ☺ Diofanto dijo: "yo no he sido."
☺ Euclides dijo: "yo solo digo que dos más dos son nueve."

**A)** Arquímedes **B)** Bernoulli **C)** Cantor **D)** Diofanto **E)** Euclides

**(D)** Está claro que Euclides miente.
Comencemos pensando que Arquímedes es el único que dice la verdad. Entonces Bernoulli miente y Cantor también estaría diciendo la verdad, lo cual no puede ser.
Pensemos ahora que es Bernoulli el único que dice la verdad. En ese caso Diofanto también diría la verdad, pues el culpable sería Cantor y no él, y esto no puede ser.
Si Cantor es el único que dice la verdad, entonces Diofanto miente y, por tanto, ha sido Diofanto y el resto también miente. Parece que hemos hallado nuestra solución y ha sido Diofanto quien ha desordenado los números de Don Retorcido.
¿Podría ser que Diofanto fuera el único que dice la verdad? No, esto no es posible pues o bien Bernoulli o bien Cantor también dirían la verdad.

## 39 Nivel I — CP XX

Ana hace abdominales cada cuatro días, baila cada cinco días y juega al tenis cada seis, excepto los días que le coinciden dos o las tres actividades, que las sustituye por salir a correr. Hoy le han coincidido las tres, así que ha salido a correr. ¿Cuántas veces hará abdominales en los próximos cien días?

**A)** 25 **B)** 20 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 12

**(D)** Es obvio que tenemos que restar a los días en que le toca hacer abdominales, los días en los que además le toca bailar más aquellos en los que, además de abdominales, le toca jugar al tenis. Pero haciendo esto habremos restado dos veces los días en los que haya tres coincidencias, por lo que tendremos que sumar esos días.

En los próximos 100 días le toca hacer abdominales 25 días porque $100 : 4 = 25$.

Dado que el mcm de 4 y 5 es 20, en esos mismos días tendrá $100 : 20 = 5$ coincidencias de abdominales con baile.

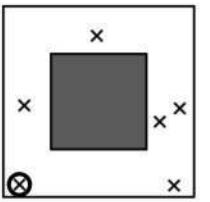
Como el mcm de 4 y 6 es 12 y, al dividir 100 entre 12 obtenemos: $100 = 12 \times 8 + 4$, existirán 8 coincidencias de abdominales y tenis.

Y como el mcm de 4, 5 y 6 es 60, en los próximos 100 días, hay 1 día de triple coincidencia que lo hemos contado dos veces.

Por tanto, el número de días que hará abdominales es: $25 - 5 - 8 + 1 = 13$.

## 40 Nivel I — CP XX

Seis amigos juegan al escondite en una habitación con una gran columna central. Ana no puede ver a nadie. Dani ve a Emilio y a Bea. Bea puede ver a tres personas. Emilio solo ve a Dani. Carla y Fani son gemelas. ¿Cuál de ellos es el que está en el redondelito?



**A)** Bea **B)** Carla **C)** Dani
**D)** Emilio **E)** Fani

**(C)** Realmente hubiese bastado que nos dijesen "Emilio solo ve a Dani", ya que el único que ve solamente a otro es el situado verticalmente encima del redondelito. Luego en el redondelito está Dani.

## 41 Nivel I — CP XX

Hansel y Gretel salieron de casa y fueron tirando una miguita de pan cada medio metro, pero los pajarillos se comieron tres cuartos de las migas y solo quedaron 1200. ¿Cuántos kilómetros recorrieron?

**A)** 2,4 **B)** 1,5 **C)** 9,6 **D)** 4,8 **E)** 4,5

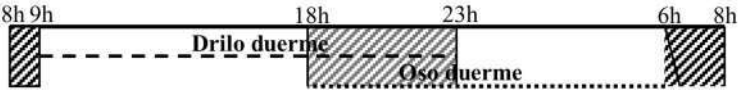
**(A)** Como los pájaros se comieron tres cuartos de las migas, dejaron un cuarto sin comer, esto es, las 1200 que quedaron suponen la cuarta parte de las migas que tiraron Hansel y Gretel, así que el total de migas tiradas es $4 \times 1200 = 4800$. Dado que han arrojado una miguita cada medio metro, el total de los metros recorridos ha sido: $48000 \times \frac{1}{2} = 2400$ m = 2,4 km.

## 42 Nivel I — CP XXI

Este es Osodrilo. La parte Oso duerme de 18:00 a 6:00 y la parte Drilo duerme de 9:00 a 23:00. Mientras uno duerme y el otro no, ocurre lo siguiente: si Drilo duerme, Oso camina hacia el norte a 10 km/h, y si Oso duerme, Drilo camina hacia el sur a 2 km/h. Cuando ambos están despiertos comen y charlan. Ahora son las 8:00 y están desayunando en un claro del bosque.
¿A qué distancia del claro estarán dentro de 24 horas?

**A)** 120 km **B)** 72 km **C)** 76 km **D)** 192 km **E)** 114 km

**(C)** Queremos saber la distancia recorrida en 24 horas, por lo que debemos estudiar lo que sucede desde las 8 de la mañana de un día hasta las 8 del día siguiente.
Es importante tener en cuenta las horas en las que se producen los cambios de dormir a no dormir y viceversa de Oso y de Drilo. Estas horas, ordenadas desde las 8 de la mañana son: las 9, las 18, las 23 y las 6, como se muestra en el esquema temporal siguiente:



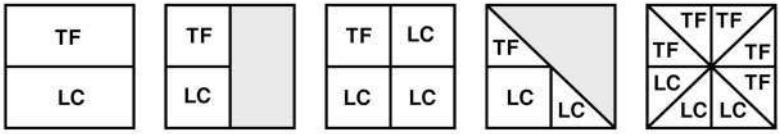

Hemos rayado las horas en las que ambos están dormidos o ambos despiertos para indicar que en esos tramos recorren 0 km.
Solo resta calcular lo que recorren hacia el norte y hacia el sur:
De 9 a 18, Drilo duerme y Oso está despierto, por lo que recorre 10 km cada hora hacia el norte. Como en ese periodo de tiempo transcurren 9 horas, recorre $10 \times 9 = 90$ km hacia el norte.
De 23 a 6, Oso duerme y Drilo está despierto, por lo que recorre 2 km cada hora hacia el sur. Como en ese periodo de tiempo transcurren 7 horas, recorre $2 \times 7 = 14$ km hacia el sur.
Resumiendo lo que ocurre en 24 horas: Osodrilo recorre 90 km hacia el norte y 14 km hacia el sur. Por tanto, transcurrido ese tiempo se encontrarán a 76 km del claro, puesto que $90 - 14 = 76$ km.

## 43 Nivel I — CP XXII

En mi fiesta de cumpleaños Juan mezcló en un vaso *Trinafantus* con *Loca-Cola* al 50%. Olivia se bebió la mitad de la mezcla y, para disimular, rellenó el vaso con *Loca-Cola*. Después vino Rafa, se bebió la mitad y volvió a disimular rellenando el vaso con *Trinafantus*. ¿Qué fracción del líquido es ahora *Loca-Cola*?

**A)** $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

**(A)** Para facilitar la resolución del problema, nombramos *Trinafantus* con TF y *Loca-Cola* con LC.
Seguimos estos pasos:
En el vaso de Juan hay 1/2 (50%) de TF y 1/2 (50%) de LC.
Después de que Olivia bebiese la mitad del contenido quedan en el vaso un cuarto (1/4) de TF y un cuarto (1/4) de LC.
A continuación, rellena el vaso con 1/2 de LC. Ahora en el vaso hay un cuarto (1/4) de TF y tres cuartos (3/4) de LC.
Después de que Rafa bebiese la mitad del contenido de vaso, queda un octavo (1/8) de TF y tres octavos (3/8) de LC.
Finalmente rellena el vaso con 1/2 de TF. El vaso contiene 5/8 de TF y 3/8 de LC
Quedan en el vaso tres octavos (3/8) de Loca-Cola.
Puede resultar de ayuda tratar geométricamente el problema mediante un esquema como el de la figura.



## 44 Nivel I — CP XXII

Belén y Harry juegan al quién es quién con números. Belén ha elegido uno de estos dieciséis números. Harry hizo tres preguntas, Belén contestó afirmativamente a todas y con eso Harry supo con certeza absoluta cuál era el número. Si las dos primeras preguntas fueron ¿es un número par? y ¿la suma de sus cifras es menor que 16? ¿Cuál pudo ser la tercera pregunta?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 777 | 495 | 1000 | 888 |
| 301 | 238 | 658 | 735 |
| 357 | 26 | 764 | 336 |
| 154 | 343 | 922 | 989 |

**A)** ¿Es múltiplo de 4? **B)** ¿Una de sus cifras es 6?
**C)** ¿Es múltiplo de 7? **D)** ¿La suma de sus cifras es mayor que 18?
**E)** ¿La cifra de las unidades es 8?

**(E)** La respuesta afirmativa a las dos primeras preguntas selecciona los números 1000, 238, 26, 336, 154 y 922. En principio, la pregunta E resuelve el problema pues solo el número 238 se ajusta a ella.
No obstante, podemos comprobar que entre los números seleccionados hay dos múltiplos de 4 (1000 y 336) y que otros dos incluyen la cifra 6. Además, ninguno es tal que la suma de sus cifras es mayor que 18 y hay 3 múltiplos de 7 (238, 336 y 154). Confirmamos pues que la tercera pregunta es la E.

## 45 Nivel I — CP XXII

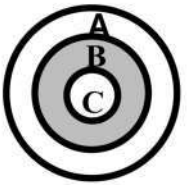
Hada y Adán son dos tortolitos muy enamorados y el día de San Valentín se regalaron estas sumas. Si letras distintas representan cifras distintas, ¿cuánto vale la suma **N** + **I** + **D** + **O**?

$$\begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ \hline A & D & A & N \\ \hline O & N & D & A \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & A & M & O \\ & + & & A \\ \hline H & A & D & A \\ \hline M & I & M & O \end{array}$$

**A)** 13 **B)** 15 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 20

**(E)** La columna de las unidades de la segunda suma implica A = 0 o A = 5.
Si A = 0, mirando la columna de las decenas de la segunda suma obtendríamos D = 0, pero como letras distintas representan números distintos, desechamos esa solución.
Si A = 5, la columna de los millares de la primera suma conduce a O = 6. A continuación la columna de las unidades de la primera suma lleva a N = 4; la columna de los millares de la primera suma hace D = 9; la columna de las decenas de la primera suma implica M = 3 y la columna de los millares de la segunda suma hace I = 1.
Por tanto, N + I + D + O = 4 + 1 + 9 + 6 = 20.

## 46 Nivel I CP XXIII

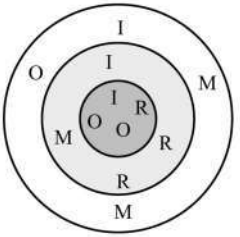



Lanzando tres dardos a la diana Marta clavó dos en A y uno en B y obtuvo 36 puntos. Con dos dardos en B y uno en C, Rafa obtuvo 56 puntos y Olivia obtuvo 58 puntos con dos dardos en C y uno en A. ¿Cuántos puntos obtuvo Irene con un dardo en A, otro en B y otro en C?

**A)** 42 **B)** 46 **C)** 48

**D)** 50 **E)** 54

**(D)** Si nos fijamos bien, el problema es muy sencillo. Más aún si nos ayudamos de un esquema como el de la figura, donde la inicial de cada uno de los nombres representa el dardo que ha lanzado.



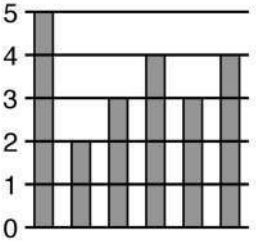

Vemos con claridad que entre los tres (Marta, Rafa y Olivia) han clavado 3 dardos en cada zona, y han sumado 36 + 56 + 58 = 150 puntos en total.

Esto implica que tres dardos, repartidos en las tres zonas, suman 150 : 3 = 50 puntos.

Dado que Inés ha clavado un dardo en cada zona, sumará 50 puntos.

## 47 Nivel I CP XXIII

En este gráfico Julia anotó los puntos de sus últimos seis partidos de baloncesto. ¿Qué media alcanzó?




**A)** 4 **B)** 2,75 **C)** 3,5

**D)** 4,2 **E)** 3

**(C)** Basta saber leer en la gráfica la puntuación de cada partido y hacer la media aritmética de los seis números leídos: $\frac{5+2+3+4+3+4}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$ .

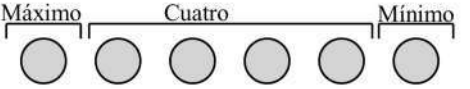
## 48 Nivel I — CP XXIV

Tengo seis monedas. Escogiendo cinco de ellas puedo sumar como máximo 1,50 euros y como mínimo 1,10 euros. ¿Cuánto dinero tengo en total?

**A)** 2,60 € **B)** 1,70 € **C)** 2,20 € **D)** 1,60 € **E)** 1,90 €

PRIMERA SOLUCIÓN

**(D)** Escoger cinco monedas entre seis de forma que sumen lo máximo posible equivale a quitar una de mínimo valor. Y escoger cinco de modo que sumen lo mínimo posible equivale a retirar una moneda de máximo valor:




Quitar la moneda de mínimo valor conduce a "Máximo" + "Cuatro" = 1,50 €.
Quitar la moneda de máximo valor conduce a "Cuatro" + "Mínimo" = 1,10 €.
Por tanto, la diferencia entre la moneda mayor y la menor es 1,50 – 1,10 = 0,40 €.
Dado que las monedas posibles son de 2 €; 1 €; 0,50 €; 0,20 €; 0,10 € y 0,05 €, comprobamos que la única forma de conseguir que la diferencia de dos monedas sea 0,40 € es que una sea de 0,50 € y la otra de 0,10 €. Por consiguiente, la moneda de mayor valor es de 0,50 € y la de menor valor es de 0,10 €.
Si a la igualdad "Máximo" + "Cuatro" = 1,50 € le sumamos la moneda menor tenemos ya la cantidad total de dinero:
"Máximo" + "Cuatro" + "Mínimo" = 1,50 + 0,10 = 1,60 €.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(D)** La diferencia entre 1,50 y 1,10 es 0,40, por lo que la diferencia entre las monedas que no se cogen al sumar las cinco es de 0,40 €. De esta manera ya sabemos que la moneda o una de las monedas de mayor cuantía es de 0,50 € y la moneda o una de las monedas de menor cuantía es 0,10 €:
0,10 €, Moneda 2, Moneda 3, Moneda 4, Moneda 5, 0,50 €.
Como la menor suma es 1,10 €, entonces:
Moneda 2 + Moneda 3 + Moneda 4 + Moneda 5 = 1 €.
Todas de 0,10 € sería imposible porque suma 0,40 € y todas de 0,20 € también por sumar 0,80 €, por ello, una de ellas tiene que ser de 0,50 €, la Moneda 5 es de 0,50 €.
Y las tres restantes tiene que sumar 0,50 € y la única manera es 0,10 €, 0, 20 € y 0,20 €.
Recojamos lo que hemos obtenido hasta el momento:
0,10 €; Moneda 2 = 0,10 €; Moneda 3 = 0,20 €; Moneda 4 = 0,20 €; Moneda 5 = 0,50 €; 0,50 €.
Sumamos todas ellas 0,10 € + 0,10 € + 0,20 € + 0,20 € + 0,50 € + 0,50 € = 1,60 €.

## 49 Nivel I — CP XXIV

Estás viendo una tabla de multiplicaciones de números de una cifra {**C**, **A**, **T**, **D**, **O**, **G**}. Si el número 28 está entre las multiplicaciones resultantes, ¿cuánto suman los tres productos que hay en la columna de la **T**?

| | ***C*** | ***A*** | ***T*** |
|---|---|---|---|
| ***D*** | 3 | | |
| ***O*** | 18 | | |
| ***G*** | | 14 | |

**A)** 38 **B)** 52 **C)** 40
**D)** 56 **E)** 36

**(D)** Partamos en primer lugar de los números 3 y 18 obtenidos de las igualdades: $D \times C = 3$; $O \times C = 18$ y no olvidemos que todas las letras representan números de una cifra.

La primera igualdad nos dice que la pareja $(D, C)$ es (1, 3) o (3, 1). Pero si $C = 1$ la segunda lleva a $O = 18$ y como esto es imposible, tenemos que $C = 3$ y, por tanto, $D = 1$ y $O = 6$.

Al objeto de facilitar los cálculos recogemos estos resultados en la tabla adjunta.

| | **3** | ***A*** | ***T*** |
|---|---|---|---|
| **1** | 3 | | |
| **6** | 18 | | |
| ***G*** | | **14** | **28** |

Tomemos ahora el número 14. Este se descompone de forma única como $14 = 2 \times 7 = G \times A$, lo que nos dice que $(G, A)$ es (2, 7) o (7, 2). Ahora utilizaremos el 28 para decidir el valor de la pareja $(G, A)$, pero necesitamos conocer la casilla que ocupa.

El 28 no puede estar en la primera fila porque entonces $A$ o $T$ serían 28. Tampoco puede estar en la segunda por no ser múltiplo de 6, y no puede ocupar la primara casilla de la tercera fila por no ser múltiplo de 3. En consecuencia, 28 ocupa la tercera casilla de la tercera fila.

Tenemos al fin: $G \times A = 2 \times 7$ y $G \times T = 28$. Pero $G$ no puede ser 2 porque entonces $T$ sería 14.

Por lo tanto, $G = 7$; $A = 2$ y $T = 4$.

Disponemos ya de la tabla completa. Los tres productos de la tercera columna suman:

$(1 \times 4) + (6 \times 4) + (7 \times 4) = 4 + 24 + 28 = 56$.

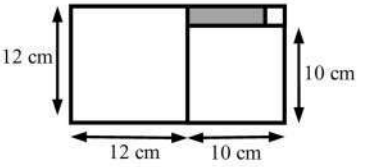
| | **3** | **2** | **4** |
|---|---|---|---|
| **1** | 3 | 2 | 4 |
| **6** | 18 | 12 | 24 |
| **7** | 21 | 14 | 28 |

## 50 Nivel I CP XXIV

Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene el rectángulo gris?

**A)** 16 **B)** 18 **C)** 12 **D)** 14 **E)** 20

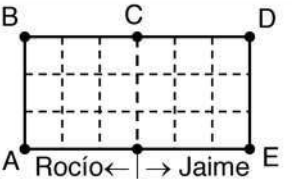
**(A)** El lado del cuadrado mayor mide 12 cm y, por tanto, el del cuadrado mediano mide 10 cm. Así podemos saber ya que el cuadrado menor tiene 2 cm de lado. Por tanto, el rectángulo gris tiene una base de 8 cm y una altura de 2 cm, por lo que su área mide 16 $cm^2$.



# Soluciones - Nivel II

## 1 Nivel II — CP I

Rocío siempre camina el doble de rápido que Jaime. Si parten del punto señalado en sentido contrario, y van dando vueltas a la parcela rectangular de la figura, de 18 cuadrados de área, cuando se encuentren por primera vez, el punto más próximo de los indicados será:

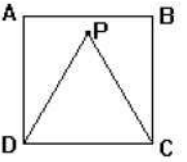



**A)** A **B)** B **C)** C
**D)** D **E)** E

**(D)** El perímetro de la figura es 18 y como Rocío recorre dos lados de cuadrado por cada uno que recorre Jaime, cuando Jaime haya recorrido $x$ Rocío habrá recorrido $2x$, siendo $2x + x = 18$, es decir $x = 6$ y contando 6 lados desde el punto de partida en el sentido de Jaime, llegamos a que, de los puntos dados, el más cercano del punto de encuentro es el $D$.

## 2 Nivel II — CP II

$ABCD$ es un cuadrado y $P$ un punto dentro del cuadrado tal que $CDP$ es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo $P\hat{B}C$ ?




**A)** 75º **B)** 70º **C)** 60º **D)** 45º
**E)** No hay suficiente información

**(A)** El ángulo $P\hat{C}B$ mide 30º y el triángulo $CPB$ es isósceles siendo $180 - 30 = 150º$ la suma de los dos ángulos iguales, así que el ángulo $P\hat{B}C$ mide $150 : 2 = 75º$ .

## 3 Nivel II — CP III

Las catorce cifras de una tarjeta de crédito están escritas en los cuadrados de abajo. Si la suma de tres cifras consecutivas cualesquiera es 20, ¿cuál es el valor de $x$?

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 9 | | | | $x$ | | | | 7 | | |

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**(B)** Llamemos $a$, $b$, $c$ a las cifras de los cuadrados que hay entre 9 y $x$.

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 9 | $a$ | $b$ | $c$ | $x$ | | | | 7 | | |

Entonces $9 + a + b = 20 = a + b + c$, de donde se sigue que $c = 9$. Llamemos ahora $d$, $e$, $f$ a las cifras de los cuadrados que hay entre $x$ y 7.

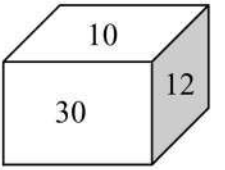
| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 9 | $a$ | $b$ | $c$ | $x$ | $d$ | $e$ | $f$ | 7 | | |

Razonando de la misma manera, $d + e + f = 20 = e + f + 7$, concluimos que $d = 7$.

Por último, como $c + x + d = 20$ y ya sabemos que $c = 9$ y $d = 7$, entonces, $x = 4$.

## 4 Nivel II — CP III

Las áreas de tres de las caras de esta caja en forma de paralelepípedo son 10, 12 y 30 cm$^2$. ¿Cuál es, en cm$^3$, el volumen de la caja?

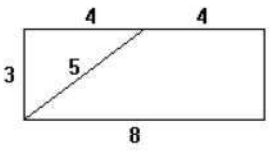



**A)** 60 **B)** 52 **C)** 3600
**D)** 300 **E)** 120

**(A)** Llamando $a$, $b$ y $c$ a las dimensiones en cm de la caja, sé que $ab = 30$, $bc = 12$, $ac = 10$, por lo que multiplicando esas tres igualdades, llegamos a que $(abc)^2 = 3600$.
Por tanto, el volumen de la caja, que es el producto de sus tres dimensiones, $abc$, será 60 cm$^3$.

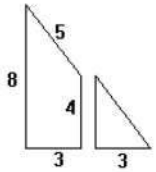
## 5 Nivel II — CP IV

Cortamos un rectángulo de $3 \times 8$ en dos piezas, como se indica en la figura, y las recolocamos para formar un triángulo rectángulo con los dos trozos. Uno de los lados de este triángulo resultante mide:




**A)** 9 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 5

**(B)** Colocando las piezas como indica la figura, un lado del triángulo mide 6 y la respuesta es B.




## 6 Nivel II — CP IV

¿En cuántos ceros acaba el producto $25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$?

**A)** 3 **B)** 6 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 12

**(C)** Cada cero del producto vendrá de la existencia de un factor 5 y un factor 2. Como en el número dado hay 3 ochos, habrá 9 doses y aunque haya 14 cincos (7 veinticincos), habrá sólo 9 parejas de doses y cincos, por lo que el número dado acabará en 9 ceros.

## 7 Nivel II — CP V

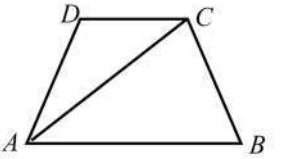
¿Para cuántos enteros positivos $n$ es verdadero que $\frac{n+17}{n-7}$ es un número entero positivo?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**(E)** Al dividir $n + 17$ entre $n - 7$, descomponemos la fracción $\frac{n+17}{n-7}$ como $1+\frac{24}{n-7}$. Así pues, hay que encontrar los números enteros $n$ tales que $n - 7$ sea un divisor de 24. Como 24 tiene por divisores (1, 24), (2, 12), (3, 8) y (4, 6), es decir, 8 divisores, existen 8 valores de $n - 7$ que son divisores de 24. Por tanto, hay 8 valores de $n$ que cumplen la condición pedida.

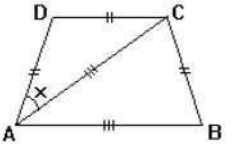
## 8 Nivel II CP V

En el trapecio de la figura nos dicen que $AD = DC = CB$ y que $AB = AC$. ¿Cuánto mide el ángulo $\hat{D}$?




**A)** 108º **B)** 120º **C)** 130º
**D)** 150º **E)** Faltan datos

**(A)** Si llamamos $x$ al ángulo $C\hat{A}D$, tenemos que, como $AD = DC$, el triángulo $ADC$ es isósceles y el ángulo $A\hat{C}D$ también es $x$. Al ser $A\hat{C}D$ y $B\hat{A}C$ alternos internos, $B\hat{A}C$ también es $x$.

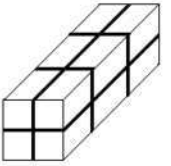



Por otra parte, $ABCD$ es un trapecio isósceles, por lo que el ángulo $A\hat{B}C$ es igual al ángulo $B\hat{A}D$, es decir, $2x$. Y por ser $AB = AC$, el ángulo $A\hat{C}B$ es también $2x$, de modo que $B\hat{C}D = C\hat{D}A = 3x$.

Así pues, $3x + 3x + 2x + 2x = 360 \Rightarrow x = 36^\circ$ y el ángulo $\hat{D}$, que es $A\hat{D}C$ mide $3 \cdot 36 = 108^\circ$.

## 9 Nivel II CP VI

Una caja está cerrada con una cinta adhesiva como indica la figura. Si las dimensiones de la caja son $10 \times 10 \times 30$ cm, ¿Cuántos cm de cinta adhesiva hemos gastado?



**A)** 200 **B)** 240 **C)** 250
**D)** 260 **E)** 300

**(E)** Fijándonos en el dibujo se aprecia que vemos justo la mitad de la caja, así que podemos contar la cinta adhesiva que vemos y multiplicar por dos. Vemos 120 cm de cinta, luego el total de cinta empleada es 240 cm.

## 10 Nivel II CP VI

Tenemos tres cajas, una blanca, una amarilla y una verde y tres objetos: una moneda, una canica y una peonza. Cada caja contiene un objeto. La caja verde está a la izquierda de la blanca y la amarilla a la derecha de la canica. Si la peonza está en la caja que está a la derecha de la amarilla, ¿en qué caja está la moneda?

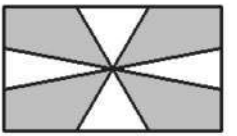
**A)** En la amarilla **B)** En la verde **C)** En la blanca

**D)** Faltan datos **E)** Los datos son contradictorios

**(A)** En estos problemas de lógica debemos ser muy meticulosos para no dejarnos ningún caso por analizar y así poder descartar los que no cumplan las condiciones del enunciado. Podemos empezar fijándonos en los colores de las cajas (B, A, V).
Los seis casos posibles son: ABV, AVB, BAV, BVA, VAB, VBA y descartamos todos aquellos en los que V no esté a la izquierda de B, por lo que solo nos quedan tres casos: AVB, VAB, VBA.
Como A debe estar a la derecha de un caja (la que tiene la canica), descartamos AVB y ya solo nos quedan VAB y VBA. Como la peonza está a la derecha de A debemos descartar VBA y ya solo nos queda VAB.
La situación es, por tanto: V (canica), A (moneda), B (peonza).
La moneda está en la caja amarilla.

## 11 Nivel II CP VI

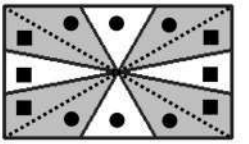
La bandera de la figura se usa en los barcos. Los lados del rectángulo están divididos en tres partes iguales. ¿Cuál es el cociente entre la parte blanca y la parte sombreada?



**A)** 1 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{1}{3}$

**D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**(B)** Si trazamos las diagonales del rectángulo se forman un buen número de triángulos.



Los que tienen un círculo tienen todos ellos la misma área. ¿Por qué? Porque tienen la misma base y la misma altura.
Y los que tienen un cuadradito también son todos ellos de igual área por la misma razón.
Y ya solo queda contar: los triángulos blancos tienen 2 cuadrados y 2 círculos; y los triángulos grises tienen 4 cuadrados y 4 círculos. Así pues, la parte blanca es la mitad de la parte gris.

## 12 Nivel II — CP VII

Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en14 789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?

**A)** 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

**(B)** Por construcción, el nuevo número tiene dos cifras más que el primero y además al restarle éste sigue teniendo dos cifras más. Así si ha aumentado en 14789 nuestro número de partida era de tres cifras *abc*. Basta plantear la suma en la forma habitual para hallar que $c = 2$, $b = 3$, a = 5.

El número original es 532 y sus cifras suman 10.

$$\begin{array}{r} 1\ 4\ 7\ 8\ 9 \\ +\ a\ b\ c \\ \hline 1\ a\ b\ c\ 1 \end{array}$$

## 13 Nivel II — CP VII

Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5?

**A)** $\frac{1}{36}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{6}$ **D)** $\frac{11}{36}$ **E)** $\frac{1}{3}$

**(D)** Para que el producto de los números sea múltiplo de 5, uno de ellos debe ser múltiplo de 5. De los 36 casos posibles (hay que tener en cuenta el orden para que sean equiprobables), once son favorables: 6 casos en que en el primer dado sale un 5, y 5 casos en que en el primer dado no sale un 5 pero el segundo sí sale un 5.

## 14 Nivel II — CP VIII

En una tienda nos venden discos y comics a precio fijo cada producto y exacto en euros. Si 5 comics y 2 discos cuestan menos de 15 euros, y 3 comics y 4 discos más de 12 euros, ¿cuál de las siguientes afirmaciones tiene que ser cierta?

**A)** Cuestan más los discos **B)** Cuestan más los comics

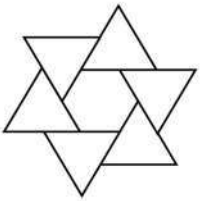
**C)** Un disco cuesta menos de 3 euros **D)** Un comic y un disco cuestan 4 euros

**E)** Si no cuestan lo mismo, al menos hay dos euros de diferencia.

**(E)** Podemos intentar resolver el problema por exclusión. Una ojeada nos dice que una posible solución sería que comics y discos costaran 2 € cada uno. Eso excluye las soluciones A) y B). ¿Podría un disco costar 3 €? En ese caso, por la primera condición, los comics valdrían 1 €, y eso es compatible con la segunda condición. Luego C) no tiene por qué ser cierto. Hasta ahora las dos soluciones encontradas verifican D) y E). ¿Y costar un disco 4 €? Podría ser, los discos 4 € y los comics 1 €. Sólo nos queda E) y ya no hay más soluciones (salvo que los comics nos los regalen, lo cual no parece que se contemple en el enunciado, pero incluso en ese caso se cumpliría E).

## 15 Nivel II — CP VIII

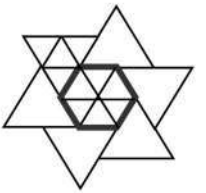
El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?



**A)** $\frac{1}{6}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{3}{4}$

**D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**(D)** La división del hexágono central y de los triángulos en triangulitos iguales nos da la relación de las áreas pedidas, $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

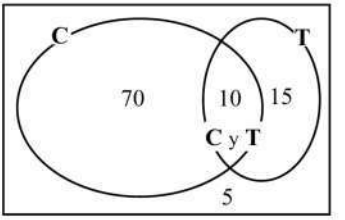


## 16 Nivel II — CP IX

En una encuesta, cuatro de cada cinco personas responden que les gusta el cine, una de cada cuatro que les gusta el teatro, y sólo al 10% les gusta el cine y el teatro. ¿A qué proporción no les gusta ninguno de los dos espectáculos?

**A)** $\frac{1}{15}$ **B)** $\frac{4}{75}$ **C)** 1 % **D)** 5% **E)** $\frac{1}{12}$

**(D)** Si tomamos un total de 100 personas y dibujamos el correspondiente diagrama de Venn:




Cine y Teatro: 10

Cine: $\frac{4}{5}\times 100 = 80 \quad (10+70)$.

Teatro: $\frac{1}{4}\times 100 = 25 \quad (10+15)$.

Ni Cine ni Teatro: $100 - (70+15+10) = 100 - 95 = 5 \Rightarrow 5\ \%$.

## 17 Nivel II — CP IX

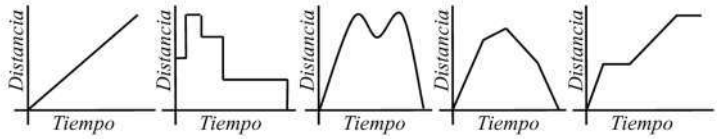
El camino desde la casa de Alicia a la de su amiga Sara tiene 57 árboles. Un día que Alicia va a ver a Sara, marca con un lazo rojo (empezando por el primero) un árbol sí y uno no. A la vuelta, marca (empezando también por el primero) uno sí y dos no. Como es lógico, en algún árbol quedarán dos lazos, pero, ¿cuántos no tendrán ninguno?

**A)** 15 **B)** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

**(E)** Numerando los árboles desde la casa de Alicia a la ida ha puesto lazos en los impares, y a la vuelta lo ha hecho en los números 57, 54, 51, ... , es decir en los múltiplos de 3. Quedarán sin lazo los pares que no sean múltiplo de 3. Del 1 al 57 hay 28 pares. Los múltiplos de 3 son el 6, 12, ... , y el 54 (nueve en total). Por tanto se quedaron sin lazo 19 árboles.

## 18 Nivel II — CP X

María sale a correr desde la esquina $J$ del campo rectangular $JKLM$ yendo en este sentido: $J - K - L - M - J -$... ¿Qué gráfica de las siguientes representa la distancia en cada instante al punto de partida?




**(D)** Cuando María sale, la distancia al punto de partida es cero y eso vuelve a ocurrir cuando completa una vuelta. Sólo dos gráficas tienen dos veces distancia cero. Pero la distancia a $J$ aumenta hasta llegar a $L$ y luego disminuye hasta llegar a $J$. Ese comportamiento sólo lo refleja la gráfica $D$.

## 19 Nivel II — CP XI

Zipi sólo miente los lunes, martes y miércoles, y Zape sólo miente los jueves, viernes y sábados. Un día los dos hermanos tuvieron esta charla: "Ayer me tocó mentir" dijo Zipi. "Pues a mí también me tocó mentir" dijo Zape. ¿En qué día de la semana estaban?

**A)** Lunes **B)** Martes **C)** Jueves **D)** Sábado **E)** Domingo

**(C)** Empezamos por descartar que sea domingo, porque no es posible que los dos digan la verdad, ya que entonces el día anterior habrían mentido ambos y eso no ocurre ningún día. Así uno miente y el otro dice la verdad. Es cierto entonces que a uno el día anterior le tocaba mentir, y por ello ha cambiado de mentir a decir la verdad. Eso sólo le puede ocurrir a Zipi que pasa de mentir a decir la verdad en días consecutivos, pero no a Zape. Luego el diálogo lo tuvieron en jueves.

## 20 Nivel II — CP XII

El número $m$ verifica que cada pareja de los números 24, 42 y $m$ tiene el mismo máximo común divisor y cada pareja de los números 6, 15 y $m$ tiene el mismo mínimo común múltiplo. ¿Qué número es $m$?

**A)** 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 36 **E)** 30

**(E)** Para resolver este ejercicio hemos de tener muy claras las reglas para calcular el máximo común divisor (mcd) y el mínimo común múltiplo (mcm).
En primer lugar se nos dice que mcd (24, 42) = mcd (24, $m$) = mcd (42, $m$).
Calculamos mcd (24, 42): $24 = 2^3 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, luego mcd $(24, 42) = 2 \cdot 3$.
Como mcd $(24, m) = 2 \cdot 3$, y $24 = 2^3 \cdot 3$, se deduce que $m$ ha de tener como factores el 2 y el 3.
Como mcd $(42, m) = 2 \cdot 3$, y $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, se llega a la misma conclusión anterior.
Por otra parte se nos dice que mcm (6, 15) = mcm (6, $m$) = mcm (15, $m$).
Calculamos mcm (6, 15): $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, luego mcm $(6, 15) = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
Como mcm $(6, m) = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $6 = 2 \cdot 3$, se deduce que $m$ ha de tener como factor el 5.
Como mcm $(15, m) = 2 \cdot 3 \cdot 5$ y $15 = 3 \cdot 5$, se deduce que $m$ ha de tener como factor el 2 (condición ya obtenida antes).
Luego el número $m$ ha de ser igual a $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

## 21 Nivel II — CP XII

En esta multiplicación PQRS es un número de cuatro cifras diferentes. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

| P | Q | R | S |
|---|---|---|---|
| | | × | 9 |
| **S** | **R** | **Q** | **P** |

**A)** P = 1 **B)** Q = 0 **C)** R = 7
**D)** S = 9 **E)** PQRS es divisible por 9

**(C)** P es 1 ya que después de multiplicar por 9 y sumar lo que se lleve da lugar a una sola cifra S. Por ello S = 9 y como Q no es 1, tiene que ser Q = 0, pues si no al multiplicarla por 9 llevaría alguna unidad hacia delante. Entonces $9 \times 9 = 81$ y llevamos 8, que sumados al producto $9 \times R$ acaba en 0, es decir R = 8.
Luego PQRS = 1089, que es múltiplo de 9. [$1089 \times 9 = 9801$]
La afirmación falsa es R = 7.

## 22 Nivel II — CP XIII

A la fiesta de los amigos del tres han acudido los primeros catorce múltiplos de tres: 3, 6, 9,… Juegan a formar parejas que sumen un cuadrado perfecto y consiguen emparejarse todos los asistentes menos dos. ¿Cuánto suman esos dos números que no pudieron emparejarse?

**A)** 75 **B)** 54 **C)** 33 **D)** 30 **E)** 27

**(B)** Empezamos escribiendo en fila los catorce números:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42

y busquemos aquellos números que solo pueden elegir una pareja.
El 9 solo puede juntarse con el 27 (9, 27). El 12 con el 24 (12, 24). El 15 con el 21 (15, 21). Y así seguimos con cuidado: (6, 30), (3, 33), (39, 42).
Quedan sin pareja 18 y 36, que suman 54. [Y si quieren pueden emparejarse en otro juego matemático]

## 23 Nivel II — CP XIII

Don Retorcido nos ha pedido que averigüemos en qué cifra termina el producto de estas potencias: $2^{?} \cdot 6^{?} \cdot 9^{?} \cdot 11^{?}$. Nos ha dicho que el exponente del 2 es 2009; el exponente del 6 es el número de pie que calza; el exponente del 9 es un número grandísimo que acaba en 5; y el exponente del 11 es igual al año de su nacimiento. ¿En qué cifra acaba dicho producto?

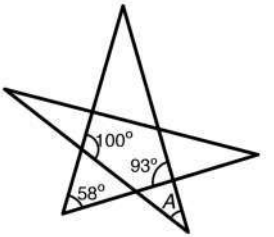
**A)** 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**(E)** Don Retorcido bien sabe que las potencias de 6 siempre acaban en 6, y las potencias de 11 lo hacen en 1. Para el nueve nos dice que el exponente acaba en 5, y por tanto es impar, que es el dato que nos falta para saber la terminación de la potencia del 9, ya que éstas se alternan en 9 ó 1, según el exponente sea impar o par. Nos queda la terminación de las potencias de 2, y éstas siguen el ciclo: 2, 4, 8 y 6 , de forma que si el exponente es múltiplo de 4, la terminación es 6, de forma que $2^{2009} = 2^{2008} \cdot 2$, acaba en lo mismo que $6 \cdot 2$, es decir en 2.
Es el momento de recoger las terminaciones obtenidas y multiplicarlas: $2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 1$ acaba en 8.

## 24 Nivel II CP XIV

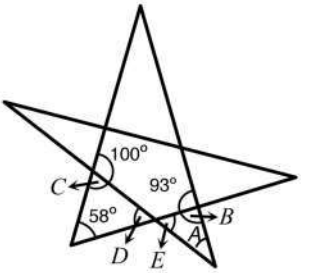
Observa el pentágono estrellado que te mostramos. ¿Cuánto mide el ángulo $A$?

**A)** 35º **B)** 42º **C)** 51º
**D)** 65º **E)** 109º




**(C)** En la figura vamos calculando los ángulos:

$B = 180º - 93º = 87º$
$C = 180º - 100º = 80º$
$D = 180º - (58º + 80º) = 180º - 138º = 42º$
$E = 42º$ (por opuestos por el vértice)
$A = 180º - (42º + 87º) = 180º - 129º = 51º$




## 25 Nivel II CP XIV

Don Retorcido dice que 2010 es un número *dobledé* porque el número formado por sus dos primeras cifras es el doble del número formado por sus dos últimas cifras. ¿Cuántos números *dobledés* hay de cuatro cifras?

**A)** 30 **B)** 35 **C)** 40 **D)** 50 **E)** 45

**(E)** Los números formados por las dos últimas cifras que al multiplicarlos por 2 dan lugar a números de dos cifras son 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, ... 49, que originan, respectivamente, los 45 números *dobledés* siguientes: 1005, 1206, 1407, ... 9849.

## 26 Nivel II — CP XIV

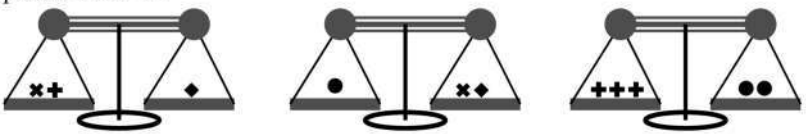
En unas elecciones a representante del Consejo Escolar de un centro, Alicia recibió 5/6 de los votos que obtuvo Beatriz, que a su vez, recibió el 80 % de los votos de Carlos. Si Alicia obtuvo 300 votos, ¿cuántos obtuvo Carlos?

**A)** 450 **B)** 490 **C)** 500 **D)** 540 **E)** 6000

**(A)** Si llamamos respectivamente, $a$, $b$ y $c$, a los votos que obtuvieron Alicia, Beatriz y Carlos, tenemos que $a = \frac{5}{6} \cdot b = 300$, luego $b = \frac{6}{5} \cdot 300 = 360$, y como además, $b = \frac{80}{100} \cdot c = 0{,}8 \cdot c = 360 \Rightarrow c = 450$ votos.

## 27 Nivel II — CP XV

Las tres balanzas están equilibradas. ¿Cuántas ✚ son necesarias para igualar en peso a ◆◆◆◆?



**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

**(C)** Tenemos que jugar con los platillos. Vamos a utilizar el signo = para indicar que pesan lo mismo.
Observando la primera balanza podemos asegurar que ◆◆ = ✖✖✚✚, por tanto ◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚
Según la segunda balanza, podemos añadir otra igualdad:
◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚ = ●●✚✚.
Y como la tercera balanza nos asegura que 2 círculos pesan lo mismo que 3 cruces, entonces:
◆◆◆◆ = ◆◆✖✖✚✚ = ●●✚✚ = ✚✚✚✚✚
Luego 4 rombos pesan lo mismo que 5 cruces.

## 28 Nivel II — CP XV

Don Retorcido elige su ropa de cada día de esta extraña manera. Cada mañana lanza un dado: solo se pondrá corbata si sale impar y únicamente no llevará vaqueros si sale par. ¿Cuáles de estas cuatro combinaciones no podrá vestir nunca don Retorcido?

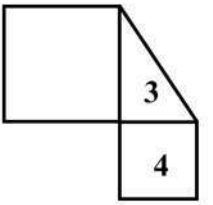
**UNA:** Vaqueros y corbata **DOS:** Vaqueros sin corbata
**TRES:** Sin vaqueros y con corbata **CUATRO:** Sin vaqueros y sin corbata

**A)** La UNA y la DOS **B)** Solo la DOS **C)** Solo la TRES
**D)** La TRES y la CUATRO **E)** La DOS y la TRES

**(E)** Podemos parafrasear las decisiones de don Retorcido. Impar significa que lleva corbata y vaqueros, y par que no lleva corbata ni vaqueros. Es decir o las dos piezas a la vez o ninguna de las dos. Luego no son posibles las combinaciones DOS y TRES.

## 29 Nivel II — CP XVI

En la figura ves dos cuadrados y un triángulo rectángulo. Los números indican el área de la figura correspondiente. ¿Cuál es el área del cuadrado grande?




**A)** 9 **B)** 8 **C)** 7
**D)** 6 **E)** 5

**(A)** Como el área del cuadrado chico es 4, su lado (que coincide con la base del triángulo) es 2. Por tanto, la altura del triángulo debe ser 3 para que su área $\frac{2\cdot 3}{3}$ sea 3, como indica el problema.
Ya está, el área del cuadrado grande es $3^2$, es decir, 9.

## 30 Nivel II — CP XVI

María, Joaquín, Esteban y Carmen están comiendo en una mesa cuadrada festejando que Esteban tiene novia. ¿Cuál es la probabilidad de que Carmen esté sentada enfrente de Esteban?

**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{3}{4}$

**(B)** Carmen puede estar a la derecha de Esteban, a su izquierda o enfrente de él. Como para cada una de estas posiciones hay dos posiciones posibles para María y Joaquín, la probabilidad de que esté enfrente es 1/3.

## 31 Nivel II — CP XVII

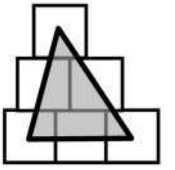
Está comprobado que con 750 m de hilo de oro pueden vestirse 90 hadas o 150 ninfas. Si en el almacén del reino cuentan con 2250 m de hilo de oro y se presentan 225 hadas pidiendo hilo para sus vestidos mágicos, ¿cuántas ninfas podrán vestirse con el hilo sobrante?

**A)** 45 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 95 **E)** 135

**(C)** Si para vestir a 90 hadas hacen falta 750 m de hilo, para vestir a 225 necesitaremos $225 \cdot \frac{750}{90} = 1875$ m. Tras vestir a las hadas nos queda 2250 – 1875 = 375 m de hilo con los que podremos vestir a $375 : \frac{750}{150} = 75$ ninfas.

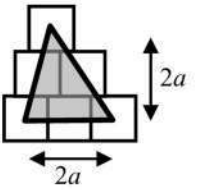
## 32 Nivel II — CP XVII

Ayudándome de seis cuadrados iguales, he dibujado un triángulo cuyos vértices son los centros de tres de esos cuadrados. Si el área del triángulo mide 24 cm$^2$, ¿cuántos cm$^2$ mide el área de un cuadrado?



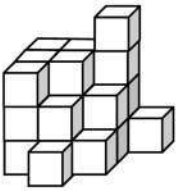
**A)** 12 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 10 **E)** 4

**(A)** Si llamamos $a$ al lado del cuadrado vemos que la base y la altura del triángulo miden ambos $2a$. Como su área son 24 cm$^2$, tenemos que $\frac{2a \cdot 2a}{2} = 24$, es decir, $a^2 = 12$ cm$^2$.



## 33 Nivel II CP XVII

Sara había construido un gran cubo de $4 \times 4 \times 4$ con unos dados que tenía pero ha llegado su hermano Adrián y ha destruido su obra. ¿Cuántos dados necesita Sara para arreglar el desastre que ha provocado Adrián?



**A)** 28 **B)** 38 **C)** 26
**D)** 40 **E)** 37

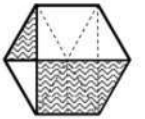
**(B)** En la cara superior hay 1 dado. En la que tiene debajo hay 6 dados. En la siguiente hay 2 más, es decir, 8 dados y en la inferior 3 más, es decir, 11 dados. En total hay $1 + 6 + 8 + 11 = 26$ dados. Faltan $64 - 26 = 38$ dados.

## 34 Nivel II CP XVIII

En mi jardín con forma de hexágono regular he plantado margaritas en las zonas sombreadas. Si en el trapecio he plantado 420, ¿cuántas he plantado en el triángulo?

**A)** 84 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 76 **E)** 65

**(A)** Trazando algunos segmentos convenientes podemos dividir el jardín en triángulos iguales. El trapecio está compuesto de cinco triángulos y, por lo tanto, en cada triángulo he plantado $420 : 5 = 84$ margaritas.



## 35 Nivel II CP XVIII

El profesor ha escrito 100 números en la pizarra y nos ha pedido calcular su media. ¡86!, gritó Adrián al poco tiempo. Muy bien, dijo el profesor y borró 20 números. ¿Cuál es la media de los que quedan? ¡84!, gritó Anabel. Perfecto. ¿Cuál es la media de los 20 números que borró el profesor?

**A)** 94 **B)** 90 **C)** 86 **D)** 85 **E)** 20

**(A)** Como la media de 100 números se obtiene sumándolos todos y dividiendo entre 100, la suma de los números que había al principio en la pizarra es $86 \cdot 100 = 8600$ y la suma de los 80 que quedaron después es $84 \cdot 80 = 6720$. Así pues, la suma de los 20 que borró el profesor es $8600 - 6720 = 1880$ y su media es $1880 : 20 = 94$.

## 36 Nivel II — CP XIX

*¿Qué me pongo?, ¿qué me pongo?* Inés siempre tan indecisa. Tiene en su armario cuatro pantalones, siete camisetas y tres pares de zapatillas. Ya se ha probado veinticinco combinaciones de todas las posibles. ¿Cuántas combinaciones nuevas podrá probarse como máximo antes de decidirse?

**A)** 25 **B)** 37 **C)** 43 **D)** 59 **E)** 84

**(D)** Por cada pantalón podrá ponerse siete camisetas así que, entre pantalón y camiseta tiene $4 \cdot 7 = 28$ combinaciones. Además, cada una de esas combinaciones puede ponérsela con tres zapatillas distintas lo que hacen un total de $28 \cdot 3 = 84$ modelitos distintos. Como ya se ha probado 25, puede dudar aún entre $84 - 25 = 59$ posibilidades.

## 37 Nivel II — CP XIX

Con cubitos idénticos he construido un gran bloque en forma de ladrillo. Luego decido quitar los 65 cubitos exteriores de una de las caras del bloque y luego quito los 30 cubitos exteriores de otra de las caras. ¿Cuántos cubitos quedan ahora en mi bloque?

**A)** 360 **B)** 230 **C)** 295 **D)** 724 **E)** 425

**(A)** Vamos a tratar de calcular las dimensiones del bloque inicial.
Como 65 solo puede descomponerse de dos formas, $65 = 65 \cdot 1 = 13 \cdot 5$, deducimos ya que dos de las dimensiones han de ser 13 y 5 (observa que no puede ser 65 y 1 porque si no, nos quedaríamos sin bloque al quitar esa cara).
Las dimensiones iniciales son $a$, 13 y 5.
Al quitar la cara de los 65 cubitos me queda un bloque de dimensiones $a$ –1, 13 y 5.
Ahora hay que quitar otra cara de 30 cubitos, que solo podré hacerlo con la de dimensiones $a - 1$ y 5. Entonces $(a - 1) \cdot 5 = 30 \Rightarrow a = 7$.
El bloque inicial tiene dimensiones 13, 7 y 5, lo que nos asegura que estaba formado por $13 \cdot 7 \cdot 5 = 455$ cubitos.
Como hemos quitado 95 cubitos, ahora nos quedan $455 - 95 = 360$ cubitos.

## 38 Nivel II — CP XIX

Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, shhh, a ver si podemos escucharle: "¡biennn!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, je je, creo que van a picar como sardinillas...: sumando UNO y después DOS, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? Je je je."

**A)** 2013 **B)** 2014 **C)** 2015 **D)** 2016 **E)** 2017

**(C)** Fijémonos en la serie de Don Retorcido a ver si descubrimos algo:

3 4 6 7 9 10 12 13 15 16 18 19 ...

¡Solo aparecen los múltiplos de tres y los múltiplos de tres más uno!

Así pues, en la serie estarán estos números:

2013 2014 2016 2017 2019 2020 ...

El número que no aparece es el 2015.

## 39 Nivel II — CP XX

Comenúmeros lo ha vuelto a hacer. Se encontró una tabla de sumar formada por quince enteros positivos, todos ellos diferentes, y zas, empezó a devorarlos. Yo sólo recuerdo que el mayor número era 21. Cuando ya iba a reventar, se quedó en la casilla que ves a echarse la siesta.

| + | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 12 | |
| | 10 | | |
| | 13 | | |

¿Cuál fue el último número que se zampó Comenúmeros?

**A)** 15 **B)** 21 **C)** 19 **D)** 18 **E)** 20

**(D)** Como es una tabla de sumar, si observamos las casillas del 8 y el 12, deducimos que la segunda columna es la primera columna más cuatro.

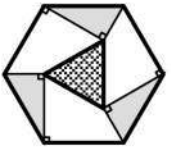
El número más alto, 21, estará en la esquina inferior derecha y, por tanto, fijándonos en el 17 y en el 21, deducimos de nuevo que la tercera columna será la segunda columna más cuatro. Comenúmeros se zampó pues un 18. Para terminar la tabla hay que tener en cuenta que no hay números repetidos.

| + | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 | 12 | |
| | 10 | 14 | |
| | 13 | 17 | |

| + | 7 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 12 | 16 |
| 3 | 10 | 14 | **18** |
| 6 | 13 | 17 | 21 |

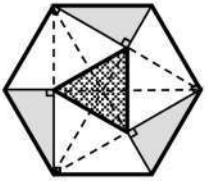
## 40 Nivel II CP XX

Ayudándonos de algunas perpendiculares hemos dibujado un triángulo en el interior de un hexágono regular. Si el área del hexágono es 120 cm$^2$, ¿cuál es el área, en cm$^2$, del triángulo central?



**A)** 20 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 15 **E)** 24

**(D)** Si descomponemos el hexágono en figuras iguales es muy fácil resolver este problema. Trazamos algunos segmentos (trazo discontinuo) y…el área del triángulo equilátero grande (sus vértices son vértices alternos del hexágono) es la mitad que la del hexágono, es decir, 60 cm$^2$. El triángulo central es la cuarta parte del triángulo equilátero grande, por lo que su área mide 60 : 4 = 15 cm$^2$.



## 41 Nivel II CP XXI

Comenúmeros me ha quitado la calculadora y ha bailado todas las teclas numéricas salvo la del cero. Ningún número se corresponde con el correcto. Estos son algunos resultados que me salen ahora: 12·12 = 1156, 3·3 = 81, 45·45 = 144, 67·67 = 5625. ¿Qué número aparece en pantalla cuando pulso la tecla 9?

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

**(E)** Este es un problema para recordar algunos cuadrados perfectos. Si escribimos entre paréntesis las teclas pulsadas y entre corchetes los números reales con los que se ha hecho la operación, tenemos:

$(12)\cdot(12)=1156=[34]\cdot[34]\Rightarrow(1)\rightarrow[3]\quad(2)\rightarrow[4]$

$(3)\cdot(3)=81=[9]\cdot[9]\Rightarrow(3)\rightarrow[9]$

$(45)\cdot(45)=144=[12]\cdot[12]\Rightarrow(4)\rightarrow[1]\quad(5)\rightarrow[2]$

$(67)\cdot(67)=5625=[75]\cdot[75]\Rightarrow(6)\rightarrow[7]\quad(7)\rightarrow[5]$

Las únicas teclas que quedan por pulsar son el (8) y el (9) y los únicos números por asignar son el [6] y el [8]. Por tanto, si pulso (8) es en realidad un [6] y si pulso (9) es en realidad un [8].

## 42 Nivel II — CP XXI

Perico recita todos los números desde el 1 hasta el 40 y la rana Gustavita, cada vez que oye un número primo avanza tantos metros como indica dicho número. Al final ha recorrido 230 metros y Perico le advierte que ha tomado por primo un número que no lo era. ¿En qué número se equivocó Gustavita?

**A)** 27 **B)** 33 **C)** 9 **D)** 15 **E)** 21

**(B)** La suma de los primos menores que 40 es:
$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 = 197$.
Gustavita se equivocó en el número $230 - 197 = 33$. ¡Ay!, 33 es múltiplo de 3.

## 43 Nivel II — CP XXII

¿No conocéis a la niña Centésima? Es una niña que disfruta con las matemáticas y siempre está inventándose problemas. Este es el primero que pone en nuestro concurso:
*Mi número favorito es el* 5 *y por eso he pensado en el número* A *que está formado por* 55 *cincos. Si multiplico el número* A *por* 1001 *me sale un número grandísimo al que llamo* B. *¿Cuánto suman las cifras del número* B? (¡Jolines con la niña Centésima!)

**A)** 82 **B)** 81 **C)** 290 **D)** 30 **E)** 289

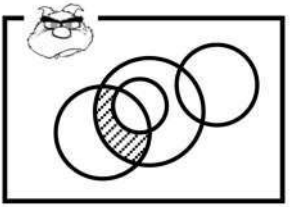
**(A)** Si multiplicamos un número por 1001 hacemos lo mismo que si lo multiplicamos por (1000 + 1), es decir, primero por 1000 y luego le sumamos el número inicial.
Nuestra suma queda de la forma 555…5000 + 555…5555, teniendo cada número 55 cincos.

$$\begin{array}{rr} & 55555\ldots55000 \\ + & \quad 55\ldots55555 \\ \hline & 55611\ldots10555 \end{array}$$

Si sumamos las tres últimas cifras obtenemos 3 cincos, la cuarta cifra nos da un cero y nos llevamos una.
Así completamos todas las cifras hasta las tres primeras en las que obtenemos 556 (por la que nos llevamos).
Tenemos entonces: dos cincos al principio, un seis, 51 unos, un cero y y tres cincos al final (en total 58 cifras).
Sumándolos $51 + 5 \cdot 5 + 6 = 82$.

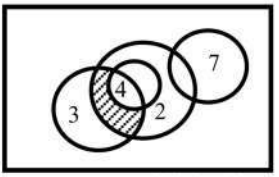
## 44 Nivel II — CP XXII

Dentro del rectángulo grande, Comenúmeros ha colocado los veinte números naturales que hay desde el 1 hasta el 20. Ha distribuido dentro de cuatro círculos los que son múltiplos de 2, de 3, de 4 o de 7. ¿Cuántos números hay dentro de la región rayada?



**A)** 5 **B)** 4 **C)** 3
**D)** 2 **E)** 1

**(D)** Tenemos que identificar qué hay en esos círculos. El círculo que está contenido en otro es el que corresponde a los múltiplos de 4 y el que lo contiene es el de los múltiplos de 2. Como no hay múltiplos de 4 y 7 en los números que hay hasta el 20, ya hemos identificado todos los círculos.




La parte rayada corresponde a los múltiplos de 3 y de 2 que no son múltiplos de 4. O sea, el 6 y el 18. Hay dos números.

## 45 Nivel II — CP XXIII

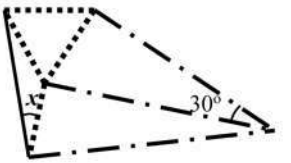
Solo una de estas cinco igualdades entre fracciones es cierta. ¿Cuál es? Y la pista ya te la hemos dado: es seguro que solo hay una igualdad verdadera.

**A)** $\frac{896\,678}{338\,444} = \frac{122\,426}{363\,334}$ **B)** $\frac{59\,976}{139\,944} = \frac{5\,428}{15\,339}$ **C)** $\frac{179\,972}{417\,946} = \frac{2\,856}{6\,664}$

**D)** $\frac{69\,796}{192\,994} = \frac{1\,966}{3\,862}$ **E)** $\frac{59\,976}{139\,944} = \frac{1\,428}{3\,332}$

**(E)** Para saberlo debemos hacer los dos productos cruzados y ver si son iguales. Miremos solo las cifras de las unidades de esos productos: en A) un producto acaba en 2 y el otro en 4, en B) uno en 4 y el otro en 2, en C) las terminaciones son 8 y 6 mientras que en D) son 2 y 4. Por último, en E) la cifra de las unidades de ambos productos es 2 y guiándonos de la pista, ya no tenemos que hacer nada más.

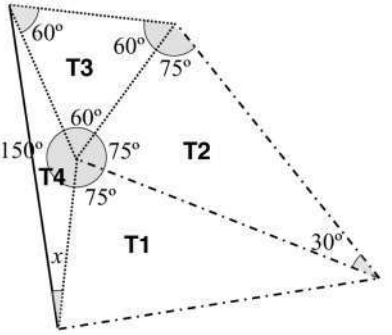
## 46 Nivel II CP XXIII




En la figura, los cuatro segmentos dibujados con PUNTOS miden lo mismo y los tres segmentos PUNTO–RAYA también miden lo mismo entre sí. ¿Cuánto mide el ángulo $x$?

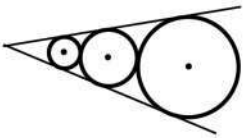
**A)** 18º **B)** 26º **C)** 15º
**D)** 24º **E)** 20º

**(C)** El triángulo T2 es isósceles, sus ángulos iguales miden:
$(180º - 30º) : 2 = 75º$.
Los triángulos T1 y T2 son iguales.
El triángulo T3 es equilátero, por lo que sus ángulos miden 60º cada uno.
El triángulo T4 es isósceles y el ángulo desigual mide:
$360º - (60º + 75º + 75º) = 150º$.
Por ello, el ángulo $x$ mide: $(180º - 150º) : 2 = 15º$.



## 47 Nivel II CP XXIII

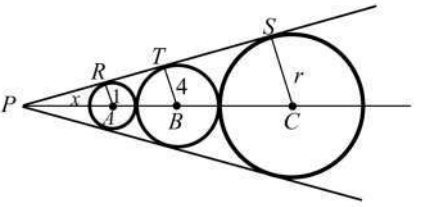
En el dibujo ves, desde arriba, a tres amigos con gorros mexicanos atascados en una esquina. Si el radio del sombrero pequeño es de 1 dm y el del mediano es de 4 dm, ¿qué radio tiene el sombrero mexicano mayor?



**A)** 10 **B)** 6 **C)** 15

**D)** 20 **E)** 16

**(E)** Como en tantísimos problemas de geometría, añadiendo algunas líneas vemos la estructura escondida que nos ayuda a resolverlo. Sabemos que las tangentes a las circunferencias son perpendiculares a los radios que llegan a los puntos de tangencia, por tanto, los triángulos $PAR$, $PBT$ y $PCS$ son semejantes.



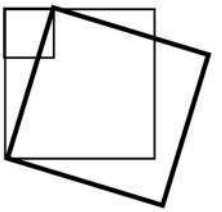

Jugando con esta propiedad, calcularemos primero la longitud $x$ de $PA$ y luego el radio $r$ del sombrero mayor.

$PAR$ y $PBT$ semejantes: $\dfrac{AR}{BT}=\dfrac{PA}{PB}\rightarrow\dfrac{1}{4}=\dfrac{1+x}{6+x}\rightarrow x=\dfrac{2}{3}$

$PAR$ y $PCS$ semejantes: $\dfrac{AR}{CS}=\dfrac{PA}{PC}\rightarrow\dfrac{1}{r}=\dfrac{1+\frac{2}{3}}{r+10+\frac{2}{3}}\rightarrow r=16$

El radio del sombrero grande mide 16 cm.

## 48 Nivel II — CP XXIV



Si el cuadrado menor tiene área $A$ y el cuadrado mediano tiene área $B$, ¿qué área tiene el cuadrado mayor, dibujado con línea gruesa?

**A)** $(A+B)^2$ **B)** $A^2+B^2$ **C)** $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$

**D)** $A+2B$ **E)** $A+B$

**(E)** El lado del cuadrado pequeño debe medir $\sqrt{A}$ y el del cuadrado mediano $\sqrt{B}$. Llamamos $x$ al lado del cuadrado grande y aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo formado por los lados de los tres cuadrados obtenemos que: $x^2=(\sqrt{A})^2+(\sqrt{B})^2=A+B$.

El área del cuadrado grande es $A + B$.

## 49 Nivel II — CP XXIV

Si $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, son enteros positivos y $2^a\cdot 3^b\cdot 4^c\cdot 6^d = 6^e$ entonces, tiene que cumplirse, a la fuerza que:

**A)** $a+2c=b$ **B)** $a+b+c+d=e$ **C)** $a+c=b+d$

**D)** $a\cdot c=b\cdot d$ **E)** $b=d-e$

**(A)** Un problema muy interesante para manejar las propiedades de las potencias. Vamos a expresar ambos miembros usando únicamente potencias de base 2 y 3. Es sencillo porque $4=2^2$ y $6=2\cdot 3$.

$2^a\cdot 3^b\cdot 4^c\cdot 6^d = 6^e$

$2^a\cdot 3^b\cdot 2^{2c}\cdot 2^d\cdot 3^d = 2^e\cdot 3^e$

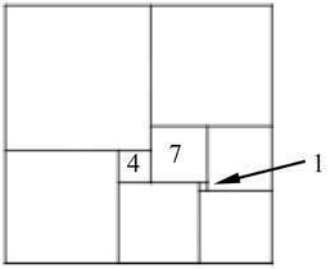
$2^{a+2c+d}\cdot 3^{b+d} = 2^e\cdot 3^e$

Por tanto, igualando los exponentes correspondientes a las bases 2 y 3: $\left.\begin{aligned} a+2c+d&=e\\ b+d&=e\end{aligned}\right\}$ y si restamos la primera igualdad menos la segunda, ya podemos contestar: $a + 2c - b = 0$, es decir, $a + 2c = b$.

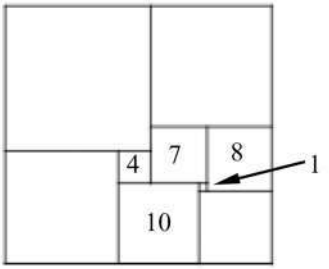
## 50 Nivel II — CP XXV

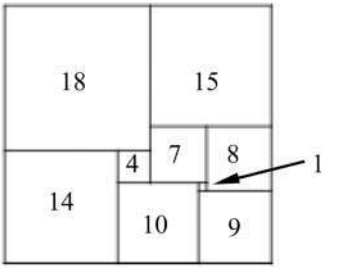
Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en $m^2$, tiene la sala?

**A)** 1024 **B)** 1122 **C)** 1023
**D)** 1088 **E)** 1056




**(E)** Tratemos de averiguar los lados de las alfombras cuadradas. Solo tenemos que sumar y restar y avanzar sin prisas. Las dos primeras alfombras que podemos medir son las de lados 8 m y 10 m. Luego, poco a poco, hasta completar el problema.




El área de la sala rectangular es $32 \times 33 = 1056$ $m^2$.

# Soluciones - Nivel III

**1** **Nivel III** **CP I**

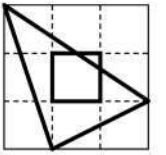
Escritos en fila todos los números del 1 al 500, ¿qué dígito ocupará el lugar 1000?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 6 **E)**7

**(C)** Los 9 primeros números ocuparán 9 lugares; los 99 primeros números ocuparían $9 + 2 \cdot 90 = 189$ lugares.
Así pues, quedan $1000 - 189 = 811$ lugares que serán ocupadas por números de tres cifras, habiendo pues $811 : 3 = 270$ números completos y la primera cifra del número que ocupe el 271º lugar. Como el primer número de tres cifras es 100, el 270º es el 369 y la primera cifra del siguiente, 370, es 3.

**2** **Nivel III** **CP I**

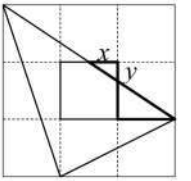
Los lados de la cuadrícula miden 1 cm. ¿Cuál es, en $cm^2$, el área de la región común al triángulo y al cuadrado?



**A)** $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{6}{7}$ **C)** $\frac{11}{12}$

**D)** $\frac{9}{10}$ **E)** $\frac{10}{11}$

**(C)** Llamando $x$ e $y$ a los catetos horizontal y vertical respectivamente del triángulo pequeño que queda fuera de la zona común, podemos escribir, por semejanza de triángulos, que $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, $\frac{1-y}{1} = \frac{2}{3}$, de donde obtenemos $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{2}$ y el área del triángulo pequeño será $\frac{1}{12}$ con lo que el área de la zona común será $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.



## 3 Nivel III CP III

El número de gatos que viven en Gatolandia es un número de 6 cifras, cuadrado perfecto y cubo perfecto. Cuando se mueran 6 de esos gatos, el número de gatos que queden será primo. ¿Cuántos gatos hay en Gatolandia?

**A)** 279 643 **B)** 117 649 **C)** 262 147 **D)** 531 469 **E)** 998 001

**(B)** Al ser el número de gatos un cuadrado perfecto y un cubo perfecto, debe ser una potencia sexta y las únicas potencias sextas con 6 cifras son $7^6$, $8^6$ y $9^6$ pues $10^6$ tiene 7 cifras y $6^6$ solamente 5, mientras que $7^6$ ya tiene 6.
Por otra parte, al restar 6 debemos obtener un número primo y $9^6 - 6$ no es primo por ser múltiplo de 3 y $8^6 - 6$ tampoco es primo por ser par, luego el número de gatos de Gatolandia es $7^6$, es decir, 117649.

## 4 Nivel III CP III

Los vértices de un cubo los numeramos del 1 al 8, de manera que los conjuntos de números correspondientes a los vértices de cada cara son: {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8}, {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} y {3, 4, 5, 8}. ¿Cuál es el número asignado al vértice más lejano al 6?

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 7

**(D)** El vértice más alejado al 6 será el vértice común de las 3 caras que no contienen al 6, es decir de las {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7} y {3, 4, 5, 8}, es decir el 5.

## 5 Nivel III CP IV

Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, este aumenta en 14 789. ¿Cuál era la suma de las cifras del número original?

**A)** 11 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 8 **E)** 7

PRIMERA SOLUCIÓN

**(B)** Si el número es $x$ tenemos que, al formar el número $1x1$, ha aumentado $x$ en 14 789, es decir: $10x + 1 + 10^n - x = 14\,789$ siendo $n$ el número de cifras de $x$. Así pues, $9x + 10^n = 14\,789$, de donde $10^n = 10000$ y $9x = 4788$ con lo que $x = 532$ y la suma de sus cifras es 10.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(B)** Si el número También podemos escribir la resta 1____1 − ____ = 14 789 y empezar a rellenar desde las unidades. La unidad del sustraendo tiene que ser un 2 para que la resta sea 9, por tanto, las decenas del minuendo también es 2 ya que es el mismo número sin añadir los unos (al principio y al final). Completando de esta forma la resta conseguimos el número 532.

## 6 Nivel III — CP IV

Si $n=1+3+5+...+999$ y $m=2+4+6+...+1000$, $m-n$ es igual a:

**A)** 500 **B)** 1000 **C)** –499 **D)** 499 **E)** 501

**(A)** Escribimos $m - n = (2 + 4 + \ldots + 1000) - (1 + 3 + \ldots + 999)$, agrupándolo de otra forma tenemos,
$m - n = (2 - 1) + (4 - 3) + \ldots + (1000 - 999) = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$ (quinientas veces), así que $m - n = 500$.

## 7 Nivel III — CP V

Llenamos una cuadrícula de $p$ filas y $q$ columnas con todos los enteros desde 1 a $pq$. Los escribimos en orden creciente, llenando en primer lugar la fila 1, luego la fila 2, etc. Si el 20 está en la tercera fila, el 41 en la 5ª y el 103 en la última, halla $p+q$.

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

**(A)** La primera fila la forman los enteros desde 1 hasta $q$; la segunda desde $q + 1$ hasta $2q$; la tercera desde $2q + 1$ a $3q$; la quinta desde $4q + 1$ a $5q$ y la última, la $p$-ésima, desde $(p - 1)q$ a $pq$.
Así pues sabemos que:

$$\begin{cases} 2q+1 \le 20 \le 3q \\ 4q+1 \le 41 \le 5q \\ (p-1)q \le 103 \le pq \end{cases} \text{ y nos piden } p+q.$$

De la primera información, tenemos que $2q \le 19$ y $20 \le 3q$, así que $q \le 9$ y $q \ge 7$ por lo que $q$ puede ser 7, 8 o 9. De la segunda, obtenemos $4q \le 40$ y $41 \le 5q$, por lo que $q \le 10$ y $q \ge 9$ (recordar que $q$ es entero). Así pues, $q = 9$ o 10, que junto a la información anterior nos asegura que $q = 9$, con lo que la última información se reduce a $9(p - 1) \le 103 \le 9p$, de donde $p \le 12$ y $p \ge 12$, es decir, $p = 12$ y $p + q = 21$.

## 8 Nivel III CP V

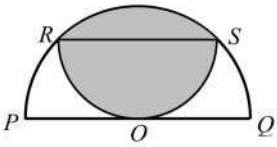
El resultado de $2001^2 - 2000^2 + 1999^2 - 1998^2 + ... + 3^2 - 2^2 + 1^2 - 0^2$ es:

**A)** $1001^2$ **B)** $2002^2$ **C)** $2002 \cdot 1001$ **D)** $1001 \cdot 2001$ **E)** Nada de lo anterior

**(D)** Agrupando cada diferencia de cuadrados en producto de suma por diferencia, tenemos que, al ser la diferencia 1, la expresión dada es igual a:
$(2001 + 2000) \cdot (2001 - 2000) + (1999 + 1998) \cdot (1999 - 19998) + ... +$
$+ (1 + 0) \cdot (1 - 0) = 2001 + 2000 + 1999 + \ldots + 3 + 2 + 1.$
Esta suma es la de todos los enteros que van desde el 1 hasta el 2001, es decir,
$S = \frac{1+2001}{2} \cdot 2001 = 1001 \cdot 2001.$

## 9 Nivel III CP V

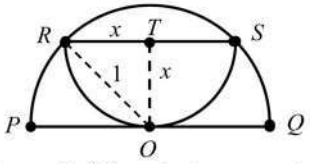
En la figura adjunta, las curvas *PRSQ* y *ROS* son semicircunferencias y *RS* es paralela a *PQ*. Si el radio de la semicircunferencia grande es 1 metro, ¿cuál es el área, en $m^2$, de la región sombreada?




**A)** $\frac{\pi - 1}{2}$ **B)** $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\pi}{4}$

**D)** 1 **E)** $\frac{\pi}{2} - 1$

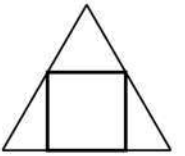
**(A)** Como *ROS* es una semicircunferencia, si $OT = x$, $RT = x$ por lo que $1 = 2x^2$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$




y el ángulo bajo el que se ve el segmento de cuerda *RS* es 90º por lo que el área del segmento circular será la del sector circular menos el triángulo *ORS*, donde el sector circular es de 90º por tanto, un cuarto de círculo de radio 1 y el triángulo es rectángulo de catetos 1. Así que el segmento tiene un área de $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}$. Como el área del semicírculo *RSO* es $\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$, el resultado pedido será $\frac{\pi - 2}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - 2}{4} = \frac{\pi - 1}{2}$ $m^2$.

## 10 Nivel III CP V

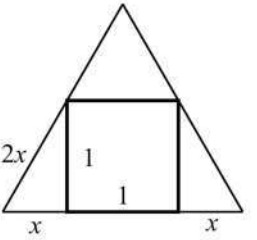
Si un cuadrado de lado 1 está inscrito en un triángulo equilátero como se muestra en la figura, la longitud del lado del triángulo es:



**A)** 2 **B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

**D)** $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ **E)** $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

**(E)** En la figura observamos que $(2x)^2 = 1^2 + x^2$, por lo que $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y la longitud del lado del triángulo es $1 + 2x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.



## 11 Nivel III CP VI

En cada una de las cinco jarras de la figura hay café, chocolate o leche (en ninguna hay mezcla) en las cantidades que se indican. No sabemos qué contiene cada jarra pero sí sabemos que hay en total el doble de café que de chocolate, que el chocolate está en una única jarra y que no hay tres jarras con el mismo líquido. ¿En qué jarra está el chocolate?

**A)**

**B)**

**C)**

**D)**

**E)**


**(B)** Podemos estudiar jarra por jarra viendo en cuál puede estar el chocolate (el enunciado dice que el chocolate está en un único recipiente). Teniendo en cuenta que no hay tres jarras con el mismo líquido, deducimos que hay una de chocolate, dos de café y dos de leche. Las opciones son las siguientes:

A) Si hay 950 g de chocolate, la cantidad de café, el doble, será 1900 g y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

B) Si hay 750 g de chocolate, de café habría 1500 g que serían las tazas A + C. La leche estaría en las tazas D + E. Sigamos con el proceso para asegurarnos de que no hay más respuestas posibles.

C) Si hay 550 g de chocolate, el café sería 1100 g, y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

D) Si hay 475 g de chocolate, el café sería 950 g (taza A), pero esto obligaría a que en las tres tazas restantes tendría que haber leche y el enunciado no lo permite.

E) Si hay 325 g de chocolate, el café sería 650 g, y esta cantidad no se puede conseguir con las restantes tazas.

## 12 Nivel III — CP VI

En el cuadrado mágico de la figura, la suma de los números de cada fila, columna o diagonal es la misma. ¿Cuánto vale $y + z$?

| | | |
|---|---|---|
| $v$ | 24 | $w$ |
| 18 | $x$ | $y$ |
| 25 | $z$ | 21 |

**A)** 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **E)** 47

**(D)** Escribamos los números que faltan en función de la $z$, por ejemplo.

$C1 = F3$: $v + 18 + 25 = 25 + z + 21 \Rightarrow v = z + 3$
$C2 = F3$: $24 + x + z = 25 + z + 21 \Rightarrow x = 22$
$F2 = F3$: $18 + 22 + y = 25 + z + 21 \rightarrow y = z + 6$
$C2 = C3$: $24 + 22 + z = w + z + 6 + 21 \rightarrow w = 19$

| | | |
|---|---|---|
| $z+3$ | 24 | 19 |
| 18 | 22 | $z+6$ |
| 25 | $z$ | 21 |

Y ya sabemos que la diagonal suma $25 + 22 + 19 = 66$ y podemos completar el cuadrado mágico.

| | | |
|---|---|---|
| 23 | 24 | 19 |
| 18 | 22 | 26 |
| 25 | 20 | 21 |

## 13 Nivel III — CP VII

Lanzamos tres dados al aire, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos en dos de ellos, coincida con el del otro dado?

**A)** $\frac{5}{36}$ **B)** $\frac{1}{6}$ **C)** $\frac{7}{36}$ **D)** $\frac{2}{9}$ **E)** $\frac{5}{24}$

**(E)** Estudiemos todos los casos favorables suponiendo que debe coincidir el primer dado con la suma de los otros dos:
Si en el primero sale 1 [probabilidad 1/6], no se puede cumplir lo pedido [este caso es desfavorable].
Si sale un 2 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 1) que tiene probabilidad 1/36.
Si sale un 3 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 2) o (2, 1) que tiene probabilidad 2/36.
Si sale un 4 [probabilidad 1/6], en los otros debe salir (1, 3), (2, 2) o (3, 1) que tiene probabilidad 3/36.
Y siguiendo con el resto llegaríamos a una probabilidad de

$$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1+2+3+4+5}{36}\right)=\frac{15}{6\cdot 36}=\frac{5}{72}$$

y este resultado hay que multiplicarlo por 3 ya que el dado suma podría ser el primero, el segundo o el tercero, y la respuesta es entonces: $\frac{3\times 5}{72}=\frac{5}{24}$.

## 14 Nivel III — CP VII

Si el producto de tres números enteros consecutivos, ninguno nulo, es 8 veces su suma, ¿cuál es la suma de sus cuadrados?

**A)** 50 **B)** 77 **C)** 110 **D)** 149 **E)** 194

**(B)** Si los tres números consecutivos son, $x-1$, $x$, $x+1$, entonces el enunciado se traduce en esta ecuación: $(x-1)\cdot x\cdot(x+1)=8\cdot(x-1+x+x+1)$ y al operar obtenemos:

$x^3-x=24x\Rightarrow x^3=25x$ y dividiendo los dos miembros por $x$ (obsérvese que $x\neq 0$ porque si $x$ fuese nulo, los números serían –1, 0, 1 que no cumplen lo pedido), tenemos que $x^2=25$ con dos posibles soluciones $x=+5$ y $x=-5$. En el primer caso hablaríamos de 4, 5, 6, y en el segundo de –6, –5, –4 que elevados al cuadrado y sumados dan el mismo resultado: $4^2+5^2+6^2=(-6)^2+(-5)^2+(-4)^2=77$.

## 15 Nivel III — CP VIII

¿De cuántas formas puedo repartir doce caramelos entre Alicia, Beatriz y Carlos si a cada uno de ellos le tengo que dar por lo menos tres?

**A)** 9 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

**(D)** Si a cada uno le tengo que dar por lo menos tres caramelos, esto hace un total de nueve caramelos (tres para cada uno) y, por tanto, ya solo me quedan tres caramelos para repartir. Veamos de cuántas formas puedo repartir tres caramelos entre tres personas. Con cuidado y siguiendo un orden, encontramos las siguientes maneras de hacer el reparto:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A: (3 +) | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| B: (3 +) | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| C: (3 +) | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Hay diez maneras.

## 16 Nivel III CP VIII

El número de dos cifras $[ab]$ es divisible por 7. Representamos por $[ba]$ el número obtenido al permutar las cifras.
De los siguientes números, I: $5b + a$ II: $3a + b$ III: $[ba] + a$, ¿cuáles son también divisibles por 7?

**A)** Solamente I y II **B)** Solamente II **C)** Solamente III
**D)** Los tres **E)** Solamente I y III

**(D)** Interesante problema que parece imposible de atacar pero… ya vas a ver. El primer paso para resolver un problema siempre es el mismo: ponerse a resolverlo. Recuerda que $[ab] = 10a + b$. El dato del problema es que el número $[ab]$ es divisible por 7 (o sea, es múltiplo de 7), es decir que $10a + b = 7p$, donde $p$ es un número natural.
Fíjate que en $10a + b = 7p$ podemos despejar $b$; $b = 7p - 10a$. Escribamos los tres números en función de $a$ y $p$:

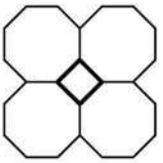
I: $5b + a = 5(7p - 10a) + a = 35p - 50a + a = 35p - 49a = 7(5p - 7a)$ ¡múltiplo de 7!

II: $3a + b = 3a + 7p - 10a = 7p - 7a = 7(p - a)$ ¡múltiplo de 7!

III: $(ba) + a = 10b + a + a = 10b + 2a = 10(7p - 10a) + 2a = 70p - 100a + 2a =$
$= 70p - 98a = 7(10p - 14a)$ ¡múltiplo de 7!

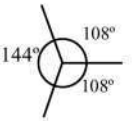
Hay que reconocerlo, bonito problema.
Los tres nuevos números son también divisibles por 7.

## 17 Nivel III CP IX

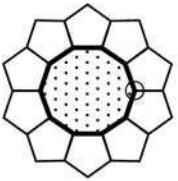


Rodeamos un polígono regular de $m$ lados por $m$ polígonos regulares de $n$ lados cada uno, sin que haya huecos ni superposiciones. (En la figura que te mostramos, $m = 4$ y $n = 8$). ¿Cuánto vale $n$ si $m = 10$?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 14
**D)** 20 **E)** 26




**(A)** En geometría, cuando parece que no tenemos ningún dato, hay que fijarse en los ángulos, que son los que determinan las formas. En cada vértice del polígono de $m$ lados coinciden dos polígonos iguales de $n$ lados. Los tres ángulos que se forman en el vértice deben sumar 360º. Sumémoslos: Los ángulos interiores del polígono regular de 10 lados valen 144º (pues los ángulos centrales miden 36º) Con esto obtenemos la medida de los ángulos del polígono de $n$ lados: $\frac{360º-144º}{2} = 108º$



Por tanto, el ángulo central del polígono de $n$ lados mide 72º, se trata de un pentágono.

## 18 Nivel III CP IX

¿Cuántos capicúas de tres cifras son cuadrados perfectos?

**A)** Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

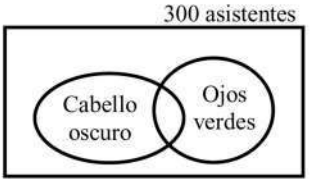
**(D)** Podríamos probar elevando al cuadrado todos los números entre 10 y 31 ($32^2$ ya tiene 4 cifras) pero no es necesario trabajar tanto.
Observa que los cuadrados perfectos sólo pueden acabar en 0, 1, 4, 5, 6 y 9 ya que:
$0^2 = \mathbf{0}$, $1^2 = \mathbf{1}$, $2^2 = \mathbf{4}$, $3^2 = \mathbf{9}$, $4^2 = \mathbf{16}$, $5^2 = \mathbf{25}$, $6^2 = \mathbf{36}$, $7^2 = \mathbf{49}$, $8^2 = \mathbf{64}$ y $9^2 = \mathbf{81}$.
De modo que sólo hay que buscar capicúas que sean cuadrados perfectos entre los siguientes números:
101 – 111 – 121 … 191 Probamos con 11 y 19 ; $\mathbf{11^2 = 121}$ y $19^2 = 361$.
404 – 414 – 424 … 494 Probamos con 22 y 28; $\mathbf{22^2 = 484}$ y $28^2$ se pasa seguro.
505 – 515 – 525 … 595 Probamos con 25; $25^2 = 625$, nada.
606 – 616 – 626 … 696 Probamos con 24 y 26; $24^2 = 576$ y $\mathbf{26^2 = 676}$.
909 – 919 – 929 … 999 Probamos con 23 y 27; $23^2$ es muy pequeño y $27^2 = 729$.
Así que hemos encontrado tres cuadrados perfectos entre los capicúas de tres cifras.

## 19 Nivel III CP X

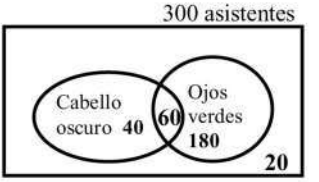
En una reunión, la tercera parte de los asistentes tiene ojos verdes, el 80% cabello oscuro y el 20% ojos verdes y cabello oscuro. ¿Cuál es la proporción de los que no tienen ojos verdes ni cabello oscuro?

**A)** $\frac{1}{15}$ **B)** 10 % **C)** 15 % **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{3}{10}$

**(A)** En este tipo de problemas en el que intervienen proporciones o porcentajes es muy útil trabajar con cantidades concretas y luego, al final, hallar la proporción o el porcentaje pedido. En este problema es acertado suponer que asisten 300 personas a la reunión ya que es múltiplo de 3 y de 100. Utilizaremos unos sencillos diagramas. Ya solo falta ir rellenando las regiones con su cantidad correspondiente.




Es importante darse cuenta con qué dato debemos empezar: el 20% (20% de 300, es decir, 60 personas) tienen ojos verdes y cabello oscuro. Pondremos 60 en la intersección. Como el 80% (240) tienen cabello oscuro, debemos colocar 180 en la parte que queda, pues ya hay 60 con cabello oscuro. Así, poco a poco, hasta llegar a rellenar el diagrama.

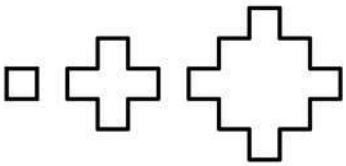



Al final quedan 20 asistentes (300 – 40 – 60 – 180) que ni tienen ojos verdes ni cabello oscuro, lo que hace una proporción de $\frac{20}{300} = \frac{1}{15}$.

## 20 Nivel III — CP X

En esta serie de polígonos *crucigrama* de lado 1 cm, ¿cuál es el perímetro del que tiene 61 cm$^2$ de área?

**A)** 30 cm **B)** 32 cm **C)** 34 cm **D)** 40 cm **E)** 44 cm



**(E)** Estudiemos cómo van variando el área y el perímetro de los cuatro primeros *crucigramas* para intentar encontrar alguna relación en su formación:

| *Crucigrama* | 1º | 2º | 3º | 4º |
|---|---|---|---|---|
| Área (cm$^2$) | 1 | 5 | 13 | 25 |
| Perímetro (cm) | 4 | 12 | 20 | 28 |

Y ya se ve que el área va aumentando en múltiplos de 4, es decir, más 4, más 8, más 12, etc. Y el perímetro va aumentando en 8 a cada paso. Podemos pues continuar la serie sin necesidad de dibujar los *crucigramas*:

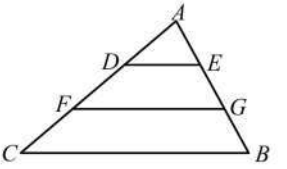
| *Crucigrama* | 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Área (cm$^2$) | 1 | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 |
| Perímetro (cm) | 4 | 12 | 20 | 28 | 36 | 44 |

El perímetro del *crucigrama* de área 61 cm$^2$ es 44 cm.

Si nos hubieran pedido estudiar *crucigramas* mucho mayores, tendríamos que encontrar su ley de formación. El *crucigrama* que ocupa el lugar $n$ tiene:
Área: $A_n = (n-1)^2 + n^2$ Perímetro: $P_n = 8n - 4$

## 21 Nivel III CP X

En el triángulo $ABC$ de la figura, de área 90 cm$^2$, los puntos $E$ y $G$ dividen al lado $AB$ en tres partes iguales y las rectas $DE$ y $FG$ son paralelas a $BC$. ¿Cuál es, en cm$^2$, el área del trapecio $DEGF$?



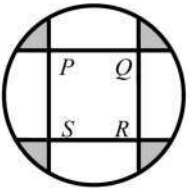

**A)** 20 **B)** 25 **C)** 30
**D)** 36 **E)** 45

**(C)** Al ser los segmentos $FG$ y $DE$ paralelos a $CB$, los triángulos $ABC$, $AGF$, $AED$ son semejantes. Además conocemos las razones de semejanza pues $AE = \frac{1}{3}AB$ y $AG = \frac{2}{3}AB$. Por tanto, podemos comparar sus áreas: $\mathrm{A}_{AGF} = \frac{4}{9}\mathrm{A}_{ABC} = 40$ cm$^2$ y $\mathrm{A}_{AED} = \frac{1}{9}\mathrm{A}_{ABC} = 10$ cm$^2$.

Y ya podemos contestar, el área del trapecio $DEGF$ mide $40 - 10 = 30$ cm$^2$.

## 22 Nivel III CP XI

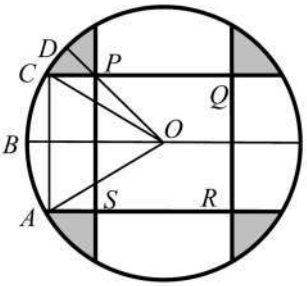
El cuadrado $PQRS$ de lado 1 m y el círculo de radio 1 m de la figura, tienen el mismo centro. ¿Cuál es, en $m^2$, el área de la región sombreada?




**A)** $\frac{\pi}{3}$ **B)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$ **C)** $\sqrt{3}-1$

**D)** $\frac{\pi-1}{3}$ **E)** $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

**(E)** Vamos a calcular el área de la figura sombreada que queda entre los puntos $C$, $D$ y $P$ y después multiplicaremos por 8 el resultado obtenido.
Observa que el área que intentamos calcular es el área del sector circular $COD$ menos el área del triángulo $CPO$.



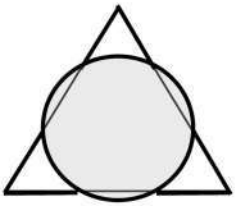

Para calcular el ángulo $C\hat{O}D$ observa que el triángulo $ACO$ es equilátero y por tanto, el ángulo $C\hat{O}D = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$ y el área del sector circular $A_{COD} = \frac{15\cdot\pi}{360} = \frac{\pi}{24}$ $m^2$.

Para calcular el área del triángulo $CPO$ tratemos de calcular la medida de $CP$ ya que su altura correspondiente es $\frac{1}{2}$ m. Como $CP + \frac{1}{2}$ es la altura del triángulo equilátero $ACO$ cuyo lado es 1 m, tenemos que $CP = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ m, y por tanto el área del triángulo $CPO$ es $A_{CPO} \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{8}$ $m^2$.

Juntando todo lo anterior tenemos que el área buscada, en $m^2$, es $8\cdot\left(\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}-1}{8}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$ $m^2$.

## 23 Nivel III CP XI

Encima de un triángulo equilátero de lado 3 cm, colocamos un círculo de 1 cm de radio, haciendo coincidir los centros de ambas figuras. ¿Cuánto mide, en cm, el perímetro o borde de la figura resultante?



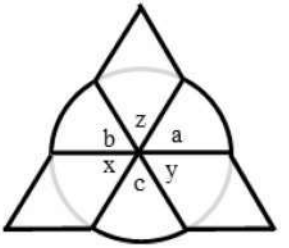
**A)** $2\pi$ **B)** $6+\pi$ **C)** 9
**D)** $3\pi$ **E)** $9+2\pi$

**(B)** Como el círculo está centrado en el triángulo equilátero, los ángulos $a$, $b$, $c$ son iguales. Y como los otros ángulos $x$, $y$, $z$ son opuestos por el vértice a los anteriores, concluimos que esos seis ángulos son iguales y por tanto miden 60º cada uno.

La parte de circunferencia que se ve equivale a 180º, es decir la mitad de la circunferencia completa: $\frac{2\pi r}{2} = \pi \cdot 1 = \pi$ cm.

La parte que se oculta del triángulo es 1 cm por cada lado ya que los triangulitos interiores son equiláteros al ser isósceles y tener un ángulo de 60º. Por tanto, de cada lado se ven 2 cm.

Así pues el borde de la figura mide $6+\pi$ cm.




## 24 Nivel III CP XII

Con 10! (diez factorial) representamos al producto $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (multiplicar diez por todos los enteros anteriores hasta el uno) ¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! nos da un cubo perfecto?

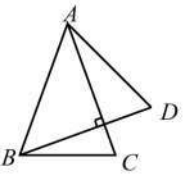
**A)** 490 **B)** 630 **C)** 1470 **D)** 4410 **E)** 8820

**(D)** $10! = 2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 7\cdot 5^2\cdot 3^4\cdot 2^8$. Si descomponemos un cubo perfecto en producto de primos, todos los primos estarán elevados a un múltiplo de tres. Así pues, para obtener el menor cubo perfecto debemos multiplicar 10! por $7^2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2 = 4410$.

## 25 Nivel III CP XII

Los triángulos $ABC$ y $ABD$ son isósceles con $AB = AC = BD$.

Si $BD$ es perpendicular a $AC$, la suma de los ángulos $\hat{C} + \hat{D}$ es igual a:




**A)** 115º **B)** 120º **C)** 130º **D)** 135º

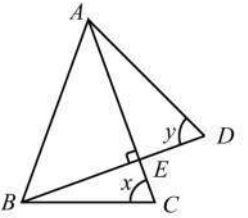
**E)** No tenemos datos suficientes para determinarla

**(D)** En el triángulo $ABD$ se cumple que $A\hat{B}D = 180º - 2y$.

Los ángulos del triángulo $EBC$ miden: $E = 90º$, $C = x$, $B = x - (180º - 2y)$ y su suma es 180º:

$90º + x + x - (180º - 2y) = 180º \Rightarrow 2x + 2y = 270º$.

Por tanto, $x + y = 135º$.

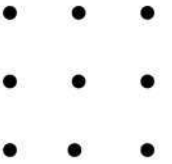



## 26 Nivel III CP XIII

Elegimos al azar tres puntos de los nueve del siguiente diagrama. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elegidos estén alineados?

**A)** $\frac{8}{27}$ **B)** $\frac{2}{21}$ **C)** $\frac{8}{81}$

**D)** $\frac{4}{21}$ **E)** $\frac{8}{9}$



**(B)** Solamente hay 8 casos en los que los tres puntos están alineados (las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales) y hay $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84$ formas de escoger tres puntos de nueve, luego la probabilidad buscada es $\frac{8}{84} = \frac{2}{21}$.

## 27 Nivel III CP XIII

Ayer por la tarde, Alicia condujo una hora más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 5 km/hora. Luisa condujo dos horas más que Pedro y a una velocidad media superior a la de Pedro en 10 km/hora. Si Alicia condujo 70 km más que Pedro, ¿cuántos km condujo Luisa más que Pedro?

**A)** 120 **B)** 130 **C)** 140 **D)** 150 **E)** 160

**(D)** Resumamos en una tabla los datos del problema:

| | Tiempo (h) | Velocidad (km/h) | Espacio (km) |
|---|---|---|---|
| Pedro | $t$ | $v$ | $v \cdot t$ |
| Alicia | $t+1$ | $v+5$ | $(v+5)\cdot(t+1)$ |
| Luisa | $t+2$ | $v+10$ | $(v+10)\cdot(t+2)$ |

Como Alicia condujo 70 km más que Pedro, podemos escribir:

$$(v+5)(t+1) = vt + 70 \Rightarrow 5t + v = 65$$

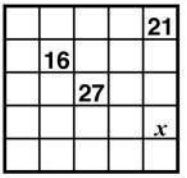
Luisa recorrió:

$$(v+10)(t+2) = vt + 10t + 2v + 20 = vt + 2(5t+v) + 20 = vt + 2\cdot 65 + 20 = vt + 150$$

Es decir, 150 km más que los recorridos por Pedro.

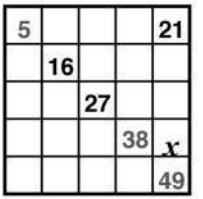
## 28 Nivel III — CP XIV

En el cuadrado que observas resulta que cada fila, cada columna y cada diagonal forman una progresión aritmética. ¿Qué número es $x$?
[Recuerda: en una progresión aritmética, la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.]



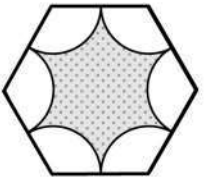

**A)** 49 **B)** 42 **C)** 33 **D)** 28 **E)** 4

**(B)** Comencemos por la diagonal: 16 y 27 son dos términos consecutivos de una progresión aritmética luego la razón es $27 - 16 = 11$ y eso nos permite rellenar toda la diagonal: $16 - 11 = 5$, $27 + 11 = 38$ y $38 + 11 = 49$.
A continuación nos fijamos en la última columna de la que tenemos el primer y el quinto término de la progresión: Como $49 = 21 + 4d$ obtenemos que la diferencia es 7 y por tanto $x = 49 - 7 = 42$.




## 29 Nivel III — CP XIV

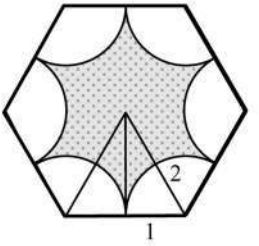
Si el hexágono de la figura tiene 2 dm de lado, ¿cuál es, en $dm^2$, el área de la estrella central?



**A)** $3\sqrt{3} - \pi$ **B)** $6\sqrt{3} - 2\pi$ **C)** $2\sqrt{6} - \pi$
**D)** $3(\sqrt{18} - \pi)$ **E)** $6(2\sqrt{3} - \pi)$

**(B)** Como los ángulos de un hexágono suman 720º, los sectores circulares blancos forman dos círculos de radio 1 dm. Así pues, el área buscada es el área del hexágono regular de 2 dm de lado y $\sqrt{3}$ dm de apotema menos el área de dos círculos de radio 1 dm:

$$6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 6\sqrt{3} - 2\pi \text{ dm}^2.$$



## 30 Nivel III CP XV

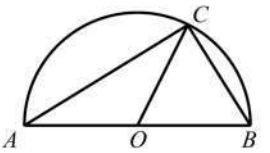
Si $n$ es un cuadrado perfecto, ¿cuál es el primer cuadrado perfecto mayor que $n$?

**A)** $n+\sqrt{n}$ **B)** $n+2\sqrt{n}+1$ **C)** $n^2+1$ **D)** $n^2+n$ **E)** $n^2+2n+1$

**(B)** El número $n$ es el cuadrado de $\sqrt{n}$ que es un número entero. El siguiente cuadrado perfecto será el cuadrado de $\sqrt{n}+1$, esto es $(\sqrt{n}+1)^2 = n+2\sqrt{n}+1$.

## 31 Nivel III CP XV

El dibujo muestra una semicircunferencia de centro $O$ y radio 1 cm. Si $C$ es un punto arbitrario de la semicircunferencia, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?




**A)** El ángulo $A\hat{C}B$ es recto.

**B)** El triángulo $AOC$ es isósceles.

**C)** El área del triángulo $ABC$ es menor o igual que 1 cm$^2$.

**D)** El área del triángulo $AOC$ es igual a la del triángulo $OBC$.

**E)** $AO^2+OB^2 = AC^2+BC^2$.

**(E)** A) Es verdadera pues el ángulo $A\hat{C}B$ abarca media circunferencia.
B) Es verdadera pues $OA$ y $OC$ son radios.
C) Es verdadera pues la base del triángulo es 2 cm y la altura es menor o igual que 1 cm.
D) Es verdadera pues las bases miden 1 cm y las alturas coinciden.
E) Por descarte, debe ser falsa, comprobémoslo:

Como el triángulo $ABC$ es rectángulo en $C$, sabemos que $AB^2 = AC^2+BC^2$ y, sustituyendo $AB = AO + OB$, vemos que:

$$AB^2 = (AO+OB)^2 = AO^2+2\cdot AO\cdot OB+OB^2 = AC^2+BC^2$$

Como $2\cdot AO\cdot OB = 2$, obtenemos la igualdad $AO^2+OB^2+2 = AC^2+BC^2$.

## 32 Nivel III CP XVI

Cuatro amigas, Ana, Bárbara, Clara y Daniela, forman un cuarteto musical y sabemos que:

(a) La que toca el clarinete tiene pecas.
(b) Ni Ana ni Clara tocan la guitarra.
(c) Solo la flautista, la violinista y Ana practican natación.
(d) Ni Clara ni Daniela tocan instrumentos de viento.

¿Cuál de estas afirmaciones es cierta?

**A)** Ana no tiene pecas **B)** Bárbara toca la flauta **C)** Clara toca la flauta
**D)** Daniela hace natación **E)** Bárbara toca el clarinete

**(B)** Vamos a encontrar los nombres de las instrumentistas. El quid de estos problemas es saber por dónde empezar.
Analizando (b) y (c) deducimos que Ana es la clarinetista y, por tanto (a), tiene pecas.
Observando ahora (b) y (d) deducimos que Clara es la violinista.
Observando ahora (d) deducimos que Daniela es la guitarrista y, por tanto (c), no practica natación.
Por tanto, Bárbara es la flautista.
La única afirmación cierta es que Bárbara toca la flauta.

## 33 Nivel III CP XVI

El resto de dividir $7^{25}$ entre 9 es:

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

**(D)** Veamos los restos de las primeras potencias de 7 con respecto a 9:
$7^1 = 7 = 9 \cdot 0 + 7 \rightarrow 7$, $7^2 = 49 = 9 \cdot 5 + 4 \rightarrow 4$, $7^3 = 343 = 9 \cdot 38 + 1 \rightarrow 1$.
Al dividir 343 entre 9 da resto 1 y, así, $7^{24} = 343^8$ entre 9 también da resto 1. Luego, $7^{25}$ entre 9 da resto 7.

## 34 Nivel III CP XVII

Entre los diez empleados de Mercafour se va a hacer un sorteo para elegir a los cuatro que trabajan este domingo. A Puri le viene fatal y Rubén le ha dicho que no se preocupe, que si le toca a ella, él irá en su lugar salvo, claro está, si los dos salen elegidos en cuyo caso Puri se tendrá que aguantar. ¿Qué probabilidad tiene Rubén de trabajar el domingo?

**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{5}$ **C)** $\frac{3}{10}$ **D)** $\frac{8}{15}$ **E)** $\frac{13}{90}$

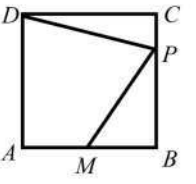
**(A)** Número de casos posibles: Debemos escoger cuatro de entre los diez empleados para trabajar el domingo, así que hay $\binom{10}{4}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$ posibilidades.

Número de casos favorables: Dentro de esas 210 posibilidades, Rubén aparecerá, con Puri o sin ella, $\binom{9}{3}=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}=84$ veces, y Puri, sin Rubén, lo hará $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$ veces.

Por lo tanto, la probabilidad que tiene Rubén de trabajar el domingo es $\frac{84+56}{210}=\frac{140}{210}=\frac{2}{3}$.

## 35 Nivel III CP XVII

En el cuadrado $ABCD$ de lado 2 cm, $M$ es el punto medio del lado $AB$ y $P$ es un punto variable del lado $BC$. ¿Cuál es el mínimo valor, en cm, de $DP + PM$?



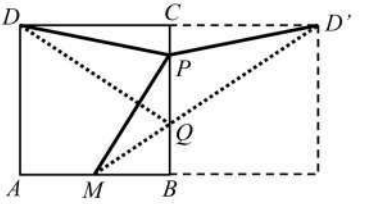

**A)** $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{3}$

**D)** $1+2\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{15}$

**(A)** Si consideramos el punto $D'$, simétrico de $D$ respecto de la recta $BC$, tendremos que $DP + PM = D'P + PM \geq D'M$ para cualquier punto $P$ del segmento $BC$.

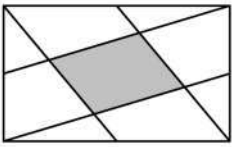
Por lo tanto, la mínima suma de distancias se obtiene con el punto $Q$ con el que

$DQ+QM=D'M=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ cm.



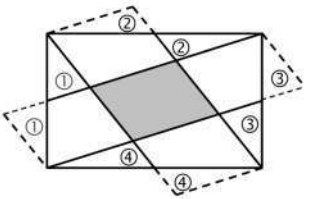
## 36 Nivel III — CP XVIII

En el rectángulo de la figura, uniendo vértices con puntos medios de los lados hemos formado un romboide en el centro. Si el área del rectángulo es de 60 cm$^2$, la del romboide, en cm$^2$, es:



**A)** 25 **B)** 20 **C)** 15
**D)** 12 **E)** 10

**(D)** Añadiendo algunos segmentos a la figura se observa que los triángulos marcados con el mismo número son iguales por simetría, con lo que tenemos que el rectángulo dado tiene igual área que 5 romboides como el sombreado y, por lo tanto, su área mide 60 : 5 = 12 cm$^2$.




## 37 Nivel III — CP XVIII

¿Cuántos enteros $n$, con $1 \le n \le 100$, verifican que $n^n$ es un cuadrado perfecto?

**A)** 5 **B)** 15 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 55

**(E)** Si $n$ es par, $n^n$ es cuadrado perfecto pues, al ser $n = 2k$, $n^n = n^{2k} = (n^k)^2$. Por lo tanto, ya tenemos 50 números enteros (los pares 2, 4, 6,..., 100) que verifican la condición. Por otra parte, si $n$ es impar podemos escribir $n = 2k + 1$ y $n^n = n^{2k+1} = (n^k)^2 \cdot n$, lo que indica que $n^n$ será cuadrado perfecto si y sólo si lo es $n$. Veamos, por lo tanto, qué cuadrados perfectos impares hay que cumplan $1 \le n \le 100$. Son 5: 1, 9, 25, 49, 81.

En definitiva, hay 50 + 5 = 55 números que verifican las condiciones exigidas.

## 38 Nivel III — CP XVIII

En una sucesión, el primer término es $a_1 = 1$, el segundo $a_2 = -1$ y, a partir del tercero, cada término es el producto de los dos anteriores. ¿Cuál es la suma de los 2014 primeros términos de la sucesión?

**A)** –1007 **B)** –1005 **C)** – 670 **D)** 0 **E)** 1008

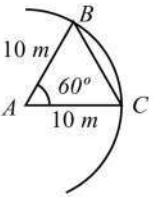
**(C)** La sucesión es: 1, –1, –1, 1, –1, –1,... Es decir, se repite la secuencia 1, –1, –1 continuamente. Así, los unos ocupan los lugares de la forma $3k + 1$ (1º, 4º, 7º,…). Hasta $2013 = 3 \cdot 671$, tendremos 671 unos y el doble de unos negativos, con lo que la suma de todos los términos será – 671. Si le añadimos el 1 de la posición 2014, obtendremos – 670.

## 39 Nivel III — CP XIX

Tres amigas están en un parque. Ali y Bea están juntas y Carolina está a 10 metros. Bea comienza a andar en una cierta dirección hasta que está a 10 m de Ali. ¿Cuál es la probabilidad de que Bea termine más cerca de Carolina que de Ali?

**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{1}{\pi}$ **D)** $\frac{1}{4}$ **E)** $\frac{1}{6}$

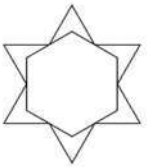
**(B)** Para que Bea esté a la misma distancia de Ali que de Carolina, el triángulo formado entre ellas tiene que ser equilátero y, por tanto, con todos sus ángulos 60º. En consecuencia, para que Bea esté más cerca de Carolina que de Ali, el ángulo $B\hat{A}C$ tiene que ser menor de 60º. Además, hay que tener en cuenta que Bea puede moverse a cada uno de los dos lados del segmento $AC$.




Habiendo observado esto y aplicando la regla de Laplace, encontramos la probabilidad: $P = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

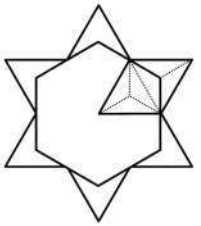
## 40 Nivel III — CP XIX

El hexágono regular inscrito en la estrella tiene un área de 12 cm$^2$. El área, en cm$^2$, de la estrella es:



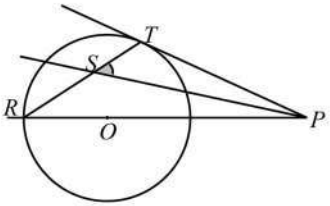
**A)** 15 **B)** 18 **C)** 20
**D)** 21 **E)** 24

**(B)** Dibujando dos apotemas, vemos en cada punta de la estrella un rombo que queda dividido en una cabeza de flecha y una cometa. Como se ve en la figura, el área de la cabeza de flecha es la mitad del área de la cometa, luego el área de la estrella es vez y media la del hexágono.



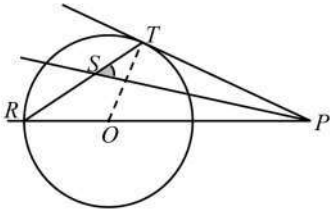
## 41 Nivel III — CP XX

Desde un punto $P$ exterior a una circunferencia se trazan dos rectas, una que pasa por el centro $O$ y otra tangente en $T$, como muestra la figura. La bisectriz del ángulo $O\hat{P}T$ corta al segmento $RT$ en $S$. ¿Cuál es la medida del ángulo $T\hat{S}P$ ?




**A)** 22,5º **B)** 30º **C)** 37,5º
**D)** 45º **E)** 52,5º

**(D)** La tangencia en $T$ nos sugiere el trazado del radio $OT$. De este modo $P\hat{T}O = 90º$ y, si llamamos $\alpha$ al ángulo $O\hat{P}T$ : $T\hat{O}P = 90º - \alpha$ $R\hat{O}T = 180º - (90º - \alpha) = 90º + \alpha$ .




Como el triángulo $OTR$ es isósceles, se tiene además que $O\hat{T}R = \dfrac{180º - R\hat{O}T}{2} = \dfrac{90º - \alpha}{2}$ y, por tanto: $P\hat{T}S = P\hat{T}O + O\hat{T}R = 135º - \dfrac{\alpha}{2}$.

Como resultado, $T\hat{S}P = 180º - P\hat{T}S - \dfrac{O\hat{P}T}{2} = 45º$.

## 42 Nivel III CP XX

Si los cuatro enteros $C$, $D$, $C + D$ y $C - D$ son números primos, su suma tiene que ser:

**A)** Múltiplo de 2 **B)** Múltiplo de 3 **C)** Múltiplo de 5

**D)** Múltiplo de 7 **E)** Un número primo

**(E)** Si $C$ y $D$ son primos, no pueden ser ambos impares ya que entonces $C + D$ no sería primo al ser par. Así que uno de los dos es el 2 y, como $C - D$ no es negativo al ser primo, deducimos que $D = 2$. Por tanto, los números primos de los que hablamos son, respectivamente: $C$, 2, $C+2$, $C - 2$. Dado que la única terna de primos impares consecutivos es la 3, 5, 7, resulta que $C = 5$ y los cuatro enteros dados son 5, 2, 7 y 3 que suman 17, siendo un número primo también.

## 43 Nivel III CP XXI

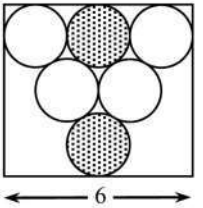
Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5, escritos en algún orden, formamos el número de cinco cifras $PQRST$. Si el número de tres cifras $PQR$ es divisible por 4, el $QRS$ es divisible por 5 y el $RST$ es divisible por 3, ¿qué cifra representa la letra $P$?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**(A)** Como $QRS$ es múltiplo de 5, $S$ necesariamente es 5. Al ser $PQR$ múltiplo de 4, $QR$ debe ser múltiplo de 4. Las únicas posibilidades son 12, 24, 32 y 52. La última se descarta porque $S = 5$ y no puede ser $Q = 5$. Ahora, $RST$ es múltiplo de 3. Como $S$ es 5 y $R$ únicamente puede ser 2 o 4, con $R = 2$ tenemos $25T$, que solo es múltiplo de 3 con $T = 2$ o $T = 5$, imposible, en cualquier caso. Con $R = 4$ tenemos $45T$, que solo puede ser múltiplo de 3 con $T = 3$. De modo que $QR = 24$ y $PQRST = 12453$. Y esto implica que $P = 1$.

## 44 Nivel III — CP XXI

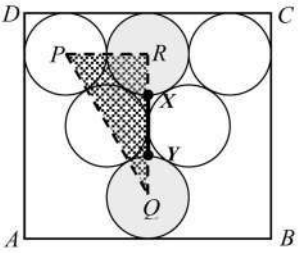
En el interior del rectángulo de la figura, uno de cuyos lados mide 6 cm, hay seis circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del rectángulo. ¿Cuál es, en cm, la distancia entre los puntos más cercanos de los círculos sombreados?




**A)** $\frac{3}{2}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $2(\sqrt{3}-1)$ **D)** $\frac{\pi}{2}$ **E)** 2

**(C)** Observa la primera fila de circunferencias. Como $AB = 6$ cm y dicha longitud es tres veces el diámetro de cada circunferencia, los radios miden todos $r = 1$ cm. En el triángulo rectángulo $PRQ$, el cateto $PR$ mide $2r = 2$ cm y la hipotenusa $PQ$ mide $4r = 4$ cm. Así, por el teorema de Pitágoras, se obtiene $RQ = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ cm.

La distancia que se pide es la del segmento $XY = RQ - 2r = 2\sqrt{3} - 2 = 2\cdot(\sqrt{3}-1)$ cm.




## 45 Nivel III — CP XXII

María tiene tres nietos que la llaman por teléfono regularmente. Uno cada 3 días, otro cada 4 y el otro cada 5. El 31 de diciembre de 2017 la llamaron los tres. ¿Cuántos días del año 2018 no recibirá ninguna llamada?

**A)** 78 **B)** 80 **C)** 144 **D)** 146 **E)** 152

**(D)** Dado que 2018 no es bisiesto, la pregunta se puede cambiar por "¿Cuántos números del 1 al 365 no son múltiplos de 3, 4 o 5?" Para dar la respuesta calcularemos cuántos números del 1 al 365 sí son múltiplos de 3, 4 o 5. Tenemos 121 múltiplos de 3, 91 de 4 y 73 de 5. Pero cuidado, ¡algunos múltiplos son comunes! Debemos descontar los múltiplos que son comunes a pares y que hemos contado dos veces: de 3 y 4 son los de 12 que hay 30, de 3 y 5 los de 15 que hay 24, y de 4 y 5 los de 20 que hay 18. ¡Sin embargo queda un detalle! Hemos contado los múltiplos comunes a 3, 4 y 5 (los de 60 que son 6) por triplicado, pero también los hemos descontado tres veces, por lo que hay que volver a contarlos.
En definitiva, la cantidad de múltiplos de 3, 4 o 5 entre el 1 y 365 es:
$121 + 91 + 73 - 30 - 24 - 18 + 6 = 219$.
María no recibe llamadas de sus nietos $365 - 219 = 146$ días.

## 46 Nivel III CP XXII

Consideramos 2018 puntos de los cuales unos son azules y los otros verdes. Asignamos a cada punto una fracción cuyo numerador es el número de puntos del otro color y el denominador es el número de puntos de su color (incluido él). ¿Cuál es la suma de las 2018 fracciones así construidas?

**A)** 2018 **B)** 1346 **C)** 1009 **D)** 505 **E)** Falta información

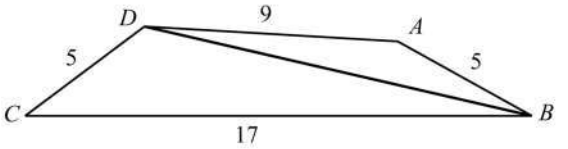
**(A)** Si $a$ es el número de puntos azules, el número de puntos verdes es $2018 - a$. La fracción que corresponde a cada punto verde es $\frac{a}{2018-a}$, mientras que la que corresponde a cada punto azul es $\frac{2018-a}{a}$.

La suma de todas las fracciones es: $(2018-a)\cdot\frac{a}{2018-a}+a\cdot\frac{2018-a}{a}=2018$.

## 47 Nivel III CP XXIII

En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, ¿cuánto mide $BD$ si sabemos que es un entero?

**A)** 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15




**(C)** Por ser lado de $DBA$, $DB$ debe estar estrictamente entre $9 - 5 = 4$ y $9 + 5 = 14$. Por ser lado de $CBD$, $DB$ debe estar (también estrictamente) entre $17 - 5 = 12$ y $17 + 5 = 22$, así que $DB = 13$.

## 48 Nivel III — CP XXIII

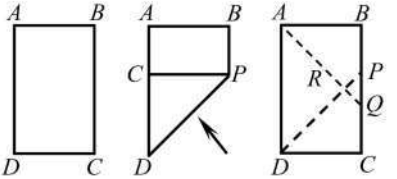
Si $(x+2)\cdot(y+2)=60$ y $(x+3)\cdot(y+3)=40$, ¿cuál es el valor de $(x+5)\cdot(y+5)$?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**(A)** Operando las dos igualdades se obtienen dos ecuaciones:
$xy+2x+2y+4=60$ $xy+3x+3y+9=40$
Restando la segunda ecuación menos la primera, llegamos a que $x+y+5=-20$, es decir $x+y=-25$.
Por último, manipulando la expresión que nos piden, deducimos:
$(x+5)\cdot(y+5)=xy+5x+5y+25=(xy+2x+2y+4)+3(x+y)+21=60+3(-25)+21=6.$

## 49 Nivel III CP XXIV

Una hoja rectangular $ABCD$ con $AB = 5$ cm y $AD = 8$ cm, se dobla para que el borde $CD$ caiga sobre el borde $AD$, formándose así el doblez $PD$. Se desdobla y a continuación vuelve a doblarse de tal manera que $AB$ caiga sobre $AD$, formándose ahora el doblez $AQ$. Si la intersección de estos dos dobleces es el punto $R$, calcula el área, en cm$^2$, del cuadrilátero $DRQC$.




**A)** 10 **B)** 10,5 **C)** 11 **D)** 11,5 **E)** 12

**(D)** Por cómo se realizan los dobleces podemos deducir que el segmento $BQ$ mide 5 cm, ya que tiene que medir lo mismo que $AB$. Esto mismo sucede con el segmento $PC$, de manera que $PQ = PC + BQ = 5 + 5 - 8 = 2$ cm pues es el trozo que contamos dos veces si sumamos $PC$ y $BQ$. Los triángulos $ABQ$ y $CDP$ son rectángulos e isósceles, por lo que el triángulo $PQR$ que comparte ángulos con ellos también es rectángulo e isósceles. Con esto, ya sea utilizando el teorema de Pitágoras o sabiendo que la altura sobre la base $PQ$ debe medir $\frac{PQ}{2}$, podemos obtener el área del triángulo $PQR$ que es de 1 cm$^2$. Para obtener el área de $DRQC$ restamos al área de $CDP$ la de $PQR$, por lo que el resultado final es: $\frac{5\cdot 5}{2} - 1 = 11{,}5\,\text{cm}^2$.

## 50 Nivel III CP XXV

¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**(D)** Está claro que dichos números deben tener dos cifras. Sea $[ab]$ un número que cumple dicha propiedad, entonces, $10a + b = 4(a + b)$, es decir, $6a = 3b$ y, por tanto, $2a = b$.
Como $a$ y $b$ son cifras, ya hemos encontrado todos los números: 12, 24, 36, 48.

# Soluciones - Nivel IV

**1** **Nivel IV** **CP I**

En una mesa hay cinco cartas como se muestra en la figura.

Cada carta tiene una letra por una cara y un número positivo por la otra. Pedro dice: "Cualquier carta que tenga una vocal por un lado, tiene un número par por el otro". Alicia descubre que esta afirmación es falsa dando la vuelta a una de las cinco cartas. ¿A cuál?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 6 **D)** P **E)** Q

**(A)** La afirmación será falsa si hay una carta con vocal por un lado y número impar por el otro. La única carta que puede cumplir eso es la que tiene un 3, por lo que Alicia le dio la vuelta e hizo notar que tenía una vocal.

## 2 Nivel IV CP I

En una caja metemos una tarjeta etiquetada con un 1, dos con un 2 cada una, tres con un 3 cada una, y así hasta 50 tarjetas con un 50.
En total hemos, pues, metido $1 + 2 + 3 + ... + 50 = 1275$ tarjetas. Cogemos un montón de ellas. El mínimo número de tarjetas que debemos coger para garantizar que al menos haya diez tarjetas en las que está escrita la misma etiqueta es:

**A)** 10 **B)** 51 **C)** 415 **D)** 451 **E)** 521

**(C)** Una posibilidad de no asegurar que haya 10 tarjetas con la misma etiqueta es coger todas las numeradas del 1 al 9 y 9 de cada una de las numeradas del 10 al 50, es decir, $1 + 2 + 3 + ... + 9 + 9 \cdot 41 = 414$. Así pues, si cogemos 415 tarjetas hemos asegurado que al menos hay 10 escritas con la misma etiqueta.

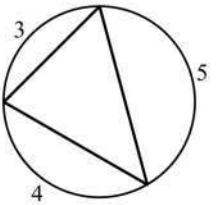
## 3 Nivel IV CP II

Antonio y Beatriz empiezan a trabajar el mismo día. El horario de Antonio consiste en tres días de trabajo y uno de descanso mientras que Beatriz trabaja siete días seguidos y luego descansa tres días seguidos. En los 1000 primeros días de trabajo, ¿cuántos días coinciden en el descanso?

**A)** 48 **B)** 50 **C)** 72 **D)** 75 **E)** 100

**(E)** Antonio descansa los días 4, 8, 12,..., es decir los días múltiplo de 4. Beatriz descansa los días 8, 9, 10, 18, 19, 20, 28, 29, 30, etc.
Así pues, entre otros, Beatriz descansa los múltiplos de 10 y como Antonio descansa los múltiplos de 4, coincidirán en los días múltiplos de 20, ya que mcm (4, 10) = 20. Por otra parte, Beatriz descansa los múltiplos de 10 menos 2 que son múltiplos de 4 alternativamente (es decir, uno de cada dos). Los días impares que descansa Beatriz nunca coincidirán con días de descanso de Antonio.
En total, hay 50 múltiplos de 20 y 100 múltiplos de 10 menos 2, por lo que el número total de días de coincidencia en el descanso será $50 + 50 = 100$.

## 4 Nivel IV CP II

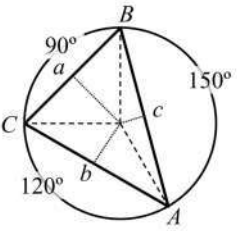



Los arcos que determinan los vértices del triángulo de la figura tienen longitudes 3, 4 y 5. ¿Cuál es el área del triángulo?

**A)** 6 **B)** $\frac{18}{\pi^2}$ **C)** $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}-1)$

**D)** $\frac{9}{\pi^2}(\sqrt{3}+3)$ **E)** Falta información.

**(D)** Una forma cómoda de resolver el problema pasa por determinar, en primer lugar, los ángulos centrales que subtienden estos arcos. Como el valor del ángulo central es proporcional al arco que determina, sigue que son:




$3\cdot\frac{360}{12}$, $4\cdot\frac{360}{12}$ y $5\cdot\frac{360}{12}$ con lo que los ángulos del triángulo serían en cada caso la mitad, es decir 45º, 60º y 75º. Así pues, el ángulo central desde el que se ve el arco de longitud 3 es de 90º, por lo que $\frac{2\pi r}{4}=3\Rightarrow r=\frac{6}{\pi}$ y el problema se reduce a hallar el área de un triángulo de ángulos 45º, 60º y 75º, inscrito en un círculo de radio $\frac{6}{\pi}$.

$$\operatorname{sen}60^\circ=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{6}{\pi}}\Rightarrow b=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi};\quad \operatorname{sen}45^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{6}{\pi}}\Rightarrow a=2\cdot\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{6\sqrt{2}}{\pi}$$

El área es:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot\operatorname{sen}75^\circ=\frac{18}{\pi^2}\sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{9}{\pi^2}(3+\sqrt{3})$$

## 5 Nivel IV CP III

Dos velas son de diferente longitud y grosor. La más larga dura 7 horas ardiendo y la más corta 10 horas. Si después de 4 horas ardiendo, las dos velas tienen igual longitud, ¿cuál es el cociente entre las longitudes de ambas?

**A)** $\frac{7}{10}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{7}$ **D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**(D)** Llamando $l_1$ a la longitud de la vela larga y $l_2$ a la otra, al cabo de 4 horas se habrá consumido $\frac{4l_1}{7}$ en la primera **y** $\frac{4l_2}{10}$ en la segunda, por lo que las longitudes que quedaron son $\frac{3l_1}{7}$ y $\frac{3l_2}{5}$. Como nos dicen que $\frac{3l_1}{7}=\frac{3l_2}{5}$, sigue que $\frac{l_2}{l_1}=\frac{5}{7}$.

## 6 Nivel IV CP III

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, perros y gatos, son perfectamente normales. Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20% del total se creían que eran gatos. ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

**A)** 12,5 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 22,5

**(A)** Hay $g$ gatos y $p$ perros en Madrid y nos piden $\frac{g}{g+p}$.

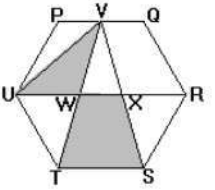
Se creen que son gatos $\frac{90}{100}g+\frac{10}{100}p$ que supone $\frac{20}{100}(g+p)$.

Así pues, $9g+p=2g+2p$, es decir, $7g=p$, por lo que $\frac{g}{g+p}=\frac{g}{8g}=\frac{1}{8}=12{,}5\ \%$.

## 7 Nivel IV CP IV

En el hexágono regular $PQRSTU$ de la figura, $V$ es el punto medio de $PQ$, y $W$ y $X$ son los puntos que se señalan.

¿Cuánto vale $\dfrac{\text{Área } WXST}{\text{Área } UVW}$?

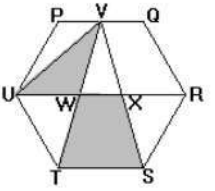



**A)** 2 **B)** 3 **C)** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

**D)** $\sqrt{3}$ **E)** $\sqrt{2}$

**(A)** Llamando 1 al lado del hexágono, $WX = \dfrac{1}{2}$ por lo que $UW = \dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Como el segmento perpendicular bajado desde $V$ a $TS$ mide la altura sobre la base $UW$ del triángulo más la altura del trapecio, ambas iguales, el cociente pedido será la suma de las bases del trapecio entre la base del triángulo, es decir, $\left(1+\dfrac{1}{2}\right) \div \dfrac{3}{4} = 2$.




## 8 Nivel IV CP IV

La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ verifica que $a_1 = 19$, $a_{2000} = 99$ y para $n \geq 3$, $a_n$ es la media aritmética de los $n-1$ primeros términos. ¿Cuál es el valor de $a_2$?

**A)** 29 **B)** 59 **C)** 79 **D)** 99 **E)** 179

**(E)** Si en una sucesión, a partir del tercer término cada uno es la media aritmética de los anteriores, la sucesión verifica que $a_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$ y

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} = \frac{(n-1)a_n + a_n}{n} = a_n,$$

por lo que la sucesión a partir del tercer término es constante.

Así pues, $a_3 = a_{2000} = 99$ y $99 = \dfrac{19 + a_2}{2}$, de donde $a_2 = 179$.

## 9 Nivel IV CP V

¿Cuántos enteros positivos de dos cifras son menores que el producto de sus cifras?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 45

**(A)** Si $10a + b$ ($a \neq 0$) es el número pedido y $ab$ el producto de sus cifras, tenemos que $10a + b - ab = a\,(10 - b) + b$ que nunca será negativo, por lo que no habrá ningún número de dos cifras menor que el producto de sus cifras.

## 10 Nivel IV CP V

Si $\operatorname{tg} x = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ con $a > b > 0$ y $0^\circ < x < 90^\circ$, $\operatorname{sen} x$ es igual a:

**A)** $\dfrac{a}{b}$ **B)** $\dfrac{b}{a}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2a}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab}$ **E)** $\dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$

PRIMERA SOLUCIÓN

**(E)** Sabemos que $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$, igualdad que se da si

$\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{x}{2} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, (observar que $a$, $b > 0$) por lo que

$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(E)** $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ y $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

Así pues, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2}{1 + \left(\frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^2} = \dfrac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$, con lo que al ser $a$ y $b$ positivos,

es $\operatorname{sen} x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.

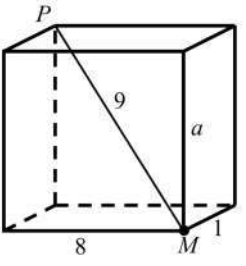
## 11 Nivel IV CP VI

Dos paredes de una habitación y el techo se juntan en ángulo recto en un punto $P$. Una mosca está en el aire a 1 m de una pared, 8 m de la otra y a 9 m del punto $P$. ¿A qué distancia, en metros, está del techo?

**A)** $\sqrt{13}$ **B)** $\sqrt{14}$ **C)** $\sqrt{15}$ **D)** 4 **E)** $\sqrt{17}$

**(D)** Con los datos conocidos podemos colocar la mosca en el vértice de un ortoedro del que conocemos la longitud de la diagonal, 9 m, y la de dos aristas, 1 m y 8 m.

Entonces, si llamamos $a$, a la longitud de la otra arista, se tiene que $9^2 = 1^2 + 8^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ m.




## 12 Nivel IV CP VI

En una caja hay 1001 bolas blancas y 1001 bolas negras. Si $P_1$ es la probabilidad de que al coger dos bolas al azar sean del mismo color y $P_2$ la probabilidad de que sean de diferente color, entonces $P_2 - P_1$ es igual a:

**A)** 0 **B)** $\frac{1}{2002}$ **C)** $\frac{1}{2001}$ **D)** $\frac{2}{2001}$ **E)** $\frac{1}{1000}$

**(C)** $P_1 = 2 \cdot \frac{1001}{2002} \cdot \frac{1000}{2001} = \frac{1000}{2001}$ y $P_2 = 2 \cdot \frac{1001}{2002} \cdot \frac{1001}{2001} = \frac{1001}{2001}$

Por lo tanto $P_2 - P_1 = \frac{1001}{2001} - \frac{1000}{2001} = \frac{1}{2001}$.

## 13 Nivel IV — CP VII

Cada una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera o falsa.
1. Las afirmaciones 3 y 4 son ambas verdaderas.
2. Las afirmaciones 4 y 5 no son ambas falsas.
3. La afirmación 1 es verdadera.
4. La afirmación 3 es falsa.
5. Las afirmaciones 1 y 3 son ambas falsas.

¿Cuántas afirmaciones de estas cinco son verdaderas?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

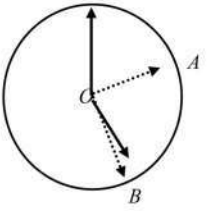
**(D)** Las afirmaciones 1, 3 y 4 se contradicen mutuamente. Si 1 fuese verdadera también deberían serlo 3 y 4, que es contradictorio. Luego 1 es falsa. Y entonces 3 también es falsa, lo que hace que 4 sea verdadera. Las afirmaciones 2 y 5 son verdaderas. Por tanto hay tres afirmaciones verdaderas, la 2, la 4 y la 5.

## 14 Nivel IV — CP VII

Después de las cinco de la mañana, ¿cuánto tiempo, expresado en horas, debe pasar para que la aguja de los minutos y la de las horas de un reloj formen entre sí, por primera vez, un ángulo recto?

**A)** $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{2}{11}$ **C)** $\frac{5}{22}$ **D)** $\frac{4}{23}$ **E)** $\frac{7}{30}$

**(B)** A las 5 de la mañana, las agujas del reloj forman un ángulo de 150º. Como la aguja de las horas recorre 30º en 60 minutos y la de los minutos 360º en ese tiempo, al cabo de $t$ minutos recorrerán $\frac{t^\circ}{2}$ y $6t^\circ$ respectivamente.




Nos piden calcular $t$ para que el ángulo $A\hat{O}B$ sea de 90º. Así pues, $\frac{t}{2} + 150 - 6t = 90$, que nos conduce a $t = \frac{120}{11}$ minutos, es decir, $\frac{2}{11}$ horas.

## 15 Nivel IV — CP VIII

El menor entero positivo $n$ para el que $10^n - 1$ es múltiplo de 63 es:

**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 8

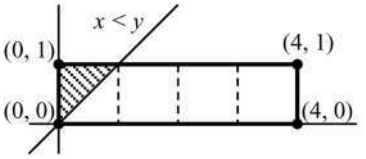
**(C)** Como $10^n - 1$ es múltiplo de 9 para cualquier entero positivo $n$, bastará hallar el menor entero positivo $n$ para el que $10^n - 1$ sea múltiplo de 7 y lo más cómodo es ir dividiendo 99 … 9 entre 7 hasta obtener un resto 4 (pues en el paso siguiente obtendríamos resto cero, 49 : 7 = 7) y eso tiene lugar para 99999 por lo que habría un 9 más, es decir, la respuesta es $n = 6$.

## 16 Nivel IV — CP VIII

Elegimos al azar un punto $(x, y)$ del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$ y $(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que $x$ sea menor que $y$?

**A)** $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{3}{8}$ **D)** $\frac{1}{2}$ **E)** $\frac{3}{4}$.

**(A)** El punto $(x, y)$ verificará $x < y$ sólo si está en la zona rayada, y como el área de esta es $\frac{1}{2}$ y el área del rectángulo es 4, la probabilidad pedida es $\frac{1}{8}$.




## 17 Nivel IV — CP IX

Si $x$ e $y$ son los números complejos dados por $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

**A)** $x^5 + y^5 = -1$ **B)** $x^7 + y^7 = -1$ **C)** $x^9 + y^9 = -1$ **D)** $x^{11} + y^{11} = -1$ **E)** $x^{13} + y^{13} = -1$

**(C)** Si escribimos los complejos en forma polar:

$$x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{2\pi}{3}} \qquad y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 1_{\frac{4\pi}{3}}$$

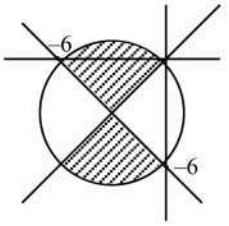
$$x^9 + y^9 = 1^9_{9.\frac{2\pi}{3}} + 1^9_{9.\frac{4\pi}{3}} = 1_{6\pi} + 1_{12\pi} = 1 + 1 = 2 \neq -1$$

## 18 Nivel IV CP IX

Sea $f(x)=x^2+6x+1$ y $T$ el conjunto de los puntos $(x,\ y)$ tales que $f(x)+f(y)\le 0$ y $f(x)-f(y)\le 0$. El entero más próximo al valor del área del recinto determinado por el conjunto $T$, es:

**A)** 21 **B)** 22 **C)** 23 **D)** 24 **E)** 25

**(E)** Por las condiciones dadas, tenemos que
$f(x)+f(y)=x^2+6x+1+y^2+6y+1=(x+3)^2+(y+3)^2-16\le 0$.
Además $f(x)-f(y)=x^2-y^2+6(x-y)=(x-y)(x+y+6)\le 0$. Así pues, al ser $T$ el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen simultáneamente las dos desigualdades dadas, tenemos que $T$ es la intersección de los conjuntos




$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x+3)^2+(y+3)^2\le 16\}$ y

$$B=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2 / \begin{array}{c} x-y\ge 0 \\ \text{y} \\ x+y+6\le 0 \end{array} \text{ o } \begin{array}{c} x-y\le 0 \\ \text{y} \\ x+y+6\ge 0 \end{array}\right\}$$

donde $A$ es el interior de un círculo y $B$ una región del plano determinado por rectas perpendiculares.

Al dibujar el conjunto $T$ nos encontramos con que $T$ está formado por dos cuartos de círculo de radio 4 por lo que su área será $\frac{1}{2}\pi\cdot 4^2=8\pi\approx 25{,}13$ con lo que la respuesta será E.

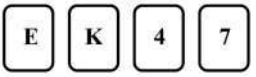
## 19 Nivel IV CP X

La suma de 49 números enteros consecutivos es $7^5$. ¿Cuál es su mediana?

**A)** 7 **B)** $7^2$ **C)** $7^3$ **D)** $7^4$ **E)** $7^5$

**(C)** La suma de $n$ números enteros consecutivos, siendo $n$ impar, es $S_n = Me\cdot n$, donde Me es el valor central de la serie. Como $S_n=7^5$ y $n=49$, $Me=\frac{7^5}{49}=7^3$.

## 20 Nivel IV CP X




Cada una de estas cartas tiene una letra en una cara y un número en la otra cara. Pedro dice: *"En cualquiera de estas cartas se verifica que como tenga una vocal por una cara, tiene un número par por la otra"*. ¿A cuántas cartas como mínimo tiene que darles la vuelta Alicia para comprobar que Pedro dice la verdad?

**A)** Ninguna **B)** Una **C)** Dos **D)** Tres **E)** Cuatro

**(C)** Si Alicia da la vuelta a la carta E y observa que por detrás hay un número par y da la vuelta a la carta 7 y observa que por detrás no hay una vocal, ha comprobado que Pedro dice la verdad pues por detrás de las cartas K y 4 puede haber cualquier número y cualquier letra respectivamente, que no va a influir en la veracidad de lo dicho por Pedro. Por tanto, Alicia tiene que dar la vuelta, como mínimo, a dos cartas, la E y la 7.

## 21 Nivel IV — CP XI

¿Cuántos "martes y 13" puede haber como mucho en un año?

**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**(C)** En la tabla adjunta, llamamos diferencial semanal a la diferencia entre los días de la semana correspondientes a días del mes con el mismo número. Y este número es el número que sobrepasa a 28 (múltiplo de 7) el número de días del mes anterior. Por ejemplo, el diferencial semanal de febrero es tres porque el 12 de febrero cae tres días de la semana después que el correspondiente al 12 de enero. Y es así porque enero tiene 31 días (28 + 3). Los meses que tienen el mismo número-módulo 7 coinciden el número de día del mes con el día de la semana. Así en febrero, marzo y noviembre coinciden el número de día y de semana. Igual ocurre con enero y octubre, abril y julio y septiembre y diciembre. Los meses de mayo, junio y agosto no coinciden con ningún otro mes del año. Si el 13 de febrero fue martes, hay otros dos "treces" que caen en martes: marzo y noviembre, y éste es el número máximo de "martes y 13" que puede haber en un año.

Si el año es bisiesto, el máximo número de meses coincidentes también es tres, en este caso, enero, abril y julio.

| Mes | Nº de días | Diferencial semanal | | Diferencial semanal acumulado | | Módulo 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Normal | Bisiesto | Normal | Bisiesto | Normal | Bisiesto |
| Enero | 31 | – | – | – | – | 0 | **0** |
| Febrero | 28/29 | 3 | 3 | 3 | 3 | **3** | 3 |
| Marzo | 31 | 0 | 1 | 3 | 4 | **3** | 4 |
| Abril | 30 | 3 | 3 | 6 | 7 | 6 | **0** |
| Mayo | 31 | 2 | 2 | 8 | 9 | 1 | 2 |
| Junio | 30 | 3 | 3 | 11 | 12 | 4 | 5 |
| Julio | 31 | 2 | 2 | 13 | 14 | 6 | **0** |
| Agosto | 31 | 3 | 3 | 16 | 17 | 2 | 3 |
| Septiembre | 30 | 3 | 3 | 19 | 20 | 5 | 6 |
| Octubre | 31 | 2 | 2 | 21 | 22 | 0 | 1 |
| Noviembre | 30 | 3 | 3 | 24 | 25 | **3** | 4 |
| Diciembre | 31 | 2 | 2 | 26 | 27 | 5 | 6 |

## 22 Nivel IV — CP XI

Nadal y Federer juegan en tierra batida un partido a 3 sets, es decir, vence quien gana 2 sets. Si la probabilidad que tiene Nadal de ganar cada set es un 60 %, ¿qué probabilidad tiene Nadal de salir victorioso en el partido?

**A)** 0,6 **B)** 0,648 **C)** 0,504 **D)** 0,36 **E)** 0,75

**(B)** Nadal gana el partido en cualquiera de estas situaciones: $NN$, $NFN$ o $FNN$ representando por $N$ o $F$ que Nadal o Federer ganen un set.
Así pues, la probabilidad de que Nadal gane el partido es

$$p=\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}\cdot 2=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{9}{5}=\frac{81}{125}=0{,}648\ .$$

## 23 Nivel IV — CP XII

¿Cuáles son las dos últimas cifras de $51^{48}$?

**A)** 81 **B)** 61 **C)** 41 **D)** 21 **E)** 01

**(E)** $$51^{48}=(50+1)^{48}=\binom{48}{0}50^{48}+\binom{48}{1}50^{47}+\ldots+\binom{48}{46}50^2+\binom{48}{47}50+\binom{48}{48}.$$

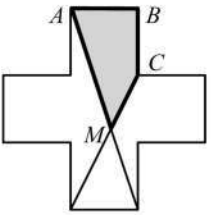
De todos los términos de este desarrollo, los únicos que pueden influir en las dos últimas cifras del resultado son los dos últimos, ya que los anteriores tienen un factor potencia de 10 con exponente mayor o igual que 2:

$$\binom{48}{47}50+\binom{48}{48}=48\cdot 50+1=2400+1=2401$$

Así pues, lo que las dos últimas cifras de $51^{48}$ son 01.

## 24 Nivel IV CP XII

Los doce lados del polígono de la figura son de igual longitud, 4, y cualesquiera dos consecutivos se cortan en ángulo recto. ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCM*?

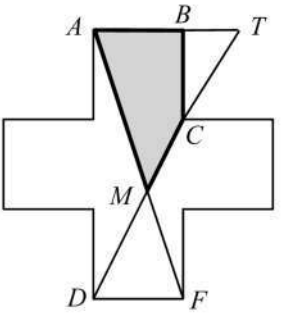



**A)** $\frac{44}{3}$ **B)** 16 **C)** $\frac{88}{5}$

**D)** 20 **E)** $\frac{62}{3}$

**(C)** Prolongando $MC$ hasta cortar a la prolongación de $AB$ en $T$, tenemos que el triángulo $BCT$ es semejante al $ADT$ con razón de semejanza $\frac{BC}{AD}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ por lo que, llamando $BT=x$, es $4+x=3x$, $x=2$ y $AT=6$.

Por otra parte, los triángulos $ATM$ y $MDF$ son semejantes con razón de semejanza $\frac{AT}{DF}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, de donde, llamando $h$ a la altura de $MDF$ trazada desde $M$, es $h+\frac{3}{2}h=12$, $h=\frac{24}{5}$.




Área $MDF=\frac{48}{5}$; Área $ATM=\frac{48}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{108}{5}$;

Área sombreada $=\frac{108}{5}-4=\frac{88}{5}$.

## 25 Nivel IV CP XIII

¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo de lado *c,* si *c* es media geométrica de las diagonales?

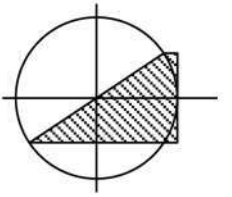
**A)** 15º **B)** 30º **C)** 45º **D)** 60º **E)** 75º

**(B)** Sean $a$ y $b$ las diagonales y $c$ el lado del rombo. Como $c$ es media geométrica de $a$ y $b$, tenemos que $c^2 = a \cdot b$ . Aplicando el teorema de Pitágoras,

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4ab$ Dividiendo esta expresión entre $a \cdot b$, tenemos $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4$ . Pero $\frac{a}{b}$ es la tangente del ángulo mitad del ángulo agudo del rombo, por tanto, $\text{tg}\alpha + \frac{1}{\text{tg}\alpha} = 4$ , y de aquí, $\text{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$ . Como α es menor que 45º, tg α es menor que 1, por tanto tg α = $2 - \sqrt{3}$ , y $\alpha = 15º$ . El ángulo agudo del rombo es el doble, es decir 30º.

## 26 Nivel IV CP XIII

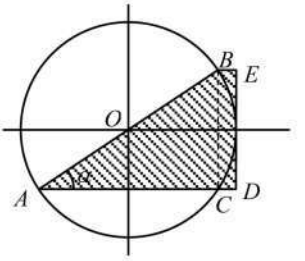
La figura muestra una circunferencia de radio 1 y un trapecio rectángulo cuyas bases son paralelas al eje horizontal, un lado es tangente a la circunferencia y el otro es un diámetro de la misma. Si el ángulo que forma este lado con la base mayor es $\alpha$, el área de dicho trapecio es:



**A)** 2 sen $\alpha$ **B)** 2 sen$^2$ $\alpha$ **C)** 2 tg $\alpha$

**D)** $2\text{sen}\alpha(2+\cos\alpha)$ **E)** sen $2\alpha$

**(A)** Dividiendo el trapecio como indica la figura, resulta que al ser $AB$ un diámetro, el área del triángulo $ABC$ será $\text{Área} = \frac{1}{2} 2\cos\alpha \cdot 2\text{sen}\alpha$ , y el área del rectángulo $BCDE$ será $(1-\cos\alpha)\cdot 2\text{sen}\alpha$ , con lo que el área del trapecio será:
$\cos\alpha \cdot 2\text{sen}\alpha + (1-\cos\alpha)\cdot 2\text{sen}\alpha = 2\text{sen}\alpha$ .



## 27 Nivel IV CP XIV

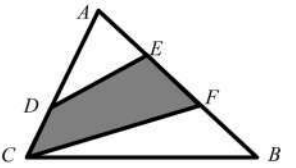
Uno de los números complejos $z$ que verifican el sistema $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases}$ es:

**A)** $2+2\sqrt{3}\,i$ **B)** $2\sqrt{3}-2i$ **C)** $3+3\,i$ **D)** $2+2\,i$ **E)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$

**(C)** Como $\begin{cases} z \cdot t = 6_{60^\circ} \\ \dfrac{z}{t} = 3_{30^\circ} \end{cases} \Rightarrow z^2 = 6_{60^\circ} \cdot 3_{30^\circ} = 18_{90^\circ} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3\sqrt{2}_{45^\circ} = 3+3i \\ z_2 = 3\sqrt{2}_{225^\circ} = -3-3i \end{cases}$

## 28 Nivel IV CP XIV

En la figura que te mostramos, el área del triángulo $ABC$ es 9, $DC$ es un tercio de $AC$ y los puntos $E$ y $F$ dividen a $AB$ en tres partes iguales. ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?




**A)** 3 **B)** 4 **C)** 4,5 **D)** 5 **E)** 6

**(B)** $\mathrm{A}_{CBF} = \dfrac{1}{3}\mathrm{A}_{ABC} = 3$ porque tiene la misma base que el triángulo $ABC$ y un tercio de su altura. Por otro lado, $\mathrm{A}_{ADE} = \dfrac{2}{9}\mathrm{A}_{ABC} = 2$ porque su base es dos tercios de la base del triángulo $ABC$ y su altura un tercio de la altura del triángulo $ABC$.
El área del cuadrilátero es $9-3-2=4$.

## 29 Nivel IV CP XV

¿En cuántos ceros termina el producto de los 2011 primeros números primos?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**(B)** En el producto de los 2011 primeros primos sólo hay un 2 y un 5. Por tanto sólo hay un 0 en el final del producto.

## 30 Nivel IV CP XV

Si $f(11)=11$ y $f(n+3)=\dfrac{f(n)-1}{f(n)+1}$, $f(2012)$ es:

**A)** 11 **B)** $\dfrac{5}{6}$ **C)** $-\dfrac{6}{5}$ **D)** $-\dfrac{1}{11}$ **E)** 2011

**(C)** En primer lugar observamos que 2012 es el 668º término de una progresión aritmética que comienza en 11 y tiene diferencia 3: $2012 = 11 + 667 \cdot 3$.

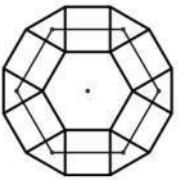
Por otro lado, $f(11)=11;\ f(14)=\dfrac{5}{6};\ f(17)=-\dfrac{1}{11};\ f(20)=-\dfrac{6}{5};\ f(23)=11;\ldots$

Esto implica que si $a_n$ es un término de la progresión aritmética. 11, 14, 17, 20, …

$$f(a_n)=\begin{cases}\dfrac{11}{5} & \text{si} \quad n=4k-3\\ \dfrac{5}{6} & \text{si} \quad n=4k-2\\ -\dfrac{1}{11} & \text{si} \quad n=4k-1\\ -\dfrac{6}{5} & \text{si} \quad n=4k\end{cases} \qquad (k \in N)$$

Como $2012 = a_{668}$ y $668 = 4 \cdot 167$, entonces $f(2012)=-\dfrac{6}{5}$.

## 31 Nivel IV CP XVI



Hemos rodeado el hexágono regular central de la figura con cuadrados y triángulos equiláteros. Si el lado de ese hexágono mide 2 cm, ¿cuál es el área, en cm$^2$, del hexágono regular cuyos vértices son los centros de los triángulos equiláteros?

**A)** $18+6\sqrt{3}$ **B)** $24+3\sqrt{3}$ **C)** $12+8\sqrt{3}$

**D)** 24 **E)** $6+12\sqrt{3}$

**(C)** La relación entre la apotema y el lado de un hexágono regular es la misma que entre la altura y el lado de un triángulo equilátero, esto es, $\cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

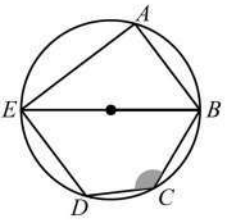
Obsérvese que en la figura, la apotema del hexágono grande es una unidad mayor que la del pequeño. Como sabemos el lado del hexágono pequeño, podemos calcular el lado y la apotema del grande.

$A_P = L_P \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ y por tanto $A_G = A_P + 1 = \sqrt{3}+1$, así que $L_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}} A_G = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}+1)$. Luego el área del hexágono es:

$$\frac{1}{2}\text{Perímetro} \cdot \text{Apotema} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot L_G \cdot A_G = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{3}+1) =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot (3 + 2\sqrt{3} + 1) = 8\sqrt{3} + 12 \text{ cm}^2.$$

## 32 Nivel IV CP XVI




En la circunferencia de diámetro $EB$ las cuerdas $AB$ y $ED$ son paralelas. Si el cociente entre la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $A\hat{B}E$ es $\dfrac{4}{5}$, ¿cuál es la medida del ángulo $B\hat{C}D$?

**A)** 120º **B)** 125º **C)** 130º **D)** 135º **E)** 140º

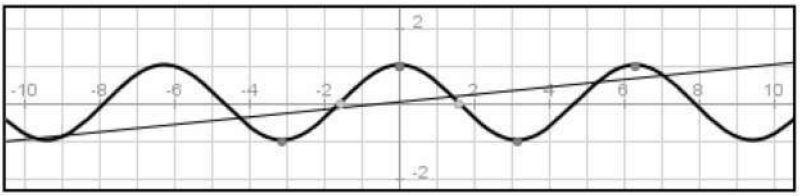
**(C)** Como el triángulo $ABE$ es rectángulo en $A$, entonces los otros dos ángulos, $E$ y $B$ suman 90º y, como su cociente es 4/5, miden 40º y 50º respectivamente. Como las cuerdas $AB$ y $ED$ son paralelas, el ángulo $D\hat{E}B$ mide también 50º. Por tanto los arcos $DE$, $EA$ y $AB$ suman 80º + 100º + 80º = 260º. Y el ángulo $B\hat{C}D$ mide la mitad de esta suma, es decir, 130º.

## 33 Nivel IV — CP XVII

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x = 10 \cdot \cos x$ ?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 10

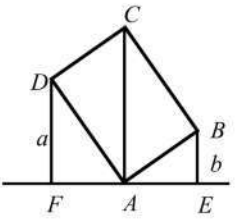
**(D)** Las soluciones de la ecuación $x = 10 \cdot \cos x$ son tantas como puntos de corte tienen las funciones $f(x) = \frac{x}{10}$ y $g(x) = \cos x$. Puesto que la imagen de cos $x$ es el intervalo $[-1, 1]$, los puntos de corte han de estar en el intervalo $[-10, 10]$.
Un esbozo de ambas funciones clarifica bastante la situación.




En el intervalo $[-10, 0]$ hay dos intervalos en los que la función cos $x$ es negativa y además en cada uno tiene un mínimo igual a $-1$. Estos intervalos son $\left[-10, -\frac{5\pi}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ y los mínimos se alcanzan en $-\pi$ y en $-3\pi$, por lo que las funciones tendrán cuatro puntos de corte. En el intervalo $(0, 10]$ hay dos intervalos en los que la función cos $x$ es positiva, pero sólo tiene un máximo relativo en $2\pi$ que es igual a 1, por lo que las funciones tienen tres puntos de corte. En total, hay siete puntos de corte.

## 34 Nivel IV CP XVII

En la figura que observas, *ABCD* es un rectángulo y los segmentos *DF, BE* y *CA* son perpendiculares a la recta *FE*. Si $DF = a$ y $BE = b$, la longitud *FE* es:

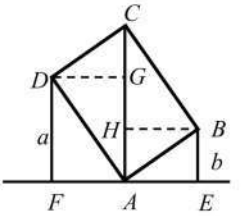



**A)** $a + b$ **B)** $2\sqrt{ab}$ **C)** $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$

**D)** $\dfrac{2a + 4b}{3}$ **E)** Nada de lo anterior

**(B)** Trazando las paralelas a *EF* por los puntos *D* y *B*, cortan a *AC* en *G* y *H*, respectivamente. Como *ABCD* es un rectángulo $FE = DG + HB = 2 \cdot DG$.
Y aplicando el teorema de la altura en el triángulo rectángulo *ADC*,

$$FE = 2DG = 2\sqrt{AG \cdot GC} = 2\sqrt{AG \cdot AH} = 2\sqrt{a \cdot b}\,.$$




## 35 Nivel IV CP XVIII

La suma $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, de los $n$ primeros enteros positivos, es un número de tres cifras, todas iguales. ¿Cuál es la suma de las tres cifras?

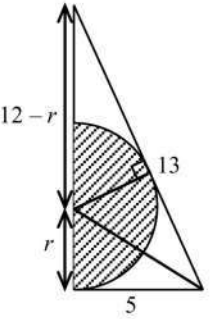
**A)** 6 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 18

**(E)** La suma de los $n$ primeros es $S_n = \dfrac{(1+n)\cdot n}{2} = 111k$ siendo $1 \le k \le 9$, entonces $n \cdot (n+1) = 222k$. Factorizando 222 obtenemos que $n \cdot (n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot k$, así que tenemos que el producto de $n$ y $n + 1$ (dos números consecutivos) ha de ser múltiplo de 6 y de 37. Solo pueden ser el 36 y 37 $\Rightarrow S_{36} = \dfrac{36 \cdot 37}{2} = 666$. Por tanto, la suma de las cifras será 18.

## 36 Nivel IV CP XVIII

Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13. Un semicírculo con centro en el cateto de longitud 12, es tangente al otro cateto y a la hipotenusa. ¿Cuánto mide su radio?

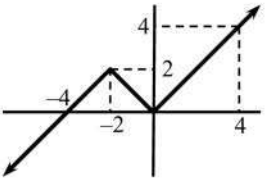
**A)** $\frac{7}{3}$ **B)** $\frac{10}{3}$ **C)** 4 **D)** $\frac{13}{3}$ **E)** $\frac{17}{3}$




**(B)** Los triángulos inferiores son iguales, ya que los dos son rectángulos y tienen dos lados iguales, la hipotenusa que es común y el cateto que es el radio de la circunferencia. Así obtenemos que las medidas del triángulo superior son r, 8 y $12-r$. Aplicando Pitágoras concluimos $(12-r)^2 = 8^2 + r^2 \Rightarrow r = \frac{10}{3}$.

## 37 Nivel IV CP XIX

Si $y = f(x)$ es la función representada en la figura, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $f[f(f(x))] = 0$ ?




**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2

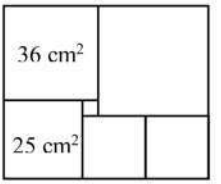
**D)** 1 **E)** 0

**(A)** La ecuación $f(x) = k$, con $k \in (0, 2)$ tiene tres soluciones, si $k = 0$ o $k = 2$ tiene dos soluciones y para cualquier otro valor de $k$, la ecuación tiene una única solución. Así $f[f(f(x))] = 0$ tiene dos soluciones para $f(f(x))$, que son 0 y $-4$. Ahora $f(f(x)) = 0$ tiene dos soluciones para $f(x)$, que son $f(x) = 0$ y $f(x) = -4$, mientras que $f(f(x)) = -4$ tiene una única solución para $f(x)$, que es $f(x) = -8$. Por último, $f(x) = 0$ tiene dos soluciones para $x$ mientras que $f(x) = -4$ y $f(x) = -8$ tienen una solución cada una. Por tanto, cuatro soluciones:

$$f[f(f(x))] = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \\ f(x) = -4 \Rightarrow x = -8 \end{cases} \\ f(f(x)) = -4 \Rightarrow f(x) = -8 \Rightarrow x = -12 \end{cases}$$

## 38 Nivel IV CP XIX

Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?

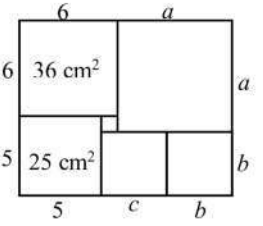



**A)** 50 **B)** 44 **C)** 46
**D)** 52 **E)** 48

**D)** Nombramos con $a$, $b$, $c$ los lados de los cuadrados:

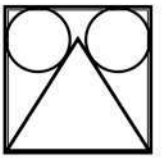
$$\begin{cases} a+b=11 \\ b+c+5=6+a \\ a-6=c-(a-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=11 \\ -a+b+c=1 \\ 2a-b-c=6 \end{cases}$$

De donde se obtiene $a = 7$, $b = 4$, $c = 4$ y el perímetro pedido mide $2\cdot(6 + 7) + 2\cdot(6 + 5) = 48$ cm.




## 39 Nivel IV CP XX

La primera imagen de don Retorcido es una caricatura que le hicieron hace 20 años (cuando comenzaron los Concursos de Primavera). Está enmarcada en un cuadrado de 6 dm de lado, la nariz es un triángulo equilátero y cada lente, circular, es tangente a dos lados del marco y a un lado de la nariz. ¿Cuánto mide el radio, en dm, del círculo que representa cada lente?



**A)** 2 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ **D)** $3-\sqrt{3}$ **E)** $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

**(D)** Prolongando uno de los lados del triángulo equilátero, que no sea el horizontal, hasta que dicha prolongación corte a un lado horizontal del cuadrado, resulta que la hipotenusa del triángulo rectángulo formado, $a$, viene dada por la igualdad $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$, así que una de las lentillas está inscrita en el triángulo rectángulo de cateto 6, hipotenusa $4\sqrt{3}$ y el otro cateto $2\sqrt{3}$. El área de dicho triángulo es $\frac{6\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. Como en cualquier triángulo, el área es $A = \frac{p\cdot r}{2}$, siendo $p$ el perímetro y $r$ el radio del círculo inscrito. Por tanto, tenemos que: $6\sqrt{3} = \frac{6+6\sqrt{3}}{2}\cdot r \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{3}}{3+3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} = 3-\sqrt{3}$ dm.

## 40 Nivel IV CP XX

Marta tiene ocho sobres numerados del 1 al 8 y ocho tarjetas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las tarjetas, una en cada sobre, de forma que ninguna de las tarjetas 1, 2 y 3 esté en el sobre con su misma numeración?

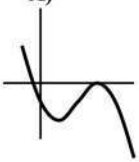
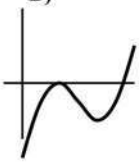
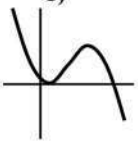
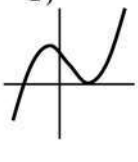
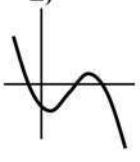
**A)** 27 240 **B)** 29 160 **C)** 27 360 **D)** 27 600 **E)** 25 200

**(A)** Sin restricciones habría 8! formas de distribuir las tarjetas en los ocho sobres. Habrá que quitar aquellas donde esté bien la tarjeta 1 (7!), la tarjeta 2 (7!) y la tarjeta 3 (7!). Luego añadir aquellas donde están bien la 1 y la 2 (6!), ya que anteriormente las quitamos dos veces; y análogamente con la 1 y la 3 y luego con la 2 y la 3. Por último hay que descontar los ensobrados en los que estén bien las tarjetas 1, 2 y 3 (5!), ya que primero se restaron tres veces y luego se sumaron tres veces. Así que el número de distribuciones posibles es:

$$8! - 3\cdot 7! + 3\cdot 6! - 5! = 5!\left(8\cdot 7\cdot 6 - 3\cdot 7\cdot 6 + 3\cdot 6 - 1\right) = 5!\cdot 217 = 27240\,.$$

## 41 Nivel IV CP XXI

Si $a < b$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de la función $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ ?

**A)**  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

**(A)** Buscamos algunas de las características de la función $f(x) = (a-x)(b-x)^2$ y así vamos descartando.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Por tanto, solo pueden ser A, C o E.

Cortes con el eje X. $(a-x)(b-x)^2 = 0$, tiene por soluciones $x=a$ y $x=b$. Tendrá dos puntos de corte. Por tanto, solo pueden ser A o C

Estudiamos el signo de la función


Por tanto, es la gráfica A.

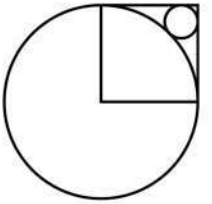
## 42 Nivel IV — CP XXI

¿Cuál de los siguientes números es el más próximo a $\sqrt{101}-10$?

**A)** $\frac{1}{16}$ **B)** $\frac{1}{18}$ **C)** $\frac{1}{20}$ **D)** $\frac{1}{22}$ **E)** $\frac{1}{24}$

**(C)** Para analizar qué número está próximo a $\sqrt{101}-10$, multiplicamos y dividimos por el conjugado. $\frac{(\sqrt{101}-10)(\sqrt{101}+10)}{\sqrt{101}+10}=\frac{101-100}{\sqrt{101}+10}=\frac{1}{\sqrt{101}+10}\approx\frac{1}{20}$.

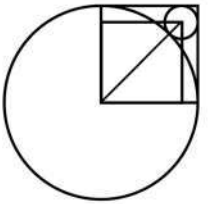
## 43 Nivel IV — CP XXII



La figura adjunta muestra dos circunferencias tangentes entre sí y un cuadrado de lado 10 cm, con un vértice en el centro de la circunferencia mayor y dos lados tangentes a ambas circunferencias. Si escribimos el radio de la circunferencia menor como $a-b\sqrt{2}$ cm, el valor de $a+b$ es:

**A)** 30 **B)** 40 **C)** 50
**D)** 60 **E)** 70

**(C)** Nos ayudamos del cuadrado interior cuyos vértices opuestos son los centros de las dos circunferencias. El lado de este cuadrado mide $10-r$ y la diagonal mide $10+r$. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $(10+r)^2=(10-r)^2+(10-r)^2$, resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $r_1=30+20\sqrt{2}$ (esta no puede ser ya que el radio de la circunferencia pequeña sería mayor que el de la grande) y $r_2=30-20\sqrt{2}$.



Comparando con el enunciado $a-b\sqrt{2}$, tenemos que $a=30$ y $b=20$.
Por lo tanto $a+b=50$.

## 44 Nivel IV CP XXII

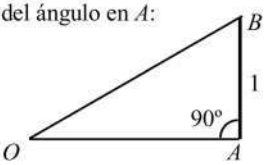
Dos semirrectas que parten de un punto $O$ forman un ángulo de 30º. Los puntos $A$ y $B$ están uno en cada una y $AB = 1$. ¿Cuál es la máxima longitud posible del segmento $OB$?

**A)** 1 **B)** $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{3}$ **D)** 2 **E)** $\frac{4}{\sqrt{3}}$

**(D)** Analicemos los posibles casos dependiendo del valor del ángulo en $A$:

[Caso 1] $O\hat{A}B = 90º$

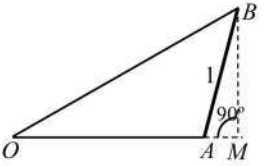
$$\text{sen}30º = \frac{1}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{OB} \Rightarrow OB = 2$$




[Caso 2] $O\hat{A}B > 90º$

$$\text{sen}30º = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

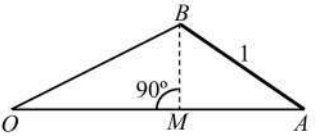
Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$




[Caso 3] $O\hat{A}B < 90º$

$$\text{sen}30º = \frac{BM}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BM}{OB} \Rightarrow OB = 2 \cdot BM$$

Pero $BM < 1 \Rightarrow OB < 2$




Por tanto, la longitud máxima posible del segmento $OB$ es 2.

## 45 Nivel IV CP XXIII

En cada vértice de un pentágono escribimos un número entero, de modo que la suma de los números de dos vértices contiguos no sea un múltiplo de tres, y tampoco lo sea la suma de los números de tres vértices consecutivos. De los cinco números escritos, ¿cuántos son, necesariamente, múltiplos de 3?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** Ninguno

**(B)** Considerando las clases módulo 3 de los números que colocamos en cada vértice, estos solo pueden ser 0, 1 o 2. Las condiciones son que no sea múltiplo de 3 la suma de dos contiguos ni la suma de tres consecutivos. Por tanto, no pueden ir contiguos ni 1 y 2 ni dos 0. Además, tampoco pueden ir consecutivos tres 1, tres 2 ni 0, 1 y 2. Según esto, entonces:

- Si en un vértice cualquiera colocamos un 0, a sus lados pueden ir:
  - Dos 1, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0.
  - Un 1 y un 2, y entonces los otros dos deben ser un 1 y un 0 respectivamente o un 0 y un 2.
  - Dos 2, y entonces los otros dos deben ser un 2 y un 0.

En todos los casos es necesario colocar exactamente dos 0

- Si en un vértice cualquiera colocamos un 1, a sus lados deben ir un 1y un 0, y al lado del segundo 1 necesariamente un 0. El quinto debe ser un 1 o un 2. De modo que necesitamos colocar exactamente dos 0.
- Si colocamos un 2, a sus lados pueden ir:
  - Un 2 y un 0, y entonces, al lado del segundo 2 necesariamente debemos colocar un 0, y el 5º puede ser un 1 o un 2, pero no un 0.
  - O también podemos colocar dos 0, pero entonces los otros dos vértices deben contener sendos 2.

En cualquier caso, hay que colocar exactamente dos múltiplos de 3.

## 46 Nivel IV CP XXIII

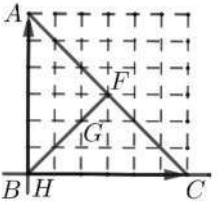
Sean *a, b, c, f, g* y *h* los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo *ABC*, su circuncentro *F*, su baricentro *G* y su ortocentro *H*, respectivamente. Entonces:

**A)** $a+b+c=3h$ **B)** $2(a+b+c)=3(f+h)$ **C)** $a+b+c=2f+h$

**D)** $2(a+b+c)=3$ **E)** $f+h=2g$

PRIMERA SOLUCIÓN

**(C)** Si desconocemos la recta de Euler o simplemente queremos contestar cuál es la opción correcta, elegimos unos números complejos cuyos afijos determinan un triángulo fácil de manejar.




$a = 0 + 2i$, $b = 0 + 0i$ y $c = 2 + 0i$ cuyos afijos son $A(0, 2)$, $B(0, 0)$ y $C(2, 0)$.

Su circuncentro, por tratarse de un triángulo rectángulo isósceles, es el punto medio de su hipotenusa, $F(1,1)$, su baricentro $G\left(\frac{0+0+2}{3}, \frac{2+0+0}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y su ortocentro $H(0, 0)$.

Calculamos la suma $a + b + c$ que aparece en todas las respuestas.

$a+b+c=(0+2i)+(0+0i)+(2+0i)=2+2i$

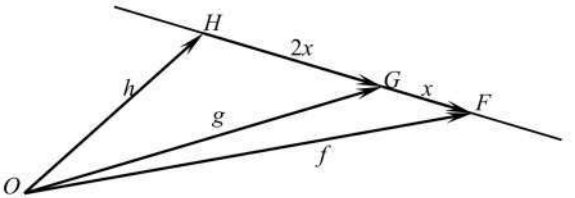
$f=1+i \Rightarrow 2f=2+2i$ y como $h = 0 + 0i$, entonces $2f + h = 2 + 2i = a + b + c$.

Ninguna de las otras opciones se verifica.

SEGUNDA SOLUCIÓN

**(C)** Si se conoce la recta de Euler que es la que pasa por: circuncentro, baricentro y ortocentro, con la particularidad de que $HG = 2GF$, entonces, se verifica como muestra la figura, que $\vec{g}=\vec{h}+2\vec{x}$ y $\vec{f}=\vec{g}+\vec{x}$. Eliminando el vector $\vec{x}$ entre las dos igualdades se concluye que $3\vec{g}=2\vec{f}+\vec{h}$, es decir, que $3g = 2f + h$.

Y como el baricentro es el afijo de $\frac{a+b+c}{3}$ tenemos que $3\frac{a+b+c}{3}=2f+h$ y por lo tanto $a + b + c = 2f + h$.



## 47 Nivel IV CP XXIV

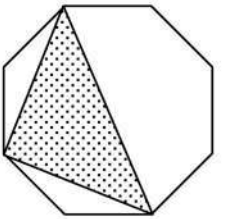
Sea una función $f$ tal que $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$, para cualesquiera enteros $a$ y $b$.
Si $f(1) = 3$, entonces el valor de $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$ es:

**A)** 40 **B)** 81 **C)** 0 **D)** –81 **E)** –40

**(A)** Empezamos deduciendo el valor de $f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = 9$.
Deducimos ahora el valor de $f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot f(1) = 9 \cdot 3 = 27$.
Para acabar obtenemos el valor de $f(0)$ y sumamos los resultados obtenidos.
Como $f(1) = f(0+1) = f(0) \cdot f(1)$ deducimos que $f(0) = 1$.
Por tanto, $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1 + 3 + 9 + 27 = 40$.

## 48 Nivel IV CP XXIV

En un octógono regular he formado un triángulo uniendo tres vértices al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un lado del triángulo sea también un lado del octógono?



**A)** $\frac{1}{7}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$
**D)** $\frac{5}{7}$ **E)** $\frac{11}{14}$

**(D)** El número total de triángulos que se pueden formar es $\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$. El número de triángulos que se pueden formar compartiendo dos lados del octógono es 8; y el número de triángulos que se pueden formar compartiendo sólo un lado del octógono son $8 \cdot 4 = 32$; (si elegimos un lado, de un total de ocho, para el tercer vértice sólo hay cuatro posibilidades). No puede haber un triángulo que comparta los tres lados con los lados del octógono. Así que en total hay $8 + 32 = 40$ triángulos que comparten al menos un lado con los lados del octógono y por tanto la probabilidad pedida es $\frac{40}{56} = \frac{5}{7}$.

## 49 Nivel IV CP XXV

Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

**A)** 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

**(A)** La de los $n$ primeros enteros positivos es $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n$ . Así pues, $n \cdot (n + 1)$ debe ser igual al doble de una de las cinco posibles respuestas (4032, 4036, 4040, 4044, 4048). La única que lo cumple es $63 \cdot 64 = 2 \cdot 2016$. Y las demás ya no valen porque $64 \cdot 65 = 4160$ supera a todas ellas. La respuesta es 2016.

## 50 Nivel IV CP XXV

En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

**A)** 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

**(C)** La clave está en ver que 16 puntos solo se pueden conseguir con 5 partidos ganados y 1 empatado; 8 puntos (2 ganados y 2 empatados); 2 puntos (2 empatados). Hay tres escenarios posibles:

| | A | B | C | D | | PTOS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | A | A | A | A gana 5 y empata 1 | 16 |
| B | A | | B | BD | B gana 2 y empata 2 | 8 |
| C | A | B | | CD | C gana 0 y empata 2 | 2 |
| D | AD | BD | CD | | D gana 0 y empata 5 | 5 |

| | A | B | C | D | | PTOS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | A | A | A | A gana 5 y empata 1 | 16 |
| B | A | | B | B | B gana 2 y empata 2 | 8 |
| C | A | BC | | C | C gana 2 y empata 1 | 7 |
| D | AD | BD | C | | D gana 0 y empata 2 | 2 |

| | A | B | C | D | | PTOS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | A | A | A | A gana 5 y empata 1 | 16 |
| B | A | | B | B | B gana 2 y empata 2 | 8 |
| C | A | BC | | CD | C gana 0 y empata 2 | 2 |
| D | AD | BD | D | | D gana 1 y empata 3 | 6 |

Como nos aseguran que en total hubo 5 empates, solo es válida la primera opción. Así pues, las puntuaciones fueron 16, 8, 2 y 5.

Comunidad de Madrid

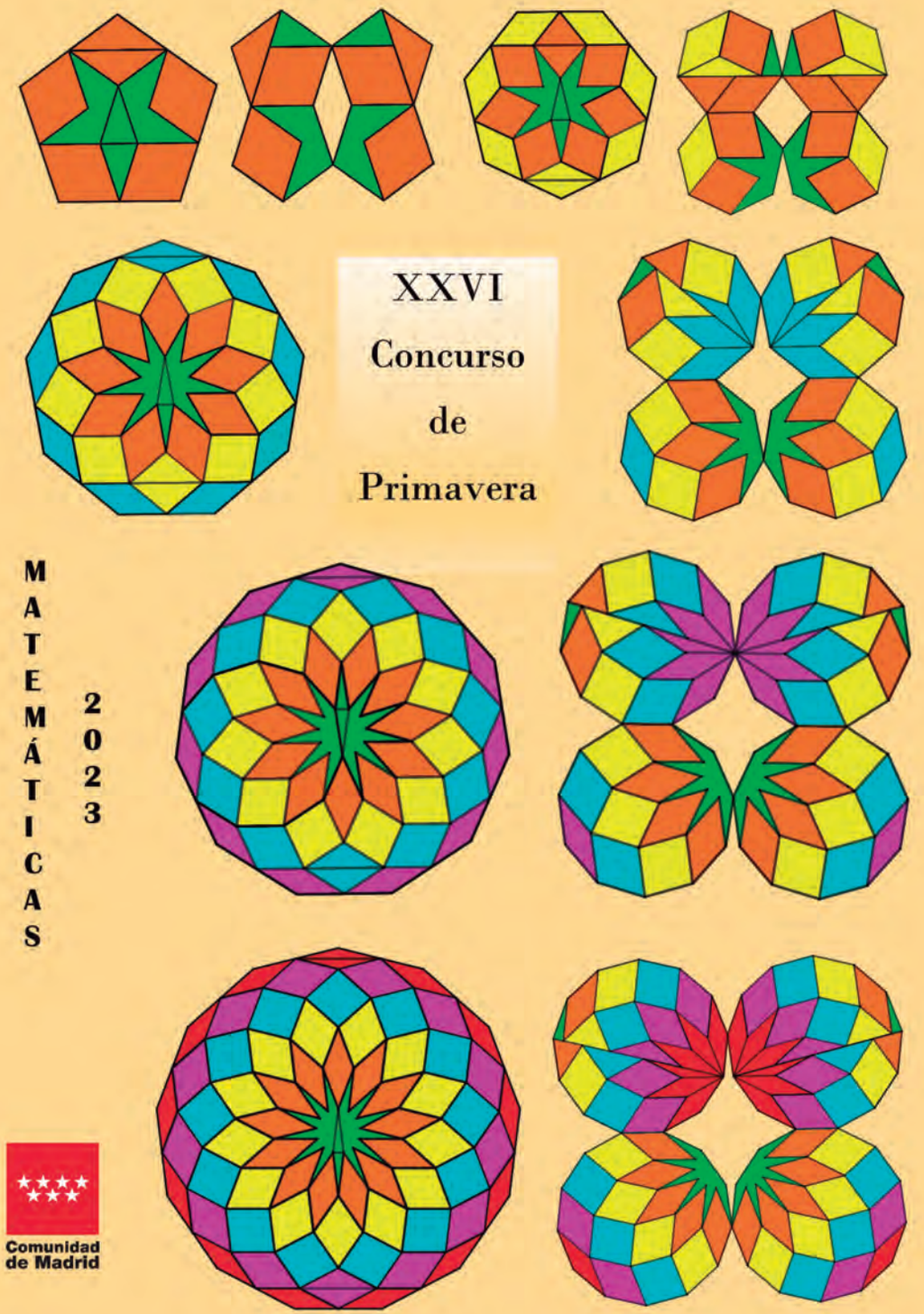
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Consejo Social de la UCM

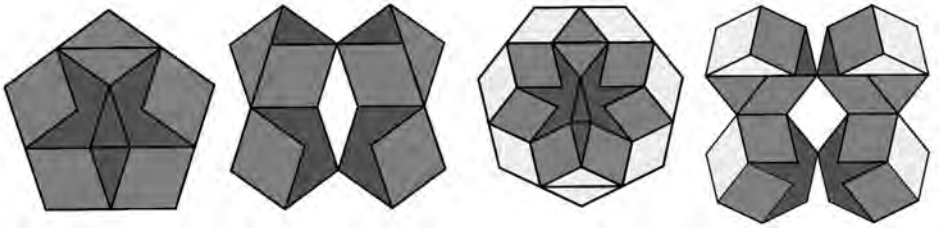
sm

ANAYA

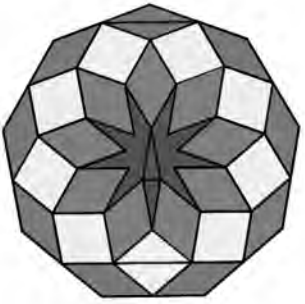
Smartick

XXVI Concurso de Primavera de Matemáticas

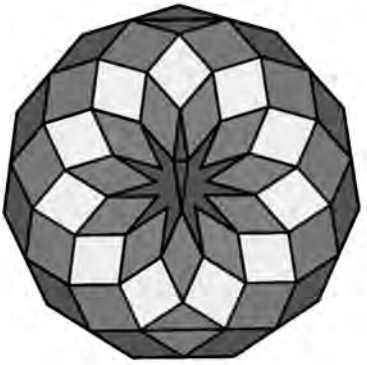


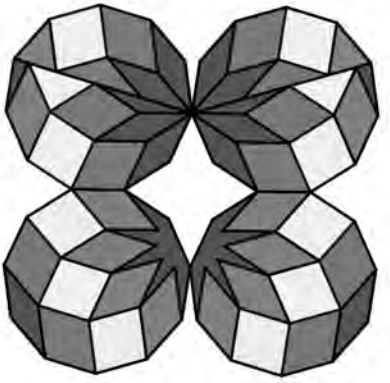


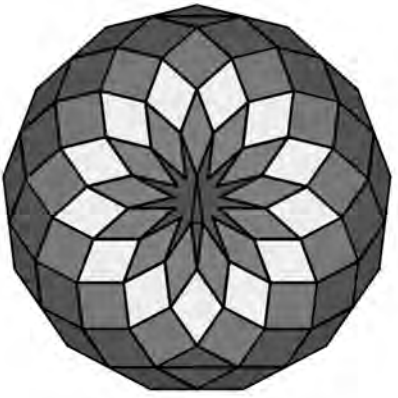
# XXVI Concurso de Primavera

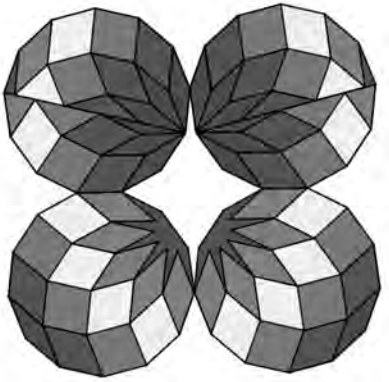


MATEMÁTICAS 2023









Comunidad de Madrid

***Comité organizador del Concurso de Primavera***

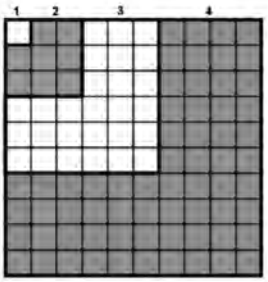
*Alzola Bujarrabal, Belén*
*Baeza Alba, Miguel Ángel*
*Benito Miguel, Isabel*
*Castrillón López, Marco*
*Donaire Moreno, Juan Jesús*
*Esteban García, María*
*Ferrero de Pablo, Luis*
*García Fernández, Roberto*
*García Gual, Jesús*
*Gaspar Alonso-Vega, María*
*González Ortega, Jorge*
*Martínez Sanz, Alfredo*
*Miguel Joyanes, Ester de*
*Montero Estravís, Xiomara*
*Moreno Warleta, María*
*Ramírez Carrillo, Carlos*
*Sánchez Benito, Merche*
*Sánchez González, Víctor Manuel*
*Serrano Marugán, Esteban*
*Soler Areta, Javier*
*Sordo Juanena, José María*

**Edita:** Asociación Matemática Concurso de Primavera

**ISBN:** 978-84-608-5881-2

**Deposito Legal:** M-8301-2017

Como decíamos ayer:




$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

Y ahora generalizamos:

Escribimos los $(\mathbf{3} + 1) \cdot (\mathbf{1} + 1)$ divisores de $2^{\mathbf{3}} \cdot 3^{\mathbf{1}}$: 1, 2,4, 8, 3, 6, 12, 24, y a continuación el número de divisores de esos divisores:1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, 8. Estos ocho números pueden sustituira aquellos 1, 2, …, $n$ de la primera parte de nuestra fórmula primigenia.

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 2 + 4 + 6 + 8)^2 = \big((1 + 2 + 3 + 4) \cdot (1 + 2)\big)^2 = (10 \cdot 3)^2$$
$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) + (2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3) = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) \cdot (1^3 + 2^3)$$
$$= \left(\frac{(\mathbf{3}+1) \cdot 5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(\mathbf{1}+1) \cdot 3}{2}\right)^2 = 900$$

Hemos generalizado una relación entre la suma de cubos de una serie de números y el cuadrado de la suma de estos (válida para cualquier descomposición factorial de un natural). Y es una generalización porque si la aplicamos a la potencia $(n-1)$ de un primo cualquiera obtenemos la fórmula inicial. (Destaquemos que la generalización se come la cola, ya que en ella solo se emplea una ordenación de los números de divisores y la fórmula de los $n$ primeros cubos).

### Presentación

**Una disculpa a tiempo puede convertir nuestro error en una errata, y el agradecimiento a los que nos ayudan a hacer del éxito un acierto.**

**P.D. En el libro de nuestros 25 años adelantamos diez años la aparición del Concurso de Primavera. Realmente nacimos en 1997. Somos así generación Z (imaginativos y complejos).**

**AGRADECIMIENTOS:**

A los participantes en el Concurso, a sus padres y profesores.

A los voluntarios que nos ayudan en la 2ª fase.

A la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Al Vicerrectorado de alumnos de la UCM.

A la Subdirección General de Formación del Profesorado de la Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación de la Consejería de Educación, Juventud y Deporte Comunidad de Madrid

A las editoriales Grupo **ANAYA** y Ediciones **S.M.**

A Smartick.

# ÍNDICE

## ENUNCIADOS DE LA 1ª FASE

Nivel I (5º y 6º de Primaria) ..... 11
Nivel II (1º y 2º de ESO) ..... 17
Nivel III (3º y 4º de ESO) ..... 23
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato) ..... 29

## ENUNCIADOS DE LA 2ª FASE

Nivel I (5º y 6º de Primaria) ..... 35
Nivel II (1º y 2º de ESO) ..... 41
Nivel III (3º y 4º de ESO) ..... 47
Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato) ..... 53
Tabla de soluciones 1ª Fase ..... 58
Tabla de soluciones 2ª Fase ..... 59

## SOLUCIONES

Soluciones 1ª Fase Nivel I ..... 60
Soluciones 1ª Fase Nivel II ..... 69
Soluciones 1ª Fase Nivel III ..... 78
Soluciones 1ª Fase Nivel IV ..... 85
Soluciones 2ª Fase Nivel I ..... 94
Soluciones 2ª Fase Nivel II ..... 100
Soluciones 2ª Fase Nivel III ..... 107
Soluciones 2ª Fase Nivel IV ..... 115
Participantes y relación de ganadores del XXV CONCURSO de Primavera de Matemáticas ..... 125

## OTROS CONCURSOS

XXI Concurso Intercentros ..... 127
LIX Olimpiada Matemática Española. Comunidad de Madrid. Fase Cero ..... 136
LIX Olimpiada Matemática Comunidad de Madrid. Fase Local ..... 140
XXVIII Olimpiada de Mayo Primer NIVEL ..... 142
XXVIII Olimpiada de Mayo Segundo NIVEL ..... 143
Relación de ganadores en la XXVIII Olimpiada de Mayo 2022 ..... 144

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 9 de febrero de 2022**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Education
Smartick

## XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

**1** La cifra de las décimas del resultado de esta operación 987,6 + 54,32 + 1,098 + 76,5 es:

**A)** 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 9

**2** Miguel reparte una bolsa de caramelos con su hermanito Diego. "Uno para ti, dos para mi; uno para ti, tres para mi; uno para ti, cuatro para mi;..." Así, hasta que dijo "uno para ti, ocho para mi" y se acabaron los caramelos de la bolsa. ¿Cuántos caramelos había en la bolsa?

**A)** 42 **B)** 48 **C)** 52 **D)** 58 **E)** 62

**3** En la figura 101, ¿cuál es la diferencia entre el número de cuadrados blancos y cuadrados grises?

fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

**A)** 9890 **B)** 9596 **C)** 9401 **D)** 9856 **E)** 8990

**4** En la clase de Íñigo doce estudiantes practican tenis y ocho juegan al baloncesto. Tres practican los dos deportes y siete no practican ninguno de estos deportes. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

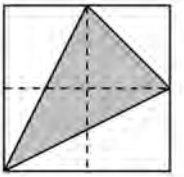
**A)** 12 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 26 **E)** 14

**5** "Estoy agotada", dice doña Hormiga. "Esta mañana salí del hormiguero tres veces. La primera caminé 916 cm hacia el norte, encontré comida y la traje al hormiguero. Volví a salir en dirección sur, caminé 63,3 m, encontré comida y la traje al hormiguero. La tercera vez caminé 1025 dm hasta el este, encontré comida y regresé al hormiguero." ¿Qué número aproxima mejor los metros que recorrió doña Hormiga en total?

**A)** 200 **B)** 350 **C)** 150 **D)** 500 **E)** 400

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)**

**6** ¿Qué fracción del cuadrado grande representa el triángulo gris?



**A)** $\frac{4}{7}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{5}{7}$ **D)** $\frac{4}{9}$ **E)** $\frac{3}{8}$

**7** Te enseñamos una tabla de multiplicar y preguntamos.

¿Cuánto vale la suma $A + B + C + D$?

| | $C$ | $D$ |
|---|---|---|
| $A$ | 21 | 35 |
| $B$ | 33 | 55 |

**A)** 30 **B)** 17 **C)** 37 **D)** 26 **E)** 23

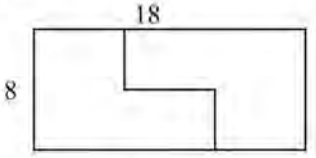
**8** Ainhoa y Asier tienen una bolsa con fichas. Ainhoa coge una, Asier coge dos, Ainhoa coge tres, Asier coge cuatro… Cada uno coge una ficha más que el anterior, hasta que Asier coge las últimas. Si Asier acaba con diez fichas más que Ainhoa, ¿cuántas fichas había en la bolsa?

**A)** 70 **B)** 210 **C)** 72 **D)** 155 **E)** 170

**9** Hoy mi tía Lucía y yo cumplimos años. Ella cumple el cuádruple de los años que cumplo yo y dentro de seis años cumplirá el triple de los que cumpliré yo. ¿Cuántos años cumplo hoy?

**A)** 15 **B)** 11 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 6

**10** Dividimos un rectángulo de medidas 18 × 8 cm en dos trozos iguales (como se ve en el dibujo) con los que podemos formar un cuadrado. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de este cuadrado?




**A)** 60 **B)** 56 **C)** 48 **D)** 44 **E)** 40

## XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)

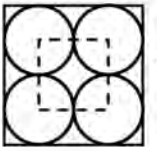
**11** Comenúmeros tiene hambre: "Para merendar quiero todos los números de tres cifras formados por cifras impares, que las pares me sientan mal". Como eran muchísimos, decidí darle solo los que la suma de sus cifras es 9. ¿Cuántos números merendó Comenúmeros?

**A)** 12 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 15 **E)** 10

**12** Ya sabéis que la distancia que hay que recorrer en un maratón son 42 km. Ana empezó con muchas ganas y completó un sexto de la carrera en 35 minutos; luego recorrió 8 km en 42 minutos; luego hizo un tercio de lo que le quedaba en 45 minutos; luego tardó una hora en completar los 10 km siguientes. Inmaculada desde la acera le gritó: *¡vamos, Ana, que te queda poco!* ¿Cuántos km le quedaban a Ana para terminar su maratón?

**A)** 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

**13** En un cuadrado grande, de 4 cm de lado, hemos dibujado cuatro circunferencias iguales, como ves en la figura. ¿Cuál es el perímetro, en cm, del cuadrado cuyos vértices son los centros de las circunferencias?




**A)** 8 **B)** 10 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 4

**14** Don Retorcido es muy retorcido y te pregunta: "¿Cuál es la suma de las cifras del número entre el que tengo que dividir 1350 para que, si al cociente de la división entera le resto 30 me dé lo mismo que si divido 1350 entre 30?".

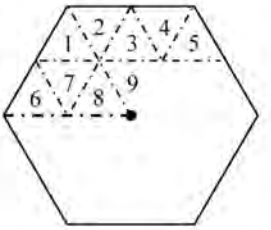
**A)** 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 11

**15** Amaia ha colocado tres cartas boca abajo: una sota, un caballo y un rey. Los palos son: oros, copas y espadas, aunque no necesariamente en este orden. Se sabe que el caballo está a la izquierda del oro, y la espada se encuentra entre el rey y la copa. ¿Cuáles son esas tres cartas y en qué orden, de izquierda a derecha, se encuentran?

**A)** Sota oros – Caballo copas – Rey espadas **B)** Sota espadas – Caballo oros – Rey copas
**C)** Sota copas – Caballo espadas – Rey oros **D)** Sota oros – Caballo espadas – Rey copas
**E)** Sota espadas – Caballo copas – Rey oros

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)**

**16** Dividimos el hexágono regular de área 12 cm² de la figura en triángulos equiláteros iguales y los numeramos empezando por el 1 (el dibujo está sin terminar). Si una vez terminado coloreamos todos los triángulos que tengan un número primo, ¿qué área, en cm², debemos colorear? ¡Cuidadín, el 1 no es primo!



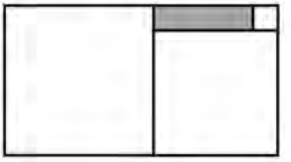

**A)** 3 **B)** 3,5 **C)** 4

**D)** 4,5 **E)** 5,5

**17** Diego empezó a ver una película a las 16:40 y acabó a las 18:05. Si entremedias paró 15 minutos para merendar, ¿cuántos minutos dura la película?

**A)** 85 **B)** 90 **C)** 70 **D)** 75 **E)** 110

**18** Con tres cuadrados y un rectángulo gris hemos formado un rectángulo grande que mide 22 cm de base y 12 cm de altura, como en la figura. ¿Qué área, en cm², tiene el rectángulo gris?



**A)** 16 **B)** 18 **C)** 12

**D)** 14 **E)** 20

**19** La niña Centésima ordena vocales, consonantes y números de la siguiente manera: asocia la primera vocal con la primera consonante y el número 1; luego la segunda vocal con la segunda consonante con el número 2 y así sucesivamente. Cuando agota las cinco vocales vuelve a empezar con la A y lo mismo ocurre cuando agota las veintidós consonantes empieza de nuevo con la B:

AB1, EC2, ID3, OF4, UG5, AH6, … ¿Qué combinación irá con el 2022?

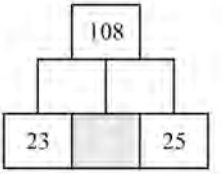
**A)** EX2022 **B)** EG2022 **C)** AY2022 **D)** EÑ2022 **E)** OK2022

**20** Lydia y Sonia se han inventado una operación cada una.
La de Lydia es $a \boldsymbol{L} b = (a + b) \times a$ y así $2 \boldsymbol{L} 7 = (2 + 7) \times 2 = 18$.
La de Sonia es $a \boldsymbol{S} b = (a - b) : b$ y así $15 \boldsymbol{S} 3 = (15 - 3) : 3 = 4$.
¿Qué número obtenemos al realizar la operación $(6 \boldsymbol{L} 24) + (24 \boldsymbol{S} 6)$?

**A)** 725 **B)** 185 **C)** 150 **D)** 815 **E)** 183

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel I)**

**21** María está numerando los bloques de la pirámide. El número que le corresponde a cada bloque es la suma de los dos que tiene debajo. El número del bloque sombreado es…

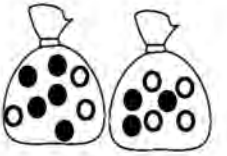



**A)** 30 **B)** 10 **C)** 4 **D)** 9 **E)** 6

**22** Esteban tiene en cada uno de los dos bolsillos del pantalón más de una moneda y menos de diez. Si pasara una moneda del bolsillo izquierdo al bolsillo derecho tendría el mismo número de monedas en cada bolsillo, pero si pasara una moneda del bolsillo derecho al bolsillo izquierdo tendría dos veces más monedas en el bolsillo izquierdo que en el derecho. ¿Cuántas monedas tiene?

**A)** 10 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 14 **E)** 6

**23** En una bolsa tenemos cinco bolas negras y tres blancas, y en otra, tres negras y cuatro blancas. ¿Cuál es el número mínimo de bolas que tenemos que cambiar de bolsa para que la probabilidad de sacar una bola negra de la primera bolsa sea igual a la probabilidad de sacar una blanca de la segunda.



**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**24** Nuestros tres amigos han ido a buscar castañas y al terminar, la niña Centésima no encontró ninguna. Entonces, Comenúmeros le dio 22 de sus castañas a la niña y don Retorcido le dio 14 de sus castañas. Al final don Retorcido tiene las mismas castañas que la niña Centésima y el doble que Comenúmeros. ¿Cuántas castañas encontró Comenúmeros?

**A)** 72 **B)** 32 **C)** 40 **D)** 36 **E)** 22

**25** Si dos cuervos pesan como tres urracas, dos urracas como ocho gorriones, y un cuervo pesa tanto como una paloma y una urraca juntas, ¿cuántos gorriones pesan como tres palomas?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 6

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 9 de febrero de 2022**

**NIVEL II (1º y 2º de ESO)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

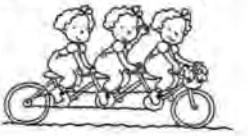
Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Education
Smartick

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**1** Hoy es el dia del Concurso del Primavera y las trillizas se despiertan muy nerviosas. En el cajón de sus calcetines están todos sueltos y revueltos: doce azules, doce rojos y doce grises. Una de las hermanas abre corriendo el cajón y... ¿cuál es el número mínimo de calcetines que debe coger para estar segura de que las tres hermanas podrán ponerse un par de calcetines del mismo color? [No es necesario que las tres tengan el mismo color]



**A)** Seis **B)** Siete **C)** Ocho **D)** Nueve **E)** Diez

**2** Cinco animales avanzan en fila india a través de un campo. Justo en este momento he recogido las distancias, en metros, que hay entre ellos:

| | Ardilla | Cerdo | Hormiga | Pato | Rana |
|---|---|---|---|---|---|
| Ardilla | 0 | | | | |
| Cerdo | 3 | 0 | | | |
| Hormiga | 7 | 10 | 0 | | |
| Pato | 2 | 5 | 5 | 0 | |
| Rana | 5 | 8 | 2 | 3 | 0 |

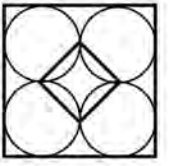
¿Qué animal está en medio de esa fila india?

**A)** Ardilla **B)** Cerdo **C)** Hormiga **D)** Pato **E)** Rana

**3** Si dibujas en un papel tres circunferencias de igual radio y dos rectas, ¿cuál es el máximo número de puntos de intersección que pueden formarse?

**A)** 12 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 19 **E)** 20

**4** En el dibujo ves cuatro circunferencias iguales, tangentes dos a dos y tangentes a dos lados de un cuadrado de lado 4 cm. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, del cuadrado cuyos vértices son los puntos en los que las circunferencias se tocan entre sí?



**A)** 8 **B)** 6 **C)** 4 **D)** 2

**E)** 1

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**5** He formado una lista de números de tal manera que a partir del tercero, cada número es la suma de los dos anteriores. Ha venido Comenúmeros y se ha comido todos los números menos el 9 de la primera casilla y el 2022 de la última.
¿Qué número había en la casilla donde descansa Comenúmeros?

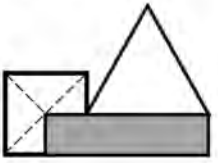
| 9 | | | | | 2022 |
|---|---|---|---|---|---|

**A)** 807 **B)** 1342 **C)** 900 **D)** 1995 **E)** 1002

**6** La niña Centésima se entretiene asignando números a las letras según el número de letras que tenga cada letra. Tranquilidad, os lo explica con dos ejemplos, $J = 4$ porque JOTA tiene cuatro letras y $L = 3$ porque ELE tiene tres letras.
¿Cuál es el valor de $(P - R + I) \cdot (M - A + V) \cdot (E - R + A)$ ¿

**A)** $-3$ **B)** 4 **C)** 0 **D)** 10 **E)** $-4$

**7** El cuadrado, el rectángulo y el triángulo que ves tienen, todos ellos, 36 $m^2$ de área. ¿Cuántos metros mide la altura del triángulo?



**A)** 12 **B)** 6,5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 4,5

**8** ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas formados con las cifras 1, 2, 3, 4, son múltiplos de cuatro?

**A)** 16 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 6 **E)** 4

**9** En clase había mucho jaleo y la profesora se ha enfadado. ¡Pues ahora tenéis que hacer esta división! Y cuando lleguéis a los cien primeros decimales, calculad su suma. ¡Silencio ya!

$$1234 : 9999$$

**A)** 100 **B)** 900 **C)** 12340 **D)** 1000 **E)** 250

**10** Voy a repartir todas las piedras de mi colección entre mis diez sobrinos, empezando por el más pequeño. Al décimo le daré $\frac{1}{10}$ del total; al noveno $\frac{1}{9}$ del resto; al octavo $\frac{1}{8}$ del resto; y así hasta que llegue al mayor y acabe el reparto. Si al quinto le corresponden cinco piedras, ¿cuántas piedras se llevará el mayor?

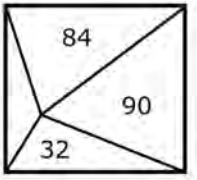
**A)** 10 **B)** 1 **C)** 5 **D)** 2 **E)** 4

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**11** Tres conejos han recolectado zanahorias. Buni tiene diez zanahorias menos que Angi y dos menos que Crasti. Si entre Angi y Crasti tienen dieciocho zanahorias, ¿cuántas zanahorias han conseguido entre los tres?

**A)** 19 **B)** 21 **C)** 23 **D)** 25 **E)** 27

**12** Hemos dividido un cuadrado en cuatro triángulos y hemos calculado el área, en $cm^2$, de tres de ellos. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene el cuarto triángulo?




**A)** 26 **B)** 19 **C)** 30 **D)** 34 **E)** 28

**13** ¡Estamos celebrando la XXV edición de este concurso! Si solo puedes usar los símbolos romanos I, V y X, ¿cuántos números romanos de tres símbolos puedes formar?

**A)** 10 **B)** 9 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

**14** ¡Don Retorcido!, ¿cuánto suman las edades de sus hijos e hijas?
Dedúzcalo usted con estas pistas. Sus edades son diferentes y su producto 594. Luisillo tiene el doble de edad que Pedrín y Alba tiene el triple de edad que Bea. Y ya no digo si tengo más hijos o hijas. ¿Cuánto suman las edades de toda su prole?

**A)** 40 **B)** 26 **C)** 41 **D)** 32 **E)** 47

**15** En la cinta que ves hemos colocado en lista los números del 1 al 10 de forma que el número de una casilla sea tres unidades mayor que el anterior o bien, una o dos unidades menor. Vemos las posiciones del 1, del 8 y del 10. ¿Qué número debemos poner en la cuarta casilla?

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | ¿? | | 8 | | | | | | 10 |

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**16** ¿Cuántas líneas rectas diferentes pasan por al menos dos puntos de la siguiente cuadrícula?

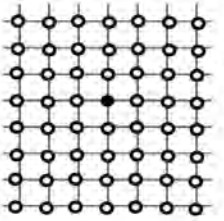
**A)** 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 20

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**17** ¿Cuántos números naturales de tres cifras cumplen que al multiplicar sus cifras sale 18?

**A)** 8 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 22

**18** En la cuadrícula cada cuadradito mide 1 cm de lado. ¿Cuántos puntos de la cuadrícula están a más de 1 cm de distancia del punto negro pero a menos de 3 cm?



**A)** 29 **B)** 17 **C)** 16 **D)** 18

**E)** 20

**19** Dos lados de un triángulo miden 12 y 15 centímetros. ¿Cuál de los siguientes valores, en cm, no puede ser el perímetro de dicho triángulo?

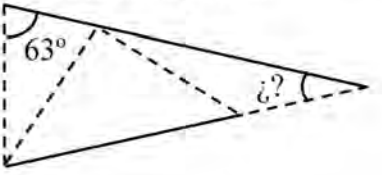
**A) 35** **B)** 42 **C)** 45 **D)** 50 **E)** 55

**20** En el dibujo, los segmentos dibujados con trazo discontinuo tienen la misma longitud. ¿Cuánto mide el ángulo marcado con las interrogaciones?

**A)** 25º **B)** 31,5º

**C)** 54º **D)** 21º

**E)** 20º




**21** Ordena estos cuatro números de menor a mayor:

$S = 2021 \cdot 2022^{2021}$ $A = 2022^{2022}$ $C = 2022^{2021}$ $O = 2 \cdot 2022^{2021}$

**A)** $C < A < O < S$ **B)** $O < C < A < S$ **C)** $S < A < C < O$

**D)** $C < A < S < O$ **E)** $C < O < S < A$

**22** ¿Qué fracción multiplicada por dos tercios y a la que luego se le suman tres cuartos da como resultado cuatro quintos?

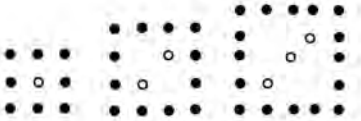
**A)** $\frac{3}{40}$ **B)** $\frac{5}{6}$ **C)** $\frac{9}{20}$ **D)** $\frac{93}{40}$ **E)** $\frac{3}{2}$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel II)**

**23** Tres amigas montañeras, Carmen, Sara y Clara, salieron a coger setas. Al terminar la jornada Sara pensó así: "Si Carmen me diera un tercio de sus setas, entonces yo tendría el doble que ella, pero si Clara me diera un cuarto de sus setas, yo tendría el triple que ella". Si Sara tiene 84 setas, ¿cuántas setas tienen entre Carmen y Clara?

**A)** 84 **B)** 105 **C)** 126 **D)** 168 **E)** 252

**24** Estoy diseñando figuras con puntos negros y blancos. Puedes ver que la primera figura tiene 9 puntos, la segunda 14 puntos y la tercera 19 puntos. ¿Cuántos puntos tendrá la décima figura?



**A)** 56 **B)** 48 **C)** 62 **D)** 58 **E)** 54

**25** Don Retorcido nos dice que el año 2022 es convertible en 27 porque ha sumado 1 a cada cifra [2 + 1 = 3, 0 + 1 = 1, 2 + 1 = 3, 2 + 1 = 3], luego ha multiplicado [3·1·3·3 = 27] y ha obtenido 27. ¿Cuántos números de cuatro cifras (las unidades de millar no pueden ser cero) son convertibles en 27?

**A)** 9 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 12 **E)** 10

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 9 de febrero de 2022**

**NIVEL III (3º y 4º de ESO)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

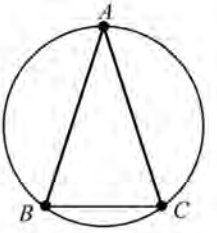
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Education
Smartick

## XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)

**1** ¿Cuántos números de seis cifras distintas formados con las cifras del uno al seis son múltiplos de cuatro?

**A)** 200 **B)** 192 **C)** 180 **D)** 160 **E)** 144

**2** El triángulo isósceles $ABC$ cumple que el ángulo desigual $\hat{A}$ es la mitad de uno de los otros ángulos. Si en esa misma circunferencia inscribimos un polígono regular con un lado coincidente con $BC$, ¿cuántos lados tiene el polígono?




**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8

**E)** 9

**3** Si $a$, $b$, $c$, $d$ son números positivos distintos y $a+b<c+d$, entonces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?

**A)** $a$ y $b$ son los números más pequeños.
**B)** Uno de los dos ($a$ o $b$) es el menor de todos.
**C)** El mayor de todos no es ni $a$ ni $b$.
**D)** $[a+c<b+d]$ o $[a+d<b+c]$
**E)** Si $a$ es el mayor de todos, entonces $b$ es el menor.

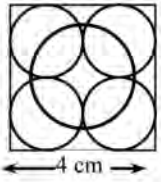
**4** Si $m$ es un número múltiplo de 3 y $n$ es múltiplo de 5, de los siguientes cinco números $[m+n,\ 5m+3n,\ m\cdot n,\ m^2\cdot n,\ m^n]$, ¿cuántos son seguro múltiplos de 15?

**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Los cinco

**5** Si $\begin{cases} a+b=27 \\ b+c=29 \\ c+a=44 \end{cases}$, entonces $2c-a-b$ es igual a:

**A)** 19 **B)** 21 **C)** 23 **D)** 25 **E)** 27

**6** Las cuatro circunferencias menores son iguales, tangentes dos a dos y tangentes a dos lados del cuadrado de lado 4 cm. ¿Cuál es el radio, en cm, de la circunferencia grande cuyo centro es el del cuadrado y pasa por los centros de las otras circunferencias?




**A)** $\sqrt{2}$ **B)** $\sqrt{6}$ **C)** $\sqrt{8}$ **D)** $\sqrt{10}$

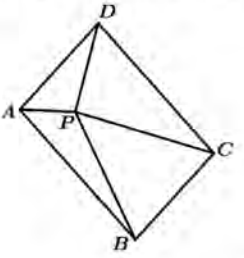
**E)** $2\sqrt{3}$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

**7** Sabiendo que $x \cdot y = 8$ y que $x^2y + xy^2 + x + y = 90$, ¿cuánto vale $x^2 + y^2$?

**A)** 80 **B)** 84 **C)** 92 **D)** 96 **E)** 100

**8** El paralelogramo $ABCD$ queda dividido por el punto interior $P$ en cuatro triángulos. Conocemos tres de sus áreas, 5, 7 y 16. El área máxima del paralelogramo es:




**A)** 47 **B)** 45 **C)** 46 **D)** 43 **E)** 42

**9** Si $n! = (3!) \cdot (5!) \cdot (7!)$, ¿cuál es el valor de $n$?

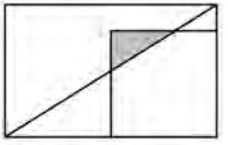
[Recuerda que el factorial de un número natural $n$ es $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$]

**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

**10** El número 2022 es producto de tres primos. ¿Cuántos tríos de números enteros positivos (no necesariamente diferentes) tienen un producto igual a 2022?
[Todos los tríos que contengan a los números $(a, b, c)$ son el mismo]

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**11** Dentro de un rectángulo de lados 8 cm y 5 cm hemos colocado un cuadrado de lado 4 cm, como puedes ver en la figura. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene el triángulo sombreado?



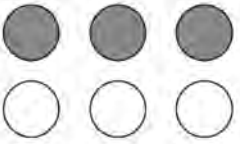
**A)** 2 **B)** $\frac{5}{2}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{12}{7}$ **E)** $\frac{9}{5}$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

**12** ¿Cuántos números naturales de tres cifras cumplen que la suma de sus cifras es 18?

**A)** 20 **B)** 36 **C)** 54 **D)** 60 **E)** 72

**13** Don Retorcido nos ha dado seis monedas que por una cara son de color blanco y están numeradas del 1 al 6 y por la otra cara son de color gris y están numeradas del 11 al 16 (la moneda del 1 tiene el 11 por la otra cara, la del 2 el 12, etc.). Las coloca en la mesa sin mirar los números, pero sabiendo que quedan tres monedas con la cara gris arriba y tres con la cara blanca arriba, tal y como indica la imagen.
A continuación, nos pide que demos la vuelta a las dos monedas que queramos. Después, que demos la vuelta a las tres monedas de la fila superior. Y, por último, que demos la vuelta a la moneda que queramos, pero que no hayamos tocado antes. Tras todo esto, y sin mirar, ¡ha adivinado el número que suman las caras visibles de las monedas! ¿Qué resultado ha dicho don Retorcido?



**A)** 41 **B)** 51 **C)** 61 **D)** 71 **E)** 81

**14** ¿Cuántos números enteros positivos son iguales a cuatro veces la suma de sus cifras?

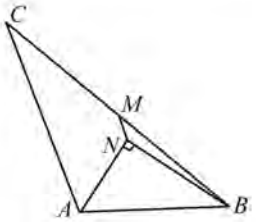
**A)** Uno **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**15** Centésima, don Retorcido y Comenúmeros juegan a un juego. Por orden van tirando una moneda y ganará el primero que obtenga cara. Si empieza tirando Centésima, después don Retorcido, a continuación Comenúmeros y vuelve a empezar Centésima. ¿Cuál es la probabilidad de que gane Comenúmeros?

**A)** $\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{2}{5}$ **C)** $\frac{3}{7}$ **D)** $\frac{2}{3}$ **E)** $\frac{1}{7}$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

**16** En el triángulo $ABC$ de la figura, $M$ es el punto medio de $BC$, $AN$ es la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ y $BN$ es perpendicular a $AN$. Si sabemos que los lados $AB$ y $AC$ miden 15 y 18 centímetros respectivamente, calcula la longitud de $MN$.




**A)** $\frac{3}{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** 3 **E)** $\frac{5}{2}$

**17** ¿Cuál es la suma de las cifras del producto $2^{2022} \cdot 5^{2020}$ ?

**A)** 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 7 **E)** 8

**18** En una mesa circular con 30 sillas hay $n$ personas sentadas. Si sabemos que si viene otra persona se tiene que sentar obligatoriamente al lado de alguien, ¿cuál es el menor valor posible de $n$?

**A)** 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 15 **E)** 16

**19** En un cajón tengo seis calcetines azules y cuatro rojos. Como me voy de viaje este fin de semana meto cuatro calcetines al azar en una mochila. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda formar dos parejas de dos calcetines del mismo color?

**A)** $\frac{107}{210}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{103}{210}$ **D)** $\frac{3}{5}$ **E)** $\frac{53}{105}$

**20** La ecuación $x^2 + mx + 2m = 0$ con $m \neq 0$ tiene como soluciones $m$ y $n$. ¿Cuánto suman $m$ y $n$?

**A)** 2 **B)** 1 **C)** 0 **D)** –1 **E)** –2

**21** Dibujamos un hexágono de modo que los valores de sus ángulos internos forman una progresión aritmética. Sabemos que el valor de la suma de dos de sus ángulos debe ser:

**A)** 160º **B)** 200º **C)** 240º **D)** 280º **E)** 300º

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel III)**

**22** En una urna introducimos una bola con el número 1, dos bolas con el número 2, tres bolas con el número 3, y asi hasta veinte bolas con el número 20. Las mezclamos y vamos sacando bolas al azar, una a una y sin reponerlas. ¿Cuántas deberemos extraer, como mínimo, para asegurarnos de tener cinco bolas con el mismo número?

**A)** 70 **B)** 75 **C)** 76 **D)** 78 **E)** 81

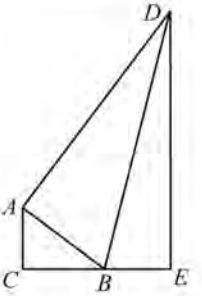
**23** Una sucesión de números comienza en el 50 y construimos cada término de la sucesión sumando los cuadrados de las cifras del anterior. Por ejemplo, después del 28 vendría el 68 ya que $2^2 + 8^2 = 68$. ¿Qué número ocupa la posición 2022?

**A)** 4 **B)** 16 **C)** 145 **D)** 89 **E)** 42

**24** El triángulo $ABC$ es rectángulo en $C$ y cumple que $AC = 3$ y $BC = 4$. El triángulo $ABD$ es rectángulo en $A$ y $AD = 12$. El punto $E$ es la intersección de la prolongación de $CB$ con una recta paralela a $AC$ trazada desde $D$. Calcula el área del triángulo $BED$.

**A)** $\frac{342}{17}$ **B)** $\frac{61}{3}$ **C)** $\frac{102}{5}$

**D)** $\frac{504}{25}$ **E)** 20




**25** Sea $A = 0{,}9 + 0{,}18 + 0{,}027 + 0{,}0036 + 0{,}00045 + \cdots$; entonces $9A$ es igual a:

**A)** 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 15

XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**1ª FASE: 9 de febrero de 2022**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu nombre** y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática
*Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
Smartick

## XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)

**1** Piensa en el número $\frac{4}{13}$. ¿Cuánto vale la cifra que ocupa el lugar 2022 en su desarrollo decimal?

**A)** 2 **B)** 3 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

**2** En cada una de las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro están escritos los números correspondientes a los vértices que forman esa cara. Hay una cara con los números 1, 2 y 3, otra con los números 1, 2 y 4, una tercera con los números 1, 3 y 4 y la última lleva los números 2, 3 y 4. Se lanzan dos dados idénticos de estos y una vez en reposo se suman todos los números que quedan a la vista. La suma que tiene mayor probabilidad de aparecer es:

**A)** 43 **B)** 44 **C)** 45 **D)** 46 **C)** 47

**3** ¿Cuánto vale la suma de los tres divisores más pequeños de 70! que son mayores que 70?

**A)** 215 **B)** 216 **C)** 218 **D)** 221 **E)** 223

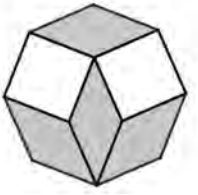
**4** El número $R=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ puede escribirse de la forma $R=\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$, con $a$, $b$ y $c$ enteros. ¿Cuánto vale la suma $a+b+c$?

**A)** 35 **B)** 33 **C)** 15 **D)** 27 **E)** 10

**5** Venga, ¡¡¡a sumar todos los números enteros positivos y en orden, empezando por el uno!!! Cuando al profesor se le pasó el enfado dijo a sus cinco estudiantes que podían parar y les pidió sus resultados. ¿Qué estudiante realizó bien su suma?

**A)** 2016 **B)** 2018 **C)** 2020 **D)** 2022 **E)** 2024

**6** Un octógono regular de lado 6 cm está dividido en dos cuadrados y cuatro rombos, todos de lado 6. ¿Cuál es el área, en $cm^2$, de uno de esos rombos?



**A)** $18\sqrt{3}$ **B)** 21 **C)** $18\sqrt{2}$ **D)** $12\sqrt{6}$ **E)** $16\sqrt{3}$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**7** En una liguilla de fútbol con cuatro equipos a doble partido (3 puntos por partido ganado y 1 punto por empate), conocemos las puntuaciones 16, 8 y 2 de tres de ellos. Si sabemos que en total hubo cinco partidos que terminaron con empate, los puntos del cuarto equipo fueron:

**A)** 7 **B)** 6 **C)** 5 **D)** 4 **E)** 3

**8** Si $\frac{a}{b}=2$, $\frac{c}{b}=3$ y $a\cdot c=24$, entonces $a\cdot b+b\cdot c$ es igual a:

**A)** 30 **B)** 29 **C)** 26 **D)** 24 **E)** 20

**9** $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\cdots=$

**A)** $\frac{1}{4^2}$ **B)** $\frac{1}{3\cdot 4}$ **C)** $\frac{1}{3^2}$ **D)** $\frac{1}{2\cdot 3}$ **E)** $\frac{1}{3+4}$

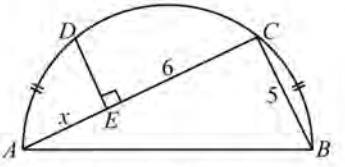
**10** En la sucesión de Fibonacci, que comienza con 1, 1, 2, 3, 5, 8,… y cada término es la suma de los dos anteriores, ¿cuántos términos tienen 2022 cifras?

**A)** 2 ó 3 **B)** 4 ó 5 **C)** 6 ó 7 **D)** 8 ó 9 **E)** 10 o más

**11** Se mezclan pintura blanca y pintura negra para obtener 12 kg de pintura gris. En la mezcla inicial el 80 % es pintura blanca, pero como es muy oscura se añade más pintura blanca hasta tener una mezcla con el 90 % de pintura blanca. ¿Cuántos kilos de pintura gris tenemos ahora?

**A)** 13 **B)** 15 **C)** 32 **D)** 24 **E)** 18

**12** En la semicircunferencia de diámetro $AB$ inscribimos un triángulo rectángulo $ABC$, como se muestra en la figura. Trazamos la perpendicular al cateto $AC$ por el punto $E$ de modo que corta a la semicircunferencia en $D$. Si el cateto $BC$ mide 5, el segmento $CE$ mide 6 y los arcos de circunferencia $BC$ y $DA$ son iguales, el segmento $AE$ mide:




**A)** 2 **B)** 2,5 **C)** 3 **D)** 3,5 **E)** 4

**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**13** La lista de números enteros positivos $a$, 8, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, 2 cumple que la suma de cuatro números consecutivos es siempre 17. ¿Cuánto vale $c+f$?

**A)** 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 4 **E)** 8

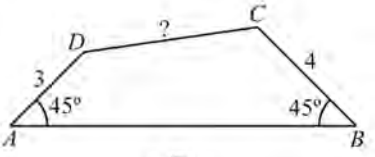
**14** Cinco personas sentadas en círculo tiran cada una un dado equilibrado de 6 caras y aquellas que obtienen un 5 o un 6 se ponen en pie. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya dos personas contiguas de pie?

**A)** $\frac{91}{243}$ **B)** $\frac{121}{243}$ **C)** $\frac{130}{243}$ **D)** $\frac{152}{243}$ **E)** $\frac{201}{243}$

**15** ¿Cuántos números naturales de tres cifras cumplen que la suma de sus cifras es 18?

**A)** 20 **B)** 36 **C)** 54 **D)** 60 **E)** 72

**16** El lado $DC$ del cuadrilátero de la figura mide:




$7\sqrt{2}$

**A)** $4\sqrt{2}$ **B)** 5 **C)** $2\sqrt{6}$ **D)** 6 **E)** $\frac{9}{2}$

**17** ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

**A)** $99^{101}$ **B)** $101^{99}$ **C)** $10^{200}$ **D)** $200^{50}$ **E)** $3^{400}$

**18** El polinomio $P(x)$ de grado 6 y coeficiente del término de mayor grado igual a 1 tiene raíces $\pm 1, \pm 3, \pm 4$. El valor del polinomio para $x = 2$ es:

**A)** 180 **B)** –240 **C)** 120 **D)** 144 **E)** –200

**19** Una de estas longitudes NO corresponde a la distancia entre dos vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 1.

**A)** $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ **B)** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **E)** 2

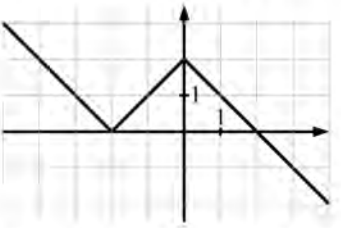
**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**20** La descomposición del polinomio $x^4+x^2+1$ como producto de polinomios irreducibles con coeficientes reales es:

**A)** $(x^2+x+1)^2$ **B)** $(x+1)(x-1)(x^2+1)$ **C)** $(x^2+1)^2$

**D)** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ **E)** $\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x^2+1)$

**21** Dada la función de la gráfica, ¿cuánto vale $f(f(f(-2)))$ ?




**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

**22** En una progresión aritmética sabemos que $a_{2022}=25$.

¿Cuánto vale $a_{2001}+3a_{2019}+3a_{2025}+a_{2043}$?

**A)** 150 **B)** 200 **C)** 250 **D)** 300 **E)** 100

**23** La ecuación de la recta simétrica de $y=mx+b$ $(m\neq 0)$, respecto de la recta $y=-x$ es:

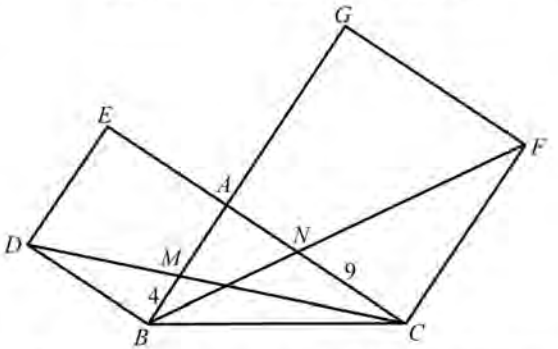
**A)** $y=-mx+b$ **B)** $y=\frac{1}{m}x-b$ **C)** $y=\frac{1}{m}x+\frac{b}{m}$

**D)** $y=-\frac{1}{m}x-\frac{b}{m}$ **E)** $y=-mx+\frac{b}{m}$

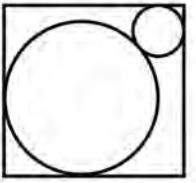
**XXV Concurso 1ª Fase. (Nivel IV)**

**24** El triángulo $ABC$ es rectángulo, recto en $A$. Sobre los lados $AB$ y $AC$ se han construido sendos cuadrados, como se muestra en la figura. Si el segmento $BM = 4$ y el segmento $CN = 9$, el cuadrado de la hipotenusa, $BC^2$, vale:

**A)** 289 **B)** 315 **C)** 320 **D)** 324 **E)** 325




**25** Dentro de un cuadrado hemos colocado dos circunferencias (de radios 1 cm y 3 cm) tangentes entre sí y a dos lados del cuadrado. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene el cuadrado?



**A)** $32\sqrt{2}$ **B)** $8+24\sqrt{2}$ **C)** $24+16\sqrt{2}$ **D)** $32+8\sqrt{2}$ **E)** 32

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2022**

**NIVEL I (5º y 6º de Primaria)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 punto*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

EN LA HOJA DE RESPUESTAS, **MARCA CON UNA CRUZ** [X] LA QUE CONSIDERES **CORRECTA**.

**SI TE EQUIVOCAS**, ESCRIBE "**NO**" EN LA EQUIVOCADA Y MARCA LA QUE CREAS CORRECTA.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Eduation
Smartick

## XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)

**1** ¡Empieza el concurso con mucho salero! ¿Cuántos saleros de veinticinco gramos podemos llenar con dos kilos y cuarto de sal?

**A)** 18 **B)** 60 **C)** 75 **D)** 90 **E)** 120

**2** En esta frase hay --------- vocales

¿Por cuál de estas opciones debemos sustituir -------- para que la frase del recuadro sea cierta?

**A)** ocho **B)** diez **C)** once **D)** doce **E)** trece

**3** "¿Dónde vas, niña Centésima?", pregunta Comenúmeros. "Voy a llevar esta cesta con los números del 1 al 200 a don Retorcido que está malito." Comenúmeros se relame y le dice: "Me darás alguno, ¿verdad?" "Está bien" respondió la niña con fastidio, "te daré todos los números que sean múltiplos de 13 y que la suma de sus cifras sea múltiplo de 9" ¿Cuántos números le dio la niña Centésima al glotón de Comenúmeros?

**A)** Ninguno **B)** Uno **C)** Dos **D)** Cuatro **E)** Cinco

**4** Mi granja suele ser silenciosa pues normalmente la vaca no dice ni mu y el pato mantiene el pico cerrado. Eso sí, si por casualidad la vaca dice *Mu*, el pato lo celebra con dos *Cua*. Cada *Cua* del pato es celebrado por tres *Beee* de la oveja y el perro hace *Guau* cuatro veces por cada *Beee* de la oveja. ¿Cuántas letras *u* se oyen en mi granja cada vez que la vaca habla?

**A)** 9 **B)** 27 **C)** 45 **D)** 49 **E)** 51

**5** Si ★ + ♥ + ♥ = ◘ + ○ y ♥ + ♥ = ★ + ○, ¿cuál de las siguientes igualdades es siempre cierta?

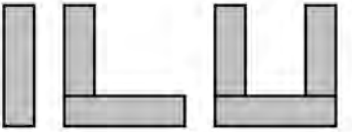
**A)** ◘ = ○ **B)** ★ = ◘ + ◘ **C)** ◘ = ★ + ★
**D)** ○ = ★ + ◘ **E)** ◘ + ★ = ○

**6** El año pasado Juan pesaba entre 65 y 70 kg. Si ha perdido entre 3 y 4 kg, su peso actual, en kg, está comprendido entre…

**A)** 61 y 65 **B)** 61 y 67 **C)** 62 y 66 **D)** 62 y 67 **E)** 68 y 74

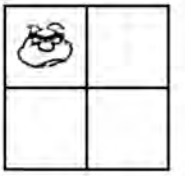
**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)**

**7** Tres amigas han escrito las iniciales de sus nombres superponiendo rectángulos transparentes idénticos. Irene usó uno, Luisa dos y Úrsula tres, como ves en el dibujo. Si el área de la **L** de Luisa es 32 cm² y el de la **U** de Úrsula es 46 cm², ¿cuál es el área de la **I** de Irene?



**A)** 18 cm² **B)** 20 cm² **C)** 16 cm² **D)** 14 cm² **E)** 24 cm²

**8** La niña Centésima escribió un número en cada casilla de esta cuadrícula, pero Comenúmeros se los comió todos. Sabemos que tres de ellos eran 2, 3 y 4, que la suma de los dos números de la segunda columna era 10 y que la suma de los dos números de la segunda fila era 6. ¿Qué número estaba en la casilla en la que ahora descansa Comenúmeros?



**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**9** D'Artagnan se encuentra una hoja de papel y con su espada la corta en nueve trozos. Llega Aramis, coge ocho de esos trozos y con su espada los corta en siete trozos cada uno. Por último aparece Porthos, elige seis trozos y los corta en cinco trozos cada uno. ¿Cuántos trozos de papel hay ahora?

**A)** 81 **B)** 82 **C)** 86 **D)** 87 **E)** 90

**10** La operación *Tres en uno* de números naturales, cuyo símbolo es ✪, opera como ves en los siguientes ejemplos: 2✪3 = 615, 4✪9 = 36513 y 13✪2 = 261115. ¿Cuál es el resultado de operar 17✪6?

**A)** 1022311 **B)** 122311 **C)** 102102 **D)** 1021123 **E)** 1122311

**11** Asier puede colocar todos sus pequeños coches en diez filas con el mismo número de coches en cada fila; pero si los coloca en seis filas, una de ellas tiene dos coches menos que las otras. ¿Cuál es el número de coches que tiene Asier si son más de cincuenta y menos de cien?

**A)** 70 **B)** 66 **C)** 90 **D)** 76 **E)** 60

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)**

**12** Sol dibuja con trazo continuo un cuadrado de lado 2 cm. Mía dibuja un cuadrado con trazo punteado cuyo lado es la diagonal del cuadrado de Sol. Finalmente Ona dibuja un cuadrado con trazo rayado cuyo lado es la diagonal del de Mía. ¿Qué área, en $cm^2$, tiene la figura completa?

**A)** 28 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

**13** Ander mete todas sus canicas en diez bolsas. Ninguna bolsa está vacía y cada bolsa tiene un número distinto de canicas. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que tiene Ander?

**A)** 35 **B)** 55 **C)** 25 **D)** 45 **E)** 65

**14** A Noé le encantan los animales. Tiene cuatro arañas llamadas Amable, Buena, Cariñosa y Divertida. Ha observado que Amable duerme el doble de tiempo que Divertida; que Buena juega exactamente el mismo tiempo que Divertida duerme; y que Cariñosa duerme la tercera parte de lo que duerme Amable. Si Buena ha jugado hoy 30 minutos, ¿cuánto tiempo ha estado durmiendo Cariñosa?

**A)** 1 hora **B)** 10 minutos **C)** 30 minutos
**D)** 1 hora y media **E)** 20 minutos

**15** La nariz de Pinocho mide un decímetro. Su longitud se duplica cada vez que miente. ¿Cuántos centímetros medirá su nariz después de mentir cuatro veces?

**A)** 160 **B)** 40 **C)** 4 **D)** 18 **E)** 320

**16** Estos son los puntos que han obtenido cinco escolares en las pruebas deportivas:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 295 | 280 | 345 | 272 | 320 |

Se sabe que María obtuvo más puntos que Íñigo y menos que Begoña. Si Amaia obtuvo 40 puntos más que Manuel, ¿qué puntuación obtuvo Íñigo?

**A)** 295 **B)** 280 **C)** 345 **D)** 272 **E)** 320

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)**

**17** Mi perra ha tenido doce cachorritos. Tres son negros, cinco castaños y los demás son blancos. De todos los colores hay más hembras que machos y en total hay cuatro machos. Si mi prima cierra los ojos y coge un perrillo, ¿cuál es la probabilidad de que escoja una hembra castaña?

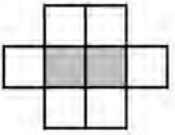
**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **C)** $\frac{1}{4}$ **D)** $\frac{5}{12}$ **E)** $\frac{1}{3}$

**18** Un estudio afirma que los jóvenes pasan una media de 9,4 minutos al día zapeando hasta que encuentran el programa que desean ver. ¿Qué opción se acerca más al tiempo que pasará un joven zapeando al año?

**A)** Un día **B)** Dos días y medio **C)** Cinco días

**D)** Quince horas **E)** Noventa horas

**19** Si se escriben los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, uno en cada casilla de esta figura, de forma que no haya dos números consecutivos ni en horizontal ni en vertical ni en diagonal, ¿cuál es la suma de los dos números que ocupan las casillas sombreadas?



**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**20** Miguel tenía el doble de dinero que Diego. Después de que Miguel comprara un libro de 18 euros y Diego una revista de 3 euros, ambos tenían la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos euros le han quedado a cada uno?

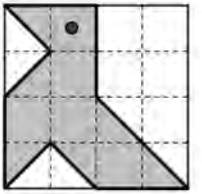
**A)** 10 **B)** 8 **C)** 15 **D)** 12 **E)** 21

**21** Juan Pupas casi siempre está malito. Cada cuatro días tiene tos, cada seis días le duele la barriga y cada siete días le duele la cabeza. Hoy ha tenido las tres dolencias. Durante los próximos veinticinco días, ¿cuántos días estará sin ninguna dolencia?

**A)** 13 **B)** 14 **C)** 15 **D)** 16 **E)** 17

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel I)**

**22** La unidad de medida de la superficie es el cuadrado grande, ¿cuál es el área de la pajarita?



**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{3}{4}$ **D)** $\frac{1}{3}$ **E)** $\frac{1}{4}$

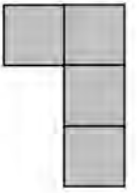
**23** El producto de las edades de Roni y Leire es 351 y su suma es 40. ¿Cuál es la edad del menor?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 2 **D)** 13 **E)** 7

**24** A Belén le encanta el 2022 porque solo tiene doses y ceros. Usando únicamente doses y ceros, ¿cuántos números de cuatro cifras puede formar Belén?

**A)** 16 **B)** 8 **C)** 4 **D)** 12 **E)** 10

**25** ¿Cuántas figuras distintas puede formar Ane con cuatro cuadrados iguales pegados por al menos un lado? Dos figuras son distintas si no podemos cubrir completamente una con la otra las pongamos como las pongamos.



**A)** 6 **B)** 7 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 4

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

concurso de primavera MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2022**

**NIVEL II (1º y 2º de ESO)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

**IMPORTANTE**: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 2.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

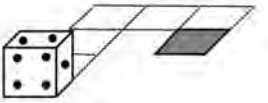
Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

## XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)

**1** ¡Comienza el XXV Concurso de Primavera! ¡El dado empieza a rodar! ¿Cuántos puntos habrá en la cara superior del dado cuando llegue a la casilla gris?
[Recuerda que en los dados la suma de dos caras opuestas siempre es 7]



**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

**2** ¡Mirad!, ahí está la ardilla Pilla comiéndose una pipa, una avellana y una nuez, las tres a la vez. Pilla come una pipa cada tres horas, una avellana cada seis horas y una nuez cada ocho horas. La próxima vez que termine de zamparse los tres frutos secos simultáneamente, ¿cuántos habrá comido en total?

**A)** 14 **B)** 18 **C)** 11 **D)** 24 **E)** 16

**3** ¿Cuántos números enteros positivos cumplen a la vez estas cuatro condiciones?

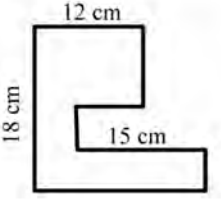
UNA: son múltiplos de 11. DOS: al dividirlos entre 5 dan de resto 2.
TRES: tienen menos de 4 cifras. CUATRO: son pares.

**A)** 9 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 6 **E)** 5

**4** Justo ahora estoy recordando que anteayer pensé… "¡Anda!, hace tres días tuve este pensamiento: pasado mañana será martes." ¿Qué día será mañana?

**A)** Domingo **B)** Sábado **C)** Viernes **D)** Jueves **E)** Miércoles

**5** ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de esta figura?




**A)** 75 **B)** 78 **C)** 81 **D)** 90

**E)** Imposible saberlo porque faltan medidas

**6** ¿Cuál es la novena parte de $27^5$?

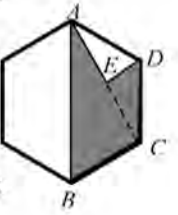
**A)** $9^5$ **B)** $3^{12}$ **C)** $3^{13}$ **D)** $3^2$ **E)** $3^5$

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**7** ¿Cuál de los siguientes números está más cerca de $\frac{5}{12}$?

**A)** $\frac{1}{3}$ **B)** $\frac{5}{11}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{2}{5}$ **E)** $\frac{5}{13}$

**8** Todos sabéis que a don Retorcido le encantan los hexágonos y nos trae este problema. Si el hexágono regular tiene 180 cm$^2$ de área, el punto $E$ es el punto medio de $AC$ y el ángulo $AED$ es recto, ¿cuál es el área, en cm$^2$, del pentágono gris $ABCDE$?

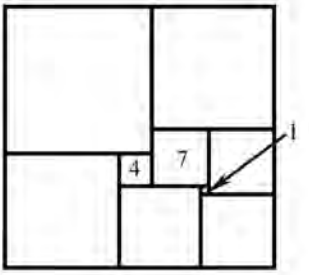



**A)** 72 **B)** 65 **C)** 80 **D)** 60 **E)** 75

**9** Si una pirámide tiene 2022 vértices, ¿cuántas aristas tiene?

**A)** 4042 **B)** 4038 **C)** 2023 **D)** 4041 **E)** 2022

**10** Hemos colocado con mucho cuidado nueve alfombras cuadradas para cubrir una gran sala rectangular. Si los lados de las alfombras más pequeñas miden 1 m, 4 m y 7 m, ¿qué superficie, en m$^2$, tiene la sala?




**A)** 1024 **B)** 1122 **C)** 1023

**D)** 1088 **E)** 1056

**11** En esta suma cada letra diferente representa una cifra diferente. ¿Cuál es el valor de **E + S + A + S + E + T + A**?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | **S** | **S** | **A** |
| | **E** | **E** | **A** |
| + | **T** | **T** | **A** |
| **S** | **E** | **T** | **A** |

**A)** 28 **B)** 30 **C)** 32 **D)** 38 **E)** 40

**12** ¡Ya han llegado las potencias! Si $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c = 300$ y $a^2 \cdot b^3 \cdot c^5 = d^e$, ¿cuánto vale $e^d$? [$a$, $b$, $c$, $d$, $e$ son enteros positivos con $e \neq 1$]

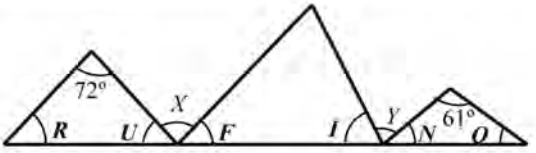
**A)** 27 **B)** 128 **C)** 49 **D)** 25 **E)** 3

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**13** Al multiplicar por 9 un número impar de tres cifras se obtiene lo mismo que al multiplicar por 11 otro número de dos cifras. $9 \times \square\square\square = 11 \times \square\square$. Cuánto suman las cinco cifras desconocidas?

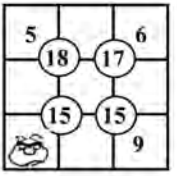
**A)** 10 **B)** 15 **C)** 20 **D)** 22 **E)** 35

**14** Si $X + Y = 115°$, ¿cuál es el valor de la suma de ángulos: $U + N + R + U + F + I + N + O$?




**A)** 292° **B)** 472° **C)** 298° **D)** 425° **E)** 493°

**15** Tienes que colocar los nueve números enteros que hay desde el 1 hasta el 9 de tal manera que la suma de los cuatro números que rodean cada circulito sea el valor que está dentro del círculo. ¿Qué número hay que colocar en la casilla de Comenúmeros? [Observa que ya hay tres números colocados]




**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 7 **E)** 8

**16** En un torneo de quidditch participaron seis equipos, jugando todos contra todos un solo partido. Si la puntuación era de 3 puntos por victoria, 1 por empate y 0 por derrota, y entre todos los equipos sumaron 40 puntos, ¿cuántos empates hubo?

**A)** 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 6 **E)** 5

**17** Al comprar un reloj cuyo precio estaba entre 300 € y 400 €, el vendedor se confundió y en la máquina tecleó el precio invirtiendo el orden de sus cifras (si hubiera costado, por ejemplo, 519 €, me hubiera cobrado 915 €). ¡Menos mal que me di cuenta a tiempo!, si no, habría pagado 198 € más. Recuerdo que el precio real era múltiplo de 9. Y ya viene la pregunta: si multiplicas las cifras del precio real, ¿qué resultado obtienes?

**A)** 14 **B)** 15 **C)** 24 **D)** 27 **E)** 0

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**18** En mi instituto somos 125 estudiantes en 1ESO y somos más chicas que chicos. Jugamos al baloncesto exactamente el 12 % de las alumnas y el 14 % de los alumnos. ¿Cuántos estudiantes de 1ESO jugamos al baloncesto en mi instituto?

**A)** 16 **B)** 13 **C)** 10 **D)** 26 **E)** 15

**19** Examen de números negativos. Sé prudente, solo hay tres preguntas:

i) ¿Qué número hay que restar a –2 para obtener 7?

ii) ¿Qué número hay que sumar a –5 para obtener –2?

iii) ¿A qué número hay que restarle –1 para obtener –8?

¿Cuáles son las tres respuestas correctas?

**A)** [-5] [7] [7] **B)** [-9] [3] [7] **C)** [-9] [3] [-9] **D)** [-9] [7] [-7] **E)** [-5] [3] [-9]

**20** Bart y Calamardo van con sus huchas a comprarse el mismo libro cada uno. Cuando vuelven a sus casas con sus libros ya comprados, Bart dice: "He gastado un tercio de lo que no he gastado." Calamardo dice: "Pues yo he gastado dos quintos de lo que no he gastado." Si entre los dos todavía tienen 132 euros sin gastar, ¿cuántos euros costaba el libro?

**A)** 52,80 **B)** 22 **C)** 26,40 **D)** 44 **E)** 24

**21** En el mercado del trueque se cambian tres almendras por dos bellotas; y una castaña por una almendra y una bellota. ¿Cuántas castañas podré conseguir por cinco bellotas?

**A)** Una **B)** Dos **C)** Tres **D)** Cuatro **E)** Cinco

**22** Cuando don Retorcido se aburre dibuja rectángulos de área 90 $cm^2$ cuyos lados son longitudes enteras medidas en centímetros. Después busca cuál de ellos tiene el perímetro mayor y cuál tiene el perímetro menor. Si resta estos dos perímetros, ¿qué longitud, en cm, obtiene?

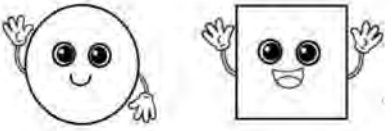
**A)** 140 **B)** 122 **C)** 56 **D)** 144 **E)** 136

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel II)**

**23** En la expresión $E = a^b + c^d$, las letras $a$, $b$, $c$ y $d$ son números diferentes que puedes elegir entre 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál es la suma del mayor y el menor valor posible que puede tomar $E$?

**A)** 1122 **B)** 1128 **C)** 723 **D)** 1145 **E)** 1666

**24** Celia y Sol coleccionan círculos y cuadrados. Sabemos que $\frac{2}{5}$ de las figuras de Celia son cuadrados y $\frac{1}{4}$ de las de Sol son círculos. Si las dos tienen la misma cantidad de cuadrados y Celia tiene 36 círculos, ¿cuántas figuras tienen entre las dos amigas?



**A)** 108 **B)** 72 **C)** 92 **D)** 90 **E)** 96

**25** La niña Centésima quiere construir números romanos jugando con cuatro palitos. Para ello utiliza los símbolos I (para el que necesita un palito) y V, X y L (para los que necesita dos palitos en cada uno de ellos). ¿Cuántos números podrá formar usando los cuatro palitos en cada número?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2022**

**NIVEL III (3º y 4º de ESO)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

**IMPORTANTE**: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 3.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

## XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)

**1** La niña Centésima ha sacado un 8 en la última evaluación de matemáticas. Recuerda que sacó en el primer examen un 7, en el tercero un 9 y en el cuarto y último, un 8. Si la media es ponderada y el primer examen cuenta un 10 %, el segundo un 20 %, el tercero un 30 % y el cuarto un 40 %, ¿qué nota obtuvo en el segundo examen?

**A)** 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

**2** Tenemos un triángulo equilátero de área 8 cm$^2$. Trazamos un segmento que va del punto medio de un lado al punto medio de otro lado. ¿Cuánto vale el área del trapecio isósceles obtenido?

**A)** 1 cm$^2$ **B)** 2 cm$^2$ **C)** 4 cm$^2$ **D)** 6 cm$^2$ **E)** 7 cm$^2$

**3** En un hexágono regular de lado 6 cm trazamos arcos de 120º con centro en cada vértice del hexágono y radio 3 cm, tal como se ve en la figura. ¿Cuál es el área, en cm$^2$, de la región sombreada?

**A)** $54\sqrt{3}-18\pi$ **B)** $108\sqrt{3}-36\pi$ **C)** $27\sqrt{3}-18\pi$

**D)** $54\sqrt{3}-9\pi$ **E)** $27\sqrt{3}-9\pi$

**4** El rectángulo $ABCD$ se divide en cuatro rectángulos trazando una línea recta paralela a $AB$ y otra paralela a $BC$. Si tres de esos rectángulos tienen áreas 1, 2 y 3, ¿cuál es la mayor área posible del rectángulo $ABCD$?

**A)** 12 **B)** 15 **C)** $\frac{15}{2}$ **D)** $\frac{20}{3}$ **E)** 20

**5** ¿Cuántos números de tres cifras cumplen que la cifra central es la media aritmética de las otras dos?

**A)** 42 **B)** 43 **C)** 44 **D)** 45 **E)** 46

**6** Si un cuadrado aumenta de tamaño incrementando su perímetro un 10 %, el área aumenta un…

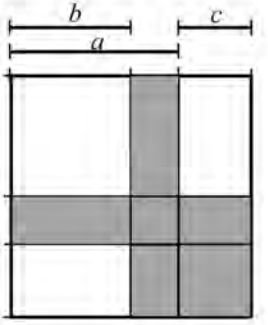
**A)** 10 % **B)** 21 % **C)** 20 % **D)** 100 % **E)** 40 %

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

**7** Sabiendo que $2^{18}\cdot 3^6 = a^b$, con $a$ y $b$ enteros positivos, ¿cuál es el menor valor posible de la suma $a+b$?

**A)** 32 **B)** 30 **C)** 27 **D)** 28 **E)** 24

**8** Usando los segmentos $a$, $b$ y $c$ hemos dibujado la siguiente figura donde un cuadrado se divide en 3 cuadrados y 6 rectángulos, estando los cuadrados situados sobre la diagonal. ¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área de la zona sombreada?




**A)** $(a+c)^2-(b+c)^2$ **B)** $a^2-b^2+c^2$

**C)** $a^2-b^2+2bc$ **D)** $(a+c)^2-(a-b)^2$

**E)** $(a+c)^2-(b+c)^2+c^2$

**9** ¿Cuánto suman las soluciones reales positivas de la ecuación $x^8+64=20x^4$?

**A)** 2 **B)** 4 **C)** $3\sqrt{2}$ **D)** $2+\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{2}$

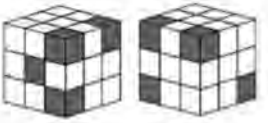
**10** De las 25 preguntas del Concurso de Primavera, Patricia ha contestado a todas, mientras que Gabriel ha respondido bien a todas las que ha contestado, pero ha dejado algunas en blanco. Entre los dos han obtenido 225 puntos. ¿Cuántos puntos ha obtenido Gabriel?

**A)** 60 **B)** 77 **C)** 85 **D)** 105 **E)** 115

**11** Dos números son primos entre sí cuando su único divisor común es el 1. Si sacamos dos números diferentes al azar del 2 al 10 (ambos incluidos), ¿qué probabilidad hay de que sean primos entre sí?

**A)** $\frac{11}{18}$ **B)** $\frac{3}{4}$ **C)** $\frac{19}{36}$ **D)** $\frac{17}{36}$ **E)** $\frac{2}{3}$

**12** El siguiente dibujo muestra un cubo visto desde dos perspectivas diferentes. Sabiendo que está formado por 27 cubitos, algunos de ellos grises y otros blancos, ¿cuál es el número máximo de cubitos grises que puede haber?



**A)** 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 10

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

**13** Luis tiene instalado en su jardín un riego automático en el que el agua fluye por una tubería de 3 cm de diámetro interior. Ha tenido mala suerte este invierno y se le ha roto, pero ha decidido aprovechar para cambiar la instalación por otra con tuberías más estrechas de 1 cm de diámetro interior y minimizar así el impacto de futuras averías. ¿Cuántas tuberías estrechas necesitará si no quiere reducir el caudal de agua que llega a su jardín?

**A)** 3 **B)** $3\pi$ **C)** 6 **D)** 9 **E)** $9\pi$

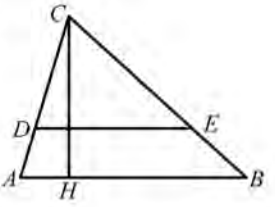
**14** Con los veinticinco enteros consecutivos del $-10$ al 14 puede construirse un cuadrado mágico de $5\times5$; es decir, podemos repartir los veinticinco números en una cuadrícula de $5\times5$ de forma que la suma de los números de cada una de sus filas, cada una de sus columnas y sus dos diagonales sea la misma. ¿Cuál es el valor de esta suma común?

**A)** 2 **B)** 5 **C)** 10 **D)** 25 **E)** 50

**15** Siete cubos de volúmenes 1, 8, 27, 64, 125, 216 y 343 $cm^3$ se apilan verticalmente por tamaño de mayor a menor para formar una torre. Excepto el cubo base, el mayor de todos, el resto descansa completamente en el cubo inferior. ¿Cuál es la superficie total, en $cm^2$, de la torre así construida, incluyendo en esta superficie la cara que se apoya en el suelo?

**A)** 644 **B)** 658 **C)** 664 **D)** 720 **E)** 749

**16** El triángulo $ABC$ de altura $CH = 2$ lo hemos dividido en un triángulo $DEC$ y un trapecio $ABED$ de igual área. ¿Cuánto mide la altura del trapecio?




**A)** $\frac{2}{3}$ **B)** $2-\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{2}-2$

**D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\sqrt{2}$

**17** En una pista circular están entrenando dos ciclistas, Alba y Carlos, en rondas de tres minutos. Cada segundo que pasa, Alba recorre 30º de la circunferencia y Carlos 20º. Suponiendo que empiezan a la vez en puntos opuestos y que recorren la pista en sentido contrario, ¿cuántas veces se cruzarán en los tres minutos que dura cada ronda del entrenamiento?

**A)** 25 **B)** 24 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 30

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

**18** Cuando don Retorcido se disponía a proponer la ecuación del margen, Comenúmeros aprovechó un descuido de su profesor y se zampó el segundo miembro de la ecuación. Pero don Retorcido, lejos de amilanarse, cambió sobre la marcha la pregunta a: ¿Cuántas soluciones enteras tenía mi ecuación si os digo que el segundo miembro era un número entero par?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{3}\right)^x+\left(\frac{1}{4}\right)^x=¿?$$

**A)** Infinitas **B)** Ninguna **C)** Tres **D)** Doce **E)** No se puede saber

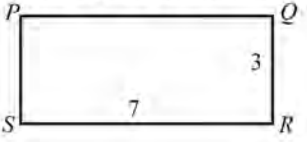
**19** Si $\begin{cases} a+2b+3c=47 \\ 4a+5b+6c=71 \end{cases}$, entonces $8a+9b+10c$ es igual a…

**A)** 103 **B)** 114 **C)** 118 **D)** 95 **E)** 105

**20** ¿Cuántos números de cinco cifras tienen exactamente cuatro cifras iguales?

**A)** 400 **B)** 450 **C)** 540 **D)** 405 **E)** 500

**21** En una mesa rectangular con borde de siete metros de largo y tres metros de ancho lanzamos una bola desde $P$ formando un ángulo de 45º con $PQ$. La bola continúa rebotando con ángulos de 45º cada vez que choca contra un borde. Si la bola se detiene al chocar contra un vértice, ¿en qué vértice acabará su movimiento?




**A)** $P$ **B)** $Q$ **C)** $R$

**D)** $S$ **E)** No choca contra ningún vértice

**22** ¿Cuántos cubos perfectos hay entre los números $A = 2^9 - 1$ y $B = 2^{18} + 1$, ambos inclusive?

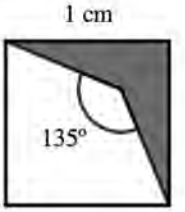
**A)** 9 **B)** 27 **C)** 28 **D)** 56 **E)** 57

**23** Construimos todos los triángulos escalenos de perímetro 21 cm y lados enteros medidos en cm. ¿Cuántos triángulos diferentes tenemos?

**A)** 6 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 15

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel III)**

**24** Hemos dividido un cuadrado de lado 1 cm en una cometa y una punta de flecha (cuadrilátero sombreado). Si los lados que forman el ángulo de 135° son iguales, ¿cuál es, en $cm^2$, el área de la punta de flecha?




**A)** $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **C)** $\frac{1}{3}$ **D)** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{3}{8}$

**25** Una secuencia de Shonk es una serie finita, estrictamente creciente, de números enteros cuyo producto es un cuadrado perfecto. Por ejemplo, [2, 6, 27] es una secuencia de Shonk.
Si [28, $x$, $y$, 65] es una secuencia de Shonk, ¿cuánto vale la suma $x + y$?

**A)** 80 **B)** 87 **C)** 103 **D)** 77 **E)** 96

XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)

concurso de primavera
MATEMÁTICAS

**XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS**

**2ª FASE: 23 de abril de 2022**

**NIVEL IV (1º y 2º de Bachillerato)**

## ¡¡¡ Lee detenidamente estas instrucciones!!!

**Escribe tu número de identificación**, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

**IMPORTANTE**: Comprueba que el número Mod. En tu hoja de respuestas es 4.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

**No está permitido el uso de calculadoras**, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

| | |
|---|---|
| *Cada respuesta **correcta** te aportará* | ***5 puntos*** |
| *Cada pregunta que dejes **en blanco*** | ***1 puntos*** |
| *Cada respuesta **errónea*** | ***0 puntos*** |

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUIVOCAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

**CONVOCA**

Facultad de Matemáticas de la UCM

**ORGANIZA**

Asociación Matemática *Concurso de Primavera*

**COLABORAN**

Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
MCGraw-Hill Education
Smartick

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**1** El resultado de $\sqrt{49+20\sqrt{6}}-\sqrt{49-20\sqrt{6}}$ es:

**A)** $4\sqrt{6}$ **B)** 14 **C)** $20\sqrt{6}$ **D)** $40\sqrt{6}$ **E)** $98+40\sqrt{6}$

**2** Si $\begin{cases} a+2b+3c=9 \\ a+4b+9c=27 \end{cases}$, entonces $a+3b+6c$ es igual a:

**A)** 15 **B)** 18 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 36

**3** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x+\sqrt{x-2}=4$?

**A)** Dos reales **B)** Dos imaginarias **C)** Ninguna
**D)** Una real **E)** Una real y una imaginaria

**4** Inscribimos una esfera de radio 15 cm en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de la base. ¿Cuántos cm mide la altura del cono?

**A)** 50 **B)** $45\sqrt{3}$ **C)** $45\sqrt{2}$ **D)** 45 **E)** $45(\sqrt{2}-1)$

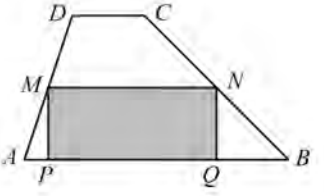
**5** Los números de cuatro cifras cuyos dígitos suman 4 se colocan en una lista en orden decreciente. ¿Qué lugar ocupa el número 2020?

**A)** 13 **B)** 12 **C)** 8 **D)** 7 **E)** 6

**6** Hay un único entero positivo $n$ tal que $\log_2(\log_{16} n)=\log_4(\log_4 n)$. ¿Cuánto suman las cifras del número $n$?

**A)** 4 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 11 **E)** 13

**7** El rectángulo $PQNM$ tiene 13 m$^2$ de área y $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados $AD$ y $BC$ del trapecio $ABCD$. ¿Cuál es el área, en m$^2$, del trapecio $ABCD$?



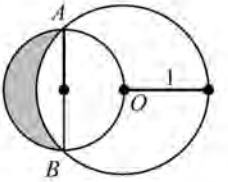

**A)** 28 **B)** 27 **C)** 26
**D)** 25 **E)** 24

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**8** ¿Cuántas sumas de dos o más enteros positivos consecutivos dan 100 como resultado?

**A)** 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

**9** Dada la circunferencia de centro $O$ y radio 1, elegimos la cuerda $AB$ de modo que la circunferencia cuyo diámetro es $AB$ pasa por $O$. ¿Cuál es el área de la lúnula sombreada en la figura?




**A)** $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** $\frac{\pi}{2}$ **D)** $\frac{\pi}{3}$ **E)** 1

**10** Si $z$ es un número complejo tal que $\frac{z-i}{z+i}$ es imaginario puro, el módulo de $z$ es:

**A)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B)** 1 **C)** $\sqrt{2}$ **D)** $1+\sqrt{2}$ **E)** $2\sqrt{2}$

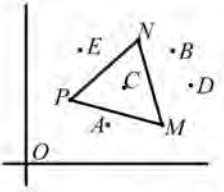
**11** Si $x$ es un número entero positivo, ¿para cuántos valores de $x$ existe un triángulo de lados $\log_2 x$, $\log_4 x$, 3?

**A)** 57 **B)** 59 **C)** 61 **D)** 63 **E)** 65

**12** Todas las rectas de ecuación $ax + by = c$, donde los coeficientes $a$, $b$ y $c$ (en este orden) están en progresión aritmética, pasan por:

**A)** $P(1, 2)$ **B)** $P(0, 1)$ **C)** $P(1, -2)$ **D)** $P(1, 0)$ **E)** $P(-1, 2)$

**13** En la figura, O es el origen de coordenadas. ¿Cuál es el punto cuyas coordenadas son la semisuma (la mitad de la suma) de las coordenadas de $M$, $N$ y $P$?




**A)** $A$ **B)** $B$ **C)** $C$ **D)** $D$ **E)** $E$

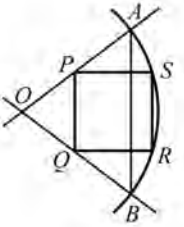
**14** ¿Cuál es la suma de todos los números de dos cifras $[ab]$ que cumplen la igualdad $\frac{[ab]}{[ba]} = \frac{4}{7}$?

($[ab]$ representa un número de dos cifras, no un producto)

**A)** 120 **B)** 72 **C)** 162 **D)** 210 **E)** 100

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**15** Sea $AB$ una cuerda de longitud 6 cm en una circunferencia de centro $O$ y radio 5 cm. Inscribimos en el sector circular $OAB$ un cuadrado $SPQR$ con lado paralelo a $AB$, tal y como se ve en la figura. ¿Cuál es, en cm$^2$, su área?




**A)** $\frac{225}{109}$ **B)** $\frac{9}{4}$ **C)** $\frac{225}{91}$ **D)** $\frac{900}{109}$

**E)** 9

**16** ¿Cuál de estos números es el mayor?

**A)** sen 20° **B)** cos 20° **C)** tg 20° **D)** $\frac{1}{\text{sen } 20^\circ}$ **E)** $\frac{1}{\text{tg } 20^\circ}$

**17** Antes del partido de fútbol entre el Real Madrid y el Manchester City se hicieron cinco predicciones:

a) El partido no terminará en empate.
b) El Real Madrid marcará.
c) El Real Madrid ganará.
d) El Real Madrid no perderá.
e) Se marcarán exactamente tres goles.

¿Cuál fue el resultado final del partido Real Madrid – Manchester City si exactamente tres de estas cinco predicciones resultaron ciertas?

**A)** Madrid: 2, City: 1 **B)** Madrid: 0, City: 3 **C)** Madrid: 1, City: 2
**D)** Madrid: 3, City: 0 **E)** Madrid: 1, City: 0

**18** Juan elige un número entero al azar entre el 1 y el 9. Lo mismo hace María independientemente de lo que hace Juan. Se suman los dos números, ¿cuál es la cifra de las unidades más probable de esta suma?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 5 **D)** 9

**E)** Todas las cifras tienen la misma probabilidad

**19** El número de soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ de la ecuación $\text{sen}^8 x + \cos^6 x = 1$ es:

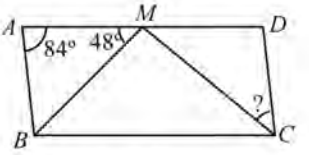
**A)** 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

**20** Si $a \geq 0$, el valor mínimo de la función $f(x) = 2|x-a| + 3|x+a|$ es:

**A)** 0 **B)** $2a$ **C)** $4a$ **D)** $5a$ **E)** $6a$

**XXV Concurso 2ª Fase. (Nivel IV)**

**21** En el paralelogramo $ABCD$, $M$ es el punto medio del lado $AD$, el ángulo $B\hat{A}M = 84°$ y $A\hat{M}B = 48°$, entonces $D\hat{C}M$ mide:

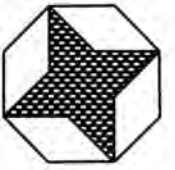



**A)** 36° **B)** 42° **C)** 44° **D)** 45° **E)** 48°

**22** En el triángulo $ABC$ se tiene que $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$ y $\operatorname{tg} B = \frac{21}{20}$. El cociente $\frac{AC}{BC}$ vale:

**A)** $\frac{7}{29}$ **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{5}{7}$ **D)** $\frac{21}{29}$ **E)** $\frac{35}{29}$

**23** El octógono regular de la figura está descompuesto en cuatro rombos y una estrella de cuatro puntas. Si el lado del octógono mide 1 cm, el área de la estrella, en $cm^2$, es:



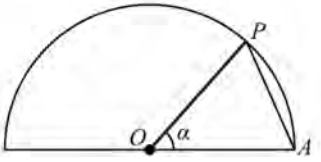
**A)** $\sqrt{2}$ **B)** 2 **C)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{9}{4}$ **E)** $2\sqrt{2}$

**24** ¿Cuántas claves de cuatro cifras se pueden escribir de modo que aparezcan dos y solo dos de las diez cifras del sistema decimal? [El 0 puede estar al comienzo]

**A)** 270 **B)** 450 **C)** 540 **D)** 630 **E)** 720

**25** En el semicírculo de la figura, donde $OA = 1$, la cuerda $AP$ coincide con:

**A)** sen $\alpha$ **B)** tg $\alpha$ **C)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ **D)** $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ **E)** $2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$



XXV Concurso 1ª Fase

## XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
## TABLA DE SOLUCIONES (1ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C | 1 | C | 1 | B | 1 | A |
| 2 | A | 2 | D | 2 | A | 2 | C |
| 3 | B | 3 | D | 3 | E | 3 | D |
| 4 | C | 4 | D | 4 | C | 4 | D |
| 5 | B | 5 | A | 5 | A | 5 | A |
| 6 | E | 6 | D | 6 | A | 6 | C |
| 7 | D | 7 | C | 7 | B | 7 | C |
| 8 | B | 8 | D | 8 | C | 8 | E |
| 9 | D | 9 | E | 9 | C | 9 | D |
| 10 | C | 10 | C | 10 | D | 10 | B |
| 11 | E | 11 | B | 11 | E | 11 | D |
| 12 | C | 12 | A | 12 | C | 12 | E |
| 13 | A | 13 | B | 13 | B | 13 | B |
| 14 | D | 14 | B | 14 | D | 14 | D |
| 15 | C | 15 | A | 15 | E | 15 | C |
| 16 | D | 16 | E | 16 | A | 16 | B |
| 17 | C | 17 | C | 17 | B | 17 | A |
| 18 | A | 18 | E | 18 | B | 18 | A |
| 19 | A | 19 | E | 19 | E | 19 | B |
| 20 | E | 20 | D | 20 | B | 20 | D |
| 21 | A | 21 | E | 21 | C | 21 | A |
| 22 | B | 22 | A | 22 | B | 22 | B |
| 23 | A | 23 | C | 23 | C | 23 | C |
| 24 | C | 24 | E | 24 | D | 24 | E |
| 25 | E | 25 | A | 25 | B | 25 | C |

# XXV CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS
## TABLA DE SOLUCIONES (2ª Fase)

| Nivel I | | Nivel II | | Nivel III | | Nivel IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | D | 1 | D | 1 | C | 1 | A |
| 2 | C | 2 | B | 2 | D | 2 | B |
| 3 | B | 3 | A | 3 | A | 3 | D |
| 4 | E | 4 | B | 4 | A | 4 | D |
| 5 | C | 5 | D | 5 | D | 5 | C |
| 6 | B | 6 | C | 6 | B | 6 | E |
| 7 | A | 7 | D | 7 | B | 7 | C |
| 8 | B | 8 | E | 8 | E | 8 | B |
| 9 | A | 9 | A | 9 | D | 9 | A |
| 10 | D | 10 | E | 10 | D | 10 | B |
| 11 | A | 11 | A | 11 | A | 11 | B |
| 12 | E | 12 | C | 12 | D | 12 | E |
| 13 | B | 13 | D | 13 | D | 13 | B |
| 14 | E | 14 | B | 14 | C | 14 | A |
| 15 | A | 15 | D | 15 | B | 15 | D |
| 16 | D | 16 | E | 16 | B | 16 | D |
| 17 | C | 17 | B | 17 | A | 17 | C |
| 18 | B | 18 | A | 18 | B | 18 | A |
| 19 | D | 19 | C | 19 | A | 19 | C |
| 20 | D | 20 | E | 20 | D | 20 | C |
| 21 | B | 21 | C | 21 | C | 21 | B |
| 22 | B | 22 | D | 22 | E | 22 | E |
| 23 | D | 23 | A | 23 | B | 23 | B |
| 24 | B | 24 | C | 24 | D | 24 | D |
| 25 | D | 25 | D | 25 | B | 25 | E |

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 1ª Fase Nivel I

**1. (C)** Para conocer la cifra que corresponde a las décimas realizamos la suma de los términos de la operación en una tabla de valores.

| M | C | D | U | **d** | c | m |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 8 | 3, | **6** | 0 | 0 |
| | | 5 | 4, | **3** | 2 | 0 |
| | | | 1, | **0** | 9 | 8 |
| | | 7 | 6, | **5** | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 9, | **5** | 1 | 8 |

La cifra que corresponde al orden de las décimas es 5.

**2. (A)** El número de caramelos que recibe Miguel aumenta en uno en cada reparto de forma que en el primer reparto recibe 2, en el segundo 3, en el tercero 4 y así sucesivamente hasta llegar a 8; en total recibe 35 caramelos que es la suma de los números: $2 + 3 + 4 + ,\ldots + 7 + 8$.

Diego recibe un caramelo en cada reparto, en total 7 caramelos que es el número de repartos. En la bolsa había $35 + 7 = 42$ caramelos.

**3. (B)** Para obtener el resultado es conveniente realizar una tabla como la siguiente observando las figuras dadas:

| | Fig. 1 | Fig. 2 | Fig. 3 | Fig. 4 | Fig. 5 | Fig. 6 | ... | Fig. 101 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cuadrados B | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | ... | 10000 |
| cuadrados N | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | ... | 404 |

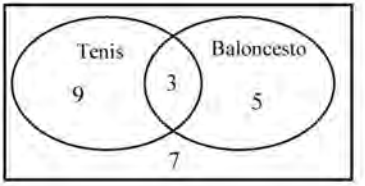
El número de cuadrados blancos es igual al cuadrado de la columna menos uno; Así
- En la columna cuarta es: $(4 - 1)^2 = 3^2 = 9$
- En la columna quinta es: $(5 - 1)^2 = 4^2 = 16$
- En la columna 101 es: $(101-1)^2 = 100^2 = 10\,000$

El número de cuadrados negros es igual al número de la columna multiplicado por 4; Así:
- En la columna tercera es: $3 \times 4 = 12$
- En la columna sexta es: $6 \times 4 = 24$
- En la columna 101 es: $101 \times 4 = 404$

La diferencia es: $10\,000 - 404 = 9596$.

**4. (C)** Representamos los datos en un diagrama de esta forma:

- Como de los 12 estudiantes que practican tenis hay 3 que también practican baloncesto, 9 practican solo tenis y 3 ambos deportes. Escribimos 3 en la intersección y 9 en la zona que corresponde a solo tenis.
- Como de los 8 estudiantes que practican baloncesto hay 3 que también practican tenis, 5 solo practican baloncesto. Escribimos 5 en la zona que corresponde solo a baloncesto.
- Fuera del diagrama escribimos 7 que corresponde a lo estudiantes que no practican ni tenis ni baloncesto.




El número de estudiantes de la clase de Iñigo es igual a la suma de los números representados en el diagrama: $9 + 3 + 5 + 7 = 24$.

**5. (B)** Primero, expresamos todas las distancias en la misma unidad de medida; en este caso, en metros:

916 cm = 9,16 m; 63,3 m; 1025 dm = 102,5 m

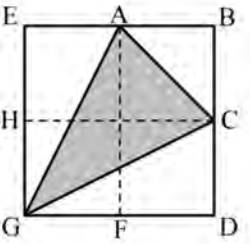
Después, como cada recorrido que hace doña Hormiga es doble, uno de ida y otro de vuelta, sumamos las distancias que recorre expresadas en metros, y multiplicamos por dos.

$(9{,}16\text{ m} + 63{,}3\text{ m} + 102{,}5\text{ m}) \times 2 = 349{,}92\text{ m}$

El número que más se aproxima a la suma obtenida es 350.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**6. (E)** Observando la figura se puede apreciar que el cuadrado queda dividido en cuatro triángulos, uno gris, y tres blancos. Conociendo la fracción que representan en el cuadrado los tres triángulos blancos se deduce la fracción que representa el triángulo gris.
Para la resolución es conveniente nombrar los puntos que se indican en la figura.




- El triángulo ABC representa $\frac{1}{2}$ de1 $\frac{1}{4}$ es decir, $\frac{1}{8}$

- El triángulo CDG representa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ es decir, $\frac{1}{4}$

- El triángulo AEG representa $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ es decir, $\frac{1}{4}$ *3*

Los triángulos blancos representa: $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

El cuadrado representa $\frac{8}{8}$

Para obtener la fracción que representa el triángulo gris restamos $\frac{5}{8}$ a $\frac{8}{8}$

$\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$, luego el triángulo gris representa $\frac{3}{8}$ del cuadrado.

**7. (D)** Como 21 es igual a 3 por 7, los valores de A y de C tienen que ser 7 y 3 o 3 y 7.
Como 33 es igual a 3 por 11, se deduce que el valor de la letra C es necesariamente 3, el valor de B es 11 y el valor de A es 7 y el valor de D es 5.
A + B + C + D = 7 + 11 + 3 + 5 = 26.

**8. (B)** El número de fichas que coge Ainhoa corresponde a los primeros números impares consecutivos; el número de fichas que coge Asier, a los primeros números pares consecutivos.
En la siguiente tabla se indica la diferencia entre la suma de los primeros números pares y la suma de los primeros números impares. La diferencia entre el primer número par y el primer número impar es 1; la diferencia entre los dos primeros números pares y los dos impares es 2; la diferencia entre los tres números pares y los tres impares es 3;..., la diferencia entre los diez primeros números pares y los diez primeros impares es 10.

| Suma nº pares | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 | 90 | 110 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma nº impares | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | ... |
| DIFERENCIA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |

La diferencia entre la suma de los primeros números pares y la suma de los primeros números impares es igual a la cantidad de números sumados. Como Asier tiene 10 números (fichas) más que Ainhoa quiere decir que cada uno ha cogido los diez primeros números pares y los diez primeros números impares; es decir, los 20 primeros números naturales. La suma de los 20 primeros números naturales es igual a 210.

**9. (D)** Como en estas edades no están capacitados para resolver ecuaciones. Mediante tanteos buscamos la edad que cumpla con las dos condiciones del problema:

- Si yo cumplo 7 años, mi tía cumpliría 28 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 13 y mi tía 34. 34 no es el triple de 13.
- Si yo cumplo 10 años, mi tía cumpliría 40 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 16 y mi tía 46. 46 no es el triple de 10.
- Si yo cumplo 11 años, mi tía cumpliría 44 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 17 y mi tía 41. 41 no es el triple de 17.
- Si yo cumplo 12 años, mi tía cumpliría 48 años; dentro de 6 años, yo cumpliría 18 y mi tía 54. 54 es el triple de 18.

**10.(C)** El área del rectángulo será el área del cuadrado que formamos. Conocido el área del cuadrado calculamos la longitud de su lado realizando la raíz cuadrado del área. El perímetro será igual a cuatro veces la longitud del lado.

- Área del rectángulo: $8 \times 18 = 144 cm^2$
- Longitud del lado del cuadrado: $\sqrt{144} = 12$ cm
- Perímetro: $12 \text{ cm} \times 4 = 48$ cm.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**11.(E)** Las únicas cifras que podemos utilizar para formar los números con las condiciones que plantea Comenúmeros para comerlos son: 1; 3; 5 y 7.
Los números que cumplen con las condiciones son los siguientes:
117; 135; 153; 171; 315; 333; 351; 513; 531 y 711.

**12.(C)** A la distancia que hay que recorrer en el maratón se resta las diferentes distancias recorridas por Ana.

Calculamos:
- Un sexto de 42 km son 7 km
- Le quedan por recorrer: $42 - (8 + 7) = 27$ km
- Un tercio de 27 km son 9 km
- En total ha recorrido: $7 + 8 + 9 + 10 = 34$ km
- Le faltan por recorrer $42 - 34 = 8$ km

En este problema los datos sobre tiempos no son necesarios para su resolución.

**13.(A)** La longitud del lado del cuadrado que tiene sus vértices en los centros de las circunferencias es igual a la longitud de dos radios o un diámetro. Como dos diámetros miden 4 cm, la longitud de un diámetro es 2 cm; por tanto, el lado del cuadrado planteado mide 2 cm y el perímetro del cuadrado 8 cm ($2 \text{ cm} \times 4$).

**14.(D)** Problema típico que se resuelve empezando por el final.

Primero, buscamos el cociente de la división 1350 entre 30 que es 45; después, sumamos 30 al cociente anterior ($45 + 30 = 75$), obtenemos 75 que corresponde al cociente exacto de la división 1350 entre el divisor que buscamos; por último, dividimos 1350 entre 75 y obtenemos 18 que es el divisor que buscamos cuyas cifras suman 9.

**15.(C)** Las posiciones de las tres cartas son: izquierda, central y derecha.

- Como la carta de **espadas** se encuentra entre el rey y la copa, ocupa la posición central.
- La carta de **oros** que está a la derecha del caballo solo puede ocupar la posición derecha.
- La carta de **copas** tiene que estar en la posición izquierda.
- El **caballo** que está a la izquierda del oro ocupa la posición central. Es el **caballo de espadas**
- El **rey** ocupa la posición derecha. Es **el rey de oros**
- La **sota** ocupa la posición izquierda. Es la **sota de copas**

Solución: SOTA COPAS – CABALLO ESPADAS – REY OROS.

**16.(D)** Al dividir el hexágono regular en triángulos equiláteros iguales se obtienen 24 triángulos que numeramos del 1 al 24. El área que le corresponde a cada triángulo equilátero es igual a 0,5 $cm^2$ que se obtiene al dividir el área del hexágono entre 24 (2 $cm^2 \div 24 = 0{,}5$ $cm^2$).
A continuación, buscamos los números primos comprendidos entre 1 y 24, son los siguientes: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17 y 19; en total nueve números primos. El área que tenemos que colorear es: $9 \times 0{,}5$ $cm^2 = 4{,}5$ $cm^2$.

**17.(C)** Primero, calculamos el tiempo transcurrido desde que Diego empezó a ver la película y cuando acabó. Después, restamos los quince minutos que empleó para merendar, y por último expresamos el resultado obtenido en minutos.
18 h 5 min – 16 h 40 min = 1 h 25 min.
1 h 25 min – 15 min = 1 h 10 min
1 h 10 min = 60 min + 10 min = 70 min.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**18.(A)** Para calcular el área del rectángulo necesitamos conocer sus dimensiones (largo y ancho) y para ello, es preciso saber cuáles son las longitudes del lado de cada uno de los tres cuadrados.

- Como la altura del rectángulo es 12cm, la longitud del lado del cuadrado grande es 12 cm.
- Como la base del rectángulo mide 22 cm, la longitud del lado de cuadrado mediano es 10 cm que se obtienen al restar 12 cm a 22 cm.
- La longitud del lado del cuadrado pequeño es 2 cm que se obtiene al restar 10 cm a 12 cm.
- La longitud del lado del cuadrado pequeño coincide con la longitud de la altura del rectángulo gris y la longitud de la base del rectángulo gris es 8 cm que se obtiene de restar 2 cm a 10 cm.

El área del rectángulo gris es $8 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$.

**19.(A)** El alfabeto español contiene 5 vocales y 22 consonantes. En la siguiente tabla se indica el orden de cada letra en el alfabeto, separando vocales de consonantes

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Voc. | A | E | I | O | U | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Con | B | C | D | F | G | H | J | K | L | M | N | Ñ | P | Q | R | S | T | V | W | X | Y | Z |

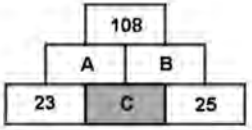
Para conocer las letras que tienen que combinar con 2022 hallamos el resto de la división 2022 entre cinco que nos indica el orden que corresponde a las vocales, y el resto de la división de 2022 entre 22, el de las consonantes.

$2022 \div 5 = 400$ y resto 2. El 2 corresponde a la letra E
$2022 \div 22 = 91$ y resto 20. El 20 corresponde a la letra X
La combinación es: EX2022

**20.(E)** Sustituimos las letras ***L*** y ***S*** por la operación inventada y operamos.
$6L24 = (6 + 24) \times 6 = 180$
$24S6 = (24 - 6) \div 6 = 3$
$180 + 3 = 183$.

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)**

**21.(A)** Para facilitar la comprensión nombramos las casillas vacías con las letras A, B y C




Teniendo en cuenta que el número de cada casilla es igual a la suma de las dos casillas que están debajo podemos argumentar de esta forma:

- La casilla superior es igual a la suma de las dos casillas inferiores: $108 = A + B$
- La casilla A es igual a la suma de las dos casillas inferiores: $23 + C$
- La casilla B es igual a la suma de las dos casillas inferiores: $25 + C$
- Sustituyendo A y B en la primera igualdad tenemos:

$108 = 23 + C + 25 + C \Rightarrow 108 = 48 + 2C \Rightarrow 60 = 2C \Rightarrow C = 30.$

**22.(B)** Iniciamos la resolución partiendo del mínimo número de monedas que pueden haber en cada bolsillo, en el derecho 2 monedas, y en el izquierdo 4; añadiendo una moneda a cada uno de los bolsillos de forma sistemática, cuando en el bolsillo derecho tenga 5 monedas y en izquierdo 7 se cumple la condición del problema; es decir, si paso una moneda del bolsillo derecho al izquierdo habrá doble número de monedas en el bolsillo izquierdo que en el derecho; de esta forma, en el bolsillo derecho quedan 4 monedas y en el izquierdo 8. En la tabla queda gráficamente reflejado.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| B izquierdo | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| B derecho | 2 | 3 | 4 | 5 | |

Esteban tiene $7 + 5 = 12$ monedas.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**23.(A)** Pasando una bola negra de la bolsa izquierda a la bolsa derecha se cumple la condición del problema. Las probabilidades quedarian así: La probabilidad de sacar una bola negra en la primera bolsa es $\frac{4}{7}$ y la probabilidad de sacar una bola blanca en la segunda bolsa también es $\frac{4}{7}$.

**24.(C)** Al final, la niña Centésima tiene 36 castañas (22 + 14) y don Retorcido también 36 castañas, que es el doble de las que le quedan a Comenúmeros. A Comenúmeros le quedan 18 castañas. El número de castañas que encontró Comenúmeros es igual al número de castañas que le quedan (18) más las que entregó a la niña Centésima (22) en total 40 castañas.

**25.(E)** Para facilitar la argumentación del problema y para las igualdades utilizaremos las letras iniciales del nombre de las aves que se mencionan en el enunciado.

Como un cuervo pesa lo mismo que una paloma y una urraca ($C = P + U$), una paloma pesa lo mismo que un cuervo menos el peso de una urraca ($P = C - U$).

Como dos cuervos pesan lo mismo que tres urracas ($2C = 3U$), un cuervo pesa lo mismo que una urraca y media urraca $\left( C = U + \frac{U}{2} \right)$.

Una paloma pesará lo mismo que dos urracas y media urraca, menos el peso de una urraca, lo que significa que una paloma pesa lo mismo que media urraca:

$$\left( P = U + \frac{U}{2} - U \right) \Rightarrow P = \frac{U}{2}.$$

Como dos urracas pesan lo mismo que 8 gorriones, una urraca pesa lo mismo que 4 gorriones, media urraca pesa lo mismo que dos gorriones, por tanto una paloma pesa lo mismo que 2 gorriones: ($P = 2G$) y en consecuencia, tres palomas pesan lo mismo que 6 gorriones: ($P = 6G$).

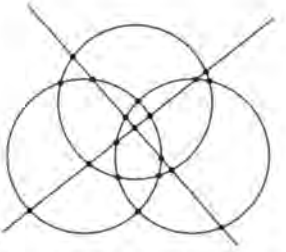
# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 1ª Fase Nivel II

**1. (C)** Vamos a ponernos en lo peor. Sacan dos y no son del mismo color y tampoco lo es el tercero. Cuando saquen el cuarto seguro que tendrán una pareja del mismo color, que se la lleva la primera trilliza. Quedan dos calcetines. Sacan nuevamente (y van cinco) y resulta que es del tercer color, así que tiene que sacar por sexta vez. Ahora hay 4 calcetines, así que seguro que hay dos del mismo color. Se los lleva la segunda trilliza. La tercera trilliza se queda con los otros dos, saca otro (el séptimo) y tiene mala suerte, así que saca el octavo. Como ahora tiene cuatro, seguro que dos son del mismo color y se va tan contenta.
¡Atención! Como solo sacan 8 calcetines y hay 12 de cada color, seguro que ningún color se gasta.

**2. (D)** La hormiga y el cerdo son los más separados entre sí a 10 metros, así que estarán en los extremos. La rana es la que más cerca está de la hormiga a 2 metros.
A 3 metros de la rana se encuentra el pato, que será el animal que se encuentra en medio.

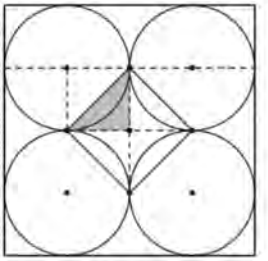
**3. (D)** Al ser circunferencias del mismo radio, como máximo, dos circunferencias se intersecan en 2 puntos distintos. Por otro lado, dos rectas se intersecan en, a lo sumo, un punto; y una recta y una circunferencia en 2 puntos máximo.



Por lo tanto, para obtener el máximo número de puntos de intersección, habría que colocar las circunferencias de manera que todas se corten entre ellas en 2 puntos distintos, que ambas rectas corten a estas tres circunferencias y que las rectas no sean paralelas, de forma que entre ellas dos se corten. Así, tenemos $2 \cdot 3+2 \cdot 3 \cdot 2+1=19$ puntos de intersección.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**4. (D)** El cuadrado interior lo podemos dividir en 4 triángulos rectángulos isósceles iguales. Los lados iguales de estos triángulos coinciden con el radio de las circunferencias, que valen 1 cm.



El área de cada triángulo es $\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$, así que el área del rectángulo es $4\cdot\frac{1}{2}=2\ \text{m}^2$

**5. (A)** Llamemos $a$, $b$, $c$ y $d$ a los números que faltan.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | $a$ | $b$ | $c$ | d | 2022 |

Entonces: $b=9+a$

$c=a+b=a+9+a=2a+9$

$d=b+c=9+a+2a+9=3a+18$

$2022=c+d=2a+9+3a+18=5a+27.$

Así pues, $5a=2022-27=1995$ y, por tanto, $a=1995/5=399$.

Calculamos $c=2a+9=2\cdot 399+9=798+9=807$.

**6. (D)** En primer lugar vemos el valor de cada una de las letras:
La $P$ vale 2, la $R$ es 4, la $I$ es 1, la $M$ equivale a 3, la $A$ es 1, la $V$ vale 3, la $E$ es 1.
Sustituimos las letras por los números correspondientes:
$(P-R+I)\cdot(M-A+V)\cdot(E-R+A)=(2-4+1)\cdot(3-1+3)\cdot(1-4+1)=$
$=(-1)\cdot 5\cdot(-2)=10.$

**7. (C)** Como el área del cuadrado es Lado$^2$ = 36 m$^2$, tenemos que el lado $L$ del cuadrado mide $L=\sqrt{36}=6$ m. Así, la altura del rectángulo es 3 m. Como el área del rectángulo es Área = Base × Altura, tenemos que la base del rectángulo mide $b=\frac{36}{3}=12$ m. y, como la parte de la base del rectángulo que coincide con la base del cuadrado mide 3 m, la base del triángulo ha de medir $12-3=9$ m.

Así, despejando la altura, $h$, de la fórmula del área del triángulo $A=\frac{Base\cdot Altura}{2}$, nos queda que $h=\frac{36\cdot 2}{9}=8$ m.

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**8. (D)** Para que un número sea divisible entre 4 tiene que ser par y el número formado por sus dos últimas cifras debe ser múltiplo de 4.
Si acaba en 2, como 12 y 32 son múltiplos de 4 y 42 no lo es, obtenemos cuatro números que son 3412, 4312, 1234, 2134
Si acaba en 4, la cifra de las decenas sólo puede ser 2, así que obtenemos dos posibles números, el 1324 y el 3124.
Luego tenemos 6 posibilidades en total.

**9. (E)** Realizando la división llegamos a que $1234 : 9999 = 0,\overline{1234}$. Para obtener la suma de los 100 primeros números decimales, dividimos 100 entre 4, ya que nuestros números decimales van de 4 en 4. Dado que $100 = 25 \cdot 4$ tenemos 25 grupos de cuatro números. Como cada grupo de suma $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, tenemos que la suma de los 100 primeros decimales es $25 \cdot 10 = 250$.

**10.(C)** El décimo sobrino recibe la décima parte, así que todavía quedan 9/10 de las piedras.

Al noveno le corresponde $\frac{1}{9}$ de $\frac{1}{9} = \frac{1}{10}$ y todavía quedan 8/10 de las piedras.

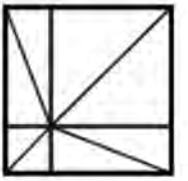
Al octavo le corresponde $\frac{1}{8}$ de $\frac{8}{10} = \frac{1}{10}$, todavía quedan $\frac{7}{10}$ de las piedras.

Siguiendo el mismo proceso, vemos que todos los sobrinos reciben la misma proporción de piedras, la décima parte. Como el quinto recibe 5 piedras, el primero también recibe 5 piedras.

**11.(B)** Si llamamos $A$ al número de zanahorias que tiene Angi, $B$ al número de zanahorias que tiene Buni y $C$ al número de zanahorias que tiene Crasti, deducimos de las zanahorias que tiene Buni que $A - 10 = C - 2$, despejando $A$ queda: $A = C + 8$. Es decir, $A$ y $C$ son números que distan 8 entre sí, como las parejas del 1 y el 9, el 2 y el 10, el 3 y el 11, … Además, $A + C = 18$, por lo que, necesariamente, Angi tiene que tener 13 zanahorias y Crasti 5 zanahorias. Entonces, Buni tiene 3 zanahorias, y entre los tres tienen $13 + 3 + 5 = 21$ zanahorias.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**12.(A)** Todos los triángulos tienen la misma base, que coincide con el lado del cuadrado Fíjate que las alturas de los triángulos opuestos suman lo mismo (el lado del cuadrado) y, por tanto, las áreas de los triángulos opuestos deben sumar lo mismo $\frac{L\cdot a_1}{2}+\frac{L\cdot a_2}{2}=\frac{L\cdot(a_1+a_2)}{2}=\frac{L\cdot L}{2}$, la mitad del área del cuadrado.



Si llamamos $A$ al área buscada, debe ser $84 + 32 = 90 + A$, es decir, $A = 116 - 90 = 26$ cm$^2$.

También puedes trazar los segmentos de la figura y observar que el cuadrado se divide en cuatro rectángulos divididos por su diagonal y observar de este modo que la suma de las áreas de los triángulos opuestos debe ser la misma, la mitad del área del cuadrado.

**13.(B)** Las únicas posibles combinaciones de I, V, X que corresponden a números romanos son:

| **Empezando con X:** | **Empezando con V:** | **Empezando con I:** |
|---|---|---|
| XXX | VII | III |
| XXI | | |
| XIX | | |
| XXV | | |
| XII | | |
| XVI | | |
| XIV | | |

**14.(B)** Comencemos factorizando el número 594, y obtenemos que $594 = 2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot11\cdot1$. Ponemos el 1 ya que podría haber un hijo de un año.

En primer lugar, nos dice que Luisillo tiene el doble de años que Pedrín, observando los factores vemos que Luisillo tendrá 2 años y Pedrín 1.

Después nos dice que Alba tiene el triple de edad que Bea, luego Alba tendrá 9 años y Bea 3.

Nos damos cuenta que queda un 11, por lo tanto Don Retorcido tendrá un quinto hijo o hija que tiene 11 años.

Sumando las edades tenemos que $2 + 1 + 9 + 3 + 11 = 26$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**15.(A)**

| 1 | ≈ | ≈ | ¿? | ≈ | 8 | ≈ | ≈ | ≈ | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Comenzamos deduciendo el valor de la segunda posición: no puede ser una o dos unidades menor al anterior porque el anterior es 1, entonces nos quedaría 0 o -1, y los números que hemos escrito van del 1 al 10, por lo tanto, sólo puede ser 3 unidades mayor que el anterior, es decir, el 4.

Pasamos ahora a deducir el número de la novena posición: por un razonamiento parecido al anterior, en este caso el 10, que es el valor de la última posición, no puede ser una o dos unidades menor al anterior, porque entonces el número anterior sería 11 o 12, estos números no están entre 1 y 10. Así que la única posibilidad que queda es que el 10 sea un número 3 unidades mayor que el anterior, con lo que el número de la novena posición es 7.

Con lo que tendríamos nuestra cinta de esta manera:

| 1 | 4 | ≈ | ¿? | ≈ | 8 | ≈ | ≈ | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Continuamos deduciendo el número de la octava posición. Según el criterio utilizado, este podría ser un 4, un 8 o un 9. Como el 4 y el 8 ya los tenemos colocados, únicamente puede ser el valor 9.

Analizando ahora el número de la séptima posición, si lo comparamos con el número anterior, que es el 8, nos sale que podría ser el número 11, 6 o 7. Dado que 11 no está entre 1 y 10 y 7 ya está colocado, únicamente puede ser el número 6 (también se puede deducir este número en función del 9 que es el valor de la posición siguiente).

Pasamos ahora a deducir el número de la quinta posición. Comparando con el 8 de la derecha, en esta posición sólo pueden ir el 5, 9 o 10. Como los demás ya los tenemos situados, solamente puede ser el número 5.

Ya tenemos la cinta de la siguiente forma:

| 1 | 4 | ≈ | ¿? | 5 | 8 | 6 | 9 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

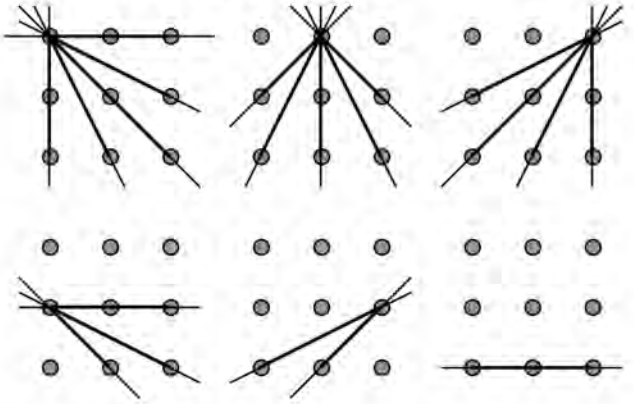
Ahora pasamos a calcular el valor que nos piden. Fijándonos en el 5 de la derecha este sólo puede ser los números 2, 6 o 7. Como el 6 y el 7 ya están colocados únicamente puede ser el número 2.

Así, la colocación definitiva de los números en la cinta queda:

| 1 | 4 | 3 | 2 | 5 | 8 | 6 | 9 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

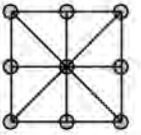
**16.(E)** Si trazamos todos los caminos, obtenemos 20.



También se puede calcular cuántas rectas hay hallando el número de parejas que se pueden hacer con nueve puntos y contando solo una de las tres parejas que están alineadas.

Hay ocho rectas que pasan por tres puntos, luego hay que quitar $8 \times 2 = 16$,

$$C_{9,2} - 16 = \frac{9 \times 8}{2} - 16 = 36 - 16 = 20$$



**17.(C)** Como la descomposición en factores primos de 18 es $18 = 2 \cdot 3^2$, las multiplicaciones de tres cifras que dan como resultado 18 son las posibles agrupaciones de tres de estos factores, es decir, $9 \cdot 2 \cdot 1$, $6 \cdot 3 \cdot 1$ y $3 \cdot 3 \cdot 2$.

Como buscamos un número de tres cifras donde su producto sea de la forma anterior, debemos descartar la multiplicación $18 \cdot 1 \cdot 1$, puesto que el número 18 consta de dos cifras.

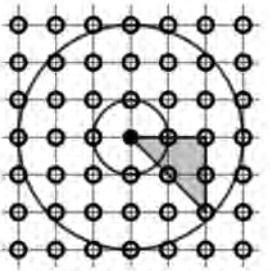
Así, los números de tres cifras que cumplen lo solicitado en el problema son:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 921 | 912 | 192 | 129 | 291 | 219 |
| 631 | 613 | 361 | 316 | 136 | 163 |
| 332 | 323 | 233 | | | |

En total, son 15 números distintos.

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**18.(E)** Los puntos deben estar fuera del círculo con centro el punto negro y radio 1 y dentro del círculo con mismo centro y radio 3. Si lo haces a mano alzada te puede quedar la duda de los que pasa con los puntos que quedan más cerca de la circunferencia de radio 3, pero aplicando el Teorema de Pitágoras puedes comprobar que esos puntos están a distancia $\sqrt{8}$ que es menor que 3. Así pues, en total hay 20 puntos que están a más de 1 cm y menos de 3 cm del punto negro.

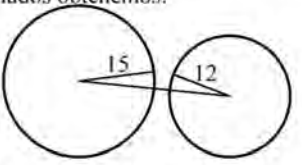


**19.(E)** Para poder formar un triángulo con tres segmentos, es necesario que la suma de las longitudes de dos de ellos sea mayor que la longitud del tercero.
La suma de los lados conocidos es 12 + 15 = 27. Si descomponemos los perímetros propuestos en las soluciones en suma de los lados obtenemos:

**35 = 8 + 27;** **42 = 15 + 27;**

**45 = 18 + 27;** **50 = 23 + 27;**

**55 = 28 + 27.**



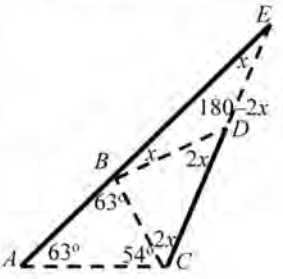

Vemos que en el caso del 55 el lado desconocido tendría que medir más que la suma de los dos conocidos, lo cual no puede ser.

**20.(D)** Llamemos $x$ al ángulo que buscamos. Fíjate que los triángulos *ABC*, *BCD* y *BDE* son isósceles.
En el triángulo *ABC*, el ángulo *B* mide 63 y el ángulo *C* mide 54º (180 – 63 – 63).

En el triángulo *BDE* el ángulo desigual mide $180 - 2x$, y, por tanto, en el triángulo *BCD* los ángulos *D* y *C* miden $2x$.

Ahora nos fijamos en el triángulo grande, y sabiendo que la suma de loa ángulos interiores mide 180º tenemos que:
$63 + (54 + 2x) + x = 180$ y, por tanto, $3x = 63$.

Así pues, $x = 21º$.



## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**21.(E)** Observa que podemos escribir todos los números dados como algo multiplicado por $2022^{2021}$:

$S = 2021 \cdot 2022^{2021}$ $\quad$ $A = 2022 \cdot 2022^{2021}$

$C = 1 \cdot 2022^{2021}$ $\quad$ $O = 2 \cdot 2022^{2021}$

Así pues, al tener todos el factor $2022^{2021}$, para ordenarlos sólo necesitamos fijarnos en el término que multiplica a $2022^{2021}$.

Como $1 < 2 < 2021 < 2022$, entonces $C < O < S < A$.

**22.(A)** Planteamos la ecuación: $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = \frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}x = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20} \Rightarrow x = \frac{3}{40}$

También pues hacer la cuenta a la inversa:

$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$ $\quad$ $\frac{1}{20} : \frac{2}{3} = \frac{3}{40}$

**23.(C)** Como Sara tiene 84 setas, vamos a llamar $x$ al número de setas de Carmen e $y$ al número de setas de Clara.

De la frase "Si Carmen me diera un tercio de sus setas,yo tendría el doble que ella" obtenemos la siguiente ecuación:

$$84 + \frac{1}{3}x = 2\left(x - \frac{1}{3}x\right) \Rightarrow 84 + \frac{1}{3}x = 2 \cdot \frac{2}{3}x \Rightarrow 84 = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x = \frac{3}{3}x \Rightarrow x = 84$$

Si escribimos como ecuación la frase "Si Clara me diera un cuarto de sus setas, yo tendría el triple que ella" y si la resolvemos nos queda:

$$84 + \frac{1}{4}y = 3\left(y - \frac{1}{4}y\right) \Rightarrow 84 + \frac{1}{4}y = 3 \cdot \frac{3}{4}y \Rightarrow 84 = \frac{9}{4}y - \frac{1}{4}y = \frac{8}{4}y = 2y \Rightarrow y = 42$$

Así, las setas que tienen Carmen y Clara son 84 + 42 = 126.

**24.(E)** Cada vez que hacemos una nueva figura, añadimos un punto blanco (en medio) y cuatro puntos negros (1 en cada borde), en total 5 puntos.

Como la primera figura tiene 9 puntos, en la décima figura habremos añadido 45 puntos (9 veces 5 puntos). Así pues, la décima figura tendrá 54 puntos.

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**25.(A)** Nuestro objetivo es encontrar un número de cuatro cifras, *abcd*, de manera que $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)=27$

Para saber cuántas multiplicaciones de cuatro números dan como resultado 27, primero debemos descomponer 27 como producto de números primos. Tenemos que $27=3^3$. Así, las únicas multiplicaciones de cuatro números que dan 27 son:

$3^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, $3^2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$.

Observemos que cambiando de orden los factores obtengo distintos números de cuatro cifras. (*abcd*)

Si tenemos en cuenta el orden de los factores para estas posibles multiplicaciones, que $a \neq 0 \Rightarrow a+1 \neq 1$, es decir, el primer factor no puede ser 1, y que ningún factor puede ser $3^3$, pues $3^3 - 1 = 27 - 1 = 26$ tiene dos cifras y, por tanto, no puede ser una de las cifras. Las cifras pueden ser: 9, 3, 1, 1 ó 3, 3, 3, 1.

En el primer caso obtenemos 6 números: 9311, 9131, 9113, 3911, 3191 y 3119 y en el segundo cado obtenemos 3 números: 3331, 3313 y 3133.

Luego, vemos que hay 9 posibilidades en total.

XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

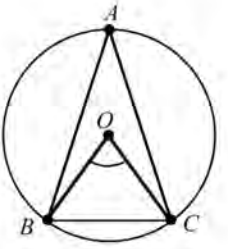
# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 1ª Fase Nivel III

**1. (B)** Para que sean múltiplos de 4, las dos últimas cifras de esos números tienen que determinar un número de dos cifras que es múltiplo de 4. En concreto son estas las terminaciones: 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 y 64, en total 8 casos.
En cada uno de estos casos para la primera cifra hay 4 posibilidades, para la segunda cifra quedan 3 posibilidades, para la tercera 2 posibilidades y para la cuarta 1 posibilidad.
En total hay $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 192$

**2. (A)** Los tres ángulos del triángulo suman 180º y como $\hat{B} = 2\hat{A}$, $\hat{C} = 2\hat{A}$ entonces $5\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$ y el ángulo central correspondiente $\hat{O} = 2\hat{A} = 72^\circ = \dfrac{360^\circ}{5}$

Por lo tanto se trata de un pentágono que tiene 5 lados.




**3. (E)** La opción A no es siempre cierta. $2 + 8 < 6 + 7$
La opción B no es siempre cierta. $5 + 6 < 4 + 8$
La opción C no es siempre cierta. $7 + 1 < 5 + 6$
La opción D no es siempre cierta. Si $7 + 1 < 5 + 6$, $7 + 5 \not< 1 + 6$ y $7 + 6 \not< 1 + 5$
La opción E es cierta porque si $b$ no es la menor de todos sería $c$ o $d$ mayores que $a$.

**4. (C)** Si $m = 3k$ y $n = 5q$ entonces $m + n$ no tiene por que ser múltiplo de 15. Por ejemplo $9 + 5 = 14$ no es múltiplo de 15.

$$\left.\begin{matrix} 5m = 15k \\ 3n = 15q \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5m + 3n = 15(k + q)$$ luego es múltiplo de 15.

$m \cdot n = 3k \cdot 5q = 15kq$ múltiplo de 15.
$m^2 n = 9k \cdot 5q = 45kq$ que es múltiplo de 15.
$m^n$ no tiene por que ser múltiplo de 15, pues $3^5 = 243$ no es múltiplo de 15.
Hay tres casos seguros.

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**5. (A)** $\begin{cases} E_1 : a+b=27 \\ E_2 : b+c=29 \\ E_3 : c+a=44 \end{cases}$ Si tomamos $2E_1$ y $E_2 + E_3$ se obtiene

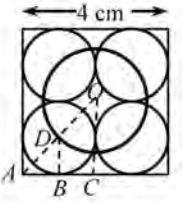
$$\begin{cases} 2E_1 : 2a+2b=54 \\ E_2+E_3 : a+b+2c=73 \end{cases} \Rightarrow \{E_2+E_3-2E_1 : 2c-a-b=73-54=19$$

**6. (A)** Nos quedamos con el triángulo $ACO$ en el que tenemos

$AC = 2 = OC$; $AO = \sqrt{AC^2+OC^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$AD = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow DO = \sqrt{2}$ que es el radio de la circunferencia grande.

$AD = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow DO = \sqrt{2}$




**7. (B)** $x^2y+xy^2+x+y=90 \Rightarrow xy(x+y)+(x+y)=(x+y)(xy+1)=(x+y)9=90 \Rightarrow x+y=10$

$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 100 \Rightarrow x^2+y^2 = 10^2-2\cdot 8 = 84$

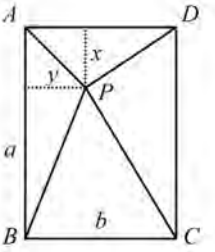
**8. (C)** Hay varias posibilidades.

$S_{APD} = \frac{1}{2}bx$; $S_{APB} = \frac{1}{2}ay$; $S_{CPD} = \frac{1}{2}a(b-y) = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ay$

$S_{BPC} = \frac{1}{2}b(a-x) = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bx$

Pero la suma de las áreas de dos triángulos opuestos es la mitad del área del rectángulo.

$S_{APD} + S_{BPC} = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}ab$




Luego el área del rectángulo será máxima cuando la suma de dos de los tres áreas del enunciado sea máxima, es decir, 7 + 16 = 23.

Por lo tanto el área máxima del rectángulo será 2 × 23 = 46.

**9. (C)** $n! = (3!)\cdot(5!)\cdot(7!) = 3\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot (2\cdot 4)\cdot (3\cdot 3)\cdot (5\cdot 2) = 10!$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**10.(D)** $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$.

Los únicos números que podremos utilizar en los trios son: 1, 2, 3 y 337.

a) $1 \cdot 1 \cdot 2022 = 2022$ b) $1 \cdot 2 \cdot 1011 = 2022$ c) $1 \cdot 3 \cdot 674 = 2022$

d) $1 \cdot 6 \cdot 337 = 2022$ e) $2 \cdot 3 \cdot 337 = 2022$

Cinco casos.

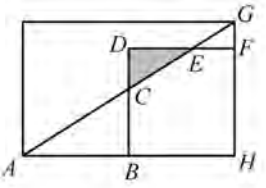
$$AC = \frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{89}}{2},\ BC = \frac{1}{2}HG = \frac{5}{2},\ CD = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

**11.(E)** $AH = 8,\ HG = 5 \Rightarrow AG = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89}$

Los triángulos $ABC$ y $CDE$ son semejantes, por lo tanto

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{4}{2{,}5} = \frac{DE}{1{,}5} \Rightarrow DE = 2{,}4$$

$$S_{CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}4 = 1{,}8 = \frac{9}{5}$$



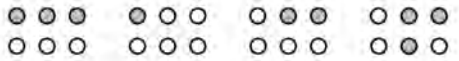

**12.(C)**

| | | |
|---|---|---|
| $189 \to$ 6 casos | $369 \to$ 6 casos | $567 \to$ 6 casos |
| $288 \to$ 3 casos | $477 \to$ 3 casos | $558 \to$ 3 casos |
| $279 \to$ 6 casos | $468 \to$ 6 casos | $666 \to$ 1 caso |
| $378 \to$ 6 casos | $459 \to$ 6 casos | $909 \to$ 2 casos |

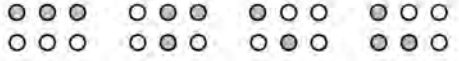
En total hay 54 casos

**13.(B)** Si analizamos todas las posibilidades veremos que en todos los casos quedan 3 grises y 3 blancos. Si por la cara blanca está el número $x$ por la cara gris estará el número $x + 10$ y la suma de los seis será $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 3 \cdot 10 = 51$

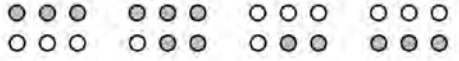
Primer paso 2 de la fila de arriba



Primer paso una de cada fila



Primer paso 2 de la fila de abajo



**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**14.(D)** Si cogemos un número de tres cifras, sus cifras sumarán como mucho 27 (9+9+9), y al multiplicar ese producto por cuatro no vamos a tener el número de tres cifras del principio. Lo mismo ocurrirá con números de más cifras, así que los números que estamos buscando son números de dos cifras.

Si $a$ es la cifra de las decenas y $b$ es la cifra de las unidades, el número es $10a + b$, y el cuádruple de la suma de sus cifras es $4(a + b)$, asi que la relación que tienen que cumplir $a$ y $b$ es:

$4(a + b) = 10a + b \Rightarrow 4a + 4b = 10a + b \Rightarrow 3b = 6a \Rightarrow b = 2a$

Buscamos, por tanto, cuántos enteros positivos podemos construir en los que la cifra de las unidades sea el doble que la de las decenas. Hay exactamente cuatro de estos números: 12, 24, 36 y 48.

**15.(E)** Si solo hubiera una ronda de tres tiradas, y no se volviera a empezar, la probabilidad de que ganara Comenúmeros sería $\frac{1}{8}$. Si permitimos que haya dos rondas de tres tiradas, la probabilidad sería en este caso $\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2$. En el caso de $n$ rondas de tres tiradas, la probabilidad de que ganara Comenúmeros sería $S_n=\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{8}\right)^n$, que es la suma de una progresión geométrica, y vale

$$S_n=\frac{a_1-a_n\cdot r}{1-r}\cdot\ S_n=\frac{\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{8}\right)^n\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{8^n}\right)}{\frac{7}{8}}=\frac{1-\frac{1}{8^n}}{7}$$

Si se permite que haya muchas rondas, eso quiere decir que $n$ se va haciendo cada vez mayor, pero entonces $\frac{1}{8^n}$ se va haciendo cada vez más parecido a cero. Como el juego no acaba nunca, concluimos que la probabilidad de que gane Comenúmeros es $\frac{1}{7}$.

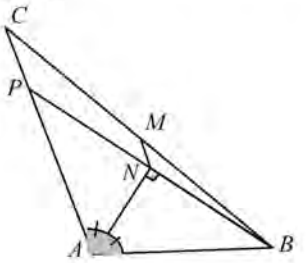
## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)

**16.(A)** Si llamamos $P$ al punto en el que la prolongación del segmento $BN$ corta con el lado $AC$, vemos que los triángulos $ABN$ y $ANP$ son dos triángulos iguales, porque comparten un lado y todos los ángulos.

Así pues $AP = AB = 15$, y por lo tanto $PC = AC - AP = 3$.

Por otra parte, los triángulos $BCP$ y $BMN$ son semejantes, ya que $M$ es por construcción el punto medio de $BC$, y acabamos de ver que $N$ también es el punto medio de $BP$. Así pues, aplicando la semejanza de triángulos, tenemos que:

$$\frac{CP}{MN} = \frac{CB}{MB} = 2 \quad \text{y por tanto} \quad MN = \frac{CP}{2} = \frac{3}{2}$$




**17.(B)** $2^{2022} \cdot 5^{2020} = 2^{2020+2} \cdot 5^{2020} = 2^2 \cdot 2^{2020} \cdot 5^{2020} = 4 \cdot 10^{2020}$

Este es el número que estamos buscando, que será un número que comienza por un "cuatro" seguido de dos mil veinte "ceros", así pues, sus cifras sumarán 4.

**18.(B)** El menor valor posible de $n$ se obtendrá cuando no haya ninguna persona sentada al lado de otra, y cuando no haya más de dos sitios libres juntos. Esto ocurre cuando hay precisamente una de cada tres sillas ocupadas, por tanto, el menor valor posible de $n$ es 10.

**19.(E)** En total tengo 10 calcetines. La probabilidad de que escoja los cuatro calcetines rojos es: $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{210}$

Por otra parte, la probabilidad de que escoja los cuatro calcetines azules es:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{210}$$

La otra forma de obtener dos parejas de dos calcetines del mismo color es sacar dos rojos y dos azules. En este caso y teniendo en cuenta las combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos, la probabilidad es:

$$\binom{4}{2} \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = 6 \cdot \frac{15}{210} = \frac{90}{210}$$

Si sumamos, nos queda el total,

$$\frac{1}{210} + \frac{15}{210} + \frac{90}{210} = \frac{106}{210} = \frac{53}{105}$$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**20.(B)** Utilizando las fórmulas de Cardano, sabemos que la ecuación se puede escribir como $(x-n)(x-m)=x^2-(m+n)x+mn$, y si igualamos términos con la ecuación de partida obtenemos el siguiente sistema: $\begin{cases} m=-m-n \\ 2m=mn \end{cases}$

Puesto que el enunciado nos dice que $m \neq 0$, de la segunda ecuación obtenemos $n=2$, y entonces de la primera llegamos a que $m=-1$, por tanto $m$ y $n$ suman 1.

**21.(C)** Los ángulos interiores de un polígono de $n$ lados suman $180^\circ(n-2)$.
Concretamente, en un hexágono suman 720º. Si sus valores forman una progresión aritmética, tenemos que la suma se puede expresar como:
$a+(a+k)+(a+2k)+(a+3k)+(a+4k)+(a+5k)=(2a+5k)\cdot 3$
Sabemos, por tanto que $(2a+5k)=\dfrac{720^\circ}{3}=240^\circ$. Pero $(2a+5k)$ es precisamente la suma del segundo y el tercer ángulos $(a+2k)+(a+3k)=(2a+5k)$.
Por tanto, la suma de dos de los ángulos deber ser 240º.

**22.(B)** Podríamos sacar cuatro bolas de todos los números entre el 5 y el 20, y todas las bolas de los números menores que el 5, y no tendríamos cinco bolas del mismo número. Es decir, podríamos sacar $4\cdot 16+4+3+2+1=74$
Así solo nos quedaría bolas entre el 5 y el 20, y las siguientes que sacásemos, fuera la que fuese, haría que tuviéramos cinco bolas con el mismo número, así que para asegurarnos, debemos sacar 75.

**23.(C)** Veamos cómo se construyen los primeros términos:
$50 \Rightarrow (5^2+0^2)=25 \Rightarrow (2^2+5^2)=29 \Rightarrow (2^2+9^2)=85 \Rightarrow (8^2+5^2)=89$
De momento no hemos encontrado ningún patrón, pero podemos seguir avanzando un poco más. Se comprueba del mismo modo que la sucesión continua como sigue:
$89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89$
Y a partir de aquí se repetirá periódicamente. Es decir, después de los 4 primeros términos, tenemos que se repite un patrón cada 8 términos.
Si queremos saber qué número ocupa la posición 2022, quitando los 4 primeros términos, tenemos 2018, que si lo dividimos entre 8 no da exacto, el cociente es 252 y el resto 2. Por tanto, recorreremos 252 veces el patrón completo, y nos quedaremos en el segundo término del patrón, es decir, 145.

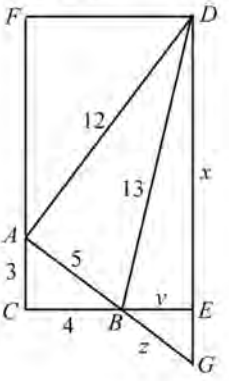
**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**24.(D)** A partir de los datos del enunciado y usando el teorema de Pitágoras, sacamos que $AB = 5$ y $BD = 13$.

Por otro lado, partiendo de la figura del enunciado, prolongamos los segmentos $AC$, $AB$ y $DE$, y trazamos una paralela a $CB$ que pase por $D$, tal como se muestra en la figura de la derecha.

Tenemos así que los triángulos $ABC$ y $ADG$ son semejantes, por tanto:

$$\frac{3}{4} = \frac{5+z}{12} \Rightarrow z = 4$$




También son semejantes los triángulos $ABC$ y $BEG$, por tanto:

$$\frac{4}{5} = \frac{y}{z} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = \frac{16}{5}$$

Para obtener $x$, nos fijamos en el triángulo $ADF$: sus catetos miden $x - 3$ y $4 + y$, y la hipotenusa mide 12, así pues, a partir del teorema de Pitágoras, sacamos que

$$x = \sqrt{16^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \frac{56}{5}$$

Y por lo tanto el área que nos piden es

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{56}{5} = \frac{504}{25}$$

**25.(B)** Fijándonos en los tres primeros sumandos de $A$ vemos que podemos expresarlos como $0{,}9 + 0{,}18 + 0{,}027 = 0{,}9 + 0{,}1 + 0{,}08 + 0{,}02 + 0{,}007 = 1 + 0{,}1 + 0{,}007$

Si hacemos la suma de los seis primeros sumandos se obtiene:

$(1 + 0{,}1 + 0{,}007) + 0{,}0036 + 0{,}00045 + 0{,}000054 = 1{,}111104$

Si continuamos con los siguientes sumandos y por las propiedades de los múltiplos, esto mismo seguirá ocurriendo.

Así que: $A = 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + \ldots = 1{,}11111\ldots = \frac{10}{9}$

Y por lo tanto $9A = 10$.

# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 1ª Fase Nivel IV

**1. (A)** La expresión decimal de $\frac{4}{13} = 0,\widehat{307692}$ . Se trata de un decimal periódico puro, en el que las cifras decimales se repiten cada seis lugares. Como 2022 es múltiplo de seis, la cifra que ocupa el lugar 2022º es la sexta del periodo, es decir, 2.

**2. (C)** Los números anotados en cada una de las caras del dado tetraédrico suman: $6 = 1 + 2 + 3$, $7 = 1 + 2 + 4$, $8 = 1 + 3 + 4$ o $9 = 2 + 3 + 4$. Si al lanzar un dado, la cara oculta es la (234), la suma de los números vistos es $6 + 7 + 8 = 21$.
Si la cara oculta es la (134), la suma es $6 + 7 + 9 = 22$, si es la cara (124), la suma es $6 + 8 + 9 = 23$, y si es la cara (123), la suma es $7 + 8 + 9 = 24$. Las cuatro posibilidades son equiprobables.

| | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| 22 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 23 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 24 | 45 | 46 | 47 | 48 |

La suma que tiene mayor probabilidad de aparecer es 45.

**3. (D)** Los tres divisores de 70! más pequeños que son mayores que 70 son: 72 (36·2), 74 (37·2), y 75 (25·3). La suma de estos tres números es $72 + 74 + 75 = 221$.

**4. (D)** Racionalizando las fracciones que forman el número

$$R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}{6-5} + \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} =$$

$$= 3\sqrt{2} + \sqrt{15} + \sqrt{15} + \sqrt{10} = 1\cdot\sqrt{10} + 2\cdot\sqrt{15} + 3\cdot\sqrt{2}$$

Por tanto, $a = 10$, $b = 15$ y $c = 2$, de modo que $a + b + c = 27$.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

**5. (A)** Sabemos que la suma de los $n$ primeros números naturales viene dada por la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$ cuyo resultado es un número entero, que podemos llamar $k$.

Tenemos entonces que: $n^2+n-2k=0 \Rightarrow n=\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$

Si alguno de los valores propuestos es correcto, debe cumplir que al sustituirlo en $k$ en la expresión $8k + 1$ dé un cuadrado perfecto:

$8\cdot 2016 + 1 = 16\,128 + 1 = 16\,129 = 127^2$.

Los demás valores propuestos no lo cumplen.

**6. (C)** El área de un octógono regular de lado $l$ es $A=\left(2+2\sqrt{2}\right)\cdot l^2$

Esto se deduce fácilmente dividiendo el octógono en ocho triángulos isósceles iguales cuyo ángulo central mide 45° y cuyos lados son $l$, $r$ y $r$, donde $r$ es el radio de la circunferencia circunscrita al octógono. Aplicando el teorema del coseno, encontramos la relación entre $r$ y $l$:

$$l^2=r^2+r^2-2r^2\cos 45^\circ=r^2\left(2-\sqrt{2}\right)\Rightarrow r=\frac{l}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

El área de cada uno de los triángulos isósceles es:

$$A_{triángulo}=\frac{r\cdot r\cdot sen45^\circ}{2}=\frac{l^2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{l^2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}=\frac{l^2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{8}$$

Y el área del octógono es $A_{octógono}=8\cdot\frac{l^2\left(2+2\sqrt{2}\right)}{8}=\left(2+2\sqrt{2}\right)l^2$

Para calcular el área de cada uno de los rombos, al área del octógono le restamos dos veces el área del cuadrado, que es $l^2$, y dividimos por 4:

$$A_{rombo}=\frac{\left(2+2\sqrt{2}\right)\cdot l^2-2\cdot l^2}{4}=\frac{l^2\sqrt{2}}{2}=\frac{36\sqrt{2}}{2}=18\sqrt{2}$$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**7. (C)** Como es una liga de cuatro equipos a doble partido, cada equipo jugó 6 partidos, y en total se jugaron 12 partidos. El equipo, digamos A, para obtener 16 puntos tuvo que ganar 5 partidos y empatar 1. Para obtener 8 puntos el equipo B, tuvo que ganar dos partidos y empatar otros 2. No es posible que ganara 1 y empatara 5, porque, aunque también sumaría 8 puntos, tendría que haber empatado sus dos partidos con A, y eso no es posible, porque A solo empató 1. Por último, el equipo C, para obtener 2 puntos tuvo que perder cuatro partidos y empatar dos. Con esta distribución existen tres posibilidades:

- Primera

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | X | A | A | A |
| B | A | X | B | BD |
| C | A | B | X | CD |
| D | AD | BD | CD | X |

A: 5 victorias, 1 empate, 0 derrotas: 16 puntos
B: 2 victorias, 2 empates, 2 derrotas: 8 puntos
C: 0 victorias, 2 empates, 4 derrotas: 2 puntos
D: 0 victorias, 5 empates, 1 derrota: 5 puntos

En esta posibilidad habría 7 partidos con resultado de victoria/derrota y 5 partidos empatados.

- Segunda

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | X | A | A | A |
| B | A | X | B | B |
| C | A | BC | X | CD |
| D | AD | BD | D | X |

A: 5 victorias, 1 empate, 0 derrotas: 16 puntos
B: 2 victorias, 2 empates, 2 derrotas: 8 puntos
C: 0 victorias, 2 empates, 4 derrotas: 2 puntos
D: 1 victorias, 3 empates, 2 derrotas: 6 puntos

En esta posibilidad habria 8 partidos con resultado de victoria/derrota y 4 partidos empatados.

- Tercera

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| A | X | A | A | A |
| B | A | X | B | B |
| C | AC | BC | X | C |
| D | A | BD | D | X |

A: 5 victorias, 1 empate, 0 derrotas: 16 puntos
B: 2 victorias, 2 empates, 2 derrotas: 8 puntos
C: 0 victorias, 2 empates, 4 derrotas: 2 puntos
D: 2 victorias, 1 empate, 3 derrotas: 7 puntos

En esta posibilidad habria 9 partidos con resultado de victoria/derrota y 3 partidos empatados.

Como el enunciado dice que hubo 5 partidos empatados, los puntos del cuarto equipo fueron 5.

## XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

**8. (E)**

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=2\\ \frac{c}{b}=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=2b\\ c=3b\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot c=6b^2$$ Como $a\cdot c=24$, entonces $b=\pm 2$.

Si $b=2$ entonces $\left.\begin{array}{l}a=4\\ c=6\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot c=24$ y si $b=-2$ entonces $\left.\begin{array}{l}a=-4\\ c=-6\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot c=24$.

En cualquier caso $a\cdot b+b\cdot c=8+12=20$.

**9. (D)** Se trata de la suma de dos progresiones geométricas con razones positivas $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, menores que 1. Entonces

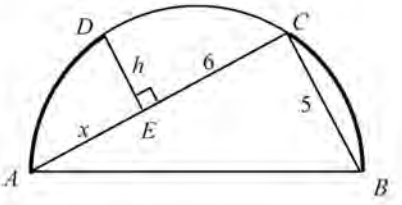
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\ldots=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\cdot 3}$$

**10.(C)** Si observamos los primeros términos de la sucesión, hay 5 que tienen 2 cifras (13, 21, 34, 55 y 89), otros 5 que tienen 3 cifras (144, 233, 377, 610 y 987), pero solo 4 que tienen 4 cifras (1597, 2584, 4181 y 6765).
La primera cifra de los términos que tienen un determinado número de cifras, suponiendo que haya la máxima cantidad de ellos es, por orden, 1, 2, 3, 5 y 8 o también, 1, 2, 3, 6 y 9. En cualquier caso, el número máximo de términos de la sucesión con un determinado número de cifras es 5. Y el número mínimo es 4

**11.(D)** Llamamos $b$ al número de kilogramos de pintura blanca y $n$ al número de kilogramos de pintura negra que hemos puesto inicialmente. Sabemos que $b + n = 12$. También sabemos que el 80% del total es pintura blanca, de modo que $b = 0{,}8\cdot 12 = 9{,}6$ kg.
Si añadimos pintura blanca hasta que el porcentaje sea del 90%, podemos escribir que $9{,}6 + b = 0{,}9\cdot(12 + b) \Rightarrow 0{,}1b = 10{,}8 - 9{,}6 = 1{,}2 \Rightarrow b = 12$
Si hemos añadido otros 12 kg de pintura blanca, el total de pintura gris que hay es 24 kg.

**12.(E)** Si los arcos $AD$ y $BC$ son iguales, $ABCD$ es un trapecio isósceles, de modo que $AD = 5$. Ahora, los triángulos $ABC$ y $CDE$ son semejantes y sus lados son proporcionales. Si llamamos h al segmento DE, se cumple:




$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{6+x}{5}=\dfrac{6}{h}\\ x^2+h^2=25\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{30}{h}-6\\ x^2+h^2=25\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{30}{h}-6\right)^2+h^2=25\Rightarrow\frac{900}{h^2}-\frac{360}{h}+36+h^2=25\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^4+11h^2-360h+900=0$$

Lo descomponemos aplicando Ruffini

| | 1 | 0 | 11 | -360 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 3 | 9 | 60 | -900 |
| | 1 | 3 | 20 | -300 | 0 |

| | 1 | 3 | 20 | -300 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | | 5 | 40 | 300 |
| | 1 | 8 | 60 | 0 |

El polinomio $h^2+8h+60$ no tiene raíces reales.

La solución $h = 5$ conduce a $x = 0$, que carece de sentido. La solución válida es $h = 3$, que conduce a $x = 4$.

**13.(B)** Dada la lista $a$, 8, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, 2, comparando las dos primeras sumas deducimos que a y d son iguales:

$$\left.\begin{array}{l}a+8+b+c=17\\ 8+b+c+d=17\end{array}\right\}\Rightarrow a=d$$

Ahora comparamos la segunda suma con la tercera.

$$\left.\begin{array}{l}8+b+c+d=17\\ b+c+d+e=17\end{array}\right\}\Rightarrow e=8$$

Si ahora nos fijamos en la última suma: $e+f+g+2=17\Rightarrow f+g=7$

Como $d+e+f+g=17\ \Rightarrow\ d+8+7=17\Rightarrow d=2$

Finalmente, como $c+d+e+f=17\Rightarrow c+2+8+f=17\ \Rightarrow c+f=7$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**14.(D)** Calculamos la probabilidad del suceso contrario. Sea A el suceso "no hay dos personas contiguas de pie". El suceso $\bar{A}$ es "Al menos hay dos personas contiguas de pie".

La probabilidad de que una persona esté de pie es que haya obtenido un 5 o un 6 en el dado, por tanto, es $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. La probabilidad de que no esté de pie es $q=\frac{2}{3}$

Hay 5 formas de que haya dos personas contiguas de pie y las otras tres sentadas, 10 formas de que haya tres personas de pie (al estar en circulo siempre habrá dos contiguas de pie) y las otras dos sentadas, 5 formas de que haya cuatro personas de pie (solo pueden ser contiguas) y la quinta sentada y una sola forma de que las cinco personas estén de pie.

$$p(\bar{A})=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^5=$$

$$=\frac{40}{243}+\frac{40}{243}+\frac{10}{243}+\frac{1}{243}=\frac{91}{243}$$

La probabilidad de que no haya dos personas contiguas de pie es:

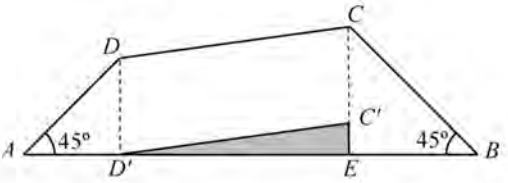
$$p(A)=1-p(\bar{A})=1-\frac{91}{243}=\frac{152}{243}$$

**15.(C)** Con las mismas tres cifras distintas hay 6 números, con dos iguales y la tercera distinta hay 3 (excepto en el caso en el que interviene el 0, que solo hay 2) y con las tres cifras iguales hay 1. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

| 099 | 189 | 279 | 288 | 369 | 378 | 459 | 468 | 477 | 558 | 567 | 666 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 6 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 3 | 6 | 1 | 54 |

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**16.(B)** La proyección de $AD$ sobre $AB$ mide $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ y la proyección de $BC$ sobre $AB$ mide $2\sqrt{2}$.




$D'E$ es la proyección de $DC$ sobre $AB$ y mide $7\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

$D'C'$ y su proyección $D'E$ sobre $AB$, determinan el triángulo rectángulo $D'C'E$ en el que el otro cateto, $C'E$, mide $2\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y como $D'C'$ es la hipotenusa, $DC=D'C'=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{49}{2}}=\sqrt{25}=5$

**17.(A)** Aunque en el problema no se pide ordenar los números, podemos escribirlos con exponente común para poder compararlos:

$99^{101}=99^{100}\cdot 99=\left(99\cdot\sqrt[100]{99}\right)^{100}$ $\qquad 101^{99}=\frac{101^{100}}{101}=\left(\frac{101}{\sqrt[100]{101}}\right)^{100}$

$10^{200}=\left(10^2\right)^{100}=100^{100}$ $\qquad 200^{50}=\left(\sqrt{200}\right)^{100}=\left(10\sqrt{2}\right)^{100}$

$3^{400}=\left(3^4\right)^{100}=81^{100}$

En consecuencia, $\left(10\sqrt{2}\right)^{100}<81^{100}<\left(\frac{101}{\sqrt[100]{101}}\right)^{100}<100^{100}<\left(99\cdot\sqrt[100]{99}\right)^{100}$, es decir,

$200^{50}<3^{400}<101^{99}<10^{200}<99^{101}$

**18.(A)** Conocemos las seis raíces del polinomio, así como su coeficiente principal.
Podemos escribir el polinomio factorizado:

$P(x)=1\cdot(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

$P(2)=1\cdot(2-1)(2+1)(2-3)(2+3)(2-4)(2+4)=1\cdot1\cdot3\cdot(-1)\cdot5\cdot(-2)\cdot6=180$

**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**19.(B)** Las distancias entre dos vértices del octógono regular son el lado del octógono y las tres diagonales. Si el radio de la circunferencia circunscrita mide 1, esas distancias son:

El lado del octógono es: $l=\sqrt{r^2+r^2-2r^2\cos 45^o}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

La diagonal más pequeña vale

$$d_1=\sqrt{l^2+l^2-2l^2\cos 135^o}=\sqrt{2-\sqrt{2}+2-\sqrt{2}-2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2}$$

La diagonal intermedia vale $d_2=\sqrt{D^2-l^2}=\sqrt{4-\left(2-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

La diagonal mayor coincide con el diámetro de la circunferencia y vale $D=2$.

La medida que no corresponde a distancia entre vértices del octógono es $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

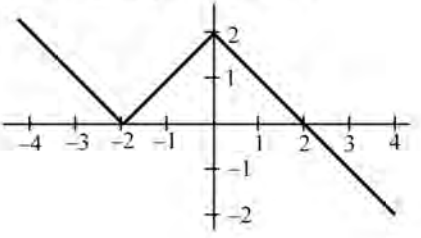
**20.(D)** El polinomio $P(x)=x^4+x^2+1$ se puede escribir como una diferencia de cuadrados, sumando y restando $x^2$:

$$P(x)=x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)$$

**21.(A)** Para calcular $f(f(f(-2)))$, en primer lugar calculamos en la gráfica (leemos en ella) el valor de $f(-2)=0$. Ahora debemos calcular (leer) $f(0)=2$.

Por último, leemos $f(2)=0$.

En conclusión $f(f(f(-2)))=f(f(0))=f(2)=0$.



**XXV Concurso 1ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

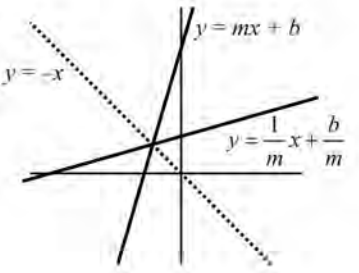
**22.(B)** El quid del problema está en que los términos que nos piden sumar son equidistantes del término que nos dan como dato. Conocemos el término $a_{2022}=25$ y nos piden calcular $a_{2001}+3a_{2019}+3a_{2025}+a_{2043}$ $a_{2022}$ + $a_{2022}$. Pero desde el lugar 2001 hasta el lugar 2022 hay 21 huecos, los mismos que hay desde el lugar 2022 hasta el lugar 2043. Por tanto, $a_{2001}+a_{2043}=2\cdot a_{2022}$

Por otro lado, desde el lugar 2019 hasta el lugar 2022 hay 3 huecos, los mismos que hay desde el lugar 2022 hasta el lugar 2025. Por tanto, $a_{2019}+a_{2025}=2\cdot a_{2022}\Rightarrow 3\cdot a_{2019}+3\cdot a_{2025}=6\cdot a_{2022}$

Así, la suma es $a_{2001}+3a_{2019}+3a_{2025}+a_{2043}=8\cdot a_{2022}=8\cdot 25=200$

**23.(C)** La recta $y = m\cdot x + b$ corta al eje de ordenadas en el punto $(0,b)$ y tiene pendiente $m$. Su simétrica respecto de la bisectriz del segundo cuadrante corta al eje de abscisas en el punto $(-b,0)$ y tiene pendiente $\frac{1}{m}$. Su ecuación es:

$$y=\frac{1}{m}\cdot(x+b)\Rightarrow y=\frac{1}{m}\cdot x+\frac{b}{m}$$



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 2ª Fase Nivel I

**1. (D)** Como dos kilos y cuarto son 2250 gramos y cada salero contiene 25 gramos, podemos llenar $2250 \div 25 = 90$ saleros.

**2. (C)** En el recuadro contamos nueve vocales. Dado que todas las opciones que se ofrecen para sustituir los guiones constan de dos vocales, la frase será cierta si elegimos la opción "**C)** once".

**3. (B)** Si la suma de las cifras de un número es múltiplo de 9, ese número es múltiplo de 9, luego los números que la niña da a Comenúmeros son múltiplos de 13 y de 9. El menor de dichos números es $13 \times 9 = 117$ y el siguiente es mayor que 200. Por tanto Comenúmeros solo recibe un número: el 117.

**4. (E)** La vaca hace un *Mu*: se oye una *u*.
El pato da dos *Cua*: se oyen dos *u*.
La oveja hace $2 \times 3 = 6$ *Beee*: se oyen cero *u*.
El perro da $6 \times 4 = 24$ *Guau*: se oyen $2 \times 24 = 48$ *u*.
En total se oyen $1 + 2 + 0 + 48 = 51$ *u*.

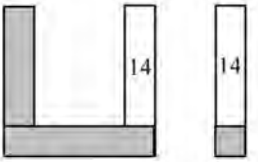
**5. (C)** La 2ª igualdad dice que dos *corazones* es igual a una *estrella* más un *anillo*. Esto permite sustituir, en la 1ª igualdad, los dos *corazones* por una estrella más un *anillo*, con lo que tenemos que dos *estrellas* más un anillo es igual a un *cuadrado* más un *anillo*, lo que implica que dos *estrellas* siempre es igual a un *cuadrado* (si iguales se restan de iguales, los restos son iguales).

**6. (B)** Lo menos que Juan podría pesar el año pasado es 65 kg y lo más que podría perder es 4 kg. En consecuencia, lo menos que puede pesar actualmente es $65 - 4 = 61$ kg.

Por otra parte, lo más que podria pesar el año pasado es 70 kg y lo menos que puede perder es 3 kg, lo que implica que lo más que puede pesar en la actualidad es $70 - 3 = 67$ kg. Por tanto, actualmente su peso debe estar comprendido entre 61 y 67 kg.

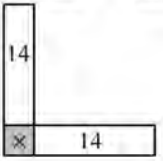
**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)**

**7. (A)** Si a la **U** de Úrsula le quitamos la **L** de Luisa, obtenemos la parte blanca de la **I** de Irene según el siguiente esquema:




$46 - 32 = 14$ cm$^2$

Observando ahora la **L** de Luisa tenemos que está formada por dos rectángulos de 14 cm$^2$ y por un cuadrado; como el área de la **L** es 32 cm$^2$, el área del cuadrado es:
$x = 32 - (14 + 14) = 4$ cm$^2$




Con lo que el área de la **I** de Irene es: $14 + 4 = 18$ cm$^2$.

**8. (B)** Con dos números elegidos entre 2, 3 y 4 no se puede sumar 10. Así que hay tres posibilidades para la segunda columna: 8 + 2, 7 + 3 y 6 + 4. Además el número nuevo (8, 7 o 6) debe estar en la primera fila, pues de lo contrario no se podría sumar 6 con los números de la segunda fila. La única solución es que en esa fila estén el 2 y el 4. Por tanto, el 3 debe ocupar necesariamente la casilla de Comenúmeros.

**9. (A)** Después de los cortes de D'Artagnan hay 9 trozos de papel. Tras coger Aramis 8 de esos trozos y dividir cada uno en 7 partes, habrá $1 + 8 \times 7 = 57$ trozos. Cuando Porthos elige 6 trozos, tenemos agrupados los papeles en $51 + 6$ y al cortar Porthos cada uno de los 6 en 5 trozos, habrá $51 + 6 \times 5 = 81$ trozos de papel.

**10.(D)** Obviamente se trata de encontrar la regla de formación del resultado a partir de los dos números de partida.
615 se puede obtener a partir del 2 y el 3 de la siguiente forma:
$2 \times 3 = 6$ (*Multiplicar los dos números*)
$3 - 2 = 1$ (*Restar al mayor el menor*)
$2 + 3 = 5$ (*Sumar ambos números*)

De igual forma se obtiene 261115 de 13 y 2:
$13 \times 2 = 26$ $\quad 13 - 2 = 11$ $\quad 13 + 2 = 15$

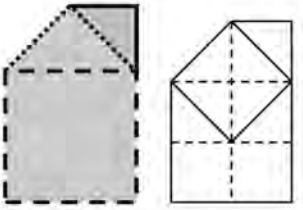
Podemos comprobar que aplicando la misma regla se obtiene 36513 de 4 y 9.
Operando así sobre la pareja 17 y 6 se obtiene:
$17 \times 6 = 102$ $\quad 17 - 6 = 11$ $\quad 17 + 6 = 23$

Por consiguiente el resultado es: 1021123.

## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**11.(A)** Si formamos 10 filas de $N$ coches cada fila Asier tendrá $10 \times N$ coches, y como el número total de coches debe ser mayor que 50 y menor que 100, solo podrá tener 60, 70, 80 o 90 coches.
Por otra parte, sabemos que alguno de estos números más 2 debe ser divisible por 6 al objeto de poder formar 6 filas con el mismo número de coches cada una.
Todo se reduce entonces a comprobar qué números, elegidos entre 62, 72, 82 y 92, son divisibles por 6. Se encuentra inmediatamente que el único que cumple la condición es 72. Por tanto, Asier tiene 70 coches.

**12.(E)** La figura completa podemos seccionarla en 5 cuadrados de 2 cm de lado, más la mitad de uno de esos cuadrados, tal y como se muestra en la figura. Dado que cada uno de esos cuadrados mide 4 $cm^2$, el área de la figura completa es: $\mathbf{5} \times 4 + 2 = 22\ cm^2$.



**13.(B)** Con las condiciones que impone el enunciado es se deduce inmediatamente que las 10 bolsas tienen sucesivamente 1, 2, 3…9 y 10 canicas. Organizando la suma de la forma siguiente: $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + /5 + 6)$, obtenemos muy cómodamente $5 \times 11 = 55$ canicas.

**14.(E)** Divertida duerme el mismo tiempo que Buena juega, o sea, 20 minutos. Como Amable duerme el doble que Divertida, Amable duerme $2 \times 30 = 60$ minutos. Sabiendo que Cariñosa duerme la tercera parte que Amable, deducimos que Cariñosa ha estado durmiendo $60 \div 3 = 20$ minutos.

**15.(A)** Como la longitud de la nariz de Pinocho se duplica cada vez que miente, su nariz medirá sucesivamente:
Primera mentira; 2 dm.
Segunda mentira; 4 dm.
Tercera mentira; 8 dm.
Cuarta mentira; 16 dm. Que en centímetros será $16 \times 10 = 160$ cm.

**16.(D)** En primer lugar, para facilitar los razonamientos, reordenamos de menor a mayor los puntos obtenidos:

| 272 | 280 | 295 | 320 | 345 |
|---|---|---|---|---|

El enunciado dice que Amaya obtuvo 40 puntos más que Manuel. Basta una hojeada a las puntuaciones para comprobar Amaya sacó 320 puntos y Manuel 280; ninguna otra pareja da la diferencia de 40 puntos.
Pongamos ahora el nombre de los dos sobre sus puntos:

| | Manuel | | Amaya | |
|---|---|---|---|---|
| 272 | 280 | 295 | 320 | 345 |

Por otra parte sabemos que Iñigo, María y Begoña están ordenados así, por orden creciente de puntos. Solo falta colocarlos en los tres "huecos" que quedan para concluir que Iñigo obtuvo 272 puntos.

**17.(C)** El problema estará resuelto en cuanto sepamos cuantas hembras castañas hay. Vayamos con los machos.
Negros: como máximo hay 1, pues si hubiera más habría menos hembras que machos.
Castaños: como máximo hay 2, por la razón aducida antes.
Blancos: como máximo hay 1, por idéntica razón.
Dado que hay 4 machos, deberán ser necesariamente 1 negro, 2 castaños y 1 blanco. Recordando que el total de cachorritos castaños es 5, deducimos que 3 son hembras. En consecuencia, la probabilidad de que la prima escoja una hembra castaña es: $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

**18.(B)** Si pasan una media de 9,4 minutos al día zapeando, al año pasarán $365 \times 9{,}4 = 3431$ minutos. Expresando, ahora, en minutos las opciones que ofrece el problema, observamos que la opción B (Dos días y medio: $25 \times 24 \times 60 = 3600$ minutos) es claramente la que más se acerca a 3431 minutos.

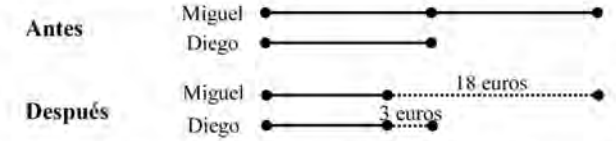
**19.(D)** Si nos fijamos bien vemos que el número de cada una de los dos casillas sombreadas está rodeado por 6 números que no deben ser consecutivos con él. Tomando la lista: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, observamos que para cualquier número que no sea el 1 o el 8 solo hay 5 no consecutivos con él. Por tanto, si el problema tiene solución, dichas casillas estarán ocupadas por el 1 y el 8, cuya suma es 9.

He aquí una solución:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 | 3 | |
| 7 | 1 | 8 | 2 |
| | 4 | 6 | |

## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel I)

**20.(D)** Mediante un esquema lineal la solución del problema es inmediata:




Restando los segmentos punteados: 18 – 3 = 15 euros, obtenemos lo que tenía Diego. Dado que Diego ha gastado 3 euros, ahora le quedan 12, al igual que a Miguel.

**21.(B)** Si numeramos los días como 0, 1, 2, 3,… …24, 25, resulta que tiene tos los días múltiplo de 4, dolor de barriga los múltiplos de 6 y dolor de cabeza los múltiplos de 7, esto es:
Tos, los días 4, 8, 12, 16, 20 y 24
Dolor de barriga, los días 6, 12, 18 y 24
Dolor de cabeza, los días 7, 14 y 21.
Contando los días obtenemos 13 días en total, pero como el 12 y el 24 los hemos contado dos veces, Juan Pupas estará malito 11 días y, en consecuencia, estará sano 25 – 11 = días.

**22.(B)** Nuestra unidad de medida está dividida en 16 cuadraditos. Por otra parte, la pajarita se compone de 5 cuadraditos más 6 medios cuadraditos y esto equivale a 5 + 3 = 8 cuadraditos, que es justamente la mitad de la unidad. Por tanto, el área de la pajarita es $\frac{1}{2}$.

**23.(D)** El producto de las dos edades es 351, que descompuesto en números primos es: $351 = 3^3 \times 13$, lo que arroja varias formas de ponerlo como producto de dos edades (números enteros). Además, sabemos que la suma de las dos edades es 40. Es casi inmediato darse cuenta de que $3^3 + 13 = 27 + 13 = 40$. De lo que se sigue que el menor tiene 13 años.

**24.(B)** Al ser de 4 cifras, todos esos números tendrán como primera cifra un 2 y el problema se reduce a rellenar las tres siguientes con 0 y 2. Podemos organizarlo de la manera siguiente:

Números sin ningún 0:

2222

Números con un solo 0:

2022

2202

2220

Números con un solo 2(dos ceros) en las tres últimas cifras:

2200

2020

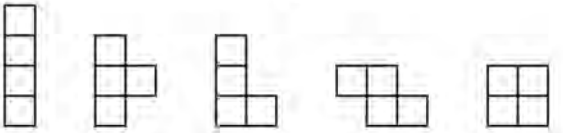
2002

Números sin ningún 2 (tres ceros) en las tres últimas cifras:

2000

En total, 8 números.

**25.(D)** Se pueden formar estas cinco figuras distintas:



XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 2ª Fase Nivel II

**1. (D)** El dado rueda hacia delante 3 lugares, a la derecha dos y hacia atrás uno.
Las caras que quedan abajo antes de girar a la derecha son, en ese orden, 5, 3, 2 y 4.
Ahora rueda hacia la derecha, por lo que queda abajo un 1 y después un 3.
Finalmente, va hacia atrás y la cara inferior es un 2, por lo que en la cara superior habrá un 5.

**2. (B)** La ardilla Pilla come una pipa en las horas múltiplo de 3, una avellana en las múltiplo de 6 y una nuez en las múltiplo de 8.
La próxima vez que tome los tres frutos juntos será dentro de 24 horas, pues 24 es el mínimo común múltiplo de 3, 6 y 8.
Entre 0 y 24 tenemos nueve múltiplos de 3 (0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 y 24), cinco múltiplos de 6 (0, 6, 12, 18, 24) y 4 múltiplos de 8 (0, 8, 16, 24).
Comerá 9 pipas, 5 avellanes y 4 nueces. Un total de 18 frutos secos.

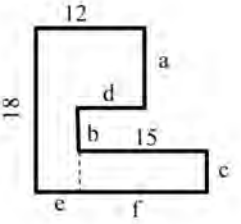
**3. (A)** Juntando las condiciones UNA, TRES y CUATRO obtenemos que los números son múltiplos de 22 y de dos o tres cifras:
22 ($22 \times 1$), 44, 66, 88, 110, 132, 154, ……., 242, ……990 ($22 \times 45$).
La condición DOS nos dice que los dividamos entre 5 y veamos qué divisiones dan resto 2.
22 : 5 da cociente 4 y resto 2, 22 SÍ
44 : 5da cociente y resto 4, 44 NO
66 : 5 da cociente 13y resto 1, 66 NO
88 : 5da cociente 17 y resto 3, 88 NO
110 : 5 da cociente 22 y resto 0, 110 NO
132 : 5 da cociente 26 y resto 2, 132SÍ
154 : 5 da cociente 30 y resto 4, 154 NO
Y así sucesivamente. Observamos que los que cumplen las cuatro condiciones son $22 \times 1$, $22 \times 6$, $22 \times 11$, $22 \times 16$, $22 \times 21$, $22 \times 26$, $22 \times 31$, $22 \times 36$ y $22 \times 41$.
9 números.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**4. (B)** Hoy es el día " x " de la semana.
Anteayer fue el día " x – 2",y de esta manera, los días van asi:
x – 5, x – 4, x – 3, x – 2, x – 1, x , x + 1
Como x – 3 es martes, x – 2 es miércoles, x – 1 es jueves, x es viernes y mañana será sábado.

**5. (D)** Nombrando los lados como se muestra en la figura, observamos que:

(1) a + b + c = 18
(2) d + e = 12
(3) f = 15




Como el perimetro es la suma de los lados, el perimetro es
$18 + 12 + 15 + a + b + c + d + e + f$
Sustituyendo los valores de (1), (2) y (3), nos queda que el perímetro es
$18 + 12 + 15 + 18 + 12 + 15 = 90.$

**6. (C)** Como $27^5 = \left(3^2\right)^5 = 3^{15}$ la novena parte se obtiene al dividir entre 9 es $27^5 : 9 = 3^{15} : 3^2 = 3^{12}$

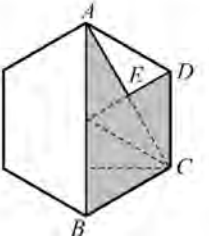
**7. (D)** El número más cercano será el que tenga la menor diferencia.

**A)** $\frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ **B)** $\frac{5}{11} - \frac{5}{12} = \frac{5}{132}$ **C)** $\frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{1}{12}$

**D)** $\frac{5}{12} - \frac{2}{5} = \frac{1}{60}$ **E)** $\frac{5}{12} - \frac{5}{13} = \frac{5}{156}$

Los apartados A y C dan el resultado mayor. El apartado B es mayor que el E, y D es menor que E porque $\frac{1}{60} = \frac{5}{300} < \frac{5}{156} = \frac{5}{12 \cdot 13}$.

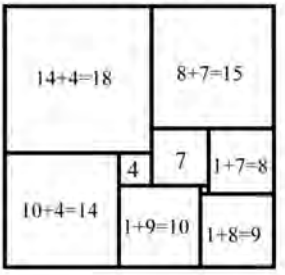
**8. (E)** Si dividimos medio hexágono regular como se muestra en la figura, observamos que está formado por 6 triángulos isósceles iguales.
Como el área del hexágono es 180 cm², la mitad será 90 cm².
La parte sombreada es $\frac{5}{6}$ de 90, es decir $\frac{5}{6} \cdot 90 = 75$ cm²



## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**9. (A)** Pensemos con pirámides con menor número de vértices:
La pirámide que menor número de vértices tiene es la de base triangular:
Tiene 4 vértices (3 en la base y uno arriba) y 6 aristas (3 en la base y 3 laterales).
La pirámide de base cuadrada: (4 + 1) vértices y (4 + 4) aristas.
La pirámide de base pentagonal: (5 + 1) vértices y (5 + 5) aristas.
Así que, la pirámide con 2022 vértices (2021 + 1) vértices, tendrá (2021 + 2021) aristas, es decir, 4042 aristas.

**10.(E)** Partiendo de los lados que nos dan, es fácil hallar los lados de los cuadrados de alrededor, por lo que los lados del rectángulo son 33 m (14 + 10 + 9) y 32 m (14 + 18).
La superficie que cubrimos con las alfombras es de $33 \times 32 = 1056$ m$^2$.




**11.(A)** Como A + A + A termina en A entonces A puede ser el 0 o el 5.
Si A = 0:
S + E = 10 y me llevo una a las centenas, por lo que S + E + T + 1 termina en E, es decir, 11 + T termina en E. Como E no puede ser 0 (ya que lo es A), a las unidades de mil solo puedo llevarme una, por lo que S = 1. Entonces, E = 9 y T = 8.
De esta manera, E +S +A + S + E +T +A = 9 + 1 + 0 + 1 + 9 + 8 + 0 = 28.
Si A = 5:
Me llevo una a las decenas, por lo que S + E = 9 y me llevo una a las centenas, por lo que S + E + T + 1 termina en E. Por otro lado, S + E + T + 1 = 9 + T + 1 termina en T. Por este motivo, A no puede ser 5.

**12.(C)** $300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \Rightarrow a = 2, b = 1, c = 2$
$a^2 \cdot b^3 \cdot c^5 = 2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^5 = 2^7 \Rightarrow d = 2, e = 7 \Rightarrow e^d = 7^2 = 49.$

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**13.(D)** Vamos a llamar al número de dos cifras "D" y al de tres "T".
T es impar $\Rightarrow 9 \times T$ es impar $\Rightarrow 11 \times D$ es impar $\Rightarrow$ D es impar.
$9 \times T = 11 \times D \Rightarrow$ D es múltiplo de 9 y T múltiplo de 11.
Como D es impar y múltiplo de 9, D puede ser 9, 27, 45, 63, 81, 99.
$11 \times 9 = 99 = 9 \times 11 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 9$.
$11 \times 27 = 297 = 9 \times 33 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 27$.
$11 \times 45 = 495 = 9 \times 55 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 45$.
$11 \times 63 = 693 = 9 \times 77 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 63$.
$11 \times 81 = 891 = 9 \times 99 \neq 9 \times T \Rightarrow D \neq 81$.
$11 \times 90 = 990 = 9 \times 110 = 9 \times T \Rightarrow T = 110$ pero no nos sirve porque T es impar.
$11 \times 99 = 1089 = 9 \times 121 = 9 \times T \Rightarrow T = 121$.

**14.(B)** Los ángulos de un triángulo suman 180º, así que:
$R + U + 72º = 180º \Rightarrow R + U = 108º$,
$N + O + 61º = 180º \Rightarrow N + O = 119º$.

$$\left.\begin{matrix} U+X+F=180^\circ \\ I+Y+N=180^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow (U+X+F)+(I+Y+N)=180^\circ+180^\circ=360^\circ$$

como $X + Y = 115º \Rightarrow U + F + I + N = 360º - 115º = 245º$

$U + N + R + U + F + I + N + O = (U + R) + (N + O) + (U + F + I + N) =$
$= 108º + 119º + 245º = 472º$.

**15.(D)** $a + b + c + 5 = 18 \Rightarrow a + b + c = 13$ (1)
$a + c + d + 6 = 17 \Rightarrow a + c + d = 11$ (2)
$c + d + e + 9 = 15 \Rightarrow c + d + e = 6$ (3) $\Rightarrow$ c, d, e menores que 4.
$? = 15 - b - c - e$

| | | |
|---|---|---|
| 5 | a | 6 |
| b | c | d |
| ? | e | 9 |

Restando (1) – (2) tenemos que $b - d = 2 \Rightarrow b = d + 2$

Como c, d y e son menores que 4 y b es dos unidades mayor que d, d no puede ser 1, por lo que será 2 o 3. Si d es 3, b es 5 y no puede ser porque habría dos números iguales. Hemos averiguado que d = 2 y b = 4.

Entonces, $a + c = 9$ y c solo puede ser 1 o 3.
- Si $c = 1 \Rightarrow e = 3$ y $a = 8 \Rightarrow ? = 15 - 4 - 1 - 3 = 7$.
- Si $c = 3 \Rightarrow e = 1$ y $a = 6 \Rightarrow$ No puede ser porque habría dos números iguales.

## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**16.(E)** Lo primero que debemos calcular es cuántos partidos se juegan,

E1-E2, E1-E3, E1-E4, E1-E5, E1-E6
E2-E3, E2-E4, E2-E5, E2-E6
E3-E4, E3-E5, E3-E6
E4-E5, E4-E6
E5-E6

Así que se juegan $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ partidos.

Como 40 no es múltiplo de 3, algunos partidos terminan en empate.
Si solo hay un empate, la suma de las puntuaciones sería $1 + 1 + 3 \cdot 14 = 44 \neq 40$
Dos empates: $2 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 13 = 43 \neq 40$
Tres empates: $3 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 12 = 42 \neq 40$
Cuatro empates: $4 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 11 = 41 \neq 40$
Cinco empates: $5 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot 10 = 40 \Rightarrow$ hubo 5 empates.

**17.(B)** El precio está entre 300 € y 400 €, por lo que la cifra de las centenas es 3. El precio correcto es 3ab y el erróneo, ba3. Como habría pagado 198 € de más, ba3 es mayor y " $ba3 - 3ab = 198$ " $\Rightarrow$ $ba3 = 3ab + 198 \Rightarrow b = 5$.
Como el precio es múltiplo de 9, y sabemos que es 3a5 $\Rightarrow$ utilizando el criterio del 9 (la suma de las cifras es múltiplo de 9) $3 + a + 5$ tiene que ser múltiplo de 9.
De esta manera, $a = 1$.
El precio del reloj es 315 € y el producto de sus cifras $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$.

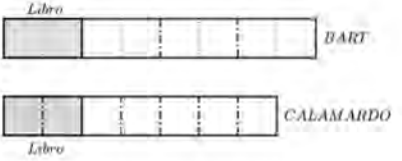
**18.(A)** El 12% de las alumnas juegan al baloncesto, por lo que, como $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$, 3 de cada 25 alumnas juegan al baloncesto. De esta manera sabemos que el número de alumnas tiene que ser múltiplo de 25.

El 14% de los alumnos juegan al baloncesto, por lo que, como $\frac{14}{100} = \frac{7}{50}$, 7 de cada 50 alumnos juega al baloncesto. De esta manera sabemos que el número de alumnos es múltiplo de 50.
Si en total son 125 alumnos y hay más alumnas, el número de alumnas es 75 y el de alumnos 50.
Por ello, 9 alumnas (3 de 25 equivale a 9 de 75)y 7 alumnos juegan al baloncesto, lo que hace un total de 16.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)**

**19.(C)** i) $-2-(-9)=7$
ii) $-5+3=-2$
iii) $-9-(-1)=-8$
La respuesta correcta es $-9, 3, -9$.

**20.(E)** Siguiendo las indicaciones del problema, obtenemos el dibujo que se muestra. La parte blanca es la que no han gastado, y es fácil ver que se trata de 11 trozos del mismo tamaño. Por ello, como entre los dos todavía tienen 132 €, cada trozo corresponde a 132 : 11 = 12 €.
Así pues, el libro cuesta 12 + 12 = 24 €.




**21.(C)** Como una castaña se cambia por una almendra y una bellota, tres castañas se cambiarán por tres almendras y 3 bellotas.
Como tres almendras se cambian por dos bellotas, tres castañas se cambiarán por 2 bellotas y 3 bellotas es decir, 3 castañas se cambian por 5 bellotas.

**22.(D)** El rectángulo $1 \times 90$ es el de mayor perímetro, y es $1 + 1 + 90 + 90 = 182$ cm.
El rectángulo $9 \times 10$ es el de menor perímetro, y es $9 + 9 + 10 + 10 = 38$ cm.
Por ello, la resta de ambos perímetros es $182 - 38 = 144$.

**23.(A)** El mayor número que podemos conseguir es $4^5 + 3^2 = 1024 + 9 = 1033$ y el menor número es $5^2 + 4^2 = 25 + 64 = 89$. Por lo tanto la suma de ambos es $1033 + 89 = 1122$.

## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel II)

**24.(C)** Como un cuarto de las figuras de Sol son círculos, tres cuartos son cuadrados. Como Celia y Sol tienen el mismo número de cuadrados, y dos quintos de las figuras de Celia son cuadrados, dos quintos de las figuras de Celia son tres cuartos de las figuras de Sol.

$\frac{2}{5}$ de las figuras de Celia = $\frac{3}{4}$ de las figuras de Sol

Por otro lado, como dos quintos de las figuras de Celia son cuadrados, tres quintos de las figuras de Celia son círculos y como el número de círculos de Celia es 36,

$\frac{3}{5}$ de las figuras de Celia = 36, , por lo que Celia tiene $36 \cdot 5 : 3 = 60$ figuras.

Si sustituimos esta cantidad en la primera igualdad,

$\frac{2}{5}$ de $60 = \frac{3}{4}$ de las figuras de Sol.

Sol tiene $(4 \cdot 2 \cdot 60) : (3 \cdot 5) = 32$ figuras

Así pues, entre las dos tendrán $60 + 32 = 92$ figuras.

**25.(D)** Los números que puede construir la niña Centésima son los OCHO siguientes:

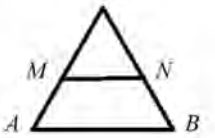
VII, XII, XV, XX, XL, LII, LV, LX.

# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 2ª Fase Nivel III

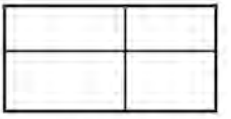
**1. (C)** Sea $x$ la nota de la 2ª evaluación. La media ponderada se obtiene como $0{,}10 \cdot 7 + 0{,}20 \cdot x + 0{,}30 \cdot 9 + 0{,}40 \cdot 8 = 8$. Multiplicando por 10 y dejando la incógnita en el primer miembro tenemos: $2x = 80 - 7 - 27 - 32 = 14$, luego $x = 7$.

**2. (D)** El triángulo $MNC$ es semejante al $ABC$ y la razón de semejanza es 1:2, luego la razón de sus áreas es 1:4. Así el área de $MNC$ es 2 cm$^2$,y deja 6 cm$^2$ para el área del trapecio $ABNM$.



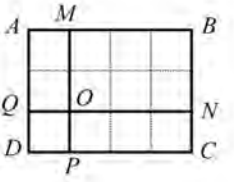

**3. (A)** El área de los seis arcos equivale al área de dos círculos de radio 3 cm. Luego el área de la figura sombreada es la del hexágono regular de lado 6 menos las áreas de esos dos círculos. Es decir: $\frac{6 \cdot 6^2 \sqrt{3}}{4} - 2\pi \cdot 3^2 = 54\sqrt{3} - 18\pi$

**4. (A)** El rectángulo, al trazar una paralela a cada lado, ha quedado dividido en cuatro rectángulos menores. Las áreas de dos rectángulos que comparten base están en proporción de sus alturas. Si suponemos que los de área 1 y 2 están apilados, conviene que el de área 3 esté alineado con el de área 1, ya que entonces, el área del cuarto rectángulo será 6 (y no 1,5). En este supuesto el área del rectángulo grande es 1 + 2 + 3 + 6 = 12. La otra posibilidad es que estén apilados los rectángulos de área 1 y 3, con lo que la mejor opción de área grande sería que el de área 2 se alinee con el de área 1, obteniendo área 6 para el cuarto rectángulo, y por tanto, de nuevo, área 12 para el rectángulo de partida (lo cual no es de extrañar, ya que el razonamiento podría haber empezado por rectángulos alineados en vez de apilados).



**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

Hay otro método más rápido.




La suma de las áreas de los rectángulos opuestos por el vértice es la misma, es decir:

$$S_{AMOQ} + S_{ONCD} = S_{MBNO} + S_{OPDQ}$$

Por lo tanto el área será máxima cuando los dos de los tres conocidos sean los de mayor área. Luego $2 + 3 = 1 + x$ de donde se deduce que $x = 4$ y el área máxima es $1 + 2 + 3 + 4 = 12$.

**5. (D)** Razonamos a partir de la cifra central. Esta puede ir del 1 al 9, y las otras dos deben sumar el doble de aquella.

$a1b$; $a + b = 2$ tiene dos soluciones: 111 y 210.

$a2b$; $a + b = 4$ tiene cuatro soluciones: 123, 222, 321 y 420.

$a3b$; $a + b = 6$ tiene seis soluciones: 135, 234, 333, 432, 531 y 630

…

…

$a9b$; $a + b = 18$ tiene una solución: 999.

De forma que si quitamos los candidatos que acaban en 0 (que son cuatro; las sumas pares desde 2 hasta 8), el número de los restantes sigue una serie que empieza en 1 y aumenta de dos en dos hasta llegar a 9 (cuando la suma es 10) y a partir de ahí decrece de dos en dos hasta volver a 1. por lo que el número de candidatos añade a 4 la suma $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 41$. La respuesta es por tanto 45.

**6. (B)** Si el perímetro aumenta un 10 %, también lo hace el lado $l$ del cuadrado, y así su área pasa de ser $l^2$ a ser $(l \cdot 1{,}1)^2 = l^2 \cdot 1{,}1^2 = l^2 \cdot 1{,}21$, y por tanto ha aumentado un 21%.

**7. (B)** $2^{18} \cdot 3^6 = \left(2^3 \cdot 3\right)^6 = a^b$ implica que:

$b = 1$ y $a = 24^6$, o $b = 2$ y $a = 24^3$, o $b = 3$ y $a = 24^2$, o $b = 6$ y $a = 24$

La suma mínima de a + b es 6 + 24 =30

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**8. (E)** Parece más sencillo calcular el área del cuadrado total y quitarle el área del cuadrado blanco y las áreas de los dos rectángulos blancos iguales.

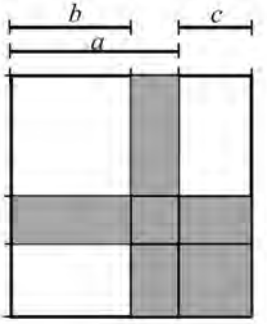
El área del cuadrado grande es $(a+c)^2$

El área del cuadrado blanco es $b^2$

El área de cada rectángulo blanco es $b \cdot c$.

Entonces el área de la zona sombreada es:

$(a+c)^2 - b^2 - 2bc$




Para identificar esta fórmula con alguna de las propuestas como solución debemos notar que al desarrollarla da lugar a los cuadrados con signo "+" de *a* y c, y con signo "–" de *b*, conteniendo además "+ 2*ac*" y "– 2*bc*". Vemos que eso ocurre con la respuesta E $(a+c)^2-(b+c)^2+c^2$.

**9. (D)** Si en la ecuación $x^2+64=20x^4$ hacemos el cambio $y = x^4$, la ecuación se transforma en una de segundo grado, $y^2+64=20y$, en la variable $y$, cuyas soluciones son: $y=\dfrac{20\pm\sqrt{400-4\cdot 64}}{2}=\dfrac{20\pm 12}{2}\Rightarrow\begin{cases}y_1=16\\y_2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x_1)^4=16\Rightarrow x_1=\pm 2\\(x_2)^4=4\Rightarrow x_2=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

Con lo que las dos positivas suman $2+\sqrt{2}$.

**10.(D)** Patricia ha respondido *m* preguntas bien y $(25 - m)$ mal. Su puntuación ha sido $5m$. Gabriel ha respondido *n* preguntas bien y $(25 - n)$ las ha dejado en blanco. Su puntuación ha sido $5n + (25 - n)$.

La suma de las dos puntuaciones es: $5m + 5n + 25 - n = 5m + 4n + 25 = 225$;; es decir, $5m + 5n = 200$. Como 200 es múltiplo de 4 y de 5, se tiene que dar necesariamente que *m* sea múltiplo de 4 y *n* múltiplo de 5. Como *m* y *n* son a lo más 25, y la suma de puntuaciones está cerca de la suma máxima que es de 250 puntos, *m* y *n* estarán cerca de 25. Tanteemos un poco, usando lo que sabemos de los divisores de *m* y *n*.

Con $n = 25$, $m = 20$; con $n = 20$, $m = 24$, y ya no hay más posibilidades. Pero releemos el problema y vemos que *n* no puede ser 25, ya que se afirma que Gabriel dejó algunas respuestas en blanco. Luego la puntuación de Gabriel fue $5 \cdot 20 + 5 = 105$.

## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

**11.(A)** Para que sean primos entre sí debe ocurrir: que sea una pareja de un número par y otro impar, excluyendo las parejas {6,3}, {6,9} y {10,5}; o una pareja de impares, excluyendo la {3,9}.

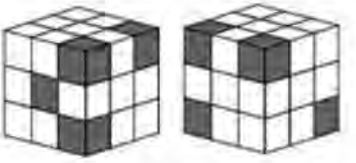
Parejas par- impar con los números del 2 al 10 hay $5 \cdot 4 = 20$.

Parejas impar-impar hay $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Parejas totales hay $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$.

La probabilidad de pareja de primos entre sí es $\frac{17+5}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

**12.(D)** Con las dos vistas del cubo que se nos ofrecen estamos viendo cuatro caras del cubo, en las que en total figuran cinco cubitos grises. Como vemos los cuatro cubitos esquina de la base (dos blancos y dos grises) no hay más cubitos grises esquina en la base. Sin embargo, solo vemos tres cubitos laterales centrales en la base, y por tanto el cuarto podría ser gris, lo mismo que el cubito central de la cara. Vayamos con la cara lateral oculta que falta, que es la que tiene tres cubitos blancos alineados superiormente. En la fila de arriba tiene esos tres cubitos blancos. En la de en medio, vemos que los laterales son blancos, y podría ser gris el centro. En la fila de abajo ya hemos visto los colores que puede haber porque son cubitos compartidos con la base, Nos queda el cubito central del cubo que no corresponde a ninguna cara y puede ser gris. Así como mucho puede haber otros 2 + 1 + 1 = 4 cubitos grises aparte de los cinco que vemos.



**13.(D)** El caudal del agua, depende del volumen de los tubos. Como se presupone que la longitud de los grandes y de los pequeños será la misma, deberemos tener en cuenta la superficie de la sección de los tubos. Un tubo de 3 cm de diámetro tendrá nueve veces más de superficie de sección que uno de 1 cm, luego habrá que colocar 9 tuberías pequeñas.

**14.(C)** En el cuadrado mágico la suma de todos sus números será la suma de los números enteros que van del –10 al 14, es decir 11 + 12 + 13 + 14 = 50 (los números negativos se anulan al sumarse con sus opuestos). Como esta suma la podríamos hacer sumando los números por filas en el cuadrado mágico y todas ellas suman lo mismo, los número en cada una de ellas suman 10.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**15.(B)** Los cubos del problema tienen de arista: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 cm. Las áreas de sus caras son: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 $cm^2$. Los cubos contribuyen a la superficie pedida con 4 de sus caras (las caras laterales) y la diferencia entre el área de una cara suya (la superior) y el área de la cara (la inferior) del cubo inmediatamente menor, salvo el cubo grande que añade una cara más (la de su base), entendiendo que encima del cubo de lado 1 hay un "cubo" de lado 0.

Así, la fórmula de la superficie de la torre es :

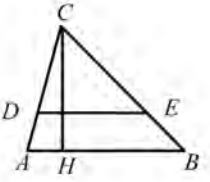
Las cuatro caras de cada cubo: $4\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) = 560$

Las siete diferencias de caras:

$1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + 5^2 - 4^2 + 6^2 - 5^2 + 7^2 - 6^2 = 7^2$

La base de la torre: $7^2$. Solo queda sumar bien los tres resultados: $560 + 49 + 49 = 658$

**16.(B)** Queremos que el triángulo *DEC* y el trapecio *ABED* tengan igual área, o lo que es lo mismo que el triángulo *ABC* tenga el doble de área que el *DEC* y como son semejantes, si las áreas están en proporción de 2:1 las longitudes de las líneas correspondientes estarán en la razón $\sqrt{2}:1$, y por tanto si *CH* mide 2, la altura del triángulo *DEC* medirá $\sqrt{2}$, y la del trapecio $2-\sqrt{2}$.




**17.(A)** Al ir en direcciones contrarias, el primer encuentro ocurrirá al repartirse 180º (están separados por media vuelta) proporcionalmente a sus velocidades. Dividimos 180º entre 2 + 3 y nos da que el primer encuentro ocurrirá a los $2 \cdot 36º$ de recorrido de Carlos y a $3 \cdot 36º$ de recorrido de Alba. Para el segundo encuentro la distancia para encontrarse será de 360º, y por tanto se producirá cuando Alba recorra otros 216º y Carlos 144º. Así Alba encuentra a Carlos en los grados: 108, 324, 540, … En tres minutos Alba habrá recorrido $180 \cdot 30º = 5400º$. Así que la solución redondeada a un entero por exceso de la ecuación $108 + 216n = 5400$, nos dará el número de cruces entre ambos ciclistas. Como n = 24,5 la respuesta es que se cruzan 25 veces.

## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)

**18.(B)** Si $x$ es 0 el primer miembro vale 3. Si $x$ es entero positivo tenemos: para $x = 1$, el primer miembro no da un número entero; para $x > 1$, cada uno de los sumandos es menor que $\frac{1}{3}$, y por tanto la suma es menor que 1. Si $x$ es entero negativo, los tres sumandos son potencias naturales positivas de 2, 3 y 4, y por tanto dos de ellos son pares y la otra impar, con lo que la suma no puede ser par.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x = ¿?$$

**19.(A)** Tenemos que : $8a+9b+10c = (a+b+c)+(7a+8b+9c) \Rightarrow$.

$$a+b+c = \frac{(4a+5b+6c)-(a+2b+3c)}{3} = \frac{71-47}{3} = 8$$

$$71 = 4a+5b+6c = \frac{(7a+8b+9c)+(a+2b+3c)}{2} = \frac{(7a+8b+9c)+47}{2} \Rightarrow$$

$$(7a+8b+9c) = 2\cdot 71 - 47 = 95$$

Por tanto $8a+9b+10c = (a+b+c)+(7a+8b+9c) = 8+95 = 103$.

**20.(D)** Vamos primero a contar permitiendo que el 0 encabece el número de cinco cifras y luego descontaremos los números que empiezan por 0.

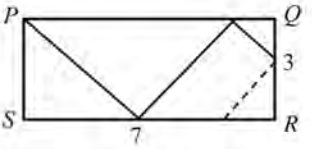
Claves de cinco cifras con cuatro iguales y una distinta. La distinta puede tomar 9 valores y ocupar cinco posiciones distintas. La cifra que se repite cuatro veces puede tomar 10 valores.

En consecuencia, el número de estas claves es $9 \cdot 5 \cdot 10 = 450$.

De ellas, por equidad y simetría habrá el mismo número de claves que empiecen por cero y que empiecen por otra cifra, luego a la hora de considerar números de cinco cifras, habrá que descontar los 45 que empiezan por 0. La respuesta es 405.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**21.(C)** Un poco de tanteo nos dará la solución. Asignaremos coordenadas a los vértices de la mesa. $S(0,0)$, $R(7,0)$, $Q(7,3)$, $P(0,3)$.
Golpeamos la bola:



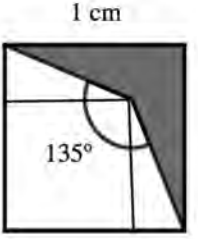

$P(0,3)$, $P_1(3,0)$,$P_2(6,3)$,$P_3(7,2)$,$P_4(5,0)$, $P_5(2,3)$, $P_6(0,1)$, $P_7(1,0)$, $P_8(4,3)$, $P_9(7,0)$.

Aunque se observan pautas de comportamiento (sumar o restar 3 a las coordenadas anteriores, siempre que los resultados estén entre 0 y 7 para la primera coordenada y entre 0 y 3 para la segunda) resulta más práctico dividir los lados en unidades y trazar la trayectoria de la bola.

**22.(E)** $2^9$ y $2^{18}$ son cubos perfectos y por tanto no lo son el anterior al primero ni el posterior al segundo. Serán cubos perfectos entre esos valores los números $a^3$, con $a$ entero positivo, que verifiquen que $2^9 \le a^3 \le 2^{18}$; es decir, $2^3 \le a \le 2^6$. Así tendremos todos los enteros que van desde 8 hasta 64, es decir 57.

**23.(B)** Los tres lados deben ser distintos y sumar 21. Los triángulos los nombramos a partir de las ternas de sus lados, ordenados estos de mayor a menor, teniendo en cuenta que los tres números deben ser distintos y el mayor debe ser menor que la suma de los otros dos (en este caso menor que 11)
(8,7,6), (9,7,5), (9,8,4), (10,6,5), (10,7,4), (10,8,3), (10,9,2).

**24.(D)** La cometa se puede descomponer a partir de su vértice obtuso en un cuadrado de diagonal 1 cm y dos triángulos rectángulos. El nuevo cuadrado tiene $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm de lado, y por tanto $\frac{1}{2}$ cm$^2$ de área. Los dos triángulos rectángulos equivalen en área a un rectángulo de lados $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm y $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ cm, y área $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ cm$^2$.




El área del dardo es: $1-\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ cm$^2$.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel III)**

**25.(B)** Si [28, $x$, $y$, 65] es una serie de Shonk, entonces $28 \cdot x \cdot y \cdot 65$ es un cuadrado perfecto y este producto debe tener sus factores primos con exponente par.

Como $28 = 4 \cdot 7$ y $65 = 5 \cdot 13$ entre $x$ e $y$ deben repartirse los factores 5, 7 y 13, pudiendo tener algún factor más. Los factores 5 y 7 no pueden ir los dos como factores de "$y$" ya que entonces "$y$" tendría que ser 35, ya que añadirle otro factor mayor que 1 haría que pasase de 65. Pero y = 35, no deja espacio para "$x$", ya que se tendría que llevar el factor 13 y no podría tener un factor más que lo situara entre 28 y 35. Así "$x$" debe tener al menos uno de los factores 5 y 7, y por tanto deja el 13 para "$y$". Entonces "$y$" no se puede llevar ni el 5 ni el 7. No queda más posibilidad que $x = 35$

y que $y = 4 \cdot 13 = 52$, de forma que $x + y = 87$.

# XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

## Soluciones 2ª Fase Nivel IV

**1. (A)** Elevando la expresión del enunciado al cuadrado, obtenemos:

$$\left(\sqrt{49+20\sqrt{6}}-\sqrt{49-20\sqrt{6}}\right)^2 = 49+20\sqrt{6}+49-20\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{49^2-\left(20\sqrt{6}\right)^2} = 98-2\sqrt{1}=96.$$

Como hemos elevado al cuadrado, calculamos la raíz y extraemos factores para obtener nuestro resultado final: $\sqrt{96}=4\sqrt{6}$.

**2. (B)** Si $\begin{cases} a+2b+3c=9 \\ a+4b+9c=27 \end{cases}$ sumando ambas ecuaciones se obtiene $2a+6b+12c=36$.

Por lo tanto $a+3b+6c=18$.

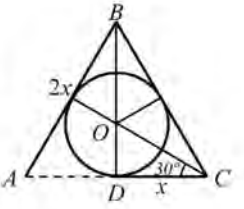
**3. (D)** $x+\sqrt{x-2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=4-x$ Elevando al cuadrado resulta

$x-2=16+x^2-8x \Leftrightarrow x^2-9x+18=0$ cuyas soluciones son $x_1=3$ y $x_2=6$.

De esas dos soluciones únicamente $x_1=3$ es válida ya que la solución de la raíz cuadrada es siempre un número positivo, por lo que tiene una única solución real.

**4. (D)** Si llamamos $x$ al radio del cono, su diámetro y generatriz valen $2x$. Realizando una sección vertical del cono (figura 1) podemos ver que tenemos un triángulo equilátero $ABC$ y otro rectángulo $ABD$ cuya hipotenusa $AB$ es el doble que el cateto $AD = DC$. Por ser equilátero el triángulo $ABC$ los ángulos $\hat{A}, \hat{B}$ y $\hat{C}$ son de 60º.

Si consideramos ahora el centro de la esfera $O$ vemos que con los puntos de tangencia se forman dos triángulos rectángulos iguales, por lo que la recta que une el centro $O$ con el vértice $C$ es bisectriz de $\hat{C}$. Esto nos permite calcula el valor del radio de la base del cono utilizando trigonometría:




$$tg30^\circ=\frac{15}{x} \Rightarrow x=\frac{15}{tg30^\circ}=\frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\cdot 15}{\sqrt{3}}=15\sqrt{3}\,.$$

La altura del cono es $DB=\sqrt{(2x)^2-x^2}=x\sqrt{3}=15\sqrt{3}\sqrt{3}=45$ cm.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**5. (C)** Dado que no son muchos números podemos hacer la lista de mayor a menor:
$400 \to 3100 \to 3010 \to 3001 \to 2200 \to 2110 \to 2101 \to 2020$
Ocupa la octava posición

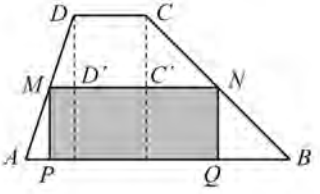
**6. (E)** Podemos trabajar utilizando las propiedades de los logaritmos:
$\log_2(\log_{16} n) = \log_4(\log_4 n)$
Empezamos cambiando las bases:

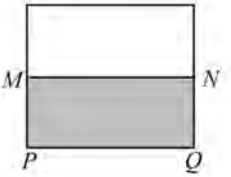
$$\log_2\left(\frac{\log_4 n}{\log_4 16}\right) = \frac{\log_2(\log_4 n)}{\log_2 4} \Rightarrow \log_2\left(\frac{\log_4 n}{2}\right) = \frac{\log_2(\log_4 n)}{2}$$

$$\log_2(\log_4 n) - \log_2 2 = \frac{\log_2(\log_4 n)}{2} \Rightarrow \log_2(\log_4 n) - 1 = \frac{\log_2(\log_4 n)}{2}$$

$\log_2(\log_4 n) = 2 \Rightarrow \log_4 n = 2^2 = 4$ .
Por lo tanto, $n = 4^4 = 256$ cuyas cifras suman 13

**7. (C)** Desde $D$ y $C$ trazamos rectas perpendiculares a la base $AB$ que cortan al segmento $MN$ en los puntos $D'$ y $C'$. Como $M$ y $N$ son los puntos medios de los lados $AD$ y $BC$, los triángulos $APM$ y $MD'D$ son iguales y lo mismo pasa con los triángulos $C'NC$ y $QBN$. Podemos colocar ahora los dos triángulos de abajo arriba para ver que obtenemos dos rectángulos iguales, uno sombreado y otro no. Es decir, el área total mide 26 m$^2$.



**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**8. (B)** Al sumar números consecutivos siempre vamos a poder operarlo como la suma de una progresión aritmética de diferencia 1. Es decir, queremos que:

$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 100$ y como $d = 1$ y $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\frac{a_1 + a_1 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{2na_1 + n^2 - n}{2} = 100 \Rightarrow n^2 + (2a_1 - 1)n - 200 = 0$$

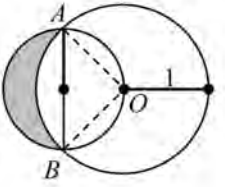
Las soluciones de esta ecuación deben dar –200 al multiplicarlas y al sumarlas $1 - 2a_1$ siendo $a_1$ un número entero positivo (para cumplir las condiciones del enunciado) y $n$ un número natural mayor que 1 (para que estemos sumando al menos dos números seguidos). Como $1 - 2a_1$ es impar y negativo, las únicas posibilidades para $n$ son 8 y 5, así que solo puede haber dos sumas posibles, una con cinco números seguidos y otra con ocho. Estas series son del 18 al 22 y del 9 al 16.

**9. (A)** El triángulo $OAB$ es rectángulo en $O$ ya que abarca un diámetro e isósceles ya que $OA = OB = 1$.

Con esto podemos calcular el diámetro del círculo pequeño que es $\sqrt{2}$. El área del círculo pequeño es, entonces $\frac{\pi}{2}$.

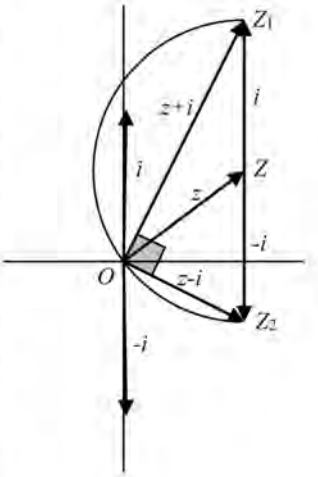
El área del sector circular $OAB$ es, por tanto, un cuarto del círculo grande, es decir $\frac{\pi}{4}$. El área de ese sector que queda a la izquierda de la cuerda $AB$ es $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ya que el área del triángulo $OAB$ es $\frac{1}{2}$.

El área sombreada es la mitad del círculo pequeño menos el área calculada anteriormente: $\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$



## XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)

**10.(B)** Para que el cociente de dos números complejos sea un imaginario puro deben formar entre si un ángulo de 90º (o de 270º que es equivalente a formar un ángulo recto por el otro lado). Si dibujamos el número complejo $z$, al sumarle o restarle $i$, estamos obteniendo otros números complejos que, representados en el plano, se sitúan un cuadrado por encima o por debajo. Como el ángulo que forman es de 90º eso significa que la recta perpendicular al eje de abscisas que une $z_1 = z + i$ con $z_2 = z - i$ es el diámetro de una circunferencia de centro $Z(a, b)$ que pasa por $O$, por $Z_1(a, b + 1)$ y por $Z_2(a, b - 1)$. Además, el módulo de $z$ es también un radio de la circunferencia, por lo que debe medir 1, que es lo mismo que mide desde $Z$ a $Z_1$ o desde $Z$ a $Z_2$.

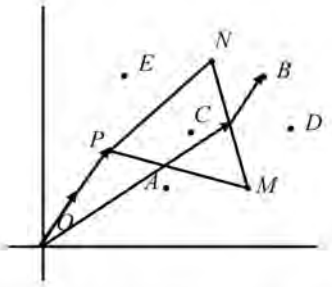



**11.(B)** El valor más pequeño que puede tomar $x$ es dos para que los logaritmos sean positivos. Pero como los lados deben medir lo suficiente como para que $\log_2 x$ y $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{2}$ sumen más que 3, $x$ debe ser mayor que 4 ya que $\log_2 4 + \dfrac{\log_2 4}{2} = 3$. Por esto el valor mínimo de $x$ es cinco. También se debe cumplir que al sumar $3 + \dfrac{\log_2 x}{2}$ debe ser mayor que $\log_2 x$. Cuando $x = 64$ se cumple la igualdad, por lo que el último valor posible debe ser 63. Del 5 al 63 tenemos 59 valores posibles.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**12.(E)** Como están en progresión aritmética $b = a + d$ y $c = a + 2d$ por lo que la ecuación de la recta tiene la forma:
$ax + (a + d)y = a + 2d \Rightarrow a(x + y) + dy = a + 2d$
Obtenemos entonces que $y = 2$, $x + y = 1$ siempre cumplen esta ecuación.
Es decir $x = -1$; $y = 2$.

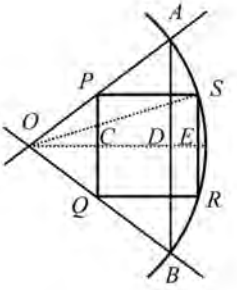
**13.(B)** La semisuma de las coordenadas de $M$ y $N$ son las coordenadas de su punto medio. Si le sumamos un vector que sea la mitad de $\overrightarrow{OP}$ debemos sumarle un vector paralelo a $\overrightarrow{OP}$ pero de la mitad de su módulo por lo que, desde el punto medio de $MN$ la única posibilidad de obtener un vector paralelo a $\overrightarrow{OP}$ es acabar en $B$.




**14.(A)** Buscamos cifras $a$ y $b$ entre 1 y 9 (démonos cuenta de que 0 no vale porque $ab$ y/o $ba$ no sería(n) un número de dos cifras) tales que $7[ab] = 4[ba]$.
Sabiendo que $[ab] = 10a + b$ y, análogamente, que $[ba] = 10b + a$ podemos sustituir ambas expresiones en la primera igualdad para deducir que:
$70a + 7b = 40b + 4a$.
Despejando llegamos a que $66a = 33b$, y simplificando concluimos que $2^a = b$. Por tanto, los posibles números $[ab]$ son 12, 24, 36 y 48, que suman 120.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**15.(D)** Sean $C$, $D$ y $E$, los puntos medios, respectivamente, de los segmentos $PQ$, $AB$ y $SR$ (que son paralelos entre sí). Estos tres puntos están alineados por construcción. Démonos cuenta de que el triángulo $ODA$ es rectángulo por ser $AOB$ isósceles y $D$ el punto medio de $AB$, así que por Pitágoras tenemos que $OA^2 = OD^2 + AD^2$.




El segmento $AD$ mide 3 cm por ser la mitad de $AB$ y $OA$ mide 5 cm por ser un radio de la circunferencia, luego $OD$ mide 4 cm.

Sea $l$ la longitud del lado del cuadrado. Por Tales los triángulos $OPC$ y $OAD$ son semejantes, de modo que $\frac{OC}{OD} = \frac{PC}{AD}$ y deducimos $OC = \frac{4PC}{3}$. El segmento $PC$ mide la mitad de $PQ$ que es un lado del cuadrado, luego $OC = \frac{2l}{3}$.

Además, $OE = OC + CE$ donde $CE$ mide $l$ por lo que $OE = \frac{5l}{3}$. Finalmente, démonos cuenta de que el triángulo $OES$ es rectángulo por ser $SOR$ isósceles y $E$ el punto medio de $SR$, luego por Pitágoras tenemos que $OS^2 = OE^2 + SE^2$. El segmento $SD$ mide la mitad de $SR$ que es un lado del cuadrado y $OS$ mide 5 cm por ser un radio de la circunferencia, así que $5^2 = \left(\frac{5l}{3}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$.

Despejando $l^2$, obtenemos que el área del cuadrado mide $\frac{900}{109}$ cm$^2$.

**16.(D)** En la circunferencia goniométrica el ángulo de 20º se encuentra en el primer cuadrante y es menor que 45º, luego $0 < \text{sen}20^\circ < \cos 20^\circ < 1$. A partir de esta información podemos concluir que $0 < tg20^\circ = \dfrac{sen20^\circ}{\cos 20^\circ} < 1$ porque el numerador de la fracción es menor que el denominador. Por tanto, $\dfrac{1}{tg20^\circ} > 1$ al ser el inverso de un número positivo menor que 1. Podemos descartar entonces las respuestas A, B y C. Ahora bien, $\dfrac{1}{tg20^\circ} = \dfrac{\cos 20^\circ}{sen20^\circ} = \cos 20^\circ \cdot \dfrac{1}{sen20^\circ} < \dfrac{1}{sen20^\circ}$ dado que $\cos 20^\circ < 1$. Asi pues, la respuesta correcta es D.

**17.(C)** Exactamente tres de las cinco predicciones acertaron, luego exactamente dos fallaron. Supongamos que la predicción (c) se cumplió, entonces el Real Madrid ganó y las predicciones (a), (b) y (d) también se cumplieron. ¡Pero esto son cuatro predicciones que acertaron! Por tanto, (c) debió fallar y el Real Madrid no ganó. Sabiendo esto, si la predicción (d) hubiera acertado, entonces necesariamente el partido acabó en empate y las predicciones (a) y (e) fallaron. ¡Pero esto son tres predicciones falladas! Por tanto, (d) debió fallar y el Real Madrid perdió. Sabiendo por (b) que el Real Madrid marcó y por (e) que se marcaron exactamente tres goles, el único resultado posible para que el Manchester City ganase es Madrid: 1, City: 2.

**18.(A)** Supongamos que la cifra escogida al azar por Juan es $j$. Dependiendo de la cifra escogida por María, podremos obtener las sumas $j + 1, j + 2, \ldots, j + 9$ cuyas cifras de las unidades podrán ser cualquiera de las cifras del 0 al 9 exceptuando la propia $j$. Por tanto, de entre las 81 sumas posibles (asociadas a las 9 cifras elegibles por Juan por cada 9 elegibles por María), habrá 8 casos que acaben en cada una de las cifras del 1 al 9 (los 8 en que Juan no haya escogido esa cifra) y 9 casos que acaben en 0 (uno por cada cifra escogida por Juan). Es decir, la cifra de las unidades más probable de la suma será el 0.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**19.(C)** Recordemos que $sen^2x+\cos^2x=1$, por lo que podemos sustituir $sen^2x+\cos^2x=1-sen^2x$ en la ecuación dada para obtener $sen^8x+\left(1-sen^2x\right)^3=1$. Desarrollando el primer término y cancelando el 1 que se repite a ambos lados de la ecuación, llegamos a la ecuación equivalente $sen^8x-sen^6x+3sen^4x-3sen^2x=0$. Debemos por tanto encontrar las raíces reales del polinomio $y^4-3y^3+3y^2-3y$ en la variable $y=sen^2x$ que podemos factorizar mediante Ruffini; el resultado es la expresión $y(y-1)\left(y^2+3\right)$. Las raíces reales son 0 y 1, por lo que debemos resolver las ecuaciones $sen^2x=0$ y $sen^2x=1$ con $x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$ para obtener todas las soluciones posibles de la ecuación original.

Esto nos arroja un total de cuatro soluciones, a saber: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$

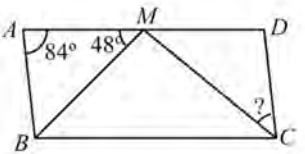
**20.(C)** Podemos describir la función $f$ a trozos según los distintos valores absolutos evalúen números positivos o negativos. De este modo:

$$f(x)=\begin{cases}2(a-x)+3(-x-a)=-5x-a, & si\ \ x<-a\\ 2(a-x)+3(x+a)=x+5a, & si\ \ -a\le x<a\\ 2(x-a)+3(x+a)=5x+a, & si\ \ a\le x\end{cases}$$

Podemos observar que la función $f$ es continua y decreciente en el primer trozo y creciente en el resto, por lo que el mínimo de la función se alcanza al final del primer trozo, es decir, en $x=-a$. Se tiene que $f(-a)=4a$.

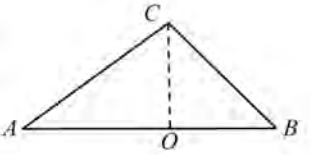
**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**21.(B)** Los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180º, por lo que en el triángulo $ABM$ deducimos que $A\hat{B}M = 48º$. Ahora bien, si un triángulo tiene dos de sus ángulos iguales, entonces es isósceles, por lo que los segmentos $AB$ y $AM$ tienen la misma longitud. Como $ABCD$ es un paralelogramo y $M$ el punto medio del lado $AD$, concluimos que los segmentos $DC$ y $DM$ también tienen la misma longitud (en particular, la de $AB$ y $AM$) y que el triángulo $CDM$ también es isósceles con ángulos $D\hat{C}M$ y $D\hat{M}C$ iguales. En un paralelogramo los ángulos interiores opuestos son iguales y todos suman en conjunto 360º, así que $B\hat{C}D = B\hat{A}M = 84º$ y $C\hat{D}M = A\hat{B}C = 96º$.




Como $C\hat{D}M + D\hat{C}M + D\hat{M}C = 180º$ y $D\hat{C}M = D\hat{M}C$, finalmente obtenemos que $D\hat{C}M = 42º$.

**22.(E)** En el triángulo $ABC$ podemos trazar la altura sobre el lado $AB$ que corta en un punto $O$. De este modo, tenemos que $\frac{OC}{OA} = tgA = \frac{3}{4}$ y $\frac{OC}{OB} = tgB = \frac{21}{20}$ y podemos deducir que $OA = \frac{4}{3}OC$ y $OB = \frac{20}{21}OC$. Por construcción, los triángulos $AOC$ y $BOC$ son rectángulos, luego por Pitágoras obtenemos que:




$$AC^2 = OA^2 + OC^2 = \left(\frac{4}{3}OC\right)^2 + OC^2 = \frac{25}{9}OC^2 = \frac{5^2}{3^2}OC^2 \Rightarrow AC = \frac{5}{3}OC\,.$$

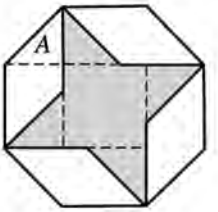
Análogamente

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 = \left(\frac{20}{21}OC\right)^2 + OC^2 = \frac{841}{441}OC^2 = \frac{29^2}{21^2}OC^2 \Rightarrow BC = \frac{29}{21}OC$$

Podemos calcular entonces el cociente $\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{5}{3}\cdot OC}{\frac{29}{21}\cdot OC} = \frac{35}{29}$.

**XXV Concurso 2ª Fase. (Soluciones Nivel IV)**

**23.(B)** El triángulo marcado como $A$ es la mitad de un cuadrado con diagonal de 1 cm (lado del octógono), luego sus lados iguales miden $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm y su área $\frac{1}{4}$ cm$^2$. Este triángulo es igual a los cuatro triángulos marcados en la estrella, por lo que la suma de estas cuatro puntas de la estrella es 1 cm$^2$. En cuanto al resto de la estrella, es un cuadrado de lado coincidente con el del octógono, esto es 1 cm, luego su área es 1 cm$^2$. Asi pues, el área total de la estrella es de 2 cm$^2$.

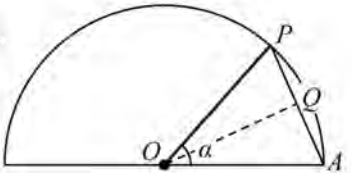



**24.(D)** En primer lugar, démonos cuenta de que tenemos que escoger dos cifras de entre las diez del sistema decimal; para esto tenemos $\binom{10}{2} = 45$ posibilidades.

Necesariamente una de las cifras será menor que la otra, así que veamos de cuántas maneras podemos seleccionar las posiciones en que usar la menor de las cifras escogidas (y en el resto completaremos con la mayor de ellas).Dado que cada cifra hemos de usarla al menos una vez, podremos usar la menor de ellas una, dos o tres veces, es decir, tendremos que seleccionar una, dos o tres posiciones en que usarla de entre las cuatro disponibles; para esto tenemos en conjunto $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3} = 4+6+4 = 14$ posibilidades.

Combinando ambos conteos, concluimos que hay 45·14 = 630 claves distintas con dos y solo dos cifras del sistema decimal.

**25.(E)** Sea $Q$ el punto medio de la cuerda $AP$. Dado que el triángulo $AOP$ es isósceles ($OA$ y $OP$ son radios del semicírculo), el triángulo $OQA$ es rectángulo con hipotenusa $OA$ y ángulo $A\hat{O}Q = \frac{\alpha}{2}$. Como el lado $AQ$ de longitud la mitad de la cuerda $AP$ es opuesto al ángulo $A\hat{O}Q$, se tiene que $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = senA\hat{O}Q = \frac{AQ}{AO} = \frac{AP}{2}$. En definitiva, $AP = 2sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.



# Participantes y relación de ganadores del XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

Como todos los años la primera fase tuvo lugar en los propios centros de los participantes. El número de participantes en esta fase se sigue conservando e incluso superando la cifra de 50000, pero debido a la pandemia que hemos tenido que superar, nos hemos visto obligados a reducir el número de participantes en la segunda fase que se realiza en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. De unos 3500 que la realizaban anteriormente este año han sido 2108.

En las siguientes tablas se refleja el número de participantes por cursos, niveles y género

| | NIVEL 1 | | | | NIVEL 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5º P | | 6º P | | 1º ESO | | 2º ESO | |
| | ♀ | ♂ | ♀ | ♂ | ♀ | ♂ | ♀ | ♂ |
| nº de participantes (inscritos) | 57 (57) | 26 (26) | 184 (187) | 93 (98) | 182 (192) | 86 (90) | 279 (299) | 157 (170) |
| Totales por curso | 83 (83) | | 277 (285) | | 268 (282) | | 436 (469) | |
| Totales por nivel | 803 (849) | | | | 704 (751) | | | |

| | NIVEL 3 | | | | NIVEL 4 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3º ESO | | 4º ESO | | 1º Bach. | | 2º Bach. | |
| | ♀ | ♂ | ♀ | ♂ | ♀ | ♂ | ♀ | ♂ |
| nº de participantes (inscritos) | 222 (239) | 111 (114) | 216 (234) | 111 (118) | 163 (183) | 70 (84) | 118 (137) | 33 (33) |
| Totales por curso | 333 (353) | | 327 (352) | | 233 (267) | | 151 (170) | |
| Totales por nivel | 660 (705) | | | | 384 (437) | | | |

Participantes y relación de ganadores

# Participantes y relación de ganadores del XXV Concurso de Primavera de Matemáticas

La relación con los tres participantes que mayor puntuación obtuvieron y el Centro Escolar en el que estudian es la siguiente.

**PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)**

**1º.** Iván Aguilera Rollón. 6Primaria, *Colegio Nazaret–Oporto*, Madrid
**1º.** Lucas Casero Ramírez. 6Primaria, *Colegio Valdeluz*, Madrid
**3º.** Paula Serrano Realpe. 5Primaria, *Colegio San Agustín*, Madrid

**SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)**

**1º.** Álvaro Collado Montoto. 2ESO, *Eurocolegio CASVI*, Villaviciosa de Odón
**1º.** Pablo Llamas Martínez. 2ESO, *Escuela Ideo*, Madrid
**3º.** Darío Fernández García. 1ESO, *Colegio Berriz–Veracruz*, Las Rozas

**TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)**

**1º.** Alejandro Gómez–Olano Espluga. 3ESO, *Colegio Santa Mª del Pilar*, Madrid
**2º.** Manuel Eymar Carballo. 4ESO, *IES Ramiro de Maeztu*, Madrid
**3º.** Diego López Aragón. 4ESO, *IES María Guerrero*, Collado Villalba

**CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)**

**1º.** Álvaro Gamboa Rodríguez. 1BACH, *IES Ciudad de los Poetas*, Madrid
**2º.** Daniel RIbalta Andrés. 1BACH, *IES Lope de Vega*, Madrid
**3º.** Hugo Labella López. 2BACH, *Colegio Mirabal*, Boadilla del Monte

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA POR EQUIPOS NIVEL I (1 ESO - 2 ESO)

**1. El tesoro de Sandokán**

Sandokán se ha hecho con un cofre de monedas y las ha repartido a partes iguales con sus amigos Yáñez, Tremal-Naik y Kammammuri. El número de monedas que había en el cofre tiene cinco cifras y, ¡oh, sorpresa!, el número de monedas que le ha correspondido a cada uno de los cuatro piratas tiene las mismas cinco cifras, pero en orden inverso. ¿Cuántas monedas había en el cofre?

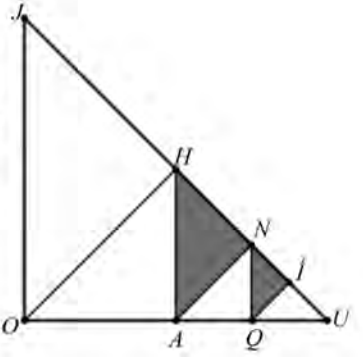
**2. Corredores**

Jessi y Julián corren en una pista circular. Ambos parten a la vez del mismo punto S y en el mismo sentido. Al salir chocan manos y cada vez que se cruzan en el camino hacen lo mismo, ¡PLAS!

Jessi da una vuelta completa en 8 minutos. A los 72 minutos es la sexta vez que chocan manos y como justo están en el punto S deciden parar. ¿Cuánto tiempo tarda Julián en dar una vuelta completa?

**3. Triángulos**

En el triángulo rectángulo isósceles $JOU$ trazamos los segmentos $OH$, $AN$ y $QÍ$ perpendiculares a la hipotenusa $JU$ y los segmentos $AH$ y $QN$ perpendiculares al lado $OU$, como ves en la figura. ¿Qué fracción del triángulo $JOU$ está coloreada?



XXI Concurso Intercentros

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA POR EQUIPOS NIVEL II (3 ESO - 4 ESO)

**1. Las sumas de Teo**

Teo va creciendo pero aún es pequeño y solo sabe hacer sumas de once números. Ayer se encontró con una docena de números escritos en su pizarra, así que tapó el primero de ellos y sumó los once restantes; luego tapó el segundo y sumó los once restantes; y así continuó hasta que tapó el último y sumó los once restantes.

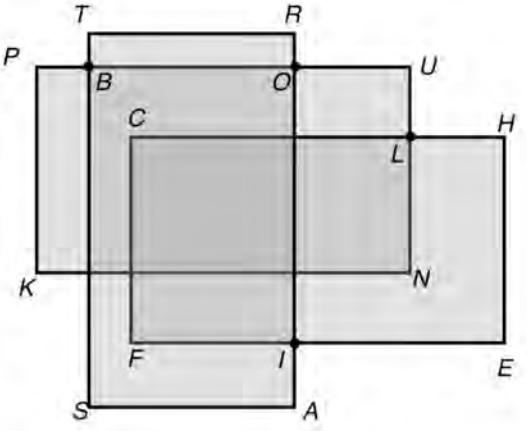
De esta manera obtuvo estas sumas:

166 – 164 – 163 – 159 – 157 – 155 – 152 – 151 – 149 – 148 – 144 – 140

¿Cuáles eran los doce números que estaban escritos en la pizarra de Teo?

**2. Tres alfombras**

Hemos tirado al suelo tres grandes alfombras iguales, *TRAS*, *PUNK*, *CHEF*, rectangulares de medidas 11 m × 20 m. Además hemos señalado cuatro puntos, *BOLI*, para darte las siguientes medidas: PB = 1 m, RO = 2 m, UL = 4 m, LH = 3 m, IA = 3 m. Si todos los ángulos que ves son rectos, ¿qué superficie de suelo están cubriendo las alfombras?




**3. Piedras**

En la playa me entretuve de esta manera.

Cogí muchísimas piedras blancas y negras, 300 de cada color.

Luego me propuse formar una larga fila formada por 152 de dichas piedras con una única prohibición: no puede haber tres piedras seguidas del mismo color.

¿Cuál es el máximo número de piedras negras que puede haber en esa fila?

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA POR EQUIPOS NIVEL III (BACH)

**1. Denominador 2023**

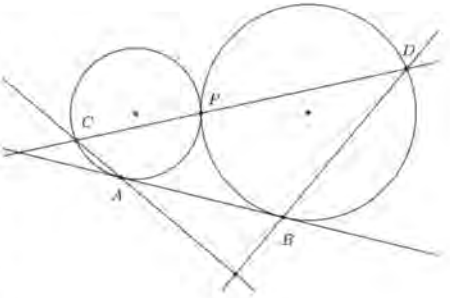
Considera la lista de las 2022 fracciones propias con denominador 2023:

$$\frac{1}{2023} \quad \frac{2}{2023} \quad \frac{3}{2023} \quad \cdots \quad \frac{2022}{2023}$$

Deduce razonadamente el número de fracciones de la lista que no son irreducibles.

**2. Dos circunferencias**

Las circunferencias $c_1$ y $c_2$ son tangentes exteriores siendo $P$ el punto de tangencia. La tangente común a $c_1$ y $c_2$ toca a $c_1$ en el punto $A$ y a $c_2$ en el punto $B$. Sea $C$ un punto cualquiera de la circunferencia $c_1$ distinto de $A$ y $D$ un punto cualquiera de la circunferencia $c_2$ distinto de $B$, de modo que $C$ y $D$ están alineados con $P$. Calcula razonadamente el ángulo que forman las rectas $AC$ y $BD$.




**3. El árbol genealógico**

Llamamos *imagen* de un número de cuatro cifras al número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras. Por ejemplo, la *imagen* de 2023 es 3202. Llamamos *familiares* a los números que sumados con su *imagen* dan el mismo resultado. Por ejemplo, 5304 es *familiar* de 2127, porque $5304 + 4035 = 2127 + 7212$. Si un *familiar* es menor que otro decimos que es un *antepasado*, y si es mayor, decimos que es un *descendiente*.

¿Cuántos *antepasados* de cuatro cifras tiene 2023? ¿Y cuántos *descendientes*?

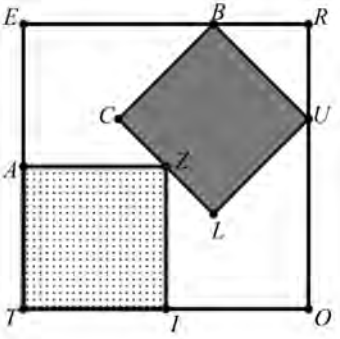
XXI Concurso Intercentros

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA INDIVIDUAL NIVEL I (1 ESO - 2 ESO)

**1. Cuadrados**

En el dibujo ves tres cuadrados: *RETO*, *TIZA* y *CLUB*. Los lados de *CLUB* son paralelos a la diagonal de *RETO* y *TI* = *IO*. Si *TO* = 6 cm, ¿cuál es el área de *CLUB*?




**2. La media**

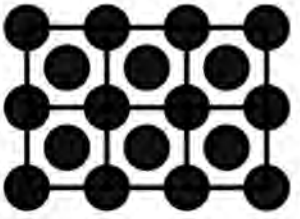
El quíntuple de la media de dos números es igual al cuádruple del mayor.

La diferencia entre los dos números es treinta y cuatro unidades menor que la media.

¿Cuáles son esos números?

**3. El tablero**

En un tablero cuadriculado de $m$ filas × $n$ columnas se coloca una ficha en el centro de cada casilla y una ficha en cada vértice de la cuadrícula hasta que no quede lugar para más fichas. En el dibujo ves un tablero de 2 × 3 con sus 18 fichas.



Si para un tablero he necesitado 203 fichas, ¿qué tamaño tenía? Da todas las posibilidades.

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA INDIVIDUAL NIVEL II (3 ESO - 4 ESO)

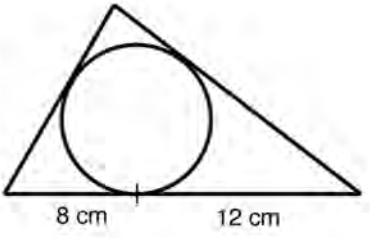
**1. El camino florido**

El camino de mi jardín es una recta que mide 24 m. He decidido plantar flores en su recorrido, pero no al principio ni al final. Planto margaritas cada $\frac{4}{21}$ m, planto claveles cada $\frac{12}{35}$ m, y planto rosas cada $\frac{4}{7}$ m.

¿Cuántas veces, a lo largo del camino, coincidirán los tres tipos de flores en el mismo punto?

**2. Triángulo rectángulo**

Hemos dibujado la circunferencia inscrita a este triángulo rectángulo. El punto de tangencia divide a la hipotenusa en dos segmentos de 8 cm y 12 cm. ¿Qué área tiene el triángulo rectángulo?




**3. Los tres amigos**

Don Retorcido coge dos números del conjunto {1, 2, 3, . . ., 36} y deja todos los demás a Comenúmeros. Llega la niña Centésima y dice: "anda, el producto de los números de don Retorcido es igual que la suma de los números de Comenúmeros".

¿Cuáles son los dos números que eligió don Retorcido?

XXI Concurso Intercentros

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA INDIVIDUAL NIVEL III (BACH)

**1. Polígonos regulares**

Un polígono regular de lado 1 cm está rodeado de cuadrados y pentágonos regulares. Una parte del dibujo se muestra en la figura. Calcula:

**(a)** El perímetro de polígono exterior una vez completada la figura.

**(b)** El radio del polígono interior en función de $\phi$.

[Dato: $\cos(36^\circ) = \frac{\phi}{2}$]

**2. El secretario despistado**

La directora de publicidad de una empresa encarga a su secretario enviar cartas postales a cinco empresas distintas. Después de preparar los sobres y redactar las cinco cartas personalizadas, introduce las cartas en los sobres y… ¡no acierta ni una!

Si lo hubiera hecho al azar, ¿qué probabilidad habría tenido de hacerlo así?

**3. La gran suma**

¿Cuál es el mínimo número de enteros consecutivos empezando por 1 que es necesario sumar para obtener una suma superior a 2023?

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA DE RELEVOS NIVEL I (1 ESO - 2 ESO)

## EMPIEZA CON EL PROBLEMA I A

**I A.**

Elena quiere enseñarte a jugar al miniajedrez (un tablero con cinco cuadrados por lado). Para que te familiarices con el tablero se inventa un juego. ¿Cuántos cuadrados, de todos los tamaños, hay en el tablero?

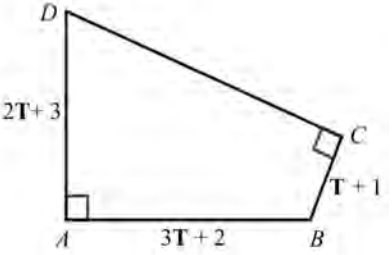
**[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 3ESO – 4ESO]**

**I B.** [Sea **T** la respuesta del problema **III B**]

El cuadrilátero $ABCD$ de la figura tiene ángulos rectos en $A$ y $C$ y sus lados, en cm, miden:

$AB = 3\mathbf{T}+2$ $\quad BC = \mathbf{T}+1$ $\quad AD = 2\mathbf{T}+3$

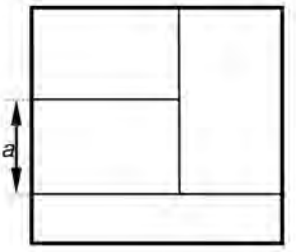
¿Cuál es, en cm, el perímetro del cuadrilátero?




**[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]**

**I C.** [Sea **T** la respuesta del problema **III C**]

He dividido un cuadrado de $24\cdot\mathbf{T}$ cm de lado en cuatro rectángulos, todos ellos con la misma área. ¿Qué longitud tiene el segmento $a$?




**[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 3ESO – 4ESO]**

XXI Concurso Intercentros

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA DE RELEVOS NIVEL II (3 ESO - 4 ESO)

## EMPIEZA CON EL PROBLEMA II B

**II A.** [Sea **T** la respuesta del problema **I A**]

Para mi fiesta de cumpleaños he comprado **T** cajas y las he numerado del 1 al **T**. En cada una de ellas quiero meter tantos caramelos como indica el número de la caja. He empezado a rellenar las cajas impares y justo cuando las he completado se me acabaron los caramelos. ¿Cuántos caramelos tengo que comprar para rellenar todas las cajas que me faltan?

**[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de Bachillerato]**

**II B.**

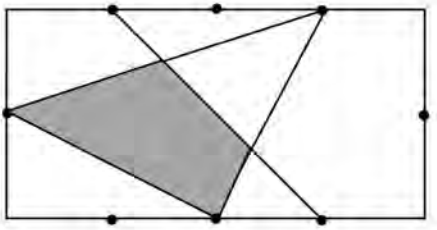
Isa está entrenando para participar en la competición de natación en aguas abiertas. Para ello, todos los días en las nueve últimas semanas nadó la misma cantidad de largos, unos días en una piscina cubierta de 25 m de longitud y otros en una piscina al aire libre de 20 m de longitud.

Haciendo cuentas de todo lo que había nadado observó que había nadado la misma distancia en las dos piscinas. ¿Cuántos días nadó en la piscina al aire libre?

**[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de Bachillerato]**

**II C. [Sea T la respuesta del problema I C]**

En los lados de un rectángulo de base $b = \dfrac{\mathbf{T}+3}{2}$ cm y altura $a = \dfrac{b}{2}$ cm hemos señalado ocho puntos que dividen a los lados largos en cuatro partes iguales y a los lados pequeños en dos partes iguales.



¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreada?

**[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]**

# XXI Concurso Intercentros de Matemáticas *"Joaquín Hernández"*

## PRUEBA DE RELEVOS NIVEL III (BACH)

## EMPIEZA CON EL PROBLEMA III C

**IIIA.** [Sea **T** la respuesta del problema **II A**]

Si $\boxed{E = a^2 + 4b^2 + 4ab + 14a + 28b + \dfrac{\mathbf{T}+12}{12}}$, con $a$ y $b$ números reales cualesquiera, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar la expresión $E$?

**[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]**

**III B**. [Sea **T** la respuesta del problema **II B**]

El factorial de un número entero positivo $n$ se define como

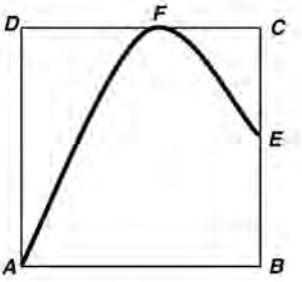
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

¿Para cuántos números enteros positivos $k$ menores que **T** es imposible encontrar un valor de $n$ para el que $n!$ termine en exactamente $k$ ceros?

**[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 1ESO – 2ESO]**

**III C.**

Un trozo de parábola está en el interior de un cuadrado de lado 8. Calcula la longitud del segmento DF sabiendo que BE = 5,12.




**[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 1ESO – 2ESO]**

## LIX Olimpiada Matemática

**REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA**

**LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA**
**Comunidad de Madrid**
**FASE CERO [sábado 19 de noviembre 2022]**

- En la hoja de respuestas, marca la letra de la opción que creas correcta.
- Cada respuesta **correcta te aportará 5 puntos**, cada respuesta **en blanco 1 punto** y cada respuesta **errónea 0 puntos**.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.

**TIEMPO**: 2 horas y 30 minutos

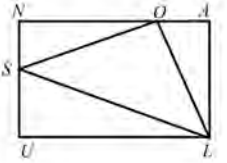
**1** Isabel tardaría 8 horas en sembrar un campo y Sofía tardaría 10 horas en sembrar ese mismo campo. Deciden unirse y comienzan juntas a sembrar el campo pero al cabo de 2 horas a Isabel le da lumbago y tiene que retirarse. ¿Cuántas horas deberá trabajar sola Sofía para terminar de sembrar el campo?

**A)** 4,5 **B)** 5 **C)** 5,5 **D)** 6 **E)** 6,5

**2** ¿Cuántos pares ordenados de números enteros $(x, y)$ satisfacen $x^2 \leq y \leq x + 6$?

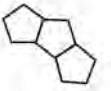
**A)** 14 **B)** 18 **C)** 24 **D)** 26 **E)** 28

**3** El área del rectángulo $LUNA$ es 1, el área de $NOS$ es $\frac{1}{8}$ y el área de $LUS$ es $\frac{1}{3}$. ¿Qué área tiene el triángulo $SOL$?




**A)** $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{7}{18}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{7}{24}$ **E)** $\frac{11}{24}$

**4** Fernando va uniendo pentágonos regulares como se ve al margen. Ya ha colocado tres y se pregunta: ¿cuántos pentágonos necesito para cerrar mi corona y así mi último pentágono quede unido con el primero?

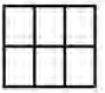


**A)** 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 14

**5** ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar la función $f(x) = |x-5| - (x^2 - x - 8)$?

**A)** 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 13 **E)** 14

**6** Tengo una ficha roja, dos verdes y tres amarillas y las quiero colocar en las seis casillas del tablero. ¿De cuántas maneras puedo hacerlo si las fichas verdes no pueden estar en casillas que compartan lado?



**A)** 72 **B)** 128 **C)** 64 **D)** 48 **E)** 32

**7** Sergio tiene un cubo macizo de madera de 20 cm de arista. Cuando Sol lo ve, con una sierra, le quita un cubito de 1 cm de arista de uno de los vértices (ver figura sin escala) y, como le gusta lo que obtiene, quita otros cubitos de 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 cm de arista de cada uno de los restantes vértices del cubo de Sergio. ¿Cuántos $dm^2$ de pintura necesitarán los amigos para pintar la figura resultante?

**A)** 24 **B)** 26 **C)** 28 **D)** 30 **E)** 34

**8** Si $a$ y b son números enteros, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de $a$ que satisfacen la igualdad $\frac{3}{a-1}=\frac{b+3}{5}$?

**A)** 0 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 20 **E)** 28

**9** Don Retorcido está aburrido al pie de una escalera de 32 escalones. De repente divisa a su amigo Comenúmeros en el escalón número 22 y decide ir a su encuentro. Para hacerlo más divertido solo se permite dar saltos hacia arriba de 3 escalones y saltos hacia abajo de 4 escalones. ¿De cuántas maneras puede llegar don Retorcido al escalón de Comenúmeros con el menor número de saltos?

**A)** 66 **B)** 56 **C)** 55 **D)** 45 **E)** 44

**10** El magnífico ciclista Van Popel participaba en una contrarreloj individual. Hizo la primera mitad del recorrido a una velocidad media de 30 km/h. Su entrenador le dijo que si quería ganar debería conseguir que su velocidad media en todo el recorrido fuera de 60 km/h. ¿Cuál debe ser su velocidad media, en km/h, en la segunda mitad para conseguir su objetivo?

**A)** 30 **B)** 60 **C)** 90 **D)** 120 **E)** Es imposible

**11** Si expresamos el producto $\left(1-\frac{3}{10}\right)\left(1-\frac{3}{11}\right)\left(1-\frac{3}{12}\right)\cdots\left(1-\frac{3}{100}\right)$ como fracción irreducible $\frac{m}{n}$, ¿cuánto vale la suma $m+n$?

**A)** 1029 **B)** 2022 **C)** 1679 **D)** 197 **E)** 1926

**12** El octógono regular $ABCDEFGH$ tiene área 1440. ¿Cuál es el área del trapecio $ABCD$?

**A)** 288 **B)** 360 **C)** 384 **D)** 400 **E)** 480

## LIX Olimpiada Matemática

**13** Las gráficas de las funciones $y = x^3 + 3$ e $y = 5x + 1$ se cortan en más de un punto. ¿Cuánto suman las abscisas de esos puntos de corte?

**A)** 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{2}$

**14** Del trapecio isósceles $ABCD$ sabemos las longitudes de sus lados: $AB = 6$, $BC = 5$, $CD = 8$, $DA = 5$. ¿Cuánto vale el área del triángulo $BCD$?

**A)** 2 **B)** $12\sqrt{2}$ **C)** $4\sqrt{21}$ **D)** $7\sqrt{6}$ **E)** $8\sqrt{6}$

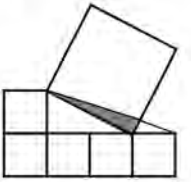
**15** Dado un pentágono regular de lado 1 cm, el área, en cm$^2$, del conjunto de puntos del plano exteriores al pentágono y que se encuentran a menos de 1 cm de distancia de ese pentágono es:

**A)** $5 + \pi$ **B)** $\frac{3}{2} + 2\pi$ **C)** 7 **D)** 8 **E)** $3\pi$

**16** Los números enteros $a$, $b$, $c$ cumplen que $a^2bc = 1$. ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es necesariamente cierta?

**A)** $a = b = 1$ **B)** $ac = -1$ **C)** $ab^2c = 1$ **D)** $b = c$ **E)** $a \neq 1$

**17** En el dibujo ves seis cuadrados, cinco de ellos de área 14. ¿Qué área tiene el triángulo sombreado?

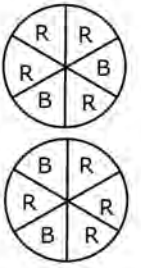


**A)** 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 9

**18** El ángulo $B\hat{A}C$ del triángulo $ABC$ mide 68º. Los puntos $D$ y $E$ están en los lados $AB$ y $AC$, respectivamente, y son tales que $BD = DE = EC$. Si los segmentos $BE$ y $CD$ se cortan en el punto $F$, ¿cuánto mide el ángulo $B\hat{F}C$?

**A)** 120º **B)** 121º **C)** 122º **D)** 123º **E)** 124º

**19** Un disco está dividido en seis sectores idénticos. Coloreamos esos sectores de rojo o de blanco. ¿Cuántas configuraciones distintas podemos obtener? Ten en cuenta que las dos configuraciones que te mostramos son la misma, simplemente hemos girado el disco.




**A)** 12 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 18 **E)** 20

**20** ¿Cuántos divisores tiene 12!? [Recuerda: 12! = 12·11 …·3·2·1]

**A)** 24 **B)** 420 **C)** 99 **D)** 792 **E)** 100

**21** Los lados $AB$, $BC$ y $CA$ de cierto triángulo $ABC$ miden respectivamente 27, 25 y 26. Si el incentro de ese triángulo es el punto $I$, la medida del segmento $BI$ es…

**A)** 15 **B)** $9\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{26}$ **D)** $\frac{2}{3}\sqrt{546}$ **E)** 26

**22** El diagrama muestra el desarrollo de un cubo en cuyas caras están escritos los números enteros 2, $x$, $y$, 2022, $z$, w. Cada uno de los números $x$, $y$, $z$, $w$ es la media aritmética de los números que están en las cuatro caras adyacentes a él. ¿Cuánto vale $x$?

| | | $w$ | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $y$ | 2022 | $z$ |
| 2 | | | |

**A)** 506 **B)** 1214 **C)** 916 **D)** 1012 **E)** 810

**23** ¿Cuál es la suma de las soluciones de la ecuación $\left(2\cdot 4^{x^2-3x}\right)^2=\frac{2^x}{2}$?

**A)** 3 **B)** $\frac{13}{4}$ **C)** $\frac{7}{4}$ **D)** $\frac{3}{2}$ **E)** 0

**24** Recortando un cartón rectangular obtenemos nueve cuadrados: uno de ellos tiene área 64 $cm^2$, dos tienen área 16 $cm^2$ y seis de área 4$cm^2$. El perímetro del rectángulo inicial, en cm, es…

**A)** 44 **B)** 46 **C)** 52 **D)** 62 **E)** 68

**25** ¿Cuántos pares ordenados $(x, y)$ de enteros positivos verifican que $\frac{1}{x}+\frac{540}{xy}=2$?

**A)** 4 **B)** 8 **C)** 16 **D)** 24 **E)** 48

## LIX Olimpiada Matemática

Facultad de Ciencias MATEMÁTICAS

LIX Olimpiada Matemática Española

Fase Local Comunidad de Madrid

19 de diciembre de 2022

### PROBLEMA 1

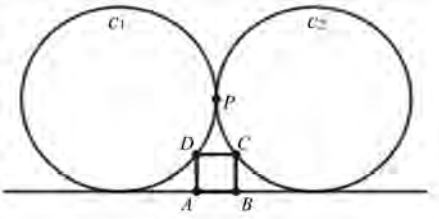
¿Cuántos números de tres cifras distintas y no nulas son múltiplos de 3?

### PROBLEMA 2

¿Cuál es el mayor entero $n$ menor que 1000, cuyo cuadrado da resto $n$ al dividirlo entre 1000?

### PROBLEMA 3

Consideramos dos circunferencias $c_1$ y $c_2$ de radio 1 y tangentes entre sí exteriormente en el punto $P$. Como se muestra en la figura, trazamos una de las tangentes comunes a $c_1$ y $c_2$ que no pasa $P$, e inscribimos un cuadrado $ABCD$ en el espacio resultante de forma que $A$ y $B$ estén sobre la tangente, $C$ sobre $c_2$ y $D$ sobre $c_1$. Halla la longitud del lado del cuadrado $ABCD$.




### PROBLEMA 4

Tenemos tres cajas. Las cajas $A$ y $B$ contienen, cada una, una bola blanca y una bola negra. Las cuatro bolas son idénticas salvo por el color. La caja $C$ está vacía. Extraemos al azar una bola de la caja $A$ y, sin mirar, la metemos en la caja $C$. Igualmente, extraemos una bola de $B$ y la metemos en $C$. Ahora extraemos una bola de $C$ y resulta ser blanca. Metemos de nuevo la bola en $C$ y sacamos otra vez una bola, que vuelve a ser blanca. Hacemos otra vez lo mismo y resulta ser otra vez blanca. Calcula la probabilidad de que en $C$ haya una bola negra.

### PROBLEMA 5

¿Cuál es el resto de dividir entre 400 la suma de las 101 primeras potencias de 7, es decir, $7^0 + 7^1 + 7^2 + \ldots + 7^{99} + 7^{100} + 7^{101}$?

### PROBLEMA 6

Sea $P(x)$ un polinomio de quinto grado con coeficientes enteros. Sabemos que:

i) $P(x)$ tiene al menos una raíz entera.

ii) $P(2) = 13$.

iii) $P(10) = 5$.

Encuentra una de las raíces enteras de $P(x)$.

LIX Olimpiada Matemática

**PROBLEMA 7**

Sea $ABCD$ un cuadrilátero con $AB = 48$, $CD = 60$, $\angle BAD = \angle ADC = 60°$ y $\angle DCB = 90°$. Determina la longitud del lado $DA$.

**PROBLEMA 8**

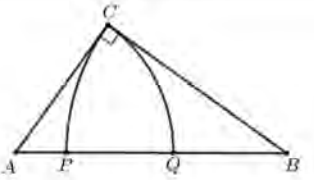
La función $f(x)$ está definida para todos los valores de $x$ en el intervalo $[0, 1]$ y tiene las siguientes propiedades:

- $f(1 - x) = 1 - f(x)$ para todo $x$ en el intervalo $[0, 1]$
- $f\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{2}f(x)$ para todo $x$ en el intervalo $[0, 1]$
- $f(a) \leq f(b)$ para todo $a$ y $b$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$

¿Cuál es el valor de $f\left(\frac{6}{7}\right)$?

**PROBLEMA 9**

El diagrama muestra un triángulo rectángulo $ABC$ con $\angle BCA = 90°$ y en él dos arcos de circunferencia $CQ$ y $CP$, cuyos centros son $A$ y $B$, respectivamente.
Demuestra que $\frac{1}{2}PQ^2 = AP \cdot BQ$.




**PROBLEMA 10**

Pablo tiene fichas de colores: seis rojas, tres azules y tres verdes.

Quiere colocarlas en fila de forma que no haya nunca dos del mismo color juntas. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

# XXVIII OLIMPIADA de MAYO

## Primer Nivel Mayo de 2022

Olimpiada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada uno de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

### PROBLEMA 1

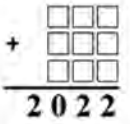
Esta mañana a Emi se le cayó su reloj y a partir de ese momento comenzó a avanzar más lentamente. Cuando según el reloj pasaron 2 minutos, en realidad ya pasaron 3.
Ahora son las 18:25 y el reloj dice que son las 15:30.
¿A qué hora se le cayó el reloj a Emi?

### PROBLEMA 2

Beto eligió seis de los nueve dígitos del 1 al 9 y escribió la lista, ordenada de menor a mayor, de todos los números de tres dígitos distintos que se pueden formar usando los dígitos que eligió.
En la lista de Beto, el número 317 aparece en la posición 22.
¿Qué número aparece en la posición 60 de la lista de Beto? Dar todas las posibilidades.

### PROBLEMA 3

Elegir nueve de los dígitos del 0 al 9 y colocarlos en los casilleros de la figura de manera que no haya dígitos repetidos y la suma indicada sea correcta.




¿Qué dígito quedó sin utilizar? ¿Es posible completar los casilleros para que el dígito que quede sin utilizar sea otro?

### PROBLEMA 4

Ana y Bruno tienen un tablero cuadriculado de $8 \times 8$. Ana pinta cada una de las 64 casillas con algún color. Después Bruno elige dos filas y dos columnas del tablero y mira las 4 casillas donde se cruzan. El objetivo de Bruno es que estas 4 casillas sean del mismo color.
¿Cuántos colores como mínimo debe usar Ana para que Bruno no pueda cumplir su objetivo?
Mostrar cómo puede pintar el tablero con esa cantidad de colores y explicar por qué si usa menos colores entonces Bruno siempre puede cumplir su objetivo.

### PROBLEMA 5

Vero tenía un triángulo isósceles de papel. Usando una tijera, lo dividió en tres triángulos más pequeños y los pintó de azul, rojo y verde. Una vez hecho esto, observó que:

- con el triángulo azul y el triángulo rojo se puede formar un triángulo isósceles;
- con el triángulo azul y el triángulo verde se puede formar un triángulo isósceles;
- con el triángulo rojo y el triángulo verde se puede formar un triángulo isósceles.

Mostrar cómo puede haber sido el triángulo de Vero y cómo puede haber hecho los cortes para que esta situación sea posible.

# XXVIII OLIMPIADA de MAYO

## SEGUNDO Nivel Mayo de 2022

Olimpiada de Mayo
Competencia Juvenil Iberoamericana de Matemática

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 30 de mayo.

### PROBLEMA 1

En un tablero de $7 \times 7$ algunas casillas están pintadas de rojo. Sea $a$ la cantidad de filas que tienen un número impar de casillas rojas y sea $b$ la cantidad de columnas que tienen un número impar de casillas rojas. Determinar todos los posibles valores de $a + b$.
Para cada valor hallado, dar un ejemplo de cómo puede estar pintado el tablero.

### PROBLEMA 2

Hay nueve tarjetas que tienen escritos los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, un dígito en cada tarjeta. Usando todas las tarjetas se forman algunos números (por ejemplo, se podrían formar los números 8, 213, 94, 65 y 7).

a) Si todos los números formados son primos, determinar el mínimo valor posible de su suma.
b) Si todos los números formados son compuestos, determinar el mínimo valor posible de su suma.

*Nota:* Un número $p$ es primo si sus únicos divisores son 1 y $p$. Un número es compuesto si tiene más de dos divisores. El 1 no es primo ni compuesto.

### PROBLEMA 3

Sean $ABCD$ un cuadrado, $E$ un punto del lado $CD$ y $F$ un punto en el interior del cuadrado tal que el triángulo $BFE$ es isósceles y $B\widehat{F}E = 90°$. Si $DF = DE$, calcular la medida del ángulo $F\widehat{D}E$.

### PROBLEMA 4

a) En cada vértice de un triángulo se escribe un entero positivo. Luego, en cada lado del triángulo se escribe el máximo común divisor de sus extremos. ¿Es posible que los números escritos en los lados sean tres enteros consecutivos, en algún orden?
b) En cada vértice de un tetraedro se escribe un entero positivo. Luego, en cada arista del tetraedro se escribe el máximo común divisor de sus extremos. ¿Es posible que los números escritos en las aristas sean seis enteros consecutivos, en algún orden?

### PROBLEMA 5

En el pizarrón están marcados los vértices de un polígono regular de $N$ lados. Ana y Beto juegan por turnos, empieza Ana. Cada jugador en su turno debe hacer una de las siguientes acciones:

- unir dos vértices con un segmento, sin cortar otro segmento ya marcado; o
- borrar un vértice que no pertenezca a ningún segmento marcado.

El jugador que en su turno no pueda realizar ninguna acción pierde el juego.
Determinar cuál de los dos jugadores puede asegurarse la victoria:

a) si $N = 28$;
b) si $N = 29$.

*Nota*: Dos segmentos marcados pueden compartir un vértice.

# XXVIII OLIMPIADA DE MAYO 2022
# RESULTADOS DE ESPAÑA

## NIVEL 1

| | NOMBRE Y APELLIDOS | PREMIO |
|---|---|---|
| 1 | Iván Aguilera Rollón | ORO |
| 2 | Lucas Álvarez de Otto | PLATA |
| 3 | Fernando Sesma Otazu | PLATA |
| 4 | Álvaro Collado Montoto | BRONCE |
| 5 | Paula Serrano Realpe | BRONCE |
| 6 | Darío Fernández García | BRONCE |
| 7 | Sabela Herranz Serrano | BRONCE |
| 8 | Lucas Casero Ramírez | MENCIÓN |
| 9 | Erika Romero Guerrero | MENCIÓN |
| 10 | Ezequiel Prado Cachi | MENCIÓN |

## NIVEL 2

| | NOMBRE Y APELLIDOS | PREMIO |
|---|---|---|
| 1 | Artur Ostrovskyi | ORO |
| 2 | Carlos Villagordo Espinosa | PLATA |
| 3 | Alejandro Gomez-Olano Espluga | PLATA |
| 4 | Rubén Besada Rodríguez | BRONCE |
| 5 | Enrique Ortiz Gilarranz | BRONCE |
| 6 | Ivan Chaya de los Rios | BRONCE |
| 7 | Oscar Sills | BRONCE |
| 8 | Manuel Rivas Gómez | MENCIÓN |
| 9 | Fernando Coloma Regadera | MENCIÓN |
| 10 | Izan Rodríguez Mesa | MENCIÓN |